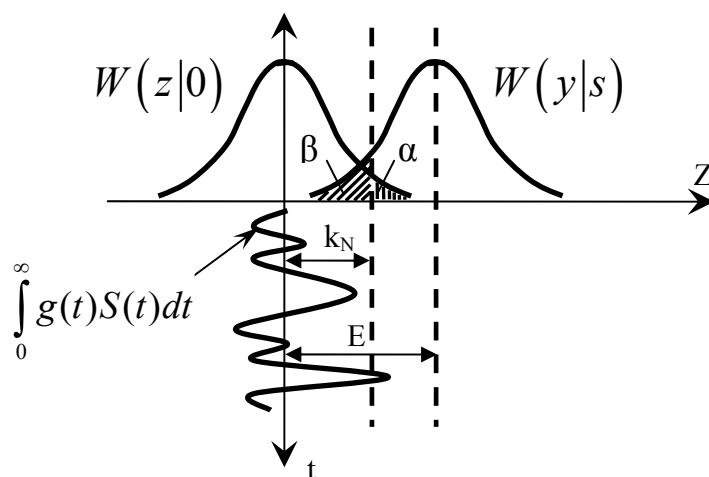


Е.Г. Лебедько

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
(части 3 и 4)**

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

Е.Г. Лебедько

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
(части 3 и 4)**

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2009

Лебедько Е.Г. Математические основы передачи информации. Ч.3, 4: учеб. пособие для вузов.- СПб: СПбГУИТМО, 2009.- 120 с.

В третьей части настоящего учебного пособия излагаются основы статистической теории обнаружения сигналов и элементы теории фильтрации. Четвертая часть посвящена основам теории оценок параметров сигналов. Все теоретические положения иллюстрируются примерами.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров и магистров 551900 «Оптотехника».

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области приборостроения и оптотехники для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 200200 – Оптехники и специальности 200203 – Опτικο-электронные приборы и системы, протокол № 407 от 30.10.09



СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2009

© Лебедько Е. Г., 2009

© Е.Г. Лебедько, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
Часть 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ.....	5
3.1. Основы статистической теории обнаружения сигналов	5
3.1.1. Априорные и апостериорные вероятности, формула Байеса	5
3.1.2. Понятие отношения правдоподобия	9
3.1.3. Вероятности правильных и ошибочных решений	12
3.1.4. Статистические критерии качества принятия решений	14
3.1.5. Структура оптимального обнаружителя.....	22
3.1.6. Обнаружение сигналов на фоне гауссовых шумов	24
3.1.7. Обнаружение при пуассоновской статистике сигнала и шума	35
3.1.8. Последетекторное обнаружение	38
3.1.9. Вычисление условных вероятностей ошибок обнаружения	41
3.1.10. Последовательное обнаружение	53
3.2. Элементы теории фильтрации сигналов	58
3.2.1. Оптимальная линейная фильтрация с позиции максимума отношения сигнала к помехе.....	58
3.2.2. Согласованный фильтр	59
3.2.3. Синтез согласованных фильтров	63
3.2.4. Оптимальные линейные фильтры для приема детерминированных сигналов на фоне окрашенных шумов	66
3.2.5. Оптимальная фильтрация с позиции минимума искажения полезного сигнала.....	69
Часть 4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ	75
4.1. Байесовская оценка случайных параметров	75
4.2. Оценка неизвестных параметров, граница Крамера-Рао.....	80
4.3. Оценка по максимуму правдоподобия	84
4.4. Оценка энергетического параметра	87
4.5. Оценка неэнергетического параметра	89
4.6. Совместная оценка нескольких параметров	97
4.7. Аномальные погрешности при оценке параметров	104
ПРИЛОЖЕНИЕ. Решение интегральных уравнений	107
ЛИТЕРАТУРА	113

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено изложению основ теории статистических решений, в основе формирования которой оказались такие дисциплины как: теория оценки параметров (работы англичанина Р. Фишера, шведа Г. Крамера, советского академика Ю.В. Линника); теория испытания гипотез (работы американского математика Ю. Неймана, английского Е. Пирсона, советского академика А.Н. Колмогорова); теория игр (фундамент заложил французский математик Э. Борель, развил американский ученый Дж. Фон-Нейман).

Объединение и развитие ряда идей этих теорий позволило американскому математику А. Вальду построить общую дисциплину, названную им теорией решающих функций. Американским ученым Д. Миддлтоном методы теории решающих функций успешно были использованы для решения прикладных технических задач связи и локации. В результате последующих работ известных зарубежных и советских ученых, таких как К. Хелстром, В. Давенпорт, Г. Ван Трис, В.И. Тихонов, Б.Р. Левин, С.Е. Фалькович и др., сформировалась теоретико-техническая дисциплина – теория статистических решений, которую можно считать важнейшей главой общей теории связи, локации и управления. В пособии изложены два раздела прикладной теории статистических решений: статистическая теория обнаружения сигналов, в которую вошли также элементы теории фильтрации, и оценка параметров сигналов.

Часть 3

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ

Задача обнаружения сигналов формулируется следующим образом. Пусть имеется некоторое число различных сигналов $s_i(t)$, из которых лишь один передается на интервале наблюдения T . Полезные сигналы – сигналы, имеющие информационные параметры, могут быть детерминированными, квазидетерминированными, либо случайными. Прием таких сигналов осуществляется на фоне мешающего воздействия – помехи $x(t)$, вероятностные характеристики которой известны. Известен и характер композиции помехи с полезным сигналом $[s_i(t), x(t)]$.

В любом случае в приемную систему поступает случайный процесс $y(t)$, представляющий собой либо смесь полезного сигнала и помехи, либо только одну помеху.

Таким образом, после приема реализации $y(t)$ могут быть выдвинуты разные гипотезы о том, какой из сигналов $s_i(t)$ был передан и был ли он передан вообще. Задача статистической теории обнаружения сигналов – дать метод принятия решения о наиболее достоверной из гипотез.

Однако случайный характер принимаемой реализации $y(t)$ приводит к тому, что принятие решения не застраховано от ошибок. Видимо, при принятии решения следует выбрать такую стратегию, при которой последствия, связанные с указанными ошибками, были бы минимальными.

В зависимости от числа возможных вариантов передаваемых сигналов задачи обнаружения подразделяются на двухальтернативные и многоальтернативные.

В двухальтернативных задачах на интервале наблюдения может передаваться один из двух сигналов. Частным случаем двухальтернативной задачи является обнаружение факта передачи или отсутствия единственного сигнала, так как отсутствие сигнала на интервале наблюдения эквивалентно нулевому сигналу.

В многоальтернативных задачах требуется идентифицировать принятый сигнал с одним из n сигналов с известными характеристиками.

3.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

3.1.1. Априорные и апостериорные вероятности, формула Байеса

Прежде всего, введем некоторые понятия. Положим, что наблюдение проводится в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n на интервале T . Известна n -мерная плотность вероятностей помехи

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n).$$

Это означает, что известно, с какой плотностью вероятностей в момент времени $t = t_1$ помеха примет значение $x \leq x_1$, в момент $t = t_2$ - значение $x \leq x_2$, и т.д. Эти случайные значения можно определить на плоскости x, t (рис.3.1).

Такое представление можно заменить векторным, считая значения x_1, x_2, \dots, x_n координатами вектора помехи \vec{x} в n - мерном пространстве:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Поскольку координаты x_1, x_2, \dots, x_n - случайные величины, то и сам вектор \vec{x} должен быть случайным и характеризоваться плотностью вероятностей $W(\vec{x})$.

Зная $W_n(\vec{x})$, можно определить вероятность попадания конца вектора \vec{x} в бесконечно малый объем $d\Omega(\vec{x}) = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Если

$$\int_{\Omega(\vec{x})} W_n(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = 1,$$

то область $\Omega(\vec{x})$ называется пространством помехи (или пространством шума).

Неизвестные параметры a_1, a_2, \dots, a_n передаваемого сигнала $s(t) = s(t, a_1, a_2, \dots, a_n)$ можно также рассматривать как координаты вектора \vec{a} , определяемого в n - мерном пространстве. И, по аналогии с предыдущим, если

$$\int_{\Omega(\vec{a})} W_n(\vec{a}) d\Omega(\vec{a}) = 1,$$

то область $\Omega(\vec{a})$ называется пространством параметров.

Введем также понятие пространства наблюдений. Принимаемая реализация $y(t) = y[s(t, a), x(t)]$ также является случайным процессом, значения которого y_1, y_2, \dots, y_n в дискретные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n - случайные величины. Этот процесс представим вектором

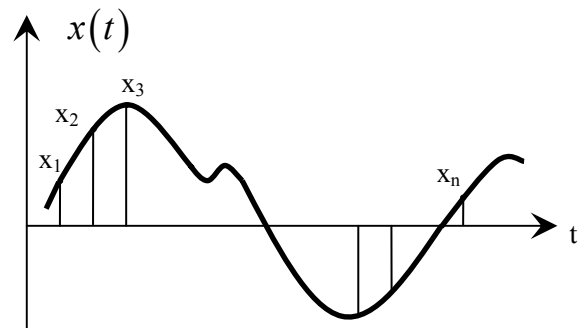


Рис. 3.1. Отсчеты случайной функции

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n). \text{ Если}$$

$$\int_{\Omega(\vec{y})} W_n(\vec{y}) d\Omega(\vec{y}) = 1,$$

то область $\Omega(\vec{y})$ называется пространством наблюдения.

Используя введенные понятия, сформулируем условия задачи, рассматриваемой в теории статистических решений.

Положим известными: 1) априорную (доопытную) плотность вероятностей $W_n(\vec{a})$ вектора параметров \vec{a} сигнала $s(t)$; 2) плотность вероятностей $W_n(\vec{x})$ вектора помехи \vec{x} ; 3) характер композиции сигнала и шума $[s(t), x(t)]$.

Необходимо определить значение вектора параметров \vec{a} . Вектор \vec{a} определяется на основе принятой реализации $y(t)$. Но вектор \vec{y} - случайный вектор, так как его значение зависит от вектора помехи \vec{x} . Поэтому истинное значение вектора \vec{a} нельзя определить достоверно, а можно лишь предсказать с большей или меньшей вероятностью то или иное значение вектора \vec{a} из области его возможных значений. Если бы имелась возможность провести большое число наблюдений (опытов), то апостериорно вероятности или плотности вероятностей различных значений вектора \vec{a} оказались бы рассеянными по всей области его возможных значений. Однако благодаря тому, что при наблюдениях получена дополнительная информация о векторе \vec{a} по сравнению с априорной, плотность вероятностей вектора \vec{a} после опытов $W_n(\vec{a}|\vec{y})$ (она называется апостериорной) будет иметь тенденцию большего сосредоточения вокруг истинного значения вектора параметров \vec{a} , чем априорная.

На рис. 3.2 в качестве иллюстрации приведены равновероятная априорная плотность вероятностей $W(a)$ и апостериорная (послеопытная) плотность вероятностей $W(a|y)$ параметра a .

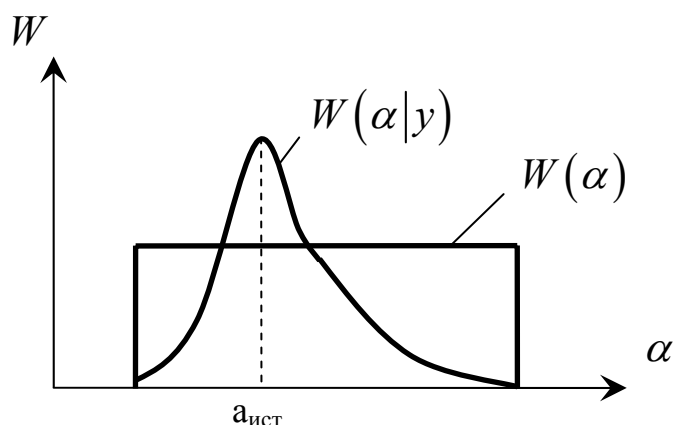


Рис. 3.2. Априорная и апостериорная плотности вероятностей

Апостериорную плотность вероятностей можно рассматривать как условную функцию распределения вектора \vec{a} при условии, что стал известен вектор \vec{y} . Поскольку вся информация о векторе \vec{a} заключена в апостериорной вероятности или плотности вероятностей, то задача сводится к определению $P(\vec{a}|\vec{y})$ или $W_n(\vec{a}|\vec{y})$. Для их вычисления воспользуемся формулой Байеса. Эта формула, широко применяемая в различных приложениях теории вероятностей, была выведена Байесом ещё в 1783 году.

Из теоремы умножения вероятностей известно, что вероятность появления совместных событий определяется как произведение безусловной вероятности появления одного события и условной вероятности появления второго события, если первое произошло. Следовательно,

$$P(\vec{a}, \vec{y}) = P(\vec{a})P(\vec{y}|\vec{a}) = P(\vec{y})P(\vec{a}|\vec{y})$$

или

$$W_n(\vec{a}, \vec{y}) = W_n(\vec{a})W_n(\vec{y}|\vec{a}) = W_n(\vec{y})W_n(\vec{a}|\vec{y}).$$

Отсюда находим:

$$P(\vec{a}|\vec{y}) = \frac{P(\vec{a})P(\vec{y}|\vec{a})}{P(\vec{y})} \quad (3.1)$$

или

$$W_n(\vec{a}|\vec{y}) = \frac{W_n(\vec{a})W_n(\vec{y}|\vec{a})}{W_n(\vec{y})}. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1) или (3.2) носят название формулы Байеса.

Поскольку вектор параметра \vec{a} может принимать любое из k значений, для каждого из возможных значений \vec{a} , т.е. для $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, можно записать:

$$P(\vec{a}_1)P(\vec{y}|\vec{a}_1) = P(\vec{y})P(\vec{a}_1|\vec{y}),$$

$$P(\vec{a}_2)P(\vec{y}|\vec{a}_2) = P(\vec{y})P(\vec{a}_2|\vec{y}),$$

.....,

$$P(\vec{a}_k)P(\vec{y}|\vec{a}_k) = P(\vec{y})P(\vec{a}_k|\vec{y}).$$

Сложим почленно эти уравнения и получим

$$\sum_{i=1}^k P(\vec{a}_i)P(\vec{y}|\vec{a}_i) = P(\vec{y}) \sum_{i=1}^k P(\vec{a}_i|\vec{y}). \quad (3.3)$$

В правой части выражения (3.3) суммирование вероятностей проводится по всем возможным значениям вектора \vec{a} . Каково бы ни было при этом

условие, т.е. каков бы ни был вектор \vec{y} , сумма должна быть равной единице, так как вектор \vec{a} , по определению, примет какое-либо одно значение из k возможных. Поэтому

$$\sum_{i=1}^k P(\vec{a}_i | \vec{y}) = 1.$$

Тогда имеем

$$P(\vec{y}) = \sum_{i=1}^k P(\vec{a}_i) P(\vec{y} | \vec{a}_i). \quad (3.4)$$

Формула (3.4) характеризует полную вероятность $P(\vec{y})$ события \vec{y} при всех возможных значениях \vec{a} .

