Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

Блинова И.В., Попов И.Ю.

Простейшие уравнения математической физики

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2009

Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики / Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 60 с.

В пособии изложены основные положения темы «Уравнения математической физики», входящие в программу общего курса высшей математики. Предназначено студентам всех специальностей и преподавателям.

Рекомендовано к печати Советом естественнонаучного факультета 23.12.2008 (протокол N5)

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

Глава 1. Уравнение колебаний струны

1.1 Уравнение малых поперечных колебаний

Уравнение колебаний струны относится к уравнениям гиперболического типа. Каждую точку струны можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Для определения положения струны в момент времени t достаточно знать компоненты вектора смещения $\{U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t)\}$ точки x в момент времени t.

Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x,U) и что вектор смещения $\bar{U}$ перпендикулярен в любой момент времени к оси x; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $U(x,t)$.

Функция $U(x,t)$ характеризует вертикальное перемещение струны.

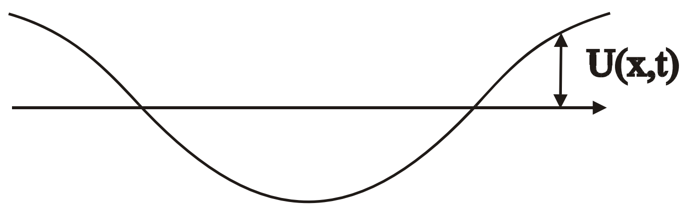


Рис. 1

$\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ -уравнение колебаний струны

a=*const* - зависит от упругости, жесткости, массы и т. д.

Существуют следующие методы решения уравнения колебаний струны:

1) **Метод Даламбера** (метод бегущих волн, метод характеристик).
2) **Метод Фурье** (метод стоячих волн, метод разделения переменных).

1.2. Метод Даламбера (метод бегущих волн, метод характеристик)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad (1.1)$$

Рассмотрим неограниченную струну и зададим начальные условия:

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t'(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (1.2)$$

где $\varphi(x)$ - функция, задающая форму струны в начальный момент времени,

$\psi(x)$ - скорость точки струны в начальный момент.

Уравнение решается в явном виде с помощью замены переменных: $(x,t) \to (\xi, \eta)$, где

$$\begin{cases} \xi = x + a \cdot t \\ \eta = x - a \cdot t \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot a + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot (-a)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(a \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left((-a) \cdot \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cdot a \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \cdot \partial \xi} \cdot a \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \cdot \partial \eta} \cdot a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cdot a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta \cdot \partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) \cdot a^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$$

$$a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right)$$

$$4 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0$$

$\dfrac{\partial U}{\partial \eta} = \tilde{f}(\eta)$, где $\tilde{f}(\eta)$-некоторая функция только переменной η, т.е. $\tilde{f}$ не зависит от ξ.

Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ получим:

$$U(\xi, \eta) = \int \tilde{f}(\eta) d\eta = f(\eta) + g(\xi)$$

Вернемся к старой переменной:

$$U(x,t)=f(x-a\cdot t)+g(x+a\cdot t) \qquad (1.3)$$

$f(x-a\cdot t)$ - описывает волну, бегущую направо.

Например, функция f имеет вид x-at=0, следовательно, x=at, т.е. «горб» движется направо со скоростью a.

$f(x+a\cdot t)$ - описывает волну, бегущую налево.

x+at=0, следовательно, x=-at, т.е. «горб» движется налево со скоростью a.

Функция (1.3) является общим интегралом уравнения (1.1). Теперь необходимо удовлетворить начальным условиям (1.2):

$$\begin{cases} U(x,0)=f(x)+g(x)=\varphi(x) \\ U_t'(x,0)=f'(x)\cdot(-a)+g'(x)\cdot a=\psi(x) \end{cases} \qquad (1.4), (1.5)$$

Интегрируя (1.5), получим:

$$-f(x)+g(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(s)ds+C \text{, где } C=const \qquad (1.6)$$

Из равенств (1.4) и (1.6) находим

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\cdot\varphi(x)-\frac{1}{2\cdot a}\int_0^x \psi(s)ds-\frac{C}{2\cdot a} \\ g(x)=\frac{1}{2}\cdot\varphi(x)+\frac{1}{2\cdot a}\int_0^x \psi(s)ds+\frac{C}{2\cdot a} \end{cases} \qquad (1.7), (1.8)$$

Выражения (1.7), (1.8) подставляем в (1.3).

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\int_0^{x+at}\psi(s)ds-\int_0^{x-at}\psi(s)ds\right).$$

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds \text{ - формула Даламбера.} \qquad (1.9)$$

Для выявления характера решения (1.9) удобно воспользоваться плоскостью состояний (x,t) или «фазовой плоскостью». Прямые x-at=$const$ и x+at=$const$ называются **характеристиками** уравнения (1.1). Функция U=f(x-at) вдоль характеристики x-at=$const$ сохраняет постоянное значение, функция U=f(x+at) постоянна вдоль характеристики x+at=$const$.

Рассмотрим некоторую фиксированную точку (x_0,t_0) и проведем из нее обе характеристики $x-a\cdot t=x_0-a\cdot t_0$ и $x+a\cdot t=x_0+a\cdot t_0$, которые пересекают ось X в точках $x_1=x_0-a\cdot t_0$, t=0 и $x_2=x_0+a\cdot t_0$, t=0 (рис. 2).

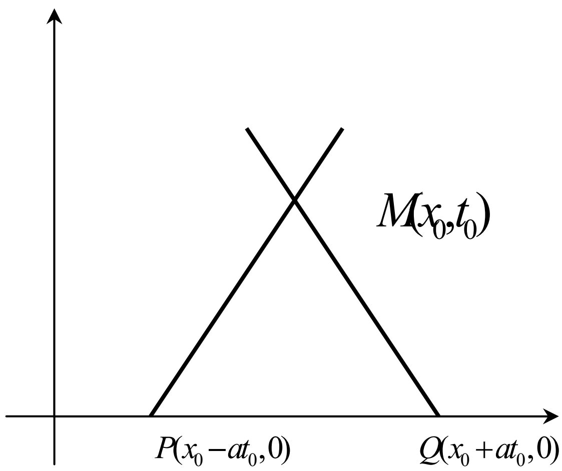


Рис. 2

ΔMPQ называется характеристическим треугольником точки (x_0,t_0).

Из формулы (1.9) видно, что отклонение $U(x_0,t_0)$ точки струны в момент времени t_0 зависит, только от значений начального отклонения в вершинах, P и Q треугольника ΔMPQ, и от значений начальной скорости на стороне PQ.

$$U(M)=\frac{\varphi(P)+\varphi(Q)}{2}+\frac{1}{2\cdot a}\int\limits_{PQ}\psi(s)ds \tag{1.10}$$

Начальные данные, заданные вне PQ, не оказывают влияния на значения $U(x,t)$ в точке $\mathrm{M}(x_0,t_0)$. Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на отрезке P_1Q_1, то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок P_1Q_1.

Решение (1.9) можно представить в виде суммы

$$U=U_1(x,t)+U_2(x,t), \tag{1.11}$$

где $U_1(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))$

$$U_2(x,t)=\psi(x+at)-\psi(x-at)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds \tag{1.12}$$

Наглядное представление о характере процесса распространения можно получить с помощью фазовой плоскости (x,t). Проведем характеристики через точки $(a,0)$ и $(b,0)$ они разбивают плоскость $(-\infty<x<\infty,\ t\geq 0)$ на шесть областей (рис.3). Отклонение в любой точке (x,t) дается формулой (1.11).

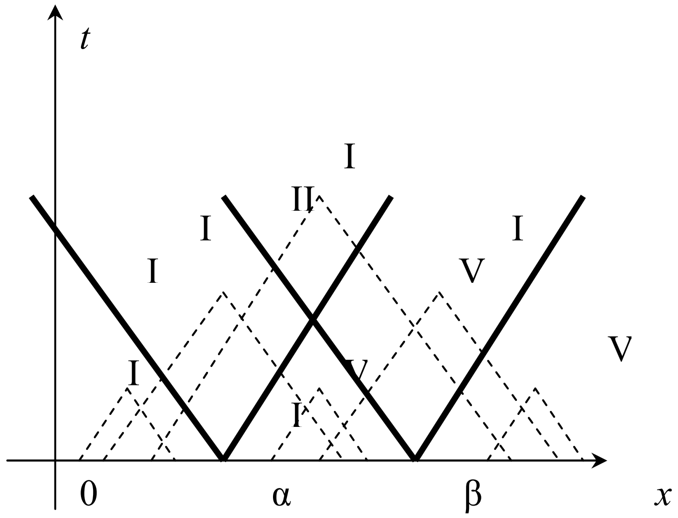


Рис. 3

Рассмотрим два случая:
1). Пусть $\psi(x)=0$, $\varphi(x)\neq 0$ на отрезке $[a,b]$.

Если начальная скорость равна нулю, то отклонение $U=U_1(x,t)$ есть сумма левой и правой бегущих волн, причем начальная форма каждой волны определяется функцией $0{,}5\varphi(x)$, равной половине начального отклонения.

I,V - колебаний нет;

II – $U(x,t)=\dfrac{\varphi(x+at)}{2}$ -волна движется налево;

IV – $U(x,t)=\dfrac{\varphi(x-at)}{2}$ -волна движется направо;

VI – две волны;

III – колебаний нет, отклонение равно нулю.

2). Пусть $\varphi(x)=0$, $\psi(x)\neq 0$ на отрезке $[a,b]$.

Если начальное отклонение равно нулю, то $U=U_2(x,t)$ представляет возмущение струны, создаваемое начальной скоростью.

I,V – нет колебаний и отклонений;

II $U(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_{\alpha}^{x+at}\psi(s)ds$ - волна «бежит» налево с изменением формы;

IV $U(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{\beta}\psi(s)ds$ волна «бежит» направо с изменением формы;

VI – две волны;

III - $U(x,t) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(s)ds = const$ - колебаний нет, но струна не возвращается в исходное положение (если постоянная не равна нулю).