Подставив значение (3.4) в выражение (3.1), получим формулу Байеса в общем виде:

$$P(\vec{a} | \vec{y}) = \frac{P(\vec{a}) P(\vec{y} | \vec{a})}{\sum_{i=1}^k P(\vec{a}_i) P(\vec{y} | \vec{a}_i)}. \quad (3.5)$$

Следует отметить, что в числителе этой формулы значение \vec{a} может быть выбрано любым из числа k возможных.

При непрерывных наблюдениях формула (3.5) примет вид

$$W_n(\vec{a} | \vec{y}) = \frac{W_n(\vec{a}) W_n(\vec{y} | \vec{a})}{\int_{\Omega(\vec{a})} W_n(\vec{a}) W_n(\vec{y} | \vec{a}) d\Omega(\vec{a})}. \quad (3.6)$$

Как видим, для определения апостериорной плотности вероятностей $W_n(\vec{a} | \vec{y})$ при известной априорной плотности вероятностей $W_n(\vec{a})$ необходимо знать функцию $W_n(\vec{y} | \vec{a})$.

3.1.2. Понятие отношения правдоподобия

Допустим, что наблюдение произведено и, таким образом, вектор \vec{y} стал известен. Если подставить его в выражение $W_n(\vec{y} | \vec{a})$, то последнее будет зависеть только от \vec{a} , т.е. $W_n(\vec{y} | \vec{a}) = L(\vec{a})$. Функция $L(\vec{a})$ - условная плотность вероятностей вектора \vec{y} при некотором значении вектора \vec{a} - называется *функцией правдоподобия*. Если \vec{a} может принимать конечное множество значений $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, то функция правдоподобия также может принимать конечное множество значений. Если \vec{a} имеет непрерывное распределение, то и функция правдоподобия может принимать бесконечное множество значений.

Для определения истинного значения вектора параметра \vec{a} Р. Фишер предложил принцип максимума правдоподобия. Этот принцип можно сформулировать в виде следующего правила: *наиболее правдоподобным является то значение параметра, для которого функция правдоподобия максимальна.*

Этот принцип не может быть выведен из каких-либо предпосылок, а принимается как постулат, основанный на соображениях здравого смысла.

Если вектору \vec{a} соответствует k альтернативных значений, то согласно принципу максимума правдоподобия необходимо вычислить все возможные значения функции правдоподобия $L(\vec{a}_1), L(\vec{a}_2), \dots, L(\vec{a}_k)$, а затем, сравнив их между собой, найти наибольшее. Пусть, например, наибольшим будет $L(\vec{a}_j)$: $L(\vec{a}_j) > L(\vec{a}_i)$, где $i \neq j, i = 1, 2, 3, \dots, k$. В этом случае наиболее правдоподобным следует считать $\vec{a} = \vec{a}_j$.

Отношение функций правдоподобия $L(\vec{a}_j)$ и $L(\vec{a}_i)$ называется отношением правдоподобия, или коэффициентом правдоподобия:

$$\Lambda = \frac{L(\vec{a}_j)}{L(\vec{a}_i)} = \frac{W_n(\vec{y}|\vec{a}_j)}{W_n(\vec{y}|\vec{a}_i)}. \quad (3.7)$$

Достоинство принципа максимума правдоподобия заключается в том, что его применение не требует знания априорных вероятностей или плотностей вероятностей. Поэтому принцип максимума правдоподобия можно использовать при отсутствии априорной информации. Однако, если априорные сведения известны, то пренебрегать ими нерационально, так как априорная информация может помочь уточнить результаты решения. С учетом априорных вероятностей отношение правдоподобия примет вид

$$\Lambda_a = \frac{P(\vec{a}_j)L(\vec{a}_j)}{P(\vec{a}_i)L(\vec{a}_i)} = \frac{P(\vec{a}_j)W_n(\vec{y}|\vec{a}_j)}{P(\vec{a}_i)W_n(\vec{y}|\vec{a}_i)}, \quad (3.8)$$

где $P(\vec{a}_j)$ и $P(\vec{a}_i)$ - априорные вероятности параметров \vec{a}_j и \vec{a}_i соответственно. При этом Λ_a называется абсолютным отношением правдоподобия.

При решении задачи обнаружения необходимо установить только факт наличия сигнала. Поэтому отношение правдоподобия записывается в виде

$$\Lambda = \frac{L(s)}{L(0)} = \frac{W_n(\vec{y}|s)}{W_n(\vec{y}|0)}. \quad (3.9)$$

При этом функция правдоподобия $L(0) = W_n(\vec{y}|0) = W_n(\vec{x})$, т.е.

представляет собой плотность вероятностей вектора помехи. Функция правдоподобия при наличии полезного сигнала зависит от композиции смеси сигнала и помехи. Если, например, смесь сигнала и помехи представляет собой алгебраическую сумму, т.е. сигнал и помеха аддитивны: $y(t) = y[s(t), x(t)] = x(t) + s(t)$, то функция правдоподобия при наличии сигнала будет равна $L(s) = W_n(\vec{y}|s) = W_n(\vec{x} + s)$, а отношение правдоподобия в этом случае записывается в виде

$$\Lambda = \frac{W_n(\vec{x} + s)}{W_n(\vec{x})}. \quad (3.10)$$

При решении общей задачи, когда о сигнале известно, что он зависит от ряда параметров a_1, a_2, \dots, a_k , его можно записать в виде $s(t, a_1, a_2, \dots, a_k)$. Если эти параметры носят случайный характер с известной плотностью вероятностей $W(a_1, a_2, \dots, a_k)$, то отношение правдоподобия принимает вид

$$\Lambda = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\vec{y}|a_1, a_2, \dots, a_k) W(a_1, a_2, \dots, a_k) da_1 da_2 \dots da_k}{W(\vec{y}|0)} \quad (3.11)$$

Внесем $W_n(\vec{y}|0)$ под знак интеграла и обозначим отношение

$$\frac{W_n(\vec{y}|a_1, a_2, \dots, a_k)}{W_n(\vec{y}|0)} = \Lambda(a_1, a_2, \dots, a_k),$$

тогда получим следующее выражение для отношения правдоподобия:

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(a_1, a_2, \dots, a_k) W(a_1, a_2, \dots, a_k) da_1 da_2 \dots da_k. \quad (3.12)$$

Здесь $\Lambda(a_1, a_2, \dots, a_k)$ определяет наличие сигнала с определенными параметрами (a_1, a_2, \dots, a_k) , а интегрирование по всем возможным их значениям дает математическое ожидание отношения правдоподобия. Таким образом, выражение (3.12) указывает на достоверность обнаружения сигнала при любых возможных значениях его случайных параметров.

Отношение правдоподобия, как будет показано ниже, позволяет определить оптимальный алгоритм обработки смеси сигнала с помехой. Однако задачи практического использования результатов наблюдений обычно требуют выдачи определенного ответа о наличии или отсутствии

полезного сигнала, что в ряде случаев позволяет разрешить вопрос о присутствии в контролируемом пространстве объекта, вызывающего появление сигнала.

Принятие решения о наличии или отсутствии сигнала – задача, не свойственная алгоритму обработки в системе наблюдения. Она определяется стратегией наблюдения на основе тех или иных статистических критериев качества (критериев принятия решений).

3.1.3. Вероятности правильных и ошибочных решений

Будем рассматривать простейшую задачу – проверку простой гипотезы против простой альтернативы. При решении этой задачи изначально имеется вектор наблюдения \vec{y} и известно, что ему соответствует одна из двух функций правдоподобия - $L(s)$ или $L(0)$, связанных с взаимоисключающими состояниями s и 0 наблюдаемого явления.

Обозначим через H_1 и H_0 гипотезы о том, что вектор наблюдения \vec{y} определяется функциями правдоподобия $L(s)$ и $L(0)$ соответственно, а через γ_1 и γ_0 - решения, состоящие в принятии или отклонении гипотезы H_1 . Гипотеза H_0 является простой альтернативой H_1 .

В этом случае, согласно принципу максимума правдоподобия, правило принятия решения можно записать в виде

$$\Lambda = \frac{L(s)}{L(0)} = \frac{W_n(\vec{y}|s)}{W_n(\vec{y}|0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} C(y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{matrix} \rightarrow \gamma_1 \\ \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.13)$$

где $C(y_1, y_2, \dots, y_n) = const$ - уравнение поверхности в n -мерном пространстве наблюдений $\Omega(\vec{y})$, разделяющей это пространство на две области Γ_1 и Γ_0 .

Если конец вектора наблюдений \vec{y} , характеризующийся функцией правдоподобия $W(\vec{y}|s)$, попадает в область Γ_1 пространства наблюдений, то принимается решение γ_1 о наличии полезного сигнала (истинности гипотезы H_1). Если конец вектора наблюдений, характеризующийся функцией правдоподобия $W(\vec{y}|0)$, окажется в области Γ_0 , то принимается решение γ_0 об отсутствии полезного сигнала (отклонение гипотезы H_1).

Выражение (3.13) представляет собой правило принятия решения, в левой части которого указывается оптимальный алгоритм обработки смеси

сигнала и помехи, а в правой части неравенства определяется принимаемое решение в соответствии с выбранной стратегией поведения.

При использовании любой заранее установленной стратегии в принятии решения в силу случайной природы вектора наблюдения наряду с правильными решениями неизбежны и ошибочные.

Возможны ошибки двух видов. Ошибка первого рода, или ложная тревога, если конец вектора наблюдений \vec{y} , характеризующийся функцией правдоподобия $W_n(\vec{y}|0)$, оказывается в области Γ_1 , и тем самым принимается гипотеза H_1 , т.е. решение γ_1 о наличии полезного сигнала, когда в действительности верна гипотеза H_0 .

Ошибка второго рода, или ложный отбой, возникает при попадании конца вектора наблюдения \vec{y} , характеризуемого функцией правдоподобия $W_n(\vec{y}|s)$, в область Γ_0 и принятии решения γ_0 об отсутствии полезного сигнала, когда на самом деле верна гипотеза H_1 .

Выражения для условных вероятностей ошибок принятия решений и правильных решений можно легко записать в следующем виде.

Условная вероятность ошибки первого рода – *вероятность ложной тревоги*:

$$\alpha = P\{\gamma_1|H_0\} = \int_{\Gamma_1} W_n(\vec{y}|0) d\Omega(\vec{y}). \quad (3.14)$$

Иногда эту вероятность называют *уровнем значимости*.

Условная вероятность ошибки второго рода – *вероятность ложного отбоя* (вероятность пропуска):

$$\beta = P\{\gamma_0|H_1\} = \int_{\Gamma_0} W_n(\vec{y}|s) d\Omega(\vec{y}). \quad (3.15)$$

Условная вероятность правильного принятия решения, состоящего в принятии гипотезы H_1 о наличии полезного сигнала, дополняет условную вероятность ошибки второго рода β до единицы, так как при истинности гипотезы H_1 можно принять только два решения - γ_1 или γ_0 . Эта вероятность

$$d_1 = P\{\gamma_1|H_1\} = \int_{\Gamma_1} W_n(\vec{y}|s) d\Omega(\vec{y}) = 1 - \beta; \quad (3.16)$$

и ее называют *мощностью принятия решения*.

Условная вероятность правильного принятия решения об отсутствии полезного сигнала (принятие гипотезы H_0) дополняет вероятность ложной тревоги до единицы и определяется зависимостью

$$d_0 = P\{\gamma_0 | H_0\} = \int_{\Gamma_0} W_n(\vec{y}|0) d\Omega(\vec{y}) = 1 - \alpha. \quad (3.17)$$

Если известны априорные вероятности наличия P_1 и отсутствия P_0 полезного сигнала, то можно найти априорные вероятности принятия решений γ_1 и γ_0 по формулам:

$$P\{\gamma_1\} = P_1 P\{\gamma_1 | H_1\} + P_0 P\{\gamma_1 | H_0\} = P_1(1 - \beta) + P_0\alpha, \quad (3.18)$$

$$P\{\gamma_0\} = P_0 P\{\gamma_0 | H_1\} + P_1 P\{\gamma_0 | H_0\} = P_0(1 - \alpha) + P_1\beta. \quad (3.19)$$

Эти вероятности определяют частоты появления отдельных решений в длинной последовательности принятых решений.

Величина, определяемая зависимостью

$$P_n = P_0\alpha + P_1\beta,$$

носит название нормы ошибок принятия решения.

3.1.4. Статистические критерии качества принятия решений

Наличие в последовательности решений не только правильных, но и ошибочных, является неизбежной платой за попытку получить решения в условиях неполной информации. Последствия ошибочных решений могут быть охарактеризованы некоторой неотрицательной функцией $\Pi(\vec{a}, \gamma)$, которую называют *функцией потерь*. Здесь γ - элемент множества решений, которые можно вынести относительно вектора наблюдаемых параметров \vec{a} . Так как решения $\gamma = \gamma(\vec{y})$ зависят от вектора наблюдений \vec{y} , который является случайным, то и функцию потерь можно считать случайной.

В теории решающих функций используется математическое ожидание функции потерь

$$r[\vec{a}, \gamma(\vec{y})] = m_1 \{ \Pi[\vec{a}, \gamma(\vec{y})] \} = \int_{\Omega(\vec{y})} \Pi[\vec{a}, \gamma(\vec{y})] W_n(\vec{y}|\vec{a}) d\Omega(\vec{y}), \quad (3.20)$$

которое называется *функцией риска* и зависит от вектора параметров \vec{a} и выбранной решающей функции $\gamma(\vec{y})$.

Наиболее предпочтительная стратегия принятия решения будет зависеть от выбранного статистического критерия качества, который минимизирует функцию риска. Рассмотрим критерии качества, определяющие классическую процедуру обнаружения при байесовских и небайесовских решениях. Сущность этих решений заключается в определении уравнения поверхности $C(y_1, y_2, \dots, y_n) = const$, разделяющей области Γ_1 и Γ_0 пространства наблюдений $\Omega(\vec{y})$, такого, чтобы нежелательные последствия были минимальны.

1) Критерий Байеса, или критерий минимума среднего риска

Байесовский подход к решению задачи обнаружения заключается в том, что вектор параметров \vec{a} считается случайной величиной с известной априорной плотностью вероятностей $W_n(\vec{a})$. В этом случае можно определить средний риск

$$\begin{aligned} R &= \int_{\Omega(\vec{a})} r[\vec{a}, \gamma(\vec{y})] W_n(\vec{a}) d\Omega(\vec{a}) = \\ &= \int_{\Omega(\vec{a})} \int_{\Omega(\vec{y})} \Pi[\vec{a}, \gamma(\vec{y})] W_n(\vec{y}|\vec{a}) W_n(\vec{a}) d\Omega(\vec{y}) d\Omega(\vec{a}) = . \quad (3.21) \\ &= \int_{\Omega(\vec{a})} \int_{\Omega(\vec{y})} \Pi[\vec{a}, \gamma(\vec{y})] W_n(\vec{y}, \vec{a}) d\Omega(\vec{y}) d\Omega(\vec{a}) \end{aligned}$$

Сущность критерия Байеса заключается в минимизации этого среднего риска.

Применительно к простейшей задаче обнаружения вектор параметра \vec{a} может принять только два значения s и 0 , которые соответствуют наличию и отсутствию полезного сигнала. Также могут приняты только два решения: γ_1 - о наличии сигнала, γ_0 - о его отсутствии.

Естественно, что априорная вероятность появления сигнала равна P_1 , а его отсутствия - P_0 . При этом $P_1 + P_0 = 1$.

Функция потерь преобразуется в матрицу потерь (или стоимостей):

$$\Pi(a_i, \gamma_i) = \begin{pmatrix} \Pi(0, \gamma_0) & \Pi(0, \gamma_1) \\ \Pi(s, \gamma_0) & \Pi(s, \gamma_1) \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

где $\Pi(0, \gamma_0)$ - стоимость поощрения за принятие правильного решения γ_0 , т.е. принимается гипотеза H_0 об отсутствии сигнала, когда это действительно имеет место; $\Pi(0, \gamma_1)$ - стоимость штрафа за ошибочное решение γ_1 при истинности гипотезы H_0 об отсутствии полезного сигнала; $\Pi(s, \gamma_0)$ - стоимость штрафа за ошибочное решение γ_0 при истинности гипотезы H_1 о наличии полезного сигнала; $\Pi(s, \gamma_1)$ - стоимость поощрения за правильное принятие решения γ_1 , т.е. принятие гипотезы H_1 о наличии полезного сигнала.

Следует при этом отметить, что $\Pi(0, \gamma_1) > \Pi(0, \gamma_0)$ и $\Pi(s, \gamma_0) > \Pi(s, \gamma_1)$.

Таким образом, учитывая априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала и матрицу потерь (3.22), формулу (3.21) для среднего

риска можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{\Omega(\bar{a})} \int_{\Omega(\bar{y})} \Pi[\bar{a}, \gamma(\bar{y})] W_n(\bar{y}|\bar{a}) W_n(\bar{a}) d\Omega(\bar{y}) d\Omega(\bar{a}) = \\
 &= P_0 \Pi(0, \gamma_0) + P_1 \Pi(s, \gamma_0) - \int_{\Gamma_1} \left\{ P_1 [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)] W_n(\bar{y}|s) - \right. \\
 &\quad \left. - P_0 [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)] W_n(\bar{y}|0) \right\} d\Omega(\bar{y}).
 \end{aligned}$$

Так как в этой формуле $P_0 \Pi(0, \gamma_0) + P_1 \Pi(s, \gamma_0)$ - постоянная величина, то минимум среднего риска R будет иметь место при условии, что подынтегральная функция положительна:

$$\begin{aligned}
 &P_1 [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)] W_n(\bar{y}|s) - \\
 &- P_0 [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)] W_n(\bar{y}|0) > 0.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} > \frac{P_0 [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)]}{P_1 [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)]}. \quad (3.23)$$

Таким образом, уравнение поверхности, разделяющей в этом случае области Γ_0 и Γ_1 , а, следовательно, и определяющей размеры этих областей, имеет вид

$$C(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{P_0 [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)]}{P_1 [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)]} = C. \quad (3.24)$$

Следовательно, правило принятия решения, основанное на критерии минимума среднего риска, можно сформулировать следующим образом: принимается решение γ_1 (отвергается гипотеза H_0), если отношение правдоподобия больше величины C , и принимается решение γ_0 (отвергается гипотеза H_1), если отношение правдоподобия меньше указанной величины, т.е.

$$\Lambda = \frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} C = \frac{P_0 [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)]}{P_1 [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)]} \rightarrow \gamma_1. \quad (3.25)$$

2) Критерий идеального наблюдателя (Зигерта-Котельникова)

Для идеального наблюдателя функция потерь будет определяться только стоимостями штрафов за принятие ошибочных решений. При этом стоимость этих штрафов одинакова как при ошибках первого рода, так и при ошибках второго рода. Таким образом, имеем:

$$\Pi(0, \gamma_0) = \Pi(s, \gamma_1) = 0, \text{ и } \Pi(0, \gamma_1) = \Pi(s, \gamma_0) = \Pi.$$

В этом случае, согласно формуле (3.21), выражение для среднего риска примет вид

$$R = \Pi \left\{ P_1 - \int_{\Gamma_1} [P_1 W(\bar{y}|s) - P_0 W(\bar{y}|0)] d\Omega(\bar{y}) \right\}. \quad (3.26)$$

Естественно, что средний риск будет минимальным, если подынтегральное выражение будет величиной положительной, т.е.

$$P_1 W(\bar{y}|s) - P_0 W(\bar{y}|0) > 0.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} > \frac{P_0}{P_1}. \quad (3.27)$$

В данном случае уравнение поверхности, разделяющей пространство наблюдений,

$$C(y_1, y_2, \dots, y_n) = C = \frac{P_0}{P_1}.$$

Следовательно, правило принятия решения по критерию идеального наблюдателя может быть сформулировано в следующем виде:

$$\Lambda = \begin{matrix} & & H_1 \\ & \frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} > C = \frac{P_0}{P_1} & \rightarrow \gamma_1 \\ & & H_0 \\ & \frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} < C = \frac{P_0}{P_1} & \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.28)$$

т.е. принимается решение о наличие полезного сигнала γ_1 , если отношение правдоподобия Λ превысит величину C , и принимается решение об его отсутствии γ_0 , если отношение правдоподобия будет меньше C .

Формулу (3.26), согласно (3.16), можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} R &= \Pi \left\{ P_1 - \int_{\Gamma_1} [P_1 W(\bar{y}|s) - P_0 W(\bar{y}|0)] d\Omega(\bar{y}) \right\} = \\ &= \Pi \left[P_0 \int_{\Gamma_1} W_n(\bar{y}|0) d\Omega(\bar{y}) + P_1 \int_{\Gamma_0} W_n(\bar{y}|s) d\Omega(\bar{y}) \right] = \\ &= \Pi(P_0 \alpha + P_1 \beta), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где α и β - условные вероятности ошибок первого и второго родов.

Соотношение (3.29) позволяет сделать вывод о том, что правило принятия решения по критерию идеального наблюдателя *минимизирует норму ошибок* (априорную вероятность ошибок).

3) Критерий максимума правдоподобия

Если нет никаких данных относительно априорных вероятностей наличия и отсутствия полезного сигнала, можно воспользоваться критерием максимума правдоподобия. Для этого критерия априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала считаются одинаковыми (т.е. $P_1 = P_0 = 0,5$), а стоимости штрафов и поощрений такие же, как и для критерия идеального наблюдателя. Естественно, что при этом критерии средний риск равен

$$R = 0,5\Pi \left\{ 1 - \int_{\Gamma_1} [W(\bar{y}|s) - W(\bar{y}|0)] d\Omega(\bar{y}) \right\},$$

а правило принятия решения будет определяться зависимостью

$$\Lambda = \frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} \begin{matrix} > & \xrightarrow{H_1} & \gamma_1 \\ < & \xrightarrow{H_0} & \gamma_0 \end{matrix} . \quad (3.30)$$

Таким образом, процедура принятия решения сводится к вычислению отношения правдоподобия и сравнения его с единицей. Следовательно, правило принятия решения по критерию максимума правдоподобия является частным случаем правила по критерию идеального наблюдателя.

4) Минимаксный критерий качества

Если априорное распределение параметров $W_n(\vec{a})$ неизвестно, то для установления критерия качества принятия решения можно использовать только функцию риска $r[\vec{a}, \gamma(\bar{y})]$. Использовать байесовское решение в том виде, как оно излагалось, не представляется возможным. В этом случае прибегают к небайесовским методам решения, одним из которых является *минимаксное решение*. Минимаксное решение минимизирует максимальное значение функции риска $r[\vec{a}, \gamma(\bar{y})]$, т.е. такое решение является наилучшим в наихудшей ситуации, и в некоторых случаях может оказаться слишком осторожным.

В общем случае нахождение минимаксного решения является достаточно сложной задачей. Однако Вальд установил, что при некоторых достаточно слабых ограничениях *минимаксное решение* является *байесовским* относительно наименее благоприятного априорного распределения параметра $W_n(\vec{a})$, максимизирующего средний (байесовский) риск. Таким образом, *сущность минимаксного критерия качества заключается в минимизации максимального среднего риска при наиболее неблагоприятном априорном распределении параметра*.

Для простейшей задачи обнаружения средний риск зависит от априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала. Для того, чтобы найти значение P_1 , которым обусловлено наибольшее значение среднего риска R , необходимо определить максимум среднего риска как функции P_1 , т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial P_1} = & \Pi(s, \gamma_0) - \Pi(0, \gamma_0) - \\ & - \frac{\partial}{\partial P_1} \int_{\Gamma_1} \left\{ P_1 [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)] W_n(\bar{y}|s) - \right. \\ & \left. - P_0 [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)] W_n(\bar{y}|0) \right\} d\Omega(\bar{y}) = 0 . \end{aligned} \quad (3.31)$$

При этом следует учитывать то, что средний риск функционально зависит от P_1 как в явном виде, так и через размеры областей Γ_1 и Γ_0 , которые определяются поверхностью раздела $C(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Дифференцирование приводит к трансцендентному уравнению относительно искомого значения P_1 :

$$\begin{aligned} \Pi(0, \gamma_0) [1 - \alpha(P_1)] + \Pi(0, \gamma_1) \alpha(P_1) = \\ = \Pi(s, \gamma_0) \beta(P_1) + \Pi(s, \gamma_1) [1 - \beta(P_1)] , \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $\alpha(P_1)$ и $\beta(P_1)$ - соответственно условные вероятности первого и второго рода, как функции от неизвестной априорной вероятности наличия сигнала P_1 .

Решение этого уравнения относительно P_1 дает нам значение априорной вероятности P_1^* , которой соответствует абсолютный максимум среднего риска

$$\begin{aligned} R_{\max} = & (1 - P_1^*) \Pi(0, \gamma_0) + P_1^* \Pi(s, \gamma_0) + \\ & + (1 - P_1^*) [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)] \alpha(P_1^*) - \\ & - P_1^* [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)] [1 - \beta(P_1^*)] ; \end{aligned}$$

здесь $\alpha(P_1^*)$ и $\beta(P_1^*)$ - соответственно вероятности ложной тревоги и ложного отбоя, вычисленные при условии, что области Γ_1 и Γ_0 разделены поверхностью

$$C(y_1, y_2, \dots, y_n) = C = \frac{(1 - P_1^*) [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)]}{P_1^* [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)]}.$$

Таким образом, правило принятия решения при минимаксном критерии качества будет определяться соотношением

$$\Lambda = \frac{W_n(\bar{y}|s) \underset{H_1}{>}}{W_n(\bar{y}|0) \underset{H_0}{<}} C = \frac{(1 - P_1^*) [\Pi(0, \gamma_1) - \Pi(0, \gamma_0)] \rightarrow \gamma_1}{P_1^* [\Pi(s, \gamma_0) - \Pi(s, \gamma_1)] \rightarrow \gamma_0}, \quad (3.33)$$

где величина P_1^* определяется решением уравнения (3.32).

Следует еще раз заметить, что $R_{\max} - R \geq 0$ из-за отсутствия априорной информации о наличии или отсутствии полезного сигнала.

5) Критерий Неймана-Пирсона

Особый подход к определению правила принятия решения при отсутствии информации о стоимости ошибочных и правильных решений и априорных вероятностях наличия и отсутствия сигналов указывает критерий Неймана-Пирсона.

Сущность этого критерия заключается в *минимизации условной вероятности ошибки второго рода при заданной условной вероятности ошибки первого рода*.

Для нахождения правила принятия решения по критерию Неймана-Пирсона необходимо найти минимум функционала

$$\beta = P\{\gamma_0 | H_1\} = \int_{\Gamma_0} W_n(\bar{y}|s) d\Omega(\bar{y})$$

при дополнительном граничном условии

$$\alpha = P\{\gamma_1 | H_0\} = \int_{\Gamma_1} W_n(\bar{y}|0) d\Omega(\bar{y}) = \varepsilon \leq \varepsilon^*. \quad (3.34)$$

Решение этой задачи получим методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого введем функцию

$$F = \beta + \lambda(\alpha - \varepsilon^*)$$

или

$$F = \int_{\Gamma_0} W_n(\bar{y}|s) d\Omega(\bar{y}) + \lambda \left[\int_{\Gamma_1} W_n(\bar{y}|0) d\Omega(\bar{y}) - \varepsilon^* \right]. \quad (3.35)$$

Перепишем формулу (3.35) в следующем виде:

$$F = \lambda(1 - \varepsilon^*) - \int_{\Gamma_0} [W_n(\bar{y}|s) - \lambda W_n(\bar{y}|0)] d\Omega(\bar{y}). \quad (3.36)$$

Функция F будет минимальной, если подынтегральное выражение

формулы (3.36) будет положительным, т.е.

$$W_n(\vec{y}|s) - \lambda W_n(\vec{y}|0) > 0,$$

что эквивалентно

$$\frac{W_n(\vec{y}|s)}{W_n(\vec{y}|0)} > \lambda.$$

Для того чтобы удовлетворить ограничению (3.34), выберем λ таким, при котором $\alpha = \varepsilon$. Для упрощения перейдем от многомерной переменной \vec{y} к одномерной l , а пространство наблюдений преобразуем в числовую ось, на которой λ представляет границу областей для соответствующих гипотез, эквивалентных Γ_1 и Γ_0 . Тогда λ будет определяться уравнением:

$$\int_{\lambda}^{\infty} W(l|0) dl = \varepsilon. \quad (3.37)$$

Таким образом, правило принятия решения по критерию Неймана-Пирсона можно записать в виде

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{W_n(\vec{y}|s)}{W_n(\vec{y}|0)} > \lambda & \xrightarrow{H_1} \gamma_1 \\ \frac{W_n(\vec{y}|s)}{W_n(\vec{y}|0)} < \lambda & \xrightarrow{H_0} \gamma_0 \end{cases}, \quad (3.38)$$

где λ определяется уравнением (3.37).

Следует отметить, что *правило принятия решения по критерию Неймана-Пирсона обладает наибольшей мощностью решения при одинаковом уровне значимости (вероятности ложной тревоги).*

б) Информационный критерий качества

Этот критерий принятия решений связан с количеством информации. В качестве наилучшего правила принятия решения при этом критерии считается такое, при котором имеем *максимум частного количества информации.*

Частные количества информации, содержащиеся в наблюдении \vec{y} относительно передаваемых состояний s_i и s_k , определяются соответственно соотношениями

$$I(\vec{y}, s_i) = \log W_n(s_i | \vec{y}) - \log W_n(s_i),$$

$$I(\vec{y}, s_k) = \log W_n(s_k | \vec{y}) - \log W_n(s_k);$$

а их разность равна

$$I(\vec{y}, s_i) - I(\vec{y}, s_k) = \log \frac{W_n(s_i | \vec{y}) W_n(s_k)}{W_n(s_k | \vec{y}) W_n(s_i)}. \quad (3.39)$$

Так как

$$W_n(\bar{y}, s_i) = W_n(s_i)W_n(\bar{y}|s_i) = W_n(\bar{y})W_n(s_i|\bar{y}),$$

то

$$\frac{W_n(s_i|\bar{y})}{W_n(s_i)} = \frac{W_n(\bar{y}|s_i)}{W_n(\bar{y})}. \quad (3.40)$$

Аналогично имеем

$$\frac{W_n(s_k|\bar{y})}{W_n(s_k)} = \frac{W_n(\bar{y}|s_k)}{W_n(\bar{y})}. \quad (3.41)$$

С учетом (3.40) и (3.41) выражение (3.39) принимает вид

$$I(\bar{y}, s_i) - I(\bar{y}, s_k) = \log \frac{W_n(\bar{y}|s_i)}{W_n(\bar{y}|s_k)}. \quad (3.42)$$

Если разность частных количеств информации положительная, то принимается решение о состоянии s_i . В этом случае

$$\log \frac{W_n(\bar{y}|s_i)}{W_n(\bar{y}|s_k)} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{W_n(\bar{y}|s_i)}{W_n(\bar{y}|s_k)} > 1.$$

Следовательно, правило принятия решения о наличии или отсутствии сигнала при информационном критерии качества можно записать в виде

$$\Lambda = \frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} \underset{H_0}{> 1} \rightarrow \gamma_1 \quad (3.43)$$

Как видим, в этом частном случае информационный критерий соответствует критерию максимума правдоподобия.