Примеры:

1) $\psi \equiv 0$

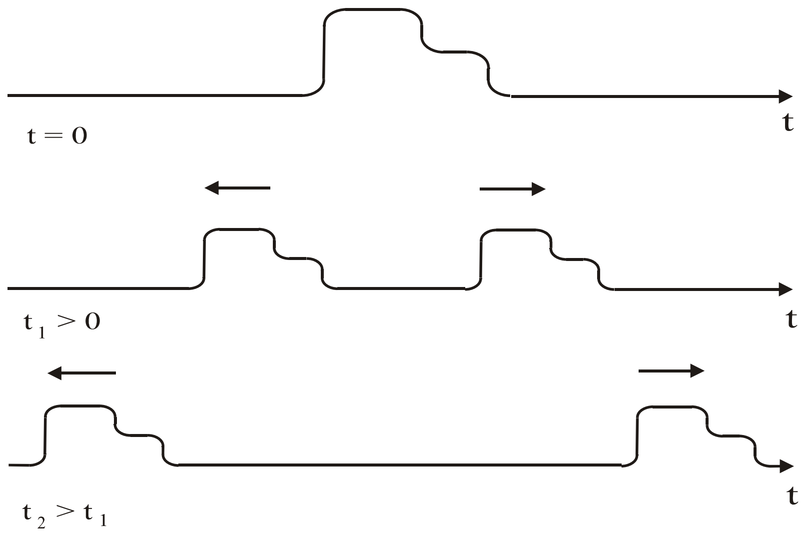


Рис. 4

2) $\varphi \equiv 0$

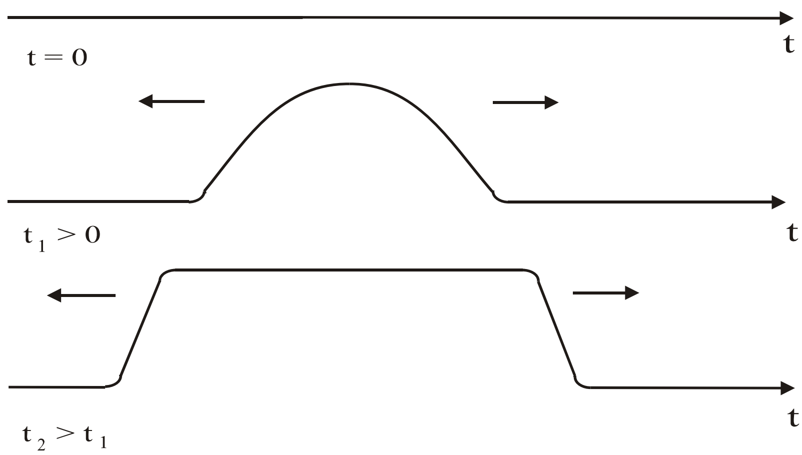


Рис. 5

1.3. Метод продолжения

1.3.1. Метод продолжений для полуограниченной струны

Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой, ($x \geq 0$). Следует отметить, что чаще всего имеют дело со следующими способами закрепления струны:

1) жесткое закрепление;
2) свободное закрепление.

При анализе этих задач нам понадобятся **леммы** о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой.

Леммы о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой.

Лемма 1. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)-(2)) являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0, то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.

Лемма 2. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)-(2)) являются четными функциями относительно некоторой точки x_0, то производная по x соответствующего решения в этой точке равна нулю.

Доказательство (Лемма 1)

Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. В этом случае условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$\varphi(x) = -\varphi(-x);$

$\psi(x) = -\psi(-x).$

Функция $U(x,t)$, определяемая формулой (1.9), при x=0 и t>0 равна

$$U(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(s)ds = 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Что и требовалось доказать.

Доказательство (Лемма 2). Доказывается аналогично. Условие четности начальных данных имеет вид

$\varphi(x)=\varphi(-x);$

$\psi(x)=\psi(-x)$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной

$\varphi'(x)=-\varphi'(-x)$.

Из формулы (1.9) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds\right)=\frac{\varphi'(x-at)+\varphi'(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\psi(x+at)-$$

$$-\frac{1}{2a}\psi(x-at)=\frac{\varphi'(-at)+\varphi'(at)}{2}+\frac{1}{2a}\big(\psi(at)-\psi(-at)\big)=0+0,\ t>0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi'(x)$, а второе – в силу четности $\psi(x)$.

Что и требовалось доказать.

<u>Жесткое закрепление</u>.

Задача ставится следующим образом: ищем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ при } 0<x<\infty,\ t>0, \qquad (1.13)$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

U(0,t)=0, $t>0$

и начальным условиям

$$\begin{cases} U(x,0)=\varphi(x) \\ U'_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \quad 0<x<\infty. \qquad (1.14)$$

Рассмотрим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, являющиеся нечетными продолжениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в условие (1.14):

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{для } x>0\\ -\varphi(-x) & \text{для } x<0,\end{cases}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{для } x>0\\ -\psi(-x) & \text{для } x<0.\end{cases}$$

Функция

$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(s)ds$$

определена для всех x и $t>0$. В силу <u>леммы 1</u>

$U(0,t)=0$.

Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t=0$ и $x>0$ следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} U(x,0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ U'_t(x,0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \qquad x>0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $U(x,t)$ только для $x \ge 0,\ t \ge 0,$ мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Свободное закрепление.

Теперь рассмотрим случай, когда один конец свободный:

$$U'_x(0,t) = 0$$

Это значит, что касательная в точке 0 параллельна оси x.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ U(x,0) = \varphi(x), \\ U'_t(x,0) = \psi(x), \\ U'_x(0,t) = 0. \end{cases}$$

Делаем четное продолжение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ для } x \ge 0, \\ \varphi(-x) \text{ для } x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) \text{ для } x \ge 0, \\ \psi(-x) \text{ для } x < 0, \end{cases}$$

получим решение уравнения колебаний в виде функции

$$U(x,t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds,$$

определенной для всех x и $t>0$. В силу леммы 2 $U'(0,t) = 0$.

Кроме того, эта функция удовлетворяет при t=0 и $x>0$ следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} U(x,0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ U_t'(x,0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned}\right\}.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $U(x,t)$ только для $x \ge 0,\ t \ge 0,$ мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Вывод.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $U(0,t)=0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую **нечетным образом.**

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $U'_x(0,t)=0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую **четным образом**.

1.3.2. Конечная струна (Начальная и конечная точки жёстко закреплены)

Рассмотрим краевую задачу для ограниченного отрезка $(0,l)$. Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$U(0,t)=0=U(l,t)$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} U(x,0)=\varphi(x) \\ U'_t(x,0)=\psi(x) \end{cases} \quad 0\le x\le l.$$

Будем искать решение задачи методом продолжения, предполагая возможность следующего представления:

$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(s)ds,$$

где Φ и Ψ - функции, подлежащие определению.

Начальные условия

$$\begin{cases} U(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x) \\ U'_t(x,0)=\Psi(x)=\psi(x) \end{cases} \quad 0\le x\le l$$

определяют значения Φ и Ψ в интервале $(0,l)$.

Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям, наложим на функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ требования нечетности относительно точек $x=0,\ x=l$:

$$\Phi(x)=-\Phi(-x),\ \ \Phi(x)=-\Phi(2l-x),$$

$$\Psi(x)=-\Psi(-x),\ \ \Psi(x)=-\Psi(2l-x).$$

Сопоставляя эти равенства, получим:

$$\Phi(x')=\Phi(x'+2l) \qquad (x'=-x)$$

и аналогично для $\Psi(x)$, то есть Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$.

Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжение $\Phi(x)$

и $\Psi(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Подставляя в формулу (1.9), получаем решение задачи.

1.4. Метод Фурье (метод стоячих волн, метод разделения переменных)

1.4.1. Метод разделения переменных для струны, закрепленной на концах

Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях **струны, закрепленной на концах**.

Итак, будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{1.15}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \tag{1.16}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} U(x,0) &= \varphi(x) \\ U'_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Уравнение (1.15) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Будем искать решение уравнения в виде

$$U(x,t) = X(x)\cdot T(t), \text{ где} \tag{1.18}$$

$X(x)$- функция только переменного x,

$T(t)$- функция только переменного t.

Подставим (1.18) в уравнение (1.15), получим:

$$X(x)\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\cdot T(t)$$

$$X(x)\cdot T''(t) = a^2\cdot X''(x)\cdot T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{1.19}$$

Чтобы функция (1.18) была решением уравнения (1.15), равенство (1.19) должно удовлетворяться тождественно, т.е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (1.19) является функцией только переменного x, а левая- только t.

Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части (1.19) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda = const \tag{1.20}$$

Из соотношения (1.20) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций *X(x)* и *T(t)*.

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & X(x) \not\equiv 0 \\ T'' - \lambda a^2 T = 0, & T(t) \not\equiv 0 \end{cases} \qquad (1.21), (1.22)$$

Граничные условия (1.16) дают:

$$U(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$U(l,t) = X(l)T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция *X(x)* должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{1.23}$$

так как иначе мы имели бы

$T(t) \equiv 0$ и $U(x, t) \equiv 0$,

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения.

Таким образом, в связи с нахождением функции *X(x)* мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\left.\begin{matrix} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{matrix}\right\}, \tag{1.24}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются **собственными значениями**, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями задачи (1.24).

Итак, найдем знак λ:

<u>1 случай</u> $\lambda > 0$, например, $\lambda = \rho^2$

Запишем характеристическое уравнение для (1.24):

$$q^2 - \rho^2 = 0,$$

$$q = \pm\rho$$

Общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = Ae^{-px} + Be^{px}.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = A + B = 0,$$

$$X(l) = Ae^{-\rho l} + Be^{\rho l},$$

т. е. $A = -B$ и $A(e^{-\rho l} - e^{pl}) = 0$.

Но в рассмотренном случае ρl - действительно и положительно, так что $(e^{-\rho l} - e^{pl}) \neq 0$. Поэтому $A = 0$, $B = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

<u>2 случай</u> λ*=0.*

При $\lambda=0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно в этом случае общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$X(x) = Ax + B.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = \left(Ax + B\right)_{x=0} = B = 0$$

$$X(l) = Al = 0,$$

т. е. $A = 0$ и $B = 0$, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

<u>3 случай</u> $\lambda<0$, например $\lambda = -p^2$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$q^2 + p^2 = 0.$$

$$q = \pm ip.$$

Общее решение уравнения:

$$X = C\cos px + D\sin px.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C = 0,$$

$$X(l) = D\sin pl = 0.$$

Если $X(x) \not\equiv 0$, то $D \neq 0$, поэтому

$$\sin pl = 0$$

$p = \dfrac{\pi n}{l}$, где n - любое целое число.

$$p_n = \frac{\pi n}{l}, n \in \mathbf{Z}$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{1.25}$$

нетривиальное решение задачи (1.24), определяемое с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям p_n соответствуют решения уравнения (1.22).

$$T_n(t) = A_n \cos(\frac{\pi n a}{l} t) + B_n \sin(\frac{\pi n a}{l} t), \qquad (1.26)$$

где A_n и B_n - произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1) – (3), заключаем, что функции

$U_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ являются частными решениями уравнения (1.15), удовлетворяющими граничным условиям (1.17) и представимыми в виде произведения (1.18) двух функций.

Обратимся к решению в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1.15) сумма частных решений

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l} at) \cdot \sin\frac{\pi n}{l} x, \qquad (1.27)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (1.16).

Начальные условия позволяют определить A_n и B_n. Потребуем, чтобы функция (1.27) удовлетворяла условиям (1.17):

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \\ U_t'(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot a \cdot \frac{\pi n}{l} \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} \end{cases} \qquad (1.28)$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx \\ B_n &= \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x) \cdot \sin\frac{\pi n x}{l} dx \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

Подставив (1.29) в (1.27) мы удовлетворим краевым условиям и получим решение уравнения.

1.4.2. Неоднородное уравнение струны (вынужденные колебания струны)

Найти решение неоднородного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < x < l \\ U(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ U_t^{'}(x,0) = \psi(x) & \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

$f(x,t)$ - заданная функция

Эти вынужденные колебания общего типа можно представить себе как результат сложения двух колебательных движений, из которых одно есть чисто вынужденное колебание, то есть такое, которое совершается по действием силы, причем струна в начальный момент не выведена из состояния покоя, другое есть свободное колебание, которое струна совершает без действия силы, только вследствие начального возмущения. Аналитически это приводит к введению вместо U двух новых функций V и W.

Ищем решение в виде суммы двух функций $U(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$ одна из которых удовлетворяет однородному уравнению и неоднородным начальным условиям, например, функция $V(x,t)$, решение которого мы рассмотрели в разделе 1.4.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V(x,0) = \varphi(x) \\ V_t^{'}(x,0) = \psi(x) \\ V(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t) \\ W(x,0) = W_t^{'}(x,0) = 0 \\ W(0,t) = W(l,t) = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

Рассмотрим систему (1.32). $W(x,t)$ и $f(x,t)$ разложим в ряд по синусам.

Ищем решение W в виде ряда:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \sin \tfrac{\pi n x}{l} \,. \tag{1.33}$$

Рассмотрим f как функцию от переменного x в ряде Фурье по синусам на отрезке $[0,l]$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin \tfrac{\pi n x}{l} \tag{1.34}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s,t) \cdot \sin \tfrac{\pi n s}{l}\, ds \tag{1.35}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (\sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \sin\tfrac{\pi n x}{l})' = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\tfrac{\pi n x}{l} \cdot W_n'(t)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n''(t) \cdot \sin\tfrac{\pi n x}{l} \qquad (1.36)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot (\cos\tfrac{\pi n x}{l}) \cdot \tfrac{\pi n}{l}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \tfrac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot (-\sin\tfrac{\pi n x}{l}) \qquad (1.37)$$

Подставим (1.34), (1.36), (1.37) в уравнение (1.32).

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n''(t) \cdot \sin\tfrac{\pi n x}{l} = a^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \cdot \tfrac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot (-\sin\tfrac{\pi n x}{l}) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \sin\tfrac{\pi n x}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{W_n''(t) + (\tfrac{a\pi n}{l})^2 \cdot W_n(t) - f_n(t)}_{\text{коэффициент=0}}) \cdot \sin\tfrac{\pi n}{l} x = 0$$

$$W_n''(t) + \tfrac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \cdot W_n(t) - f_n(t) = 0$$

Начальные условия дают:

$$\begin{cases} W_n(0) = 0 \\ W_n'(0) = 0 \end{cases}$$

$$W_n(t) = \underbrace{A_n \cdot \cos\tfrac{\pi n a t}{l} + B_n \cdot \sin\tfrac{\pi n a t}{l}}_{\text{общее решение однор.}} + \underbrace{\overline{W}_n(t)}_{\text{част.реш.неодн.}}$$

$$W_n(t) = \frac{l}{a\pi n} \int_0^t f_n(s) \sin\frac{a\pi n}{l}(t-s)\, ds$$

$$W_n(t) = \frac{2}{a\pi n} \int_0^t ds \int_0^l f(z,s) \sin\frac{l}{a\pi n}(t-s) \sin\frac{\pi n z}{l}\, dz$$

$$V_n(t) = \varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} at$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(s) \sin\frac{a\pi n}{l}(t-s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

$$U(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$U_t'(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$\begin{cases} U_n(0) = \varphi_n, \\ U_n'(0) = \psi_n. \end{cases}$$

2. Уравнение теплопроводности

2.1. Метод разделения переменных для конечного стержня

Уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$U(x,t)$ - температура стержня в точке x в момент времени t,

a- коэффициент теплоемкости и теплопроводности.

Рассмотрим однородный стержень длины l, теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой.

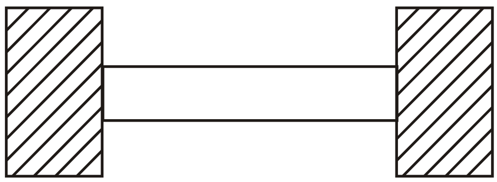


Рис. 6

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности необходимо к уравнению присоединить начальные и граничные условия. Для задач этого типа задается только одно граничное условие, а именно, начальная температура в начальный момент времени. Итак,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{2.1}$$

Краевые условия:

$$\begin{cases} U(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \\ U(0,t) = U(l,t) = 0, & 0 \le t \le T \end{cases} \qquad (2.2), (2.3)$$

$\varphi(x)$ -начальное распределение температуры в стержне.

Концы стержня закреплены в термостате. В данном случае тепловая энергии стержня не сохраняется, так как система не является изолированной.

Будем искать решение в виде произведения двух функций

$U(x,t) = X(x) \cdot T(t),$ где

$X(x)$ - функция только переменного x, а $T(t)$ - функция только переменного t.

$$\frac{\partial(XT)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2(XT)}{\partial x^2}$$

$$XT' = a^2TX''$$

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = \lambda = const$$

$\lambda = const$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая – только от x. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} T' - \lambda a^2 T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0 \end{cases}$$

Граничные условия (2.3) дают:

$X(0)=0, X(l)=0$

Тогда,

$$\begin{cases} T' - \lambda a^2 T = 0 \\ X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \qquad (2.4), (2.5), (2.6)$$

Необходимо определить знак λ.

<u>1 случай</u>: Пусть $\lambda>0$.

Рассмотрим уравнение (2.4):

$$T' - \lambda a^2 T = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$q - \lambda a^2 = 0$$

$$q = \lambda a^2$$

$$T(t) = Ce^{\lambda a^2 t}$$

Рассмотрим уравнение (2.5):

$$X'' - \lambda X = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$q_1 - \lambda = 0$$

$$q_1 = \pm\sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x} \qquad (2.7)$$

Это решение не подходит, так как если $t\to\infty$,то $e^{\lambda a^2 t}\to\infty$, а поэтому нарушается второй закон термодинамики, то есть происходит передача энергии от холодного к горячему. Докажем это математически, подставив начальные условия (2.6) в (2.7):

$A + B = 0$

$A = -B$

$Ae^{-\sqrt{\lambda}l} - Ae^{\sqrt{\lambda}l} = 0$

$e^{-\sqrt{\lambda}l} = e^{\sqrt{\lambda}l}$

Значит $A=0$ или $\lambda = 0$. Но тогда мы получаем тривиальное решение и не можем удовлетворить начальным условиям. Следовательно, при $\lambda > 0$ уравнение (2.1) имеет только нулевое решение.

2 случай: Пусть $\lambda = 0$, тогда

$T'=0$, следовательно $T=C$

$X''=0$, следовательно $X=Ax+B$

Подставим краевые условия

$U(0,t) = A \cdot 0 + B = 0$, получим $B=0$

В итоге получим нулевое решение $A=0$, а значит $\lambda = 0$ не подходит.

3 случай: Пусть $\lambda < 0$ и $\lambda = -p^2$, тогда

$X'' + p^2 X = 0$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$k^2 + p^2 = 0$

$k = \pm ip$

Общее решение может быть записано в виде:

$$X = A\cos px + B\sin px \qquad (2.8)$$

Подставим краевые условия.

$X(0) = A = 0$

$X(l) = B\sin pl = 0$

Получаем $p_n = \dfrac{\pi n}{l}$ (2.9)

Существуют нетривиальные решения уравнения (2.5), равные

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (2.10)$$

Этим значениям p_n соответствуют решения уравнения (2.4)

$T_n(t) = A_n e^{-p_n^2 a^2 t}$, где

C_n - неопределенный пока коэффициент.

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-p_n^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}$$ - общее решение.

Удовлетворим начальным условиям (2.2):

$$U(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Для вычисления этого начального решения необходимо взять в качестве A_n коэффициент Фурье:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

2.2. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{2.11}$$

с начальным условием

$$U(x,0)=0 \tag{2.12}$$

и граничным условием

$$\left.\begin{aligned} U(0,t)=0,\\ U(l,t)=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Будем искать решение этой задачи $U(x,t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям, соответствующим однородной краевой задаче:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{2.14}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $U(x,t)$ надо определить функции $U_n(t)$.

Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{2.15}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi \tag{1.16}$$

Подставляя представление (2.14) для решения в исходное уравнение (2.11) имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l} x((\frac{\pi n}{l})^2 a^2 U_n(t) + U'(t) - f_n(t)) = 0.$$

Если ряд Фурье равен нулю, то все коэффициенты разложения равны нулю, то есть

$$U_n'(t) = -a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 U_n(t) + f_n(t). \qquad (2.17)$$

Пользуясь начальным условием для $U(x,t)$

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = 0\,,$$

получаем начальное условие для $U_n(t)$:

$$U_n(0) = 0 \qquad (2.18)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (2.17) с нулевым начальным условием (2.18), находим:

$$U_n(t) = \int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \qquad (2.19)$$

Подставляя выражение (2.19) для $U_n(t)$ в формулу (2.14), получим решение исходной задачи в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin\frac{\pi n}{l} x. \qquad (2.20)$$

Воспользуемся выражением (2.16) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (2.20):

$$U(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} \xi \right) f(\xi,\tau) d\xi d\tau =$$

$$\int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l} \xi \text{ -}$$ функция точечного источника (функция Грина).