3.1.5. Структура оптимального обнаружителя

Из изложенного видно, что при любом статистическом критерии качества оптимальная классическая процедура обнаружения полезного сигнала основана на сравнении отношения правдоподобия с некоторым уровнем C , называемым пороговым. Пороговый уровень определяет стратегию обнаружения в соответствии с выбранным статистическим критерием качества. При этом предполагается, что время обнаружения заведомо известно, т.е. объем наблюдаемой выборки заранее фиксирован.

Таким образом, оптимальная процедура обнаружения имеет вид

$$\Lambda(\bar{y}) = \frac{L(s)}{L(0)} = \frac{W_n(\bar{y}|s)}{W_n(\bar{y}|0)} \underset{H_0}{> C} \rightarrow \gamma_1 \quad (3.44)$$

Соответствующая этому правилу обобщенная структурная схема оптимального обнаружителя представлена на рис 3.3.

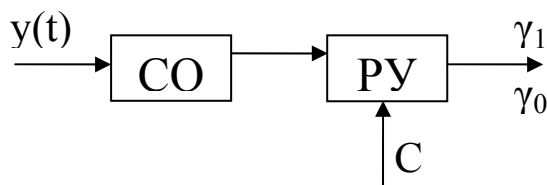


Рис.3.3. Обобщенная структурная схема оптимального обнаружителя

Принимаемая реализация y поступает на вход схемы обработки (СО) обнаружителя, которая формирует на своем выходе отношение правдоподобия $\Lambda(y)$ (следует заметить, что отношение правдоподобия также является случайной функцией). Решающее устройство (РУ) осуществляет процедуру сравнения отношения правдоподобия с пороговым уровнем C . В результате на выходе решающего устройства появляется одно из двух решений: γ_1 (сигнал присутствует) или γ_0 (сигнал отсутствует).

Использование какого-либо статистического критерия качества сказывается только на значении порогового уровня C и никак не влияет на схему обработки, в которой осуществляется оптимальная обработка входной реализации y .

Оптимальное правило (3.44) равносильно правилу

$$\varphi[\Lambda(y)] \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \varphi(C) \begin{matrix} \rightarrow \gamma_1 \\ \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.45)$$

где φ - монотонная функция.

Статистика $\varphi[\Lambda(y)]$ является достаточной. В случае, если отношение правдоподобия $\Lambda(y)$ принадлежит к экспоненциальному семейству функций, в качестве функции φ целесообразно использовать натуральный логарифм. При этом оптимальный алгоритм обработки входной реализации обнаружителя упрощается.

Рассмотрим два вида обнаружения сигналов:

- обнаружение приемником прямого усиления, наиболее характерного для оптико-электронных приборов;

- последетекторное обнаружение в гетеродинных приемных системах.

При построении оптимальных обнаружителей будем предполагать аддитивность полезного сигнала и помехи: $y[s(t), x(t)] = x(t) + s(t)$.

3.1.6. Обнаружение сигналов на фоне гауссовых шумов

В качестве помехи будем рассматривать стационарные гауссовы шумы, многомерная плотность вероятностей которых определяется зависимостью

$$W_n(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ik} [x_i - m_1][x_k - m_1] \right\}. \quad (3.46)$$

В этой формуле Δ - определитель корреляционной матрицы $\|B_2(t_i, t_k)\|$, β_{ik} - элементы обратной корреляционной матрицы $\|B_2(t_i, t_k)\|^{-1}$, m_1 - математическое ожидание случайного процесса.

Для непрерывных наблюдений при гауссовых процессах удобно пользоваться функционалами плотностей вероятностей, которые определяются как

$$F[x(t)] = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} W(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.47)$$

где $\Delta = t_{k+1} - t_k$ - интервал между соседними выборками случайного процесса.

В соответствии с (3.47) для гауссова процесса имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{ik} (x_i - m_1)(x_k - m_1) \right\} = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T x(t_1)x(t_2)\theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где $\theta(t_1, t_2)$ определяется интегральным уравнением

$$\int_0^T B_2(t_1, t)\theta(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2).$$

Предел множителя перед экспонентой соотношения (3.46), независимый от x_1, x_2, \dots, x_n , зависит от Δ равен

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta}} = h(\Delta) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases},$$

и определяется энергетическим спектром процесса. Однако отношение функционалов дает конечный предел, что и важно для отношения правдоподобия.

Таким образом, функционал плотности вероятностей можно записать в виде

$$F[x(t)] = h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T x(t_1) x(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}, \quad (3.49)$$

$$\int_0^T B_2(t_1, t) \theta(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2).$$

Если ввести функцию

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^T \theta(t_1, t_2) x(t_2) dt_2,$$

то функционал плотности вероятностей (3.49) преобразуется к виду

$$F[x(t)] = h(\Delta) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t) dt \right]. \quad (3.50)$$

Здесь функция $\mathcal{G}(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau = x(t), \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (3.51)$$

С учетом изложенного, отношение правдоподобия можно также записать через функционалы правдоподобия при наличии и отсутствии сигнала:

$$\Lambda = \frac{F[y(t)|s]}{F[y(t)|0]}. \quad (3.52)$$

1) Обнаружение детерминированного сигнала на фоне белого гауссова шума

Будем исходить из условия, что на вход обнаружителя поступает либо только стационарный белый гауссов шум с нулевым средним значением, либо аддитивная смесь этого шума с детерминированным полезным сигналом.

Функционал правдоподобия при отсутствии полезного сигнала будет равен функционалу плотности вероятностей белого гауссова шума. Так как для белого шума корреляционная функция пропорциональна δ -функции:

$$B_2(t_1, t_2) = \frac{G}{2} \delta(t_2 - t_1), \quad (G\text{-энергетический спектр белого шума})$$

то, подставляя ее в формулу (3.51), получим

$$\mathcal{G}(t) = \frac{2}{G} y(t). \quad (3.53)$$

В этом случае, согласно (3.50), функционал правдоподобия при отсутствии сигнала принимает вид

$$F[y(t)|0] = h(\Delta) \exp \left[-\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt \right]. \quad (3.54)$$

Функционал правдоподобия при наличии сигнала получаем путем предельного перехода от функции плотности вероятности белого шума с учетом постоянной составляющей этого процесса. Тогда, согласно (3.50) с учетом (3.53), имеем

$$\begin{aligned} F[y(t)|s] &= \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(y_1 - s_1, y_2 - s_2, \dots, y_n - s_n) = \\ &\quad \Delta \rightarrow 0 \\ &= h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{G} \int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Используя (3.54) и (3.55), получим правило принятия решения в виде

$$\Lambda = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{G} \int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt \right\}} \begin{matrix} > C & \rightarrow \gamma_1 \\ < C & \rightarrow \gamma_0 \end{matrix} \quad (3.56)$$

Воспользуемся выражением (3.45) и прологарифмируем (3.56). Получим

$$\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt - \frac{1}{G} \int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \ln C.$$

После элементарных преобразований приходим к следующей записи правила принятия решения:

$$\int_0^T y(t) s(t) dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} K_1, \quad (3.57)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{2}(E + G \ln C) - \text{пороговый уровень,}$$

$$E = \int_0^T s^2(t) dt - \text{энергия полезного сигнала.}$$

На основании (3.57) можно сделать вывод, что оптимальный обнаружитель детерминированного сигнала на фоне белого гауссова шума состоит из перемножителя (\times), генератора копии принимаемого полезного

сигнала $s(t)$, интегратора (\int) и решающего устройства (РУ) с пороговым уровнем K_1 . Структурная схема этого обнаружителя приведена на рис. 3.4а.

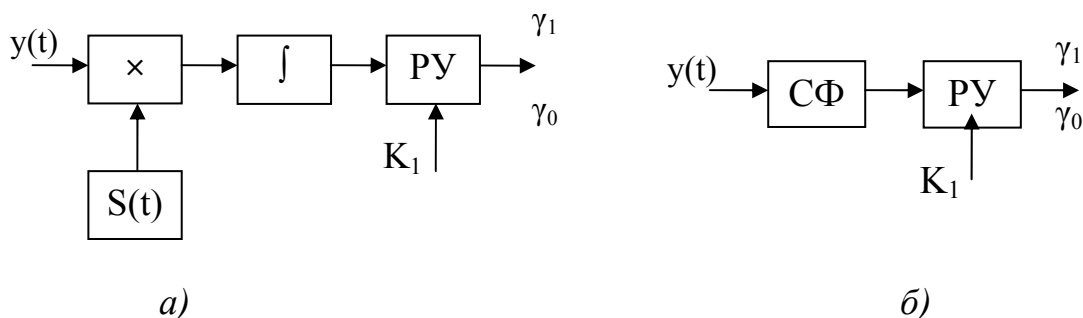


Рис.3.4. Оптимальные схемы обнаружителей детерминированного сигнала на фоне белого гауссова шума

В перемножителе осуществляется умножение входной реализации $y(t)$ (при отсутствии или наличии в ней полезного сигнала) с копией полезного сигнала $s(t)$. Сигнал на выходе интегратора сравнивается с пороговым уровнем K_1 в решающем устройстве, на выходе которого выносятся решение γ_1 или γ_0 . Отметим, что перемножитель, генератор копии полезного сигнала и интегратор можно заменить согласованным фильтром с импульсной характеристикой $g(t) = s(\tau - t)$. В этом случае структурная схема оптимального обнаружителя такова, как на рис. 3.4б.

2) Обнаружение детерминированного сигнала на фоне окрашенного гауссова шума

Определим оптимальную структуру обнаружителя, если на его вход поступает либо гауссов шум с корреляционной функцией $B_2(t_1, t_2)$ и средним значением $m_1 = 0$, либо аддитивная смесь этого шума и детерминированного сигнала.

Согласно (3.49), функционалы правдоподобия при наличии и отсутствии полезного сигнала будут определяться соответственно выражениями

$$F[y(t)|s] = h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \theta(t_1, t_2) [y(t_1) - s(t_1)] \times \right. \\ \left. \times [y(t_2) - s(t_2)] dt_1 dt_2 \right\},$$

$$F[y(t)|0] = h(\Delta) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \theta(t_1, t_2) y(t_1) y(t_2) dt_1 dt_2 \right\},$$

где функция $\theta(t_1, t_2)$ определяется интегральным уравнением

$$\int_0^T B_2(t_1, t) \theta(t, t_2) dt = \delta(t_1 - t_2).$$

Отношение правдоподобия в этом случае будет равно

$$\Lambda = \frac{F[y(t)|s]}{F[y(t)|0]} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T s(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T y(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T y(t_2) s(t_1) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}. \quad (3.58)$$

В силу симметрии функции $\theta(t_1, t_2)$ имеем

$$\int_0^T \int_0^T y(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^T \int_0^T y(t_2) s(t_1) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

В этом случае формула (3.58) получит вид

$$\Lambda = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T s(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\ \left. + \int_0^T \int_0^T y(t_1) s(t_2) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}. \quad (3.59)$$

Введем теперь функцию

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^T \theta(t, t_2) s(t_2) dt_2, \quad (3.60)$$

которая удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau = s(t). \quad (3.61)$$

Теперь, с учетом (3.59) и (3.60), правило принятия решения можно записать в виде

$$\Lambda = \exp \left[\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t) \mathcal{G}(t) dt \right] \begin{matrix} > C & \rightarrow \gamma_1 \\ < C & \rightarrow \gamma_0 \end{matrix} \quad (3.62)$$

Прологарифмируем (3.62) и окончательно придем к следующей записи правила принятия решения при обнаружении детерминированного сигнала на фоне окрашенного гауссова шума:

$$\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t) dt \begin{matrix} > K_2 & \rightarrow \gamma_1 \\ < K_2 & \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.63)$$

где $K_2 = \ln C + \frac{1}{2} \int_0^T s(t) \mathcal{G}(t) dt$ - пороговый уровень оптимального обнаружителя.

Выражение (3.63) определяет структуру оптимального обнаружителя детерминированного сигнала на фоне окрашенного гауссова шума. В этом обнаружителе осуществляется интегрирование входной реализации $y(t)$ с весом $\mathcal{G}(t)$, зависящим от вида сигнала $s(t)$ и корреляционной функции шума $B_2(t_1, t_2)$. Выходной сигнал интегратора сравнивается в решающем устройстве с пороговым уровнем K_2 , после чего выносится решение о наличии сигнала или его отсутствии. Интегрирование реализации $y(t)$ с весом $\mathcal{G}(t)$ представляет собой оптимальный фильтр, импульсная характеристика которого $g(t) = \mathcal{G}(\tau - t)$ определяется решением интегрального уравнения (3.61).

На рис. 3.5 приведена структурная схема такого обнаружителя.

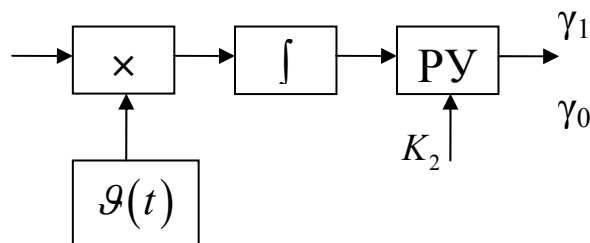


Рис.3.5 Структурная схема обнаружителя при окрашенных шумах

Следует заметить, что решения интегрального уравнения (3.61) относительно $\mathcal{G}(t)$ вообще не существует, если ядро $B_2(t, \tau)$ не имеет некоторых особенностей. Однако если шум содержит составляющую с равномерным спектром, т.е. корреляционная функция равна

$$B_2(t_1, t_2) = \frac{G}{2} \delta(t_2 - t_1) + b(t_1, t_2),$$

где $b(t_1, t_2)$ - функция непрерывная и интегрируемая в среднеквадратическом. Тогда уравнение (3.61) принимает вид

$$s(t) = \frac{G}{2} \delta(t_2 - t_1) + \int_0^{\infty} b(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau. \quad (3.64)$$

Это уравнение Фредгольма 2-го рода и его решение существует, в общем случае, если $\left(-\frac{G}{2}\right)$ не является собственным значением интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int_0^T b(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Если составляющая окрашенного шума мала, то решение уравнения (3.64) можно получить методом итераций (методом последовательных приближений Пикара):

$$\mathcal{G}(t) = \frac{2}{G} \left[s(t) - \frac{2}{G} \int_0^T b(t - \tau) s(\tau) d\tau + \dots \right].$$

Методы и примеры решения интегральных уравнений приведены в приложении.