2.3. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня

Рассмотрим задачу с начальными данными на бесконечной прямой. А именно, найдем ограниченную функцию $U(x,t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

и начальному условию

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

где $\varphi(x)$ - начальное распределение температуры.

Сделаем преобразование Фурье по переменной x от уравнения и начального условия

Прямое преобразование Фурье $F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$.

Обратное преобразование Фурье $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipy} dp$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x) e^{-ipx} dx = e^{-ipx} f'(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ipx} dx \cdot (-ip) = e^{-ipx}(ip) f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - ip(-ip)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-ipx} dx =$$

$$= (ip)^2 F(p)$$

где $F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, таким образом $\dfrac{d}{dx} \to ip$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = -a^2 p^2 U \\ U(p,0) = \Phi(p) \end{cases}$$

$U(p,t) = e^{-a^2 p^2 t} \cdot C$, при $\Phi(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-ipy} dy$

$$U(p,0) = C = \Phi(p)$$

$$U(p,t) = \Phi(p) e^{-a^2 p^2 t}$$

Чтобы получить итоговое решение, нужно провести обратное преобразование Фурье

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 p^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-ipy} dy\right) e^{ipx} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipy} e^{-a^2 + ipx} dp\right) dy$$

$$(-a^2p^2-2\frac{ipy}{2}+\frac{(y-x)^2}{4a^2t})-\frac{(y-x)^2}{4a^2t};$$

$$-(a^2p^2t+2\frac{ip(y-x)}{2}+\frac{i^2(y-x)^2}{4a^2t})-\frac{(y-x)^2}{4a^2t};$$

$$-(a\sqrt{t}p+\frac{i(y-x)}{2a\sqrt{t}})^2-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a\sqrt{t}p+\frac{i(y-x)}{2a\sqrt{t}})^2-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dp=\frac{e^{\frac{-(y-x)^2}{4a^2t}}}{a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-U^2}dU=\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}$$

$$U=a\sqrt{t}p+\frac{iy}{2a\sqrt{t}}$$

$$dU=a\sqrt{t}dp$$

Тогда общее решение имеет вид

$$U(x,y)=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}dy$$

$\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{y^2}{4a^2t}}$ - функция Грина для уравнения теплопроводности.

$$G(y,x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2t}}$$

$U(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,y,t)\varphi(y)dy$ - общее решение (стандартный вид).

Эта функция дает решение теплопроводности с начальным заданным условием в точке x_0.

2.4. Уравнение теплопроводности для стержня, излучающего с боковой поверхности

Рассмотрим конкретную задачу:

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}=4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-5U\\ U(x,0)=x(1-x) \quad \text{-начальное условие}\\ U(0,t)=U(1,t)=0 \quad \text{-граничные условия.}\end{cases} \qquad (2.21), (2.22), (2.23)$$

Наличие слагаемого ($-5U$) означает, что с боковых стенок стержня идет излучение. Длину стержня задали равной единице.

Применим метод разделения переменных.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = XT';$$

$$4\frac{\partial U^2}{\partial x^2} = 4XT''$$

$$XT' = 4TX'' - 5XT$$

$$X(T' - 5T) = 4XT''$$

$$\frac{T' + 5T}{4T} = \frac{X''}{X} = \lambda = const$$

Причем $\lambda < 0$. Пусть $\lambda = -p^2$

$$\begin{cases} T' + (5 + 4p^2)T = 0 \\ X'' + p^2 X = 0 \end{cases} \qquad (2.24), (2.25)$$

Рассмотрим уравнение системы для X (2.25). Напишем характеристическое уравнение:

$$\omega^2 + p^2 = 0$$

$$\omega = \pm ip$$

$X = A\cos px + B\sin px$ – общее решение уравнения (2.25).

Учитывая краевые условия, имеем

$$X(0) = A = 0$$

$$X(1) = B\sin p = 0$$

Тогда $p_n = \pi n$

Напишем характеристическое уравнение (2.24):

$$\xi + 5 + 4p^2 = 0$$

$$\xi = -(5 + 4p^2)$$

$T(t) = C \cdot e^{-(5+4p^2)t}$ - решение уравнения (2.24)

Общее решение задачи имеет вид

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(5+4p^2)t} \sin \pi nx$$

Удовлетворим условию начальному условию (2.22):

$$U(x,0) = x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \pi nx \qquad (2.26)$$

$$C_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin\pi nx dx \qquad (2.27)$$

Найдем значение C_n. Для этого необходимо вычислить интеграл

$$\int_0^1 (x-x^2)\sin\pi nx dx$$

Два раза проинтегрируем по частям:

$U=(x-x^2) \qquad dV=\sin\pi nx dx$

$dU=(-2x+1)dx \qquad V=-\dfrac{1}{\pi n}\cos\pi nx$

Значит

$$\int_0^1 (x-x^2)\sin\pi nx dx = -\frac{1}{\pi n}(x-x^2)\cos\pi nx\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1(-2x+1)\cos\pi nx dx =$$

$$=0+\frac{1}{\pi^2 n^2}(-2x+1)\sin\pi nx\Big|_0^1+\frac{2}{\pi^2 n^2}\int_0^1 \sin\pi nx dx =$$

$$=0+0-\frac{2}{\pi^3 n^3}\cos\pi nx\Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi^3 n^3}((-1)^n-1)$$

(2.28)

Подставим (2.28) в (2.27) и получим

$$C_n=\frac{2^2}{\pi^3 n^3}(1-(-1)^n).$$

Найденное значение подставим в (2.26) и получим решение задачи:

$$U(x,t)=\sum_1^\infty \frac{2^2}{\pi^3 n^3}(1-(-1)^n)e^{-(5+4\pi^2 n^2)t}\sin\pi nx$$

2.5. Уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями

Также рассмотрим на конкретном примере.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}=4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (2.29)$$

с начальными и краевыми условиями:

$$U(x,0)=1$$

$$\left.\begin{aligned} U(0,t)&=0\\ U(1,t)&=1\end{aligned}\right\} \qquad (2.30),\ (2.31)$$

Сделаем замену следующим образом: $U = V + x$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$V(0,t) = V(1,t) = 0$$

Указанную замену функции сделали именно для получения нулевых краевых условий.

Начальное условие (2.30) дает:

$$U(x,0) = V(x,0) + x = 1$$

$$V(x,0) = 1 - x, \tag{2.32}$$

то есть изменилось начальное условие.

Далее задача решается аналогично случаю с однородными краевыми условиями.

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{2.33}$$

Удовлетворим начальному условию (2.32):

$$V(x,0) = 1 - x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l} \quad ()$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l (1-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = 2\int_0^1 \sin\pi n x - 2\int_0^1 x\sin\pi n x = \frac{2}{\pi n}.$$

Подставив $A_n = \dfrac{2}{\pi n}$ в (2.33), получим

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} e^{-(2\pi n)^2 t} \sin\pi n x$$

$U(x,t) = V(x,t) + x = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\pi n} e^{-(2\pi n)^2 t} \sin\pi n x + x$ – решение задачи.

3. Уравнение Лапласа

3.1 Введение

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является Уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0 \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Функция U называется **гармонической** в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов. Мы будем искать решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных. Решение краевых задач для уравнения Лапласа может быть найдено методом разделения переменных в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар, цилиндр и др.). Рассмотрим некоторые из них.

3.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

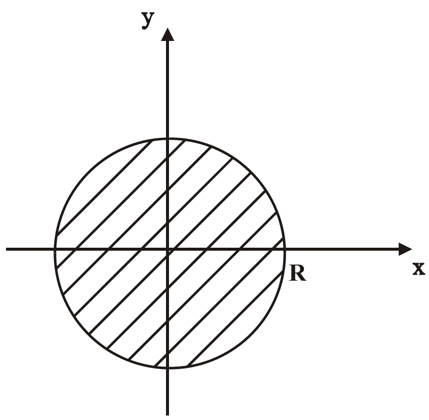
Найти функцию U, удовлетворяющую уравнению:

$\Delta U = 0$ внутри круга (3.1)

и граничному условию $U(R,\varphi) = \mu(\varphi)$ на границе круга, (3.2)

где $\mu(\varphi)$ – заданная функция, φ – полярный угол.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$



Введем полярную систему координат (ρ, φ) с началом в центре круга.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$ – полярные координаты.

Уравнение (3.1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \tag{3.3}$$

Решим уравнение методом разделения переменных, то есть будем искать частное решение уравнения (3.1), вида

$U(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (3.3), получим

$$\Delta U = P''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho} P''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} P(\rho)\Phi''(\varphi) = 0$$

$$\Phi(\varphi)[P''(\rho) + \frac{1}{\rho} P'(\rho)] = -\frac{1}{\rho^2} P(\rho)\Phi''(\varphi)$$

$$\frac{\rho^2 (P''(\rho) + \frac{1}{\rho} P'(\rho))}{P(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} \rho^2 (P''(\rho) + \frac{1}{\rho} P'(\rho)) = \lambda P(\rho), & P \not\equiv 0, \\ \Phi''(\varphi) = -\lambda \Phi(\varphi), & \Phi \not\equiv 0. \end{cases} \tag{3.4), (3.5}$$

Определим знак λ:

<u>1 случай</u> Пусть $\lambda < 0,$ например $\lambda = -q^2$.

Рассмотрим уравнение (3.5)

$$\Phi''(\varphi) = q^2 \Phi(\varphi).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$\omega^2 - q^2 = 0$

$\omega = \pm q$

$\Phi(\varphi) = Ae^{q\varphi} + Be^{-q\varphi}$ – это решение не подходит, так как при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $U(\rho,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению $U(\rho,\varphi + 2\pi) = U(\rho,\varphi)$ (условие периодичности).

Отсюда следует, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$ то есть $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π.

<u>2 случай</u> Пусть $\lambda = 0$, тогда

$\Phi''(\varphi) = 0$

$\Phi(\varphi) = A\varphi + B$ -это решение подходит для уравнения (3.5) системы при условии, что A=0.