3) Обнаружение узкополосного сигнала со случайной начальной фазой на фоне белого гауссова шума

Определим оптимальную структуру обнаружителя узкополосного сигнала со случайной начальной фазой, принимаемого на фоне стационарного белого гауссова шума. Такой сигнал можно представить зависимостью

$$s(t) = f(t) \cos[\omega t + \phi(t) + \varphi_0], \quad (3.65)$$

где $f(t)$ и $\phi(t)$ - функции амплитудной и фазовой модуляции, φ_0 - начальная фаза, которая является случайной, равномерно распределенной в интервале $[-\pi, \pi]$.

В общем случае полезный сигнал может зависеть как от существенного A_0 , так и несущественных случайных a_1, a_2, \dots, a_k параметров. В этих условиях функционал плотности вероятностей зависит от этих случайных параметров. Следовательно, для определения функционала правдоподобия требуется усреднение по несущественным параметрам:

$$F[y(t)|s] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F[y(t)|s(t, a_1, a_2, \dots, a_k)] \times \\ \times W_k(a_1, a_2, \dots, a_k) da_1 da_2 \cdots da_k, \quad (3.66)$$

где $W_k(a_1, a_2, \dots, a_k)$ - совместная плотность вероятностей несущественных параметров a_1, a_2, \dots, a_k .

Для рассматриваемой задачи функционал правдоподобия при отсутствии полезного сигнала определяется функционалом плотности вероятностей белого гауссова шума:

$$F[y(t)|0] = h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt \right\},$$

а функционал правдоподобия при наличии полезного сигнала, согласно (3.66), зависимостью

$$F[y(t)|s] = \frac{h(\Delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{G} \int_0^T [y(t) - f(t) \cos(\omega t + \phi[t] + \varphi_0)]^2 dt \right\} d\varphi_0 = \\ = \frac{h(\Delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{G} \left(2 \int_0^T y(t) f(t) \cos(\omega t + \phi[t] + \varphi_0) dt - \int_0^T y^2(t) dt - \int_0^T f^2(t) \cos^2(\omega t + \phi[t] + \varphi_0) dt \right) \right\} d\varphi_0 \quad (3.67)$$

Учитывая, что $\int_0^T f^2(t) \cos^2(\omega t + \phi[t] + \varphi_0) dt = \int_0^T s^2(t) dt = E$ - энергия полезного сигнала, соотношение (3.67) можно записать в виде

$$F[y(t)|s] = h(\Delta) \left\{ \exp \left[-\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt - E \right] + \frac{1}{2\pi} H \right\}, \quad (3.68)$$

где

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{2}{G} \int_0^T y(t) f(t) \cos(\omega t + \phi[t] + \varphi_0) dt \right\} d\varphi_0. \quad (3.69)$$

Рассмотрим интеграл H . Представим

$$\cos(\omega t + \phi[t] + \varphi_0) = \cos(\omega t + \phi[t]) \cos \varphi_0 - \sin(\omega t + \phi[t]) \sin \varphi_0.$$

Получим

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2b_1}{G} \cos \varphi_0 - \frac{2b_2}{G} \sin \varphi_0 \right] d\varphi_0; \quad (3.70)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^T y(t) f(t) \cos(\omega t + \phi[t]) dt ; \\ b_2 &= \int_0^T y(t) f(t) \sin(\omega t + \phi[t]) dt . \end{aligned} \quad (3.71)$$

В соотношении (3.70) умножим и разделим показатель степени на $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ и обозначим:

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \cos \psi , \quad \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \sin \psi , \quad \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = b .$$

Учитывая, что $\cos \varphi_0 \cos \psi - \sin \varphi_0 \sin \psi = \cos(\varphi_0 - \psi)$,

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2b}{G} \cos(\varphi_0 - \psi) \right] d\varphi_0 .$$

Обозначая $\varphi_0 - \psi = \nu$ и учитывая, что подинтегральная функция - периодическая с периодом 2π , окончательно функцию H можно представить как

$$H = 2\pi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\frac{2b}{G} \cos \nu} d\nu \right] . \quad (3.72)$$

Одно из интегральных представлений модифицированной функции Бесселя n -го порядка имеет вид

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \nu} \cos(n\nu) d\nu .$$

Следовательно, искомая функция H с точностью до постоянного множителя представляет собой модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка, т.е.:

$$H = 2\pi I_0 \left(\frac{2b}{G} \right) . \quad (3.73)$$

Теперь с учетом (3.73) функционал правдоподобия при наличии полезного сигнала (3.68) можно переписать в виде

$$F[y(t)|s] = h(\Delta) \left\{ \exp \left[-\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt - E \right] + I_0 \left(\frac{2b}{G} \right) \right\} . \quad (3.74)$$

Таким образом, отношение правдоподобия принимает вид

$$\Lambda = \frac{F[y(t)|s]}{F[y(t)|0]} = I_0\left(\frac{2b}{G}\right)e^{-\frac{E}{G}},$$

а правило принятия решения будет определяться зависимостью

$$I_0\left(\frac{2b}{G}\right) \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} C \exp\left(\frac{E}{G}\right) \rightarrow \gamma_1 \quad (3.75)$$

Решая неравенство (3.75) относительно b с учетом монотонно возрастающего характера функции $I_0\left(\frac{2b}{G}\right)$ для положительных значений аргумента, получим

$$b \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{DG}{2} = K_3 \rightarrow \gamma_1 \quad (3.76)$$

где D - решение трансцендентного уравнения

$$I_0(D) = C \exp\left(\frac{E}{G}\right).$$

В частном случае, при обнаружении сигнала, представляющего немодулированную посылку длительностью T косинусоидального колебания со случайной начальной фазой, правило принятия решения будет определяться зависимостью

$$\left\{ \left[\int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt \right]^2 + \left[\int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt \right]^2 \right\}^{1/2} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{DG}{2} \rightarrow \gamma_1 \quad (3.77)$$

Структурная схема оптимального обнаружителя приведена на рис. 3.6. Такая схема называется схемой с двумя квадратурными каналами. В этой схеме входная реализация поступает на два канала, каждый из которых состоит из перемножителя (\times), интегратора (\int) и квадратора (b_i^2). Сигнал, равный корню квадратному из суммы квадратурных форм, поступает в решающее устройство (PY) и сравнивается с пороговым уровнем $DG/2$. На выходе решающего устройства выносится решение о наличии полезного сигнала или об его отсутствии.

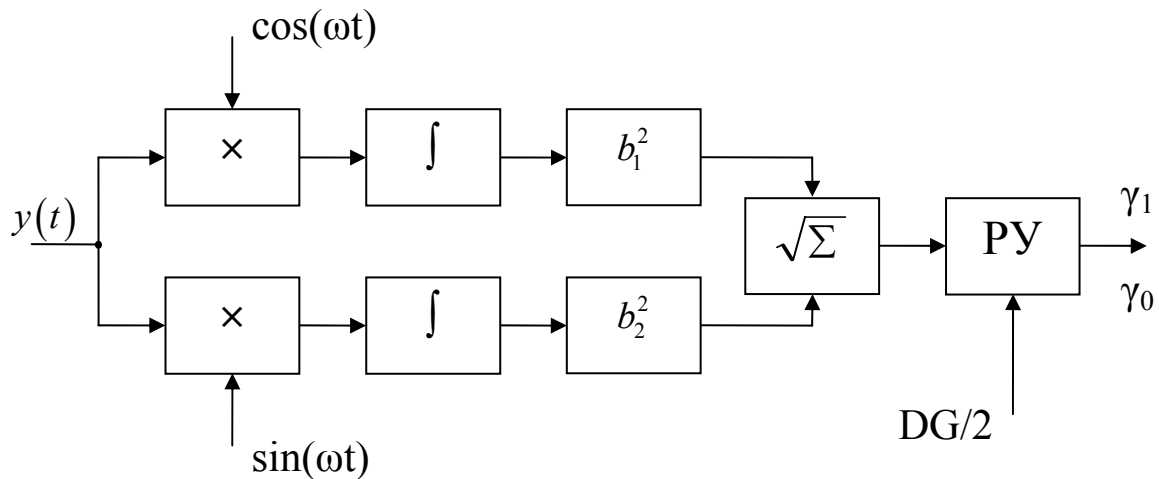


Рис.3.6. Структурная схема оптимального обнаружителя сигнала со случайной начальной фазой

4) Обнаружение стохастического сигнала на фоне белого гауссова шума

Важной задачей является определение структуры оптимального обнаружителя стохастического (случайного) сигнала. Этому вопросу посвящены большие разделы монографий и многочисленные публикации в периодической научно-технической печати. С целью показать разнообразие оптимальных алгоритмов обнаружения рассмотрим простейшую задачу обнаружения этого плана, в которой в качестве полезного сигнала используется стационарный случайный гауссов процесс с нулевым средним значением. При этом этот процесс отличается от шума только величиной энергетического спектра.

Естественно, что аддитивная смесь полезного сигнала с шумом также как и шум является гауссовым случайным процессом с энергетическим спектром $G + G_s$ (G и G_s - энергетические спектры шума и сигнала соответственно). В этом случае функционалы правдоподобия при наличии и отсутствии полезного сигнала принимают вид:

$$F[y(t)|s] = h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{G + G_s} \int_0^T y^2(t) dt \right\},$$

$$F[y(t)|0] = h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{G} \int_0^T y^2(t) dt \right\}.$$

С учетом записанных функционалов правило принятия решений приобретает вид

$$\int_0^T y^2(t) dt \begin{matrix} > K_4 & \xrightarrow{H_1} & \gamma_1 \\ < K_4 & \xrightarrow{H_0} & \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.78)$$

где

$$K_4 = \frac{(G + G_s)G}{G_s} \ln C - \text{пороговый уровень обнаружителя.}$$

Согласно соотношению (3.78), оптимальный алгоритм обработки смеси полезного сигнала с шумом для этой задачи является квадратичным. Структурная схема оптимального обнаружителя представлена на рис. 3.7

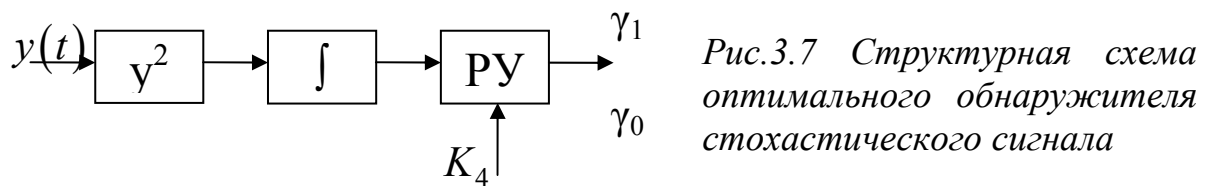


Схема состоит из квадратора (y^2), интегратора (\int) и решающего устройства ($ПУ$) с пороговым уровнем K_4 .

Такой обнаружитель носит название "энергетический приемник".

3.1.7. Обнаружение при пуассоновской статистике сигнала и шума

Будем предполагать, что наблюдение $y(t)$ представляет собой случайную функцию вида

$$y(t) = \sum_i \Theta(z, t_i),$$

где t_i - случайные точки, $\Theta(z, t)$ - некоторая функция, которую запишем в виде

$$\Theta(z, t_i) = a_i \delta(t - t_i).$$

Тогда

$$y(t) = \sum_i a_i \delta(t - t_i), \quad (3.79)$$

где a_i - величина импульса в точке t_i .

Наше наблюдение представляет собой случайный поток. Если в нем появление одной или нескольких точек не изменяет вероятность появления других точек, то в этом случае все функции корреляции распределения, начиная со второго порядка, равны нулю, т.е.

$$g_i(t) = 0 \text{ при } i \geq 2.$$

Для такой ситуации производящий функционал случайного потока принимает вид

$$L_T[v(t)] = \exp\left\{\int_0^T g_1(t)v(t)dt\right\}. \quad (3.80)$$

Производящий функционал, который в общем виде может быть представлен соотношением [21],

$$L_T[u(t)] = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T g_n(t_1, t_2, \dots, t_n) u(t_1) u(t_2) \dots u(t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n\right\}$$

($g_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - система характеристических функций) полностью характеризует систему случайных точек и играет роль, аналогичную характеристическому функционалу в теории случайных процессов.

С учетом (3.80) вероятность выпадения n точек на интервале $[0, T]$ будет определяться зависимостью

$$P(n) = \frac{1}{n!} \left[\int_0^T g_1(t) dt \right]^n \exp\left\{-\int_0^T g_1(t) dt\right\}, \quad (3.81)$$

где $g_1(t)$ называют также плотностью потока. Формула (3.81) представляет собой распределение Пуассона.

Следует заметить, что для пуассоновского потока дисперсия и математическое ожидание равны:

$$m_1 = \sigma^2 = \int_0^T g_1(t) dt.$$

Будем предполагать, что отдельные импульсы потока, возникающие в моменты t_i , разрешены, а величины их постоянные. Эти условия выполняются для некоторых типов фотоприемников. Тогда функцию правдоподобия при отсутствии полезного сигнала $P_{n_1, \dots, n_k}(T_1, T_2, \dots, T_k, \tau | 0)$ можно представить совместной вероятностью выпадения точек в неперекрывающихся областях (интервалах) T_i на интервале наблюдения τ . Эта функция правдоподобия будет равна

$$P_{n_1, \dots, n_k}(T_1, T_2, \dots, T_k, \tau | 0) = \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{n_i!} \left[\int_{T_i} g_{1,0}(t) dt \right]^{n_i} \exp\left[-\int_{T_i} g_{1,0}(t) dt \right] \right\}, \quad (3.82)$$

где $g_{1,0}(t)$ - плотность потока помехи.

Закон Пуассона характеризует редкие события. Естественно, если помеха представляет собой пуассоновский поток, то можно предположить, что полезный сигнал также является пуассоновским потоком.

Исходя из предположения, что сигнал и помеха аддитивны, а композиция двух пуассоновских потоков дает также пуассоновский поток [3], функцию правдоподобия при наличии сигнала можно записать в виде

$$P_{n_1, \dots, n_k} (T_1, T_2, \dots, T_k, \tau | s) = \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{n_i!} \left[\int_{T_i} g_{1,S}(t) dt + \int_{T_i} g_{1,0}(t) dt \right]^{n_i} e^{-\int_{T_i} g_{1,S}(t) dt - \int_{T_i} g_{1,0}(t) dt} \right\}, \quad (3.83)$$

где $g_{1,S}$ - плотность сигнального потока.

В этом случае логарифм отношения правдоподобия принимает вид

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^k \left\{ n_i \ln \left[1 + \frac{\int_{T_i} g_{1,S}(t) dt}{\int_{T_i} g_{1,0}(t) dt} \right] - \int_{T_i} g_{1,S}(t) dt \right\}. \quad (3.84)$$

Теперь правило принятия решения можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^k n_i \ln \left[1 + \frac{\int_{T_i} g_{1,S}(t) dt}{\int_{T_i} g_{1,0}(t) dt} \right] \begin{matrix} >_{H_1} \\ <_{H_0} \end{matrix} K_5 \begin{matrix} \rightarrow \gamma_1 \\ \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.85)$$

где $K_5 = \ln C + \sum_{i=1}^k \int_{T_i} g_{1,S}(t) dt$ - пороговый уровень обнаружителя.

Для стационарного потока помехи $\int_{T_i} g_{1,0}(t) dt = N_i$ правило

принятия решения будет равно

$$\sum_{i=1}^k n_i \ln \left[1 + \frac{\int_{T_i} g_{1,S}(t) dt}{N_i} \right] \begin{matrix} >_{H_1} \\ <_{H_0} \end{matrix} K_5 \begin{matrix} \rightarrow \gamma_1 \\ \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}. \quad (3.86)$$

Реально за время разрешения T_i величина n_i может принять только два значения: 1 или 0. Таким образом появится или будет отсутствовать за

время разрешения один импульс. Если его величина постоянная, то переходя к непрерывным наблюдениям правило принятия решения (3.86) преобразуется к виду [2]

$$\int_0^{\tau} y(t) \ln \left[1 + \frac{s(t)}{N_i} \right] dt \begin{matrix} > K_5 & \xrightarrow{H_1} \gamma_1 \\ < K_5 & \xrightarrow{H_0} \gamma_0 \end{matrix} \quad (3.87)$$

Здесь $s(t) = \int_t g_{1,s}(l) dl$.

Из (3.87) видно, что оптимальная обработка сводится к линейной фильтрации с логарифмической импульсной характеристикой. Оптимальная структурная схема такого обнаружителя приведена на рис. 3.8.

Если величина отдельного импульса за время разрешения окажется случайной (например, из-за наложения одноэлектронных импульсов фотоприемника, обусловленного его инерционностью, чем и определяется время разрешения), то оптимальная обработка будет нелинейной.

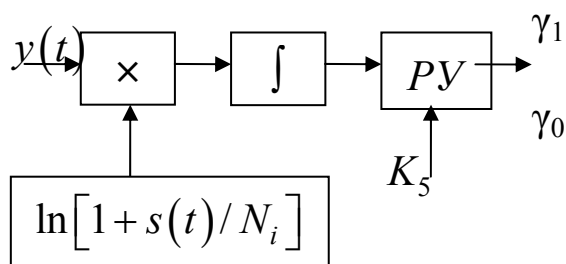


Рис.3.8. Структурная схема оптимального обнаружителя при пуассоновской статистике сигнала и помехи

3.1.8. Последетекторное обнаружение

Рассмотрим оптимальный обнаружитель при условии, что прежде, чем производится какая-либо специальная обработка сигнала с помехой, принятый узкополосный процесс детектируется, т.е. выделяется его огибающая. Такая процедура характерна для гетеродинных приемных систем и носит название последетекторного обнаружения.

При отсутствии полезного сигнала от узкополосного линейного устройства с резонансной частотой ω_0 на вход детектора поступает помеха вида

$$y(t) = a(t) \cos \omega_0 t + c(t) \sin \omega_0 t,$$

где $a(t)$ и $c(t)$ - стационарные случайные функции, совместное распределение которых является нормальным.

Сигнал представляет собой функцию

$$s(t) = u(t) \cos \omega_0 t + v(t) \sin \omega_0 t,$$

где $u(t)$ и $v(t)$ - детерминированные функции.

Таким образом, при наличии полезного сигнала на вход детектора поступает узкополосный случайный процесс

$$y(t) = [a(t) + u(t)] \cos \omega_0 t + [c(t) + v(t)] \sin \omega_0 t$$

На выходе детектора имеем огибающие этих узкополосных нормальных случайных процессов. При этом будем приближенно считать выборочные значения огибающей некоррелированными.

В этом случае функция правдоподобия при отсутствии полезного сигнала представляет собой плотность вероятностей огибающей нормального случайного процесса – распределение Релея [9]

$$W(y|0) = \prod_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{y_i^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (3.88)$$

где σ^2 - дисперсия случайного процесса.

При наличии полезного сигнала функция правдоподобия будет определяться обобщенным распределением Релея (распределением Райса)

$$W(y|s) = \prod_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{y_i^2 + S_{oi}^2}{2\sigma^2} \right\} I_0 \left(\frac{y_i S_{oi}}{\sigma^2} \right), \quad (3.89)$$

где $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,

$$S_o(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}.$$

На основании статистик (3.88) и (3.89) логарифм отношения правдоподобия запишем в виде

$$\ln \Lambda = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{S_{oi}^2}{2\sigma^2} + \ln I_0 \left(\frac{y_i S_{oi}}{\sigma^2} \right) \right]. \quad (3.90)$$

При определении правила принятия решения на основании соотношения (3.90) воспользуемся известными асимптотическими представлениями модифицированной функции Бесселя [4]:

$$I_n(z) \Big|_{z < 1} = \left(\frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^2}{4} \right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)}, \quad (3.91)$$

где $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

$$I_n(z) \Big|_{z \gg 1} = \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{1!(8z)} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8z)^2} - \dots \right]. \quad (3.92)$$

При приеме слабых сигналов в пределах правомерности асимптотического разложения функции $I_0(z)$ имеем

$$\ln I_0(z) = \ln\left(1 + \frac{z^2}{4}\right) \approx \frac{z^2}{4}.$$

В этом случае правило принятия решения будет определяться соотношением

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 S_{oi}^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} K_6 \rightarrow \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.93)$$

где $K_6 = 4\sigma^4 \ln C + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^n S_{oi}^2$ - пороговый уровень обнаружения.

Переходя к непрерывным наблюдениям, формулу (3.93) можно переписать в виде

$$\int_T y^2(t) S^2(t) dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} K_6 \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{matrix}. \quad (3.94)$$

Из выражения (3.94) видно, что при приеме относительно слабого сигнала оптимальный алгоритм обработки смеси сигнала с помехой для последетекторного обнаружения является нелинейным – квадратичным. Структурная схема такого оптимального обнаружителя приведена на рис. 3.9.

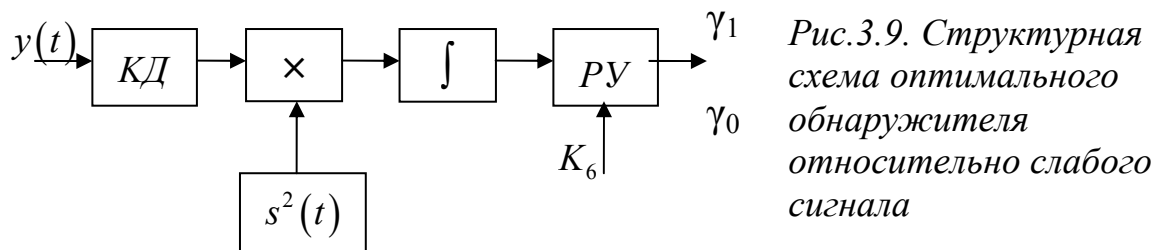


Рис.3.9. Структурная схема оптимального обнаружителя относительно слабого сигнала

Обнаружитель слабого сигнала содержит квадратичный детектор (КД), перемножитель (\times), интегратор (\int) и решающее устройство (РУ) с пороговым уровнем K_6 .

При приеме относительно сильного сигнала, используя асимптотическое представление модифицированной функции Бесселя (3.92), получим

$$\ln I_0(z) = \frac{y_i S_{oi}}{\sigma^2} + \ln \frac{\sigma}{(2\pi y_i S_{oi})^{1/2}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{8y_i S_{oi}}\right) = \frac{y_i S_{oi}}{\sigma^2} - \ln \frac{\sqrt{2\pi} S_{oi}}{\sigma}, \quad (3.95)$$

так как значение $\sqrt{\frac{S_{oi}}{y_i}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{8y_i S_{oi}} \right)$ близко к единице.

С учетом (3.95), соотношение (3.90) приводит при приеме относительно сильного полезного сигнала к правилу принятия решения в виде

$$\sum_{i=1}^n y_i S_{oi} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} K_7 \rightarrow \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{matrix}, \quad (3.96)$$

где $K_7 = \sigma^2 \ln C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S_{oi}^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n \ln \frac{\sqrt{2\pi} S_{oi}}{\sigma}$ - пороговый уровень обнаружения.

При переходе к непрерывным наблюдениям формула (3.96) преобразуется к виду

$$\int_T y(t) S(t) dt \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} K_7 \rightarrow \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{matrix}. \quad (3.97)$$

Оптимальный алгоритм обработки смеси сигнала с помехой в этом случае является линейным. Оптимальная структурная схема последетекторного обнаружителя при приеме относительно сильного сигнала приведена на рис. 3.10 и содержит линейный детектор (ЛД), перемножитель, интегратор и решающее устройство с пороговым уровнем K_7 .

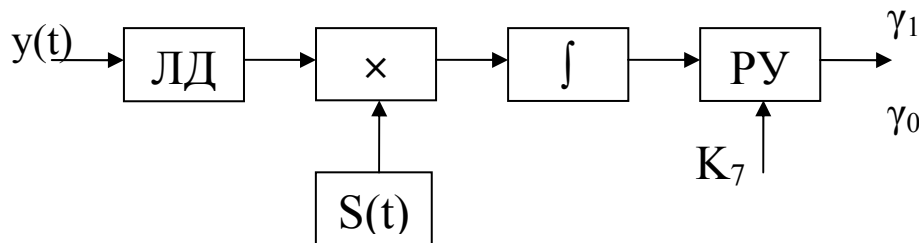


Рис.3.10. Структурная схема оптимального обнаружителя относительно сильного сигнала

3.1.9. Вычисление условных вероятностей ошибок обнаружения

Определим аналитические выражения для вычисления условных вероятностей принятия ошибочных решений рассмотренных выше обнаружителей.

Условные вероятности ошибок первого α и второго β родов

(вероятности ложной тревоги и ложного отбоя), как указывалось в п. 3.1.3, в общем виде определяются соотношениями

$$\alpha = P\{\gamma_1|H_0\} = \int_{\Gamma_1} W_n(\bar{y}|0) d\Omega(\bar{y}) = \int_{\Gamma_1} \dots \int W_n(y_1, \dots, y_n|0) dy_1 \dots y_n, \quad (3.98)$$

$$\beta = P\{\gamma_0|H_1\} = \int_{\Gamma_0} W_n(\bar{y}|s) d\Omega(\bar{y}) = \int_{\Gamma_0} \dots \int W_n(y_1, \dots, y_n|s) dy_1 \dots y_n. \quad (3.99)$$

Можно обойти вычисление кратных интегралов в (3.98) и (3.99) и свести к однократному интегрированию, учитывая, что левая часть правила принятия решения является оптимальным случайным выходным эффектом, который сравнивается в решающем устройстве с пороговым уровнем.

1) Обнаружение детерминированного сигнала на фоне белого гауссова шума

Левая часть правила принятия решения (3.57) представляет собой проинтегрированный стационарный нормальный случайный процесс

$$y(t), \text{ т.е. } \int_0^{\infty} y(t)s(t)dt. \text{ Следовательно, этот интеграл также является}$$

нормальным случайным процессом с математическим ожиданием и дисперсией, определяемыми выражениями

$$m_1 = \int_0^{\infty} m_1\{y(l)\}s(t,l)dl, \quad (3.100)$$

$$\sigma^2 = B_2(0) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} s(u)s(v)B_{2y}(u-v)dudv, \quad (3.101)$$

где $m_1\{y(t)\}$ и $B_{2y}(\tau)$ математическое ожидание и корреляционная функция входного случайного процесса $y(t)$ соответственно.

При отсутствии сигнала на вход воздействует только шум с нулевым средним значением. В этом случае $m_1 = 0$. При наличии сигнала, согласно (3.100), математическое ожидание выходного эффекта

$$m_1 = \int_0^{\infty} s^2(t)dt = E.$$

Так как корреляционная функция входного процесса

$$B_{2y}(\tau) = \frac{G}{2}\delta(\tau),$$

то дисперсия выходного эффекта

$$\sigma^2 = \frac{G}{2} \int_0^{\infty} s^2(t) dt = \frac{GE}{2}.$$

Таким образом, плотности вероятностей выходного эффекта при отсутствии и наличии сигнала соответственно будут определяться зависимостями

$$W(z|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi GE}} \exp\left(-\frac{z^2}{GE}\right), \quad (3.102)$$

$$W(z|s) = \frac{1}{\sqrt{\pi GE}} \exp\left[-\frac{(z-E)^2}{GE}\right]. \quad (3.103)$$

Теперь условные вероятности ошибок можно представить в виде

$$\alpha = \int_{K_1}^{\infty} W(z|0) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi GE}} \int_{K_1}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{GE}} dz = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2} \frac{K_1}{\sqrt{GE}}\right) \right], \quad (3.104)$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{K_1} W(z|s) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi GE}} \int_{-\infty}^{K_1} e^{-\frac{(z-E)^2}{GE}} dz = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\sqrt{2} \frac{K_1 - E}{\sqrt{GE}}\right) \right]. \quad (3.105)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интегральная функция Лапласа.

Рис. 3.11 поясняет условные вероятности ошибочных решений. На нем показаны возможный вариант выходного эффекта $z(t) = \int_0^{\infty} y(t)s(t) dt$

и две плотности вероятностей выходного эффекта при отсутствии и наличии сигнала - $W(z|0)$ и $W(z|s)$ соответственно. Заштрихованные участки - условные вероятности ошибок обнаружения - α и β .

$$\text{Обозначим } \sqrt{\frac{2E}{G}} = \mu$$

и будем понимать под этой величиной отношение сигнала к шуму.

Учитывая, что $K_1 = \frac{1}{2}(E + G \ln C)$, соотношения (3.104) и (3.105)

перепишем в виде

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln C}{\mu} + \frac{\mu}{2}\right) \right], \quad \beta = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{\ln C}{\mu} - \frac{\mu}{2}\right) \right]. \quad (3.106)$$

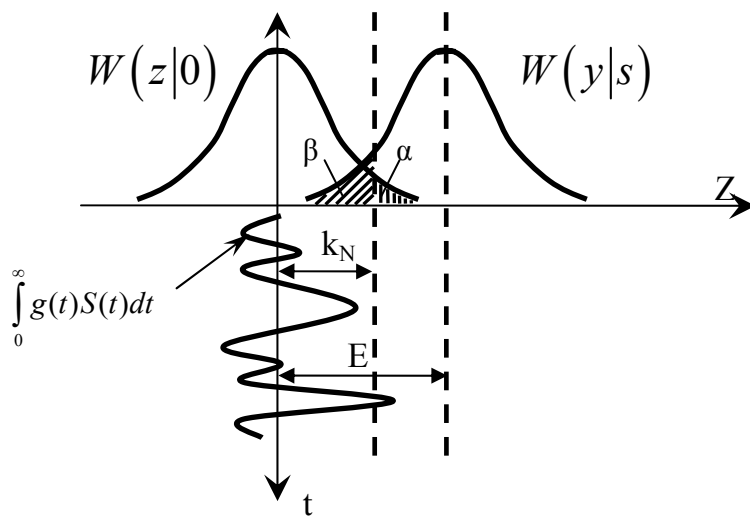


Рис. 3.11. Условные вероятности принятия решений

При использовании критерия максимума правдоподобия, при котором $C = 1$, формулой для определения условных вероятностей ошибок будет

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{\mu}{2} \right) \right]. \quad (3.107)$$

Важной характеристикой является зависимость

$$d_1 = 1 - \beta = f(\alpha, \mu).$$

На рис 3.12 приведено семейство кривых $d_1 = f(\alpha, \mu)$ для нескольких значений μ (пунктир соответствует случаю, когда используется критерий максимума правдоподобия). Представленное семейство кривых называется *рабочие характеристики приемника*.