Рассмотрим уравнение (3.4) системы:

$$\rho^2\left(P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)\right)=0$$

$$P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)=0$$

Пусть $P'(\rho)=V$, тогда:

$$V'+\frac{1}{\rho}V=0$$

$$\frac{dV}{d\rho}=-\frac{V}{\rho}$$

$$\int\frac{dV}{V}=-\int\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\ln V=\ln\frac{1}{\rho}+\ln C_1, V=\frac{C_1}{\rho}$$

$$\frac{dP}{d\rho}=\frac{C_1}{\rho}, P=\int\frac{C_1}{\rho}d\rho=C_1\ln\rho=C_1\ln\rho+C_2$$

Таким образом получаем: $U=C\ln\rho+D$ -решение уравнения в общем случае.

<u>**3 случай**</u> Пусть $\lambda>0$ например $\lambda=q^2$.

Решение уравнения (3.5):

$\varPhi(\varphi)=A\cos q\varphi+B\sin q\varphi,$ причем $q\in\square$.

Рассмотрим уравнение (3.4) системы:

$$\rho^2\left(P''(\rho)+\frac{1}{\rho}P'(\rho)\right)=q^2P(\rho).$$

Функцию $P(\rho)$ будем искать в виде $P(\rho)=\rho^a$.

Подставим $P(\rho)=\rho^a$. в уравнение (3.4):

$$\rho^2\left(a(a-1)\rho^{a-2}+a\rho^{a-2}\right)=q^2\rho^a$$

$$a(a-1)\rho^a+a\rho^a=q^2\rho^a$$

$$a^2-a+a=q^2$$

$$a^2=q^2$$

$$a=\pm q.$$

Следовательно, $P(\rho) = C\rho^{q} + D\rho^{-q}$ -решение уравнения, где C и D -постоянные.

Для решения внутренней задачи надо положить $P(\rho) = C\rho^{q}$, так как, если $D \neq 0$, то функция $U(\rho,\varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является гармонической функцией внутри круга. Итак, частные решения нашей задачи найдены:

$U(\rho,\varphi) = \left(A\cos q\varphi + B\sin q\varphi\right)\cdot C\rho^{q}$

$U\left(\rho,\varphi\right) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)\rho^{n}$ вид общего решения(3.6)

Удовлетворим краевому условию:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)R^{n} = \mu(\varphi).$$

Считая, что μ задана как функция угла φ, возьмем ее разложение в ряд Фурье

$\mu(\varphi) = \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$ где

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\,d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

Формулы Эйлера:

$$\cos n\varphi = \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2} = \operatorname{Re} e^{in\varphi}$$

$$\sin n\varphi = \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{2i} = \operatorname{Im} e^{in\varphi}$$

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (3.6) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим:

$$U\left(\rho,\varphi\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\mu(\theta)\frac{\rho^{n}}{R^{n}}\left(\cos n\theta\cos n\varphi + \sin n\theta\sin n\varphi\right)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu\left(\theta\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu\left(\theta\right)d\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{n}}{R^{n}}\cos\left(n\left(\varphi-\theta\right)\right) + \frac{1}{2}\right) \tag{3.8}$$

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}\cos n(\varphi-\theta)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n}\cdot\left[e^{in(\varphi-\theta)}+e^{-in(\varphi-\theta)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}\right)^{n}+\left(\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}\right)^{n}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{-i(\varphi-\theta)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2}}{1-2\frac{\rho}{R}\cos(\varphi-\theta)+\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R^{2}-\rho^{2}}{R^{2}-2\rho R\cos(\varphi-\theta)+\rho^{2}}$$

Подставляя полученный результат в равенство (3.8), получаем

$U(\rho,\varphi)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\mu(\theta)d\theta\dfrac{R^{2}-\rho^{2}}{R^{2}+\rho^{2}-2R\rho\cos(\varphi-\theta)}$ -интегральная формула, дающая решение задачи.

$\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{R^{2}-\rho^{2}}{R^{2}+\rho^{2}-2R\rho\cos(\varphi-\theta)}$ -ядро Дирихле.

3.3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце

Найти функцию U, удовлетворяющую уравнению

$\Delta U=0$ внутри кольца. (3.9)

Необходимо поставить краевые условия на каждой из границ:

$$\begin{cases}U\left(R_{1},\varphi\right)=f_{1}(\varphi)\\ U\left(R_{2},\varphi\right)=f_{2}(\varphi),\end{cases} \tag{3.10}$$

где $f_1(x), f_2(x)$ – заданные функции, φ – полярный угол.

Для простоты вычислений возьмем $R_1=1,\ \ R_2=2$ и $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=2$,

тогда краевые условия примут вид

$$\begin{cases} U(1,\varphi) = 1 \\ U(2,\varphi) = 2 \end{cases} \qquad (3.11)$$

Запишем уравнение (3.10) в полярных координатах

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Решим уравнение методом разделения переменных, то есть будем искать решение уравнения (3.10) вида

$$U(\rho,\varphi) = P(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

Тогда уравнение (3.10) примет вид

$$\Delta U = P''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi) = 0$$

$$\frac{\rho^2\left(P'' + \frac{1}{\rho}P'\right)}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda = const.$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\begin{cases} \rho^2\left(P'' + \frac{1}{\rho}P'\right) = \lambda P \\ \Phi'' = -\lambda\Phi \end{cases} \qquad (3.12), (3.13)$$

Необходимо определить знак λ. В уравнении Лапласа в круге мы выяснили, что $\lambda > 0$ и решения уравнений (3.12)-(3.13) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A\cos q\varphi + B\sin q\varphi, \quad \text{причем} \quad q \in \mathbf{Z}$$

$$P(\rho) = C\rho^q + D\rho^{-q}, \quad \text{причем} \quad q > 0$$

и при $\lambda = 0$ получили

$$P(\rho) = D_0 \ln\rho + C_0, \quad q = 0.$$

Общее решение имеет вид

$$U(\rho,\varphi) = \frac{C_0}{2} + D_0\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right)\cdot\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)$$

Удовлетворим краевым условиям (3.11). Необходимо выяснить, какие из коэффициентов являются лишними.

$$U(1,\varphi)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\left(C_n+D_n\right)\cos n\varphi+B_n\left(C_n+D_n\right)\sin n\varphi\Big)=1$$

$$A_n\left(C_n+D_n\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}1\cdot\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{n\pi}\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$B_n\left(C_n+D_n\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}1\cdot\sin n\varphi d\varphi=-\frac{1}{n\pi}\cos n\varphi\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\cdot d\varphi=1;$$

$$U(2,\varphi)=C_0+D_0\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\left(C_n2^n+D_n2^{-n}\right)\cos n\varphi+B_n\left(C_n2^n+D_n2^{-n}\right)\sin n\varphi\Big)=2$$

$$A_n\left(C_n2^n+D_n2^{-n}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}2\cdot\cos n\varphi d\varphi=0,$$

$$B_n\left(C_n2^n+D_n2^{-n}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}2\cdot\sin n\varphi d\varphi=0,$$

$$C_0+D_0\ln 2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2d\varphi=2.$$

Итак, получили

$$\begin{cases}U(1,\varphi)=C_0=1\\ U(2,\varphi)=C_0+D_0\ln 2=2.\end{cases}$$

$U(\rho,\varphi)=1+\dfrac{\ln\rho}{\ln 2}$ - решение задачи.

3.4. Уравнение Лапласа в прямоугольнике

Для решения уравнения Лапласа в прямоугольнике необходимо рассмотреть вспомогательную задачу.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}=0\\ U(0,y)=f_1(y)\\ U(a,y)=f_2(y)\\ U(x,0)=U(x,b)=0\end{cases}\qquad (3.14), (3.15), (3.16), (3.17)$$

Условие (3.17) необходимо. Оно нам поможет при решении.

Решим уравнение (3.14) методом разделения переменных

$U(x,y) = X(x)Y(y).$

Уравнение (3.14) примет вид

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}Y + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}X = 0$$

$$-\frac{Y''}{Y} = \frac{X''}{X} = \lambda = const.$$

Отсюда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y \\ X'' = \lambda X \end{cases} \qquad (3.18), (3.19)$$

Необходимо определить знак λ.

<u>**1 случай**</u>. Пусть $\lambda < 0$, например, $\lambda = -p^2$

Рассмотрим уравнение (3.18):

$Y'' = -\lambda Y$

Характеристическое уравнение:

$\xi^2 - p^2 = 0$

$\xi = \pm p$

$Y(y) = Ce^{py} + De^{-py}$ - решение уравнения (3.18)

Рассмотрим уравнение (3.19)

$X'' = \lambda X$

Характеристическое уравнение:

$\omega^2 + p^2 = 0$

$\omega^2 = -p^2$

$\omega = \pm ip$

$X(x) = A\cos px + B\sin px$ - решение уравнения (3.19)

Таким образом,

$U(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = (A\cos px + B\sin px)\cdot(Ce^{py} + De^{-py})$.

Удовлетворим краевым условиям (3.17):

1) $U(x,0) = (A\cos px + B\sin px)\cdot(C + D) = 0$

$U(x,0) = X(x)\cdot(C + D) = 0.$

$X(x) \neq 0,$ так как мы ищем ненулевые решения уравнения (3.14), тогда $C+D=0$, отсюда $C = -D$.

2) $U(x,b) = X(x)\cdot(Ce^{pb} + De^{-pb}) = 0.$

Учитывая, что, $C = -D$ имеем:

$$-De^{pb} + De^{-pb} = 0$$

$$D(e^{-pb} - e^{pb}) = 0.$$

$D \neq 0$, следовательно, $e^{-pb} = e^{pb}$ это возможно только при $p = 0$, но тогда мы получим решение уравнения равное постоянной, а это не удовлетворяет условиям (3.15), (3.16).

2 случай. Пусть $\lambda > 0$, например, $\lambda = p^2$

Рассмотрим уравнение (3.19)

$$X'' = \lambda X$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - p^2 = 0$$

$$\omega^2 = p^2$$

$$\omega = \pm p$$

$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$ - решение уравнения (3.19)

Рассмотрим уравнение (3.18):

$$Y'' + \lambda Y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\xi^2 + p^2 = 0$$

$$\xi = \pm ip$$

$Y(y) = C\cos py + D\sin py$ - решение уравнения (3.18)

Удовлетворим начальному условию (3.17).

$$U(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = (Ae^{px} + Be^{-px})\cdot(C\cos py + D\sin py)$$

1) $U(x,0) = X(x)\cdot C = 0$

$X(x) \neq 0$, следовательно, $C = 0$

2) $U(x,b) = X(x)\cdot(C\cos pb + D\sin pb) = 0$.

Помня, что $C = 0$ имеем

$D\sin pb = 0$.

Если D=0, то решение тождественно равно нулю, а нам это не подходит, значит

$$\sin bp = 0$$

$$bp = \pi n$$

$p = \frac{\pi n}{b}$, где $n \in$ □.

Запишем решение задачи в виде ряда:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{\pi n x}{b}} + B_n e^{-\frac{\pi n x}{b}})\sin\frac{\pi n y}{b} \qquad (3.20)$$

Удовлетворим начальным условиям (3.15), (3.16). Подставим в (3.20) начальное условие (3.15): $U(0, y) = f_1(y)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n + B_n)\sin\frac{\pi n y}{b} = f_1(y)$$
$$A_n + B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f_1(y)\sin\frac{\pi n y}{b}dy. \tag{3.21}$$

Удовлетворим начальному условию (3.16): $U(a, y) = f_2(y)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{\pi n a}{b}} + B_n e^{-\frac{\pi n a}{b}})\sin\frac{\pi n y}{b} = f_2(y)$$
$$A_n e^{\frac{\pi n a}{b}} + B_n e^{-\frac{\pi n a}{b}} = \frac{2}{b}\int_0^b f_2(y)\sin\frac{\pi n y}{b}dy. \tag{3.22}$$

Для нахождения коэффициентов A_n и B_n необходимо решить систему уравнений (3.21), (3.22):

$$\begin{cases} A_n + B_n = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f_1(y)\sin\frac{\pi n y}{b}dy \\ A_n e^{\frac{\pi n a}{b}} + B_n e^{-\frac{\pi n a}{b}} = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b f_2(y)\sin\frac{\pi n y}{b}dy. \end{cases}$$

Подставив полученные коэффициенты в (3.20) получим решение задачи.

Рассмотрим ненулевые краевые условия для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ U(0, y) = f_1(y) \\ U(a, y) = f_2(y) \\ U(x, 0) = f_3(x) \\ U(x, b) = f_4(x) \end{cases}$$

Ищем решение задачи в виде суммы двух функций
$U(x, y) = V(x, y) + W(x, y).$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \\ V(0,y)=f_1(y) \\ V(a,y)=f_2(y) \\ V(x,0)=0 \\ V(x,b)=0 \end{cases} \qquad (3.23) \qquad\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 \\ W(0,y)=0 \\ W(a,y)=0 \\ W(x,0)=f_3(x) \\ W(x,b)=f_4(x) \end{cases} \qquad (3.24)$$

Задача (3.23) уже решена (см. вспомогательную задачу), а чтобы найти решение задачи (3.24) необходимо просто заменить соответствующие буквы и цифры в решении для $V(x,t)$, то есть $1\to 3,\ 2\to 4,\ x\to y,\ b\to a.$

4. Теорема единственности.

При решении краевых задач:

1) надо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы единственности;

2) надо убедиться в том, что дополнительные условия не переопределяют задачу, т. е. Среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством теоремы существования; доказательство существования обычно тесно связано с методом нахождения решения.

4.1. Теорема единственности для уравнения струны

Докажем теорему единственности для уравнения струны:

Возможно существование только одной функции $U(x,t)$, определенной в области $0\le x\le l,\quad t\ge 0$ и удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+f(x,t),\ \text{при}\ 0<x<l,\ t>0, \qquad (4.1)$$

начальным условиям

$$\begin{cases} U(x,0)=\varphi(x) \\ U_t^{'}(x,0)=\psi(x) \end{cases} \qquad (4.2)$$

и однородным граничным условиям

$$\begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

при условии, что функция $U(x,t)$ и производные, входящие в уравнение (4.1), а также производная U_{tx} непрерывны на отрезке $0 \le x \le l$ при $t \ge 0$.

<u>Доказательство</u>**:** (от противного)

Пусть есть два решения $U_1(x,t), U_2(x,t)$. Рассмотрим разность $V(x,t) = U_1(x,t) - U_2(x,t)$.

Функция $V(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению и однородным дополнительным условиям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t) - f(x,t) = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \\ V_t'(x,0) = 0 \\ V(0,t) = V(l,t) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Следовательно, если решений два, то их разность должна удовлетворять однородной краевой задаче (4.4). Таким образом, надо доказать, что у однородной задачи только нулевое решение (т.е. нетривиальных решений нет).

Физически, теорема единственности доказывается из закона сохранения энергии:

$E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \left((V_t')^2 + a^2 (V_x')^2 \right) dx$ -полная энергия струны в момент времени t,

где $dx \dfrac{(V_t')^2}{2}$ – энергия элементарной части струны (кинетическая энергия);

$dx \dfrac{a^2 (V_x')^2}{2}$ – энергия элементарной части струны (потенциальная энергия);

dx – масса маленького кусочка струны;

V – отклонение.

Докажем, что E от t не зависит, т.е. функция $E(t) = const$. Для этого надо доказать, что $E(t)=0$. Продифференцируем $E(t)$ по t выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла.

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(2V_t'\cdot V_{tt}''+2a^2V_x'\cdot V_{xt}''\right)dx=\int_0^l\left(V_t'\cdot V_{tt}''+a^2V_x'\cdot V_{xt}''\right)dx$$

Интегрируем по частям $\int_a^b UdV=UV-\int_a^b VdU$

$U=a^2V_x'$, $\quad dU=a^2V_{xx}''dx$

$dV=U_{xt}''dx$, $\quad V=V_t'$, , получаем

$$E'(t)=\int_0^l V_t'\cdot V_{tt}''dx+a^2V_x'\cdot V_t'\Big|_0^l-a^2\int_0^l V_t'\cdot V_{xx}''dx=$$

$$=\int_0^l V_t'\left(V_{tt}''-a^2V_{xx}''\right)dx+a^2\cdot\left(V_x'(l,t)\cdot\underbrace{V_t'(l,t)}_{=0}-V_x'(0,t)\cdot\underbrace{V_t'(0,t)}_{=0}\right)$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий. Из $V(0,t)=0$ следует $V_t'(0,t)=0$ и аналогично для $x=l$. Получаем

$$E'(t)=\int_0^l V_t'(V_{tt}''-a^2V_{xx}'')dx \tag{4.5}$$

Используя уравнение (4.4), подставим в (4.5) $V_{tt}''=a^2V_{xx}''$, тогда

$$E'(t)=\int_0^l V_t'(a^2V_{xx}''-a^2V_{xx}'')dx=0.$$

Таким образом, доказали, что: $E(t)=const$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t)=const=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(0^2+\left(0'\right)^2\right)dx=0$$

это значит, что при любом t:

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\left(V_t'\right)^2+\left(V_x'\right)^2\right)dt\equiv 0\ , \tag{4.6}$$

так как $V(x,0)=0,\quad V_t'(x,0)=0$.

Пользуясь формулой (4.6), заключаем, что

$V_x'(x,t)\equiv 0,\quad V_t'(x,t)\equiv 0,$ откуда и следует, что

$V(x,t)=const=C_0$

Пользуясь начальным условием, находим:

$V(x,0)=C_0=0,$

тем самым доказано, что

$$V(x,t) \equiv 0 .$$

Следовательно, если существуют две функции $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $U_1(x,t) \equiv U_2(x,t)$.

Что и требовалось доказать.

4.2. Теорема единственности для уравнения теплопроводности

Если две функции, $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ определенные и непрерывные в области $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, удовлетворяют уравнению теплопроводности с начальными и краевыми условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \;\; t > 0 \\ U_1(x,0) = U_2(x,0) = \varphi(x) - \text{ начальные условия} \\ U_1(0,t) = U_2(0,t) = \psi_1(x) - \text{ граничные условия.} \\ U_1(l,t) = U_2(l,t) = \psi_2(x) \end{cases} \tag{4.7}$$

то $U_1(x,t) \equiv U_2(x,t)$

Рассмотрим функцию $V(x,t) = U_2(x,t) - U_1(x,t)$. Функция $V(x,t)$ является решением однородного уравнения теплопроводности в этой области ($0 < x < l, \;\; t > 0$).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V(x,0) = 0 \\ V(0,t) = V(l,t) = 0 \end{cases}$$

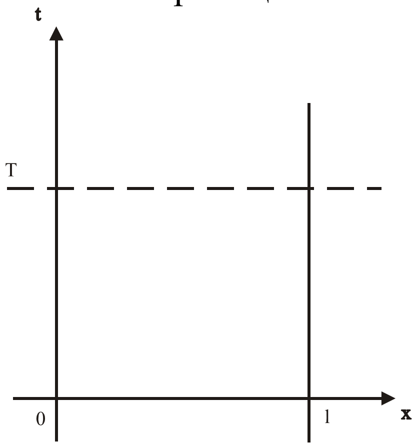
Надо доказать, что однородное уравнение с однородными условиями имеет только тривиальное (т.е. равное нулю) решение. Для доказательства будем использовать принцип максимума (минимума). Докажем его.

Принцип максимума (минимума):

Если функция $U(x,t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \le t \le T$ и $0 \le x \le l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$U'_t = a^2 U''_{xx} \tag{4.8}$$

в точках области $0 < x < l,\ 0 < t \le T$, то максимальное и минимальное значения функции $U(x,t)$ достигаются или в начальный момент, или в точках границы x=0 или x=l.



<u>Доказательство</u> (от противного)

Обозначим через M максимальное значение $U(x,t)$
при $t = 0 \ \ (0 \le x \le l)$ или
при $x = l \ \ (0 \le t \le T)$ и допустим, что в некоторой точке (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \le T)$ функция $U(x,t)$ достигает своего максимального значения, равного

$U(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$

Сравним знаки левой и правой частей уравнения (4.8) в точке (x_0, t_0). Так как в точке (x_0, t_0) функция достигает своего максимального значения, то

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, t_0) \le 0 \tag{4.9}$$

Так как $U(x_0, t)$ достигает максимального значения при $t = t_0$, то

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x_0, t_0) \ge 0 \tag{4.10}$$

Сравнивая знаки правой и левой части уравнения (4.8), мы видим, что они различны. Однако это рассуждение еще не доказывает теоремы, **так как правая и левая части могут быть равны нулю,** что не влечет за собой противоречия.