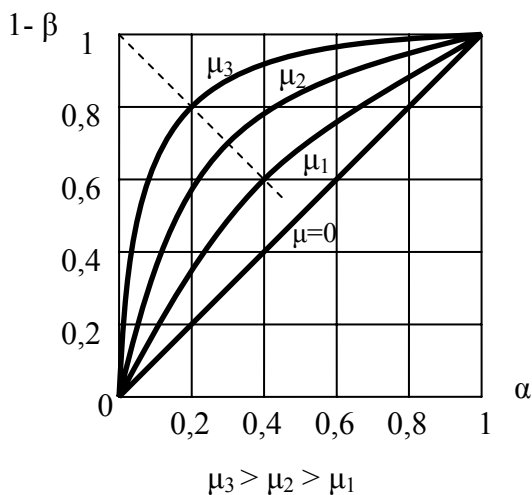


Рис. 3.12. Рабочие характеристики приемника

Рабочие характеристики приемника позволяют, например, при заданных величинах α и μ оперативно определить вероятность правильного обнаружения.

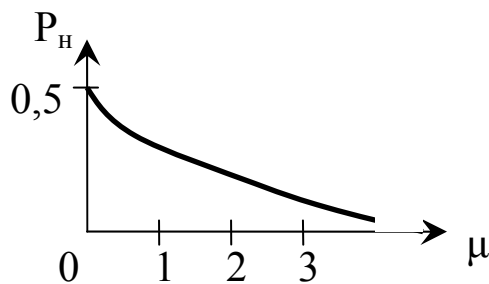
Норма ошибок с учетом того, что $P_1 + P_0 = 1$,

$$P_n = \frac{1}{2} \left[1 + P_1 \Phi \left(\frac{\ln C}{\mu} - \frac{\mu}{2} \right) - P_0 \Phi \left(\frac{\ln C}{\mu} + \frac{\mu}{2} \right) \right] = P_n(\mu).$$

Таким образом, при заданных априорных вероятностях наличия и отсутствия сигнала (P_1 и P_0) величина нормы ошибок является функцией параметра μ . Зависимость $P_n(\mu)$ называется *кривой решения*.

На рис. 3.13 представлена кривая решения для частного случая, когда $P_0 = P_1 = 0,5$.

Рис.3.13. Кривая решения



С помощью кривой решения можно, задаваясь допустимым значением нормы ошибок ($P_n = P_{n \text{ доп}}$), найти требуемую величину отношения сигнала к шуму.

Как видим, при обнаружении детерминированного сигнала на фоне белого гауссова шума величина отношения сигнала к шуму однозначно определяет норму ошибок и, следовательно, в этом случае максимум сигнала к шуму можно использовать в качестве критерия качества обнаружения.

5) Обнаружение детерминированного сигнала на фоне окрашенного гауссова шума

В этом случае правило принятия решения определяется соотношением (3.63) и, следовательно, выходной эффект представляет собой нормальный случайный процесс. При отсутствии сигнала математическое ожидание равно нулю, а при наличии полезного сигнала, в соответствии с формулой (3.100),

$$m_{10} = \int_0^{\infty} s(t) \mathcal{G}(t) dt. \quad (3.108)$$

Дисперсия этого процесса, согласно (3.101),

$$\sigma_0^2 = B_2(0) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{G}(u) \mathcal{G}(v) B_{2y}(u-v) dudv. \quad (3.109)$$

В формулах (3.108) и (3.109) $\mathcal{G}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма 1-ого рода:

$$\int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau = s(t), \quad (3.110)$$

т.е. определяется как корреляционной функцией входного шума, так и формой полезного сигнала.

Таким образом, условные вероятности ошибок первого и второго родов будут при значении порогового уровня K_2 определяться зависимостями

$$\alpha = \int_{K_2}^{\infty} W(z|0) dz = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{K_2}{\sigma_0} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{2 \ln C + m_{10}}{2\sigma_0^2} \right) \right], \quad (3.111)$$

$$\beta = \int_{-\infty}^{K_2} W(z|s) dz = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{K_2 - m_{10}}{\sigma_0} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{2 \ln C - m_{10}}{2\sigma_0^2} \right) \right]. \quad (3.112)$$

б) Обнаружение узкополосного сигнала со случайной начальной фазой на фоне белого гауссова шума

Правило принятия решения в этом случае определяется зависимостью (3.76). Так как в этой формуле b может рассматриваться как длина вектора с независимыми компонентами b_1 и b_2 , распределенными по нормальному закону, то сама величина b при отсутствии сигнала имеет релейское распределение, а при наличии полезного сигнала - обобщенное релейское распределение. С учетом формул (3.71), (3.100) и (3.101), эти распределения можно записать в виде:

$$W(z|0) = \frac{2z}{GE} \exp \left(-\frac{z^2}{GE} \right), \quad (3.113)$$

$$W(z|s) = \frac{2z}{GE} \exp \left(-\frac{z^2 + E^2}{GE} \right) I_0 \left(\frac{2z}{G} \right). \quad (3.114)$$

Здесь G - энергетический спектр входного шума, E - энергия сигнала, $I_0 \left(\frac{2z}{G} \right)$ - модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Следовательно, условные вероятности ошибочных решений теперь можно записать в виде

$$\alpha = \int_{K_3}^{\infty} \frac{2z}{G} \exp \left(-\frac{z^2}{GE} \right) dz = \exp \left(-\frac{K_3}{\sqrt{2GE}} \right) = \exp \left(-\frac{D}{2\mu} \right), \quad (3.115)$$

$$\beta = \int_0^{K_3} \frac{2z}{GE} \exp\left(-\frac{z^2 + E^2}{GE}\right) I_0\left(\frac{2z}{G}\right) dz =$$

$$= \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right) \int_0^{D/\mu} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) I_0(x\mu) dx ,$$
(3.116)

где

$$\int_0^{D/\mu} x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) I_0(x\mu) dx - \text{табулированная функция распределения}$$

Релея-Райса.

7) Обнаружение стохастического сигнала на фоне белого гауссова шума

Соотношение (3.78) можно представить также в виде

$$\sum_{i=1}^N y_i^2 \begin{matrix} > & H_1 \\ < & H_0 \end{matrix} K_4 \begin{matrix} \rightarrow \gamma_1 \\ \rightarrow \gamma_0 \end{matrix}$$

В этом случае выходной эффект представляет сумму квадратов независимых гауссовых случайных величин, каждая из которых имеет плотность вероятностей

$$W(x) = \sum_k W(y_k) \left| \frac{dy_k}{dx} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right).$$

Характеристическая функция отдельного слагаемого будет

$$\Xi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} W(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{-1/2} \exp\left[-\frac{(1-2j\sigma^2v)x}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$\left[x_1 = (1-2j\sigma^2v)x / (2\sigma^2) \right]$$

$$= (1-2j\sigma^2v)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x_1^{-1/2} e^{-x_1} dx = \frac{\Gamma(0,5)}{\sqrt{\pi(1-2j\sigma^2v)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2j\sigma^2v}},$$
(3.117)

так как значение гамма-функции $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$.

Характеристическая функция суммы будет равна

$$\Xi_N(v) = (1-2j\sigma^2v)^{-N/2}.$$
(3.118)

Прямое преобразование Фурье от (3.118) даст плотность вероятностей суммы квадратов нормально распределенных величин, т.е.

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - j\sigma^2 v)^{-N/2} \exp(-jvz) dv.$$

Однако воспользуемся следующим приемом [1] для определения искомой плотности вероятностей. Если вместо $x^{-1/2}$ в исходной формуле для $W(x)$ взять $x^{\frac{N}{2}-1}$, то при определенном нормирующем множителе q будем иметь

$$q \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} z^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right) \right] \exp(jvz) dv = (1 - 2j\sigma^2 v)^{-N/2}. \quad (3.119)$$

Так как характеристическая функция однозначно посредством преобразования Фурье определяет плотность вероятностей, то в соотношении (3.119) q , умноженное на выражение в квадратных скобках, и является искомой плотностью вероятностей.

$$W(z) = q \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} z^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right). \quad (3.120)$$

Нормирующий множитель q определяется из условия

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} W(z) dz &= q \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} z^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right) dz = \\ &= q \frac{(2\sigma^2)^{N/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{N}{2}-1} e^{-t} dt = q \frac{(2\sigma^2)^{N/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = 1, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\infty} t^{\frac{N}{2}-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{N}{2}\right).$$

Отсюда

$$q = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{(2\sigma^2)^{N/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

и, следовательно, искомая плотность вероятностей

$$W(z) = \frac{z^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right)}{(2\sigma^2)^{N/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}; \quad (3.121)$$

(σ^2 - мощность помехи.)

Соотношение (3.121) является *распределением Пирсона* (χ^2 -распределением).

Таким образом, плотность вероятностей выходного эффекта при отсутствии полезного сигнала будет определяться соотношением (3.121):

$$W(z|0) = W(z).$$

Плотность вероятностей при наличии полезного сигнала

$$W(z|s) = \frac{z^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2[\sigma^2 + \sigma_s^2]}\right)}{[2(\sigma^2 + \sigma_s^2)]^{N/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}, \quad (3.122)$$

где σ_s^2 - мощность полезного сигнала.

Теперь условные вероятности ошибочных решений будут равны:

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{K_4}^{\infty} \frac{z^{\frac{N}{2}-1} \exp\left(-\frac{z}{2\sigma^2}\right)}{(2\sigma^2)^{N/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} dz = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}, \frac{K_4}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \\ &= 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}, \frac{\ln C}{2} \left[\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2}\right]\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}; \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \int_0^{K_4} \frac{\exp\left(-\frac{z}{2[\sigma^2 + \sigma_s^2]}\right) z^{\frac{N}{2}-1}}{[2(\sigma^2 + \sigma_s^2)]^{N/2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} dz = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}, \frac{K_4}{2[\sigma^2 + \sigma_s^2]}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}, \frac{\ln C}{2\mu^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Здесь

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz - \text{гамма-функция}; \quad \mu = \frac{\sigma_s}{\sigma};$$

$$\Gamma(a, b) = \int_0^b z^{a-1} e^{-z} dz = \Gamma(a) - \int_b^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz - \text{неполная}$$

гамма-функция.

8) Обнаружение при пуассоновской статистике сигнала и помехи

Рассмотрим обнаружение слабых сигналов, что характерно для пуассоновской статистики сигнала и помехи. Будем исходить из предположения равномерности сигнального и помехового потоков:

$$\int_{T_i} g_{1,0}(t) dt = N_i, \quad \int_{T_i} g_{1,S}(t) dt = S_i.$$

При слабых сигналах сумма взвешенных с постоянной величиной независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона, может рассматриваться также распределенной по закону Пуассона [3]. Тогда выходной эффект при отсутствии и наличии сигнала будет

пуассоновским с математическими ожиданиями $\sum_{i=1}^k N_i$ и $\sum_{i=1}^k S_i$

соответственно.

В этом случае условные вероятности ошибочных решений будут определяться соотношениями

$$\alpha = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^k N_i\right) \sum_{n=0}^{K_5} \frac{\left(\sum_{i=1}^k N_i\right)^n}{n!}, \quad (3.125)$$

$$\beta = \exp\left[-\sum_{i=1}^k (N_i + S_i)\right] \sum_{n=0}^{K_5} \frac{\left[\sum_{i=1}^k (N_i + S_i)\right]^n}{n!}. \quad (3.126)$$

Здесь $K_5 = \ln C + \sum_{i=1}^k S_i$ - пороговый уровень обнаружителя.

9) Последетекторное обнаружение

В случае приема относительно слабого сигнала при оптимальных правилах принятия решений (3.93) или (3.94) для определения условных вероятностей α и β необходимо решить сложную задачу нахождения распределения взвешенной суммы квадратов независимых случайных величин, распределенных по обобщенному закону Релея. Однако для

большого объема выборки в силу центральной предельной теоремы распределение выходного эффекта приближенно можно считать нормальным со следующими параметрами.

При отсутствии полезного сигнала математическое ожидание m_{10} выходного эффекта будет равно

$$m_{10} = m_1 \left\{ \sum_{i=1}^n y_i^2 s_{oi}^2 \right\} = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(y_i) W(y_i) dy_i. \quad (3.127)$$

Так как при отсутствии сигнала y_i распределена по релеевскому закону

$$W(y_i) = \frac{y_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right), \text{ а } f(y_i) = y_i^2 s_i^2, \text{ то}$$

$$m_{10} = \sum_{i=1}^n \frac{s_{oi}^2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} y_i^3 \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right) dy_i = 2\sigma^2 \sum_{i=1}^n s_{oi}^2, \quad (3.128)$$

так как

$$\int_0^{\infty} t^m \exp(-at^n) dt = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{a^{\frac{m+1}{n}}}, \quad \Gamma(z) - \text{гамма функция.}$$

Дисперсия M_2 для этого случая равна

$$M_2 = m_2 - m_1^2 = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f^2(y_i) W(y_i) dy_i - m_{10}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{s_{oi}^4}{\sigma^2} \int_0^{\infty} y_i^5 \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right) dy_i - 4\sigma^4 \sum_{i=1}^n s_{oi}^4 = 4\sigma^4 \sum_{i=1}^n s_{oi}^4. \quad (3.129)$$

При наличии полезного сигнала математическое ожидание равно

$$m_{1s} = \sum_{i=1}^n \frac{s_{oi}^2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} y_i^3 \exp\left(-\frac{y_i^2 + s_{oi}^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{y_i s_{oi}}{\sigma^2}\right) dy_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{s_{oi}^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{s_{oi}^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^{\infty} y_i^3 \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{y_i s_{oi}}{\sigma^2}\right) dy_i.$$

Используя асимптотическое представление модифицированной функции Бесселя (3.91) и ограничиваясь двумя первыми членами разложения в степенной ряд экспоненты, получим

$$m_{1s} \approx 2\sigma^2 \sum_{i=1}^n s_{oi}^2 \left[1 + \frac{3s_{oi}^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (3.130)$$

Дисперсия M_{2s} для данного случая будет определяться также приближенной зависимостью

$$M_{2s} \approx 4\sigma^4 \sum_{i=1}^n s_{oi}^4. \quad (3.131)$$

Таким образом, при приеме относительно слабых сигналов условные вероятности ошибочных решений с учетом соотношений (3.128), (3.129), (3.130) и (3.131) будут определяться формулами

$$\alpha = \int_{K_6}^{\infty} W(z|0) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi M_{20}}} \int_{K_6}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z - m_{10})^2}{2M_{20}}\right] dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{2\sigma^2 \ln C}{\sum_{i=1}^n s_{oi}^2}\right) \right]; \quad (3.132)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi M_{2s}}} \int_0^{K_6} \exp\left[-\frac{(z - m_{1s})^2}{2M_{2s}}\right] dz = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{2\sigma^2 \ln C}{\sum_{i=1}^n s_{oi}^2} - \frac{3\sum_{i=1}^n s_{oi}^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.133)$$

При приеме относительно сильных сигналов в условиях правомерности правил принятия решений (3.96) или (3.97) в силу центральной предельной теоремы распределение выходного эффекта также можно считать нормальным с параметрами:

- при отсутствии полезного сигнала математическое ожидание m_{10}^* и дисперсия M_{20}^* равными

$$m_{10}^* = \sum_{i=1}^n \frac{s_{oi}}{\sigma^2} \int_0^{\infty} y_i^2 \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right) dy_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \sum_{i=1}^n s_{oi}, \quad (3.134)$$

$$M_{20}^* = m_2 - m_1^2 = \sigma^2 \frac{4 - \pi}{2} \sum_{i=1}^n s_{oi}^2; \quad (3.135)$$

- при наличии полезного сигнала моменты m_{1s}^* M_{2s}^* будут определяться выражениями

$$m_{1s}^* \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \sum_{i=1}^n s_{oi} \left(1 - \frac{3s_{oi}^4}{8\sigma^4}\right), \quad (3.136)$$

$$M_{2s}^* \approx \sigma^2 \frac{4 - \pi}{2} \sum_{i=1}^n S_{oi}^2. \quad (3.137)$$

Условные вероятности ошибочных решений будут равны:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{K_7 - m_{10}^*}{\sqrt{M_{20}^*}} \right) \right], \quad (3.138)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{K_7 - m_{1s}^*}{\sqrt{M_{2s}^*}} \right). \quad (3.139)$$

В этих формулах моменты m_{10}^* , M_{20}^* , m_{1s}^* и M_{2s}^* определяются соотношениями (3.134)-(3.137).