Для полного доказательства найдем точку (x_1,t_1), в которой $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \le 0$ и $\frac{\partial U}{\partial t} > 0$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(x,t) = U(x,t) + k(t_0 - t), \tag{4.11}$$

где k- некоторое постоянное число. Значит, функция *V(x,t)* не является решением уравнения теплопроводности. Очевидно, что

$$V(x_0,t_0) = U(x_0,t_0) = M + \varepsilon$$

$$k(t_0 - t) \le kT.$$

Выберем $k > 0$ так, чтобы kT был меньше $\varepsilon/2$, т. е. $k < \varepsilon/2T$; тогда максимальное значение *V(x,t)* при $t = 0$ или при $x = 0$, $x = l$ не будет превосходить $M + \frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$V(x,t) \le M + \frac{\varepsilon}{2} \text{ (при } t = 0 \text{ или } x = 0 \text{, или } x = l\text{)}, \tag{4.12}$$

так как для этих аргументов первое слагаемое формулы (4.11) не превосходит M а второе $-\varepsilon/2$.

В силу непрерывности функции *V(x,t)* она должна в некоторой точке (x_1,t_1) достигать своего максимального значения.

Очевидно, что

$$V(x_1,t_1) \ge V(x_0,t_0) = M + \varepsilon$$

Поэтому $t_1 > 0$ и $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$ или $x = 0$, $x = l$ имеет место неравенство (4.12). В точке (x_1,t_1), по аналогии с (4.9) и (4.10), должно быть $V''_{xx}(x_1,t_1) \le 0,\ V'_t(x_1,t_1) \ge 0.$

Учитывая (4.11), находим:

$$U''_{xx}(x_1,t_1) = V''_{xx}(x_1,t_1) \le 0,$$

$$U'_t(x_1,t_1) = V'_t(x_1,t_1) + k \ge k > 0$$

Отсюда следует, что

$$U'_t(x_1,t_1) - a^2 U''_{xx}(x_1,t_1) \ge k > 0,$$

т. е. уравнение (4.7) во внутренней точке (x_1,t_1) не удовлетворяется. Тем самым доказано, что решение $U(x,t)$ уравнения теплопроводности (4.8) внутри области не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение $U(x,t)$ на границе (т. е. при t=0, x=0, x=l).

Докажем единственность. Максимум и минимум достигается на границе, а $V(x,0)=0, V(0,t)=V(l,t)=0$, следовательно, решение единственное $U_2(x,t)=U_1(x,t)$.

Функция *V(x,t)* достигает своего максимального значения или при t=0, или при x=0, или при x=l. Однако, по условию, мы имеем:

$V(x,0)=0$, $V(0,t)=0$, $V(l,t)=0$.

Поэтому $V(x,t)\equiv 0$, то есть $U_1(x,t)\equiv U_2(x,t)$.

Что и требовалось доказать.

Из принципа максимума можно получить **<u>следствия</u>**:

1) Рассмотрим две задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \\ U_1(x,0)=\varphi_1(x) \\ U_1(0,t)=U_1(l,t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_2}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \\ U_2(x,0)=\varphi_2(x) \\ U_2(0,t)=U_2(l,t)=0 \end{cases}$$

и при этом $0<\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$. Тогда $U_1(x,t)\le U_2(x,t)$ для всех значений $0\le x\le l,\ 0\le t\le T$.

<u>Доказательство</u>

Действительно, разность $V(x,t)=U_2(x,t)-U_1(x,t)$

$V(x,0)=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\ge 0$

$V(0,t)=V(l,t)=0$

Максимум и минимум находится на границе, следовательно, $V=U_2-U_1\ge 0$.

Что и требовалось доказать.

2) Если взять третье условие $0<\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\le\varphi_3(x)$, то $U_1(x,t)\le U_2(x,t)\le U_3(x,t)$ - решение уравнения теплопроводности монотонно зависит от начальных данных.

5. Решение некоторых физических задач

5.1. Метод подобия

Для решения ряда задач теплопроводности весьма полезен метод подобия.

Функция источника для бесконечной прямой.

Будем искать решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{5.1}$$

с начальными условиями

$$U(x,0) = \begin{cases} U_0, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Уравнение теплопроводности остается неизменным при преобразовании переменных

$$x' = kx, t' = k^2 t, \tag{5.3}$$

то есть, если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует изменить в k^2 раз.

При указанном изменении масштабов начальное условие (5.2) остается также без изменения, поэтому для функции $U(x,t)$ должно иметь место равенство

$$U(x,t) = U(kx, k^2 t) \tag{5.4}$$

при любых значениях x, t и k.

Для решения выберем новую переменную, которая не меняется при указанном преобразовании:

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{5.5}$$

Будем искать решение в виде:

$$U(x,t) = U_0 f(z) \tag{5.6}$$

Вычисляя производные U

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{x \cdot U_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -U_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

подставляя в уравнение (5.1) и сокращая на множитель $U_0/4t$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$-2z \frac{df}{dz} = a^2 \frac{d^2 f}{dz^2}, \tag{5.7}$$

Делаем замену переменной $f' = V$ то есть $f = \int V dz$, тогда

$$-2zV = a^2 V'$$

$$-\frac{2z}{a^2} = \frac{V'}{V},$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\ln V = -\frac{z^2}{a^2} + C,$$

$$V = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

$$f = C\int e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz \tag{5.8}$$

Необходимо определить пределы интегрирования:

$z = \dfrac{x}{2\sqrt{t}}$, так как t в знаменателе, а в начальном условии (5.2) $t=0$, имеем:

1). Если $x > 0$, то $z \to \infty$ при $t \to 0$

$U(x,t) = U_0 f(z)$

$U(x,0) = U_0$, при $x > 0$

$$f(+\infty) = 1 \tag{5.9}$$

2). Если $x < 0$, то $z \to -\infty$ при $t \to 0$

$U(x,0) = 0$, при $x < 0$

$$f(-\infty) = 0 \tag{5.10}$$

Итак, $f = C\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int\limits_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\xi^2} d\xi$.

Здесь нижний предел выбран так, чтобы выполнялось условие (5.10). Чтобы удовлетворить условию (5.9), следует положить:

$C_1 = 1/\sqrt{\pi}$

Таким образом,

$$U(x,t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{U_0}{2}\left[1 + \Phi(\frac{x}{2a\sqrt{t}})\right], \tag{5.11}$$

где

$\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\xi^2} d\xi$ – интеграл ошибок

$$f' = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = \int\limits_0^z Ce^{-\frac{z^2}{a^2}} dz\Big|_{z\to\infty} = a\int\limits_0^z Ce^{-\frac{z^2}{a}} \frac{dz}{a}\Big|_{z\to\infty}$$

Сделаем замену переменной

$$y = \frac{z}{a},\ dy = \frac{dz}{a}$$, получим

$$f = aC\int_0^z e^{-y^2}\,dy$$

[при $t \to 0,\ z \to \infty$]

$$U_0 = \frac{aC\sqrt{\pi}}{2}, C = \frac{2U_0}{a\sqrt{\pi}} \qquad U(\infty) = U_0 = aC\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$U(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}U_0\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-y^2}\,dy$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2}\,dy$$ - стандартная функция ошибок

$$U(x,t) = U_0\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$ - решение задачи.

Следствия.

Если начальное значение имеет вид

$$U(x,0) = \begin{cases} U_0, x > x_1 \\ 0, x < x_1 \end{cases}$$, то

$$U(x,t) = U_0\Phi\left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}\right)$$ - решение задачи

Если начальные значения задаются в виде

$$U(x,0) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < x_1 \\ U_0 \text{ при } x_1 < x < x_2, \\ 0, \text{ при } x_2 < x \end{cases}$$

то в этом случае

$$U(x,t) = \frac{U_0}{2}\left(\Phi\left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x_2 - x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)$$ - решение задачи.

5.2. Задача без начальных условий

Если изучается процесс теплопроводности в момент, достаточно удаленный от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения.

Рассмотрим задачу для полубесконечного стержня:

Найти ограниченное решение уравнения теплопроводности в области $x>0$,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{5.12}$$

удовлетворяющее условию

$$U(0,t) = A\cos\omega t \tag{5.13}$$

Это наиболее часто встречающийся случай граничного условия.

Запишем граничное условие в виде

$$U(0,t) = Ae^{i\omega t} \tag{5.14}$$

Из линейности и вещественности уравнения теплопроводности следует, что действительная и мнимая части некоторого комплексного решения уравнения теплопроводности каждая в отдельности удовлетворяет тому же уравнению.

Если найдено решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условию (5.14), то его действительная часть удовлетворяет условию (5.13), а мнимая – условию

$$U(0,t) = A\sin\omega t$$

Нужно найти установившийся режим при большом значении t.

$$\operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos\omega t$$

решение будем искать в виде

$$U(x,t) = Ce^{\alpha x+\beta t} \tag{5.15}$$

где γ и β - неопределенные пока постоянные.

Подставим выражение (5.15) в уравнение (5.12) и граничное условие. Находим

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = C\beta e^{\gamma x+\beta t}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} = C\alpha^2 e^{\gamma x+\beta t}$$

$$\cancel{C}\beta\, \cancel{e^{\gamma x+\beta t}} = a^2\, \cancel{C}\gamma^2\, \cancel{e^{\gamma x+\beta t}}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{a^2}\beta,$$

$\tilde{U}(0,t) = Ce^{\beta t} = Ae^{i\omega t}$, следовательно, $\beta = i\omega,\ C = A$.

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right].$$

Подставим полученные значения γ и β в уравнение (5.15)

$$\tilde{U}(x,t) = Ae^{\pm\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}+i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right)x+i\omega t}.$$

Для нахождения $U(x,t)$ необходимо взять вещественную часть от $\tilde{U}(x,t)$:

$$U(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right). \qquad (5.16)$$

Это решение удовлетворяет уравнению теплопроводности и граничному условию (5.13). Формула (5.16) в зависимости от выбора знака определяет не одну, а две функции. Однако только функция, соответствующая знаку минус, удовлетворяет требованию ограниченности. Таким образом, решение поставленной задачи получаем в виде

$$U(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)$$

5.3. Задача о распространении температурных волн в почве

Эта задача является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы.

Температура на поверхности земли носит ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Обратимся к задаче о распространении периодических температурных колебаний в почве, которую будем рассматривать как однородное полупространство $0 \le x \le \infty$.

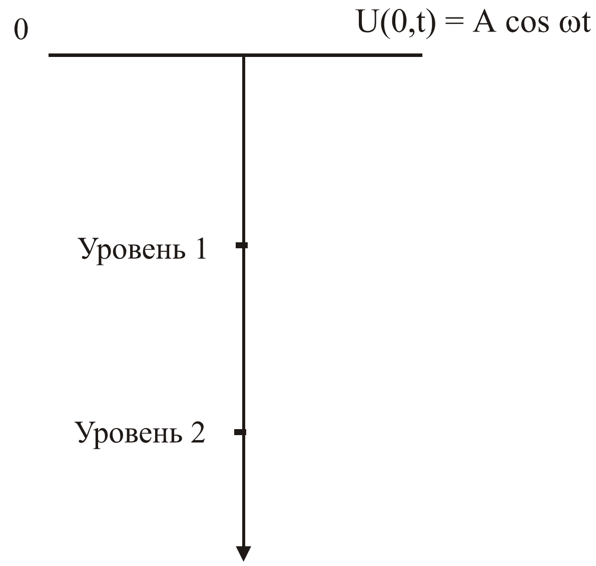
Эта задача является характерной задачей без начальных условий, так как при многократном повторении температурного хода на поверхности влияние начальной температуры будет меньше влияния других факторов, которыми мы пренебрегаем.

Итак, необходимо найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial U}{\partial x^2},\ \text{при}\ (0 \le x < \infty, -\infty < t) \qquad (5.17)$$

удовлетворяющее условию

$$U(0,t) = A\cos\omega t \qquad (5.18)$$



Решение задачи имеет вид

$$U(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right). \qquad (5.19)$$

На основании полученного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом, причем:

1-ый закон Фурье: амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x},$$

то есть, если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии.

2-ой закон Фурье: температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время δ запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине

$$\delta = \frac{x}{a\sqrt{2\omega}},\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$ - закон запаздывания.

3-ий закон Фурье: глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное изменение температурной амплитуды равно

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}.$$

Эта формула показывает, что чем больше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1 и T_2 глубины x_1 и x_2, на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}x_1.$$

Примеры

1. Сравнение суточных и годовых колебаний, для которых $T_2 = 365 \cdot T_1$, показывает, что $x_2 = \sqrt{365}x_1 = 19{,}1x_1$, то есть, глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности была бы в 19,1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

2. Определим запаздывание годового колебания температуры на глубине 4m при

$$a^2 = 4 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

$$a = 6 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{см}}{\sqrt{\text{с}}} \qquad \delta = \frac{x}{a\sqrt{2\omega}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 3 \cdot 10^7\,c \qquad \sqrt{T} = 5600\sqrt{c}$$

$$x = 4\text{м} = 400\text{см} \qquad \delta = \frac{x\sqrt{T}}{2a\sqrt{\pi}} \approx 10^7\,c \cong 4\text{месяца}.$$

$$\delta = ?$$

3. Задача определения возраста Земли.

Предполагаем, что изначально Земля является расплавленным шаром, следовательно $T_0 = 1200^\circ C.$– начальная температура (температура плавления горных пород).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$U(x,0) = T_0$ – начальное условие,

$U(0,t) = 0$ -краевое условие.

$$U(x,t) = T_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$ – общее решение.

На настоящий момент, температура Земли растёт с глубиной в соотношении 3^0C на 100 м.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) \approx \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{3^0}{10^4} \cdot \frac{\text{град}}{\text{см}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = T_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{t}}\Bigg|_{x=0} = \frac{T_0}{a\sqrt{\pi t}} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{град}}{\text{см}}$$

t-начальный момент времени $t \approx 1{,}1 \cdot 10^9$ лет.

Этот результат меньше реального возраста Земли, в силу приближенной модели, но по порядку величины он правильный.

5.4. Уравнение теплопроводности в 3^{-x}-мерном пространстве

Оператор Лапласа в 3^{-x}-мерном пространстве.

$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, - оператор Лапласа в трехмерном пространстве.

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta \frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \text{ -}$$

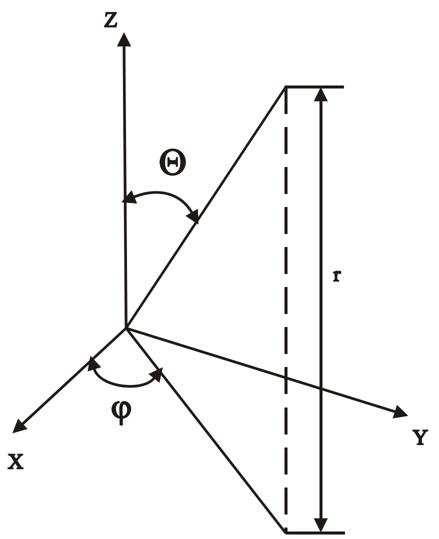
Уравнение Лапласа в сферических координатах.

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \\ r = x + y + z \end{cases} \quad \text{– сферические координаты.}$$

Теперь можно решить эту задачу, учитывая, что Земля является шарообразной. Будем искать сферически симметричные решения уравнения теплопроводности, то есть полагаем, что U не зависит от и φ от, θ .

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U \\ U(x,0) = T_0 = U_0 \\ U(0,t) = 0 \end{cases}$$

$$U(r,\theta,\varphi,t) = U(r,t) = T(t) \cdot R(r)$$



т.к. полагаем, что U не зависит от φ и от θ, то два последних слагаемых оператора Лапласа равны 0.

$$U'_t = R \cdot T'_t \qquad U'_r = T \cdot R'_r$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 T \frac{\partial R}{\partial r}\right) = 2TrR'_r + Tr^2 R''_{rr}$$

$$RT' = a^2 \frac{1}{r^2}\left(2TrR'_r + Tr^2 R''_{rr}\right) = \frac{a^2}{r} T(2R' + rR'')$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{2R' + rR''}{rR} = \lambda,$$

где $\lambda = \mathrm{const} < 0$ пусть $\lambda = -p^2$

$$\begin{cases} T' + p^2 a^2 T = 0 \\ 2R' + rR'' + p^2 rR = 0 \end{cases}$$

$$T = Ae^{-a^2 p^2 t}$$

Сделаем замену $v = R \cdot r,\ \ R = \dfrac{v(r)}{r}$,

$$R' = \frac{v'r - r'v}{r^2} = \frac{v'}{r} - \frac{r'v}{r^2} = \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}$$

$$R'' = \frac{v''r - v'}{r^2} - \frac{v'r^2 - 2rv}{r^4} = \frac{v''}{r} - \frac{v'}{r^2} - \frac{v'}{r^2} + \frac{2v}{r^3}$$

$$\cancel{\frac{2v'}{r}} - \cancel{\frac{2v}{r^2}} + v'' - \cancel{\frac{2v'}{r}} + \cancel{\frac{2v}{r^2}} + p^2 v = 0,$$

$$v'' + p^2 v = 0$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$x^2 + p^2 = 0$$

$$x^2 = -p^2$$

$$x = \pm\sqrt{-p^2} = \pm ip,$$

тогда

$$v = A\cos pr + B\sin pr$$

$$R = \frac{A\cos pr}{r} + \frac{B\sin pr}{r}$$

Функция $U(r,t)$ должна внутри шара иметь определенное конечное значение

$$U(r,t) = 0$$

$$A = 0, \quad \lim_{r\to 0}\frac{\sin pr}{r} = p$$

$$U(R_0,t) = \frac{B\sin pR_0}{R_0}\cdot e^{-a^2p^2t} = 0$$

$$\sin pR_0 = 0$$

$$pR_0 = \pi n, \quad n \in Z,$$

$$p = \frac{\pi n}{R_0}, \quad n \in Z,$$

решение будем искать в виде ряда

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n \sin(\frac{\pi n}{R_0}r)}{r}\cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{R_0}\right)^2 t}$$

$$U(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n \sin(\frac{\pi n}{R_0}r)}{r} = \varphi(r)$$ – начальные условия.

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\tfrac{\pi n}{R_0}r) = r\varphi(r)$$

$$B_n = \frac{2}{R_0}\int_0^{R_0} r\varphi(r)\sin(\tfrac{\pi n}{R_0}r)dr$$

5.5. Определение критической массы урана

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U + \beta U$$ -уравнение диффузии нейтронов,

где U -концентрация нейтронов,

$\beta > 0$ -коэффициент размножения нейтронов,

a^2 -коэффициент диффузии нейтронов,

$U(R_0, t) = 0$ – краевые условия.

Найдем приближенно уравнение критической массы (для сферы). Сделаем замену $U = ve^{\beta t}$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} e^{\beta t} + \beta e^{\beta t} v = a^2 \Delta v e^{\beta t} + \beta v e^{\beta t},$$

так как нужно получить уравнение, аналогичное уравнению теплопроводности, то берём (+)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v$$

$$v(r,t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{R_0} r e^{-\frac{\pi^2 n^2}{R_0^2} at}$$

$$U(r,t) = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{R_0} r e^{\left(\beta - \frac{\pi^2 n^2}{R_0^2} a^2\right) t}$$

цепная реакция пойдёт при условии, что при каком-то n

$$\beta - \frac{\pi^2 n^2}{R_0^2} a^2 > 0$$

$$\beta > \frac{\pi^2 n^2}{R_0^2} a^2$$

$$R_0 > \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}$$ – критический радиус,

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R_0^3$$ – критическая масса,

подставив значение для R_0, получим

$$M_{кр} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho \pi^4 a^3}{\beta^{\frac{3}{2}}}.$$

Содержание

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Блинова И.В., Попов И.Ю.

Простейшие уравнения математической физики.

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка Попов И.Ю.
Дизайн обложки Попов И.Ю.
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав.РИО Гусарова Н.Ф.
Лицензия ИД N 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 18.09.09.
Заказ 2143
Отпечатано на ризографе
Тираж 100 экз.