3.1.10. Последовательное обнаружение

Классическая процедура принятия решений предполагала, что время, за которое принимается решение, заведомо известно объемом наблюдаемой выборки и фиксировано. Оно определяется длительностью полезного сигнала. В ряде случаев принимаемая реализация $y(t)$ может оказаться настолько благоприятной, что принятие решения можно произвести значительно быстрее, чем это предусматривается классической процедурой. В этом случае риск обусловлен не только ошибочными решениями, но и объемом выборки. Такой подход приводит к *процедуре Вальда или последовательной проверке гипотез, при которой анализ проводится последовательно при получении очередного отсчета*. При этом все пространство наблюдений делится уже не на две области, как при классической процедуре принятия решений, а на три: Γ_0 - область принятия решения об отсутствии сигнала, Γ_1 - область принятия решения о наличии полезного сигнала, Γ_n - область неопределенности. В общем случае границы между этими областями могут меняться на каждом этапе наблюдения.

При последовательном анализе на каждом этапе составляется отношение правдоподобия

$$\Lambda^{(m)} = \frac{W(y^{(m)} | s)}{W(y^{(m)} | 0)}, \quad \text{где } m - \text{номер отсчета.}$$

В отличие от однопорогового обнаружения (классическая процедура) последовательная процедура является двухпороговой. Величина $\Lambda^{(m)}$ сравнивается с двумя пороговыми уровнями – с A и с B .

Правило принятия решения при последовательной процедуре записывается в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^{(m)} = \frac{W(y^{(m)}|s)_{H_1}}{W(y^{(m)}|0)} \geq A \rightarrow \gamma_1 \\ \Lambda^{(m)} = \frac{W(y^{(m)}|s)_{H_0}}{W(y^{(m)}|0)} \leq B \rightarrow \gamma_0 . \\ B < \frac{W(y^{(m)}|s)}{W(y^{(m)}|0)} > A \rightarrow \gamma_n \end{array} \right. \quad (3.140)$$

Здесь γ_n - решение о продолжении наблюдения.

Если выборка $y^{(m)}$ наблюдения попадает в область Γ_n между пороговыми уровнями A и B , то принимается решение γ_n о продолжении наблюдения и формировании отношения правдоподобия $\Lambda^{(m+1)}$; процедура принятия решения повторяется до тех пор, пока отношение правдоподобия не окажется выше уровня A или ниже уровня B . В результате длительность наблюдения τ_n (время, в течение которого принимается решения γ_0 или γ_1 .) является случайной величиной.

Определим пороговые уровни A и B , исходя из предположения, что известны условные вероятности ошибочных решений α и β . Условие принятия решения γ_1 согласно (3.140) будет

$$\Lambda = \frac{W(y^{(m)}|s)_{H_1}}{W(y^{(m)}|0)} \geq A$$

или

$$W(y^{(m)}|s) \geq AW(y^{(m)}|0). \quad (3.141)$$

Это условие относится к любой выборке, попадающей в область Γ_1 . Поэтому можно проинтегрировать обе части неравенства (3.141) по области Γ_1 :

$$\int_{\Gamma_1} W(y^{(m)}|s) dy \geq A \int_{\Gamma_1} W(y^{(m)}|0) dy. \quad (3.142)$$

Интеграл в левой части неравенства (3.142) представляет собой, в соответствии с выражением (3.16), вероятность правильного обнаружения (мощность решения) d_1 , т.е.

$$\int_{\Gamma_1} W(y^{(m)}|s) dy = d_1 = 1 - \beta,$$

а интеграл в правой части – условную вероятность ошибки первого рода (вероятность ложной тревоги) α :

$$\int_{\Gamma_1} W(y^{(m)}|0) dy = \alpha.$$

Следовательно,

$$A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha}. \quad (3.143)$$

Условие принятия решения γ_0 будет

$$\frac{W(y^{(m)}|s)}{W(y^{(m)}|0)} \leq B$$

или

$$W(y^{(m)}|s) \leq B W(y^{(m)}|0). \quad (3.144)$$

Проинтегрировав обе части неравенства (3.144) по области Γ_0 , находим, что

$$B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}, \quad (3.145)$$

так как

$$\int_{\Gamma_0} W(y^{(m)}|s) dy = \beta, \text{ а}$$

$$\int_{\Gamma_0} W(y^{(m)}|0) dy = d_0 = 1 - \alpha.$$

Следует отметить, что формулы (3.143) и (3.145) относятся к значениям $\alpha < 0,5$ и $\beta < 0,5$ [5]. Однако описанным методом можно получить и более общие формулы

$$A \leq \max\left(\frac{1 - \beta}{\alpha}, \frac{\beta}{1 - \alpha}\right) \text{ и } B \geq \min\left(\frac{\beta}{1 - \alpha}, \frac{1 - \beta}{\alpha}\right).$$

Границы A и B являются функциями аргументов α и β . Однако оказывается, что в качестве хорошего приближения для A и B можно

взять их граничные значения, соответствующие знакам равенства в формулах (3.143) и (3.145).

Для статистически независимых и однородных наблюдений y_1, y_2, \dots, y_m

$$W(y^{(m)}|s) = W(y_1|s)W(y_2|s) \cdots W(y_m|s) = \prod_{i=1}^m W(y_i|s). \quad (3.146)$$

В этом случае последовательный обнаружитель, реализующий правило принятия решения (3.140), является оптимальным в том смысле, что он минимизирует среднее время принятия решения τ_n :

$$m_1 \{ \tau_n | 0 \} = \min, \quad m_1 \{ \tau_n | s \} = \min,$$

в классе всех обнаружителей, для которых условные вероятности ошибочных решений ограничены заданными величинами.

Среднее время принятия решения можно представить в виде

$$\begin{aligned} m_1 \{ \tau_n | 0 \} &= \Delta t \, m_1 \{ n | 0 \}, \\ m_1 \{ \tau_n | s \} &= \Delta t \, m_1 \{ n | s \}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

где Δt - длительность ступени наблюдения (минимальный интервал между соседними выборочными значениями реализации $y(t)$, при котором эти значения можно считать независимыми), $m_1 \{ n | 0 \}$ и $m_1 \{ n | s \}$ - средние объемы выборки при отсутствии и наличии полезного сигнала соответственно.

Ввиду того, что минимизация среднего времени принятия решения оптимизирует правило принятия решения, определим это среднее значение τ_n или, согласно (3.147), средний объем выборки.

Перейдем, с учетом (3.146), к логарифму отношения правдоподобия:

$$\ln \Lambda^{(m)} = \sum_{i=1}^m \ln \frac{W(y_i|s)}{W(y_i|0)} = \sum_{i=1}^m z_i,$$

который сравнивается с $\ln A$ и $\ln B$.

Средний объем выборки при отсутствии и наличии полезного сигнала определяется соответственно формулами:

$$m_1 \{ n | 0 \} = \frac{\alpha \ln A + (1 - \alpha) \ln B}{m_1 \{ z | 0 \}}, \quad (3.148)$$

$$m_1 \{ n | s \} = \frac{\beta \ln B + (1 - \beta) \ln A}{m_1 \{ z | s \}}, \quad (3.149)$$

где величины $m_1 \{ z | 0 \}$ и $m_1 \{ z | s \}$ определяются соотношениями

$$m_1 \{z|0\} = \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{W(y_i|s)}{W(y_i|0)} \right] W(y_i|0) dy_i, \quad (3.150)$$

$$m_1 \{z|s\} = \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{W(y_i|s)}{W(y_i|0)} \right] W(y_i|s) dy_i. \quad (3.151)$$

При малых значениях условных вероятностей принятия решений ($\alpha < 0,1$ и $\beta < 0,1$), как следует из (3.143), (3.145), (3.148) и (3.149), можно определять $m_1 \{n|0\}$ и $m_1 \{n|s\}$ по формулам

$$m_1 \{n|0\} \approx \frac{\ln \beta}{m_1 \{z|0\}}, \quad m_1 \{n|s\} \approx -\frac{\ln \alpha}{m_1 \{z|s\}}. \quad (3.152)$$

Для дисперсий объемов выборок $\sigma_{n|0}^2$ и $\sigma_{n|s}^2$ при малых α и β справедливы следующие приближенные формулы [6]:

$$\sigma_{n|0}^2 \approx \frac{\sigma_{z|0}^2 \ln B}{|m_1 \{z|0\}|^3}, \quad \sigma_{n|s}^2 \approx \frac{\sigma_{z|s}^2 \ln A}{|m_1 \{z|s\}|^3}. \quad (3.153)$$

В этих формулах

$$\sigma_{z|0}^2 = m_2 \{z|0\} - m_1^2 \{z|0\},$$

$$m_1 \{z|0\} = \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{W(y_i|s)}{W(y_i|0)} \right]^2 W(y_i|0) dy_i,$$

$$\sigma_{z|s}^2 = m_2 \{z|s\} - m_1^2 \{z|s\},$$

$$m_1 \{z|s\} = \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{W(y_i|s)}{W(y_i|0)} \right]^2 W(y_i|s) dy_i.$$

Приведенные соотношения позволяют рассчитать основные характеристики оптимального последовательного обнаружителя.

Однако следует заметить, что последовательная процедура принятия решений *дает выигрыш по отношению к классической в среднем времени принятия решения*. В отдельных случаях выходной эффект может долго находиться между пороговыми уровнями A и B , и время принятия решения может оказаться недопустимо большим. Этот недостаток устраняется применением усеченной последовательной процедуры, в которой через определенный заданный промежуток времени осуществляется переключение на однопороговую систему.

3.2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

В статистической теории приема сигналов на фоне помех рассматривают две группы задач: а) обнаружение сигналов на фоне помехи; б) выделение сигналов из помехи. В первом случае точное воспроизведение сигнала не играет роли, но требуется с максимальной надежностью вынести решение о наличии или отсутствии сигнала. Во втором случае необходимо с минимальными искажениями воспроизвести сигнал.

Если спектральная функция полезного сигнала и энергетический спектр помехи различаются, то для решения этих задач естественно использовать фильтры, в которых подбирают передаточную функцию таким образом, что подавляются спектральные компоненты помехи и одновременно выделяются спектральные компоненты полезного сигнала. Рассматривают два вида фильтрации: а) фильтрация с позиции максимума отношения сигнала к помехе; б) фильтрация с позиции минимума искажения полезного сигнала. Рассмотрим сначала фильтрацию с позиции максимума отношения сигнала к помехе.

3.2.1. Оптимальная линейная фильтрация с позиции максимума отношения сигнала к помехе

В рассмотренных выше оптимальных обнаружителях принимаемая реализация поступает на вход схемы оптимальной обработки смеси сигнала с помехой. При этом для большинства этих обнаружителей оптимальная обработка осуществляется взаимно-корреляционным устройством, содержащим перемножитель и интегратор.

Взаимная корреляционная функция на выходе схемы обработки смеси сигнала с помехой в общем виде может быть представлена зависимостью

$$B_s(t) = \int_T y(t') \mathcal{G}(t, t') dt'.$$

С учетом временной задержки τ принимаемого сигнала это соотношение можно переписать в виде

$$B_s(t) = \int_T y(t') \mathcal{G}(t' - t + \tau) dt'. \quad (3.154)$$

В формуле (3.154) $y(t')$ - входная реализация, а $\mathcal{G}(t')$ - весовая функция, определяемая решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau = s(t). \quad (3.155)$$

Приведенные выше структурные схемы взаимно-корреляционных устройств не обладают инвариантностью по отношению ко времени

прихода полезного сигнала и должны быть многоканальными при неизвестном времени прихода полезного сигнала.

Для практических целей имеется возможность осуществления взаимно-корреляционного устройства в виде одноканального линейного устройства с постоянными параметрами, вырабатывающего на своем выходе функцию $B_s(t)$ непрерывно во времени так, что временная задержка входного сигнала вносит только соответствующую задержку в сигнал на выходе этого устройства.

Формула (3.154) для функции взаимной корреляции имеет характер интеграла свертки, который устанавливает связь между сигналами на входе $[s_1(t)]$ и выходе $[s_2(t)]$ линейной системы:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

где $g(t)$ - импульсная характеристика линейной системы.

Если подобрать такую линейную систему, чтобы сигнал на ее выходе воспроизводился с точностью до произвольного множителя k и некоторым временем запаздывания t_0 с взаимной корреляционной функцией, то для выполнения этого условия

$$s_2(t) = k B_s(t - t_0)$$

или, что равносильно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t') g(t - t') dt' = k \int_{-\infty}^{\infty} y(t') \mathcal{G}(t' - t + t_0) dt',$$

достаточно, чтобы

$$g(t) = k \mathcal{G}(t_0 - t). \quad (3.156)$$

Линейная система, имеющая такую импульсную характеристику, называется *оптимальным фильтром*, так как она осуществляет выполнение важнейшей операции оптимального обнаружителя – вычисление взаимной корреляционной функции. Естественно, что импульсная характеристика зависит как от входной сигнальной функции $[s_1(t)]$, так и от корреляционной функции помехи на входе $[B_2(t_1, t_2)]$, и определяется решением приведенного выше интегрального уравнения (3.155). Ниже будет показано, что оптимальный фильтр является наилучшим и в смысле отношения сигнала к помехе.

3.2.2. Согласованный фильтр

Согласованный фильтр, как частный случай оптимального линейного фильтра, широко используется при приеме детерминированных сигналов на фоне белых гауссовых шумов.

Положим, что на вход схемы обработки поступает детерминированный сигнал $s_1(t)$ и помеха в виде гауссова шума с корреляционной функцией

$$B_2(t_1, t_2) = \frac{G}{2} \delta(t_2 - t_1).$$

Весовая функция $\mathcal{G}(t)$ определяется из уравнения (3.155):

$$\frac{G}{2} \int_0^T \mathcal{G}(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = s_1(t).$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$\mathcal{G}(t) = \frac{2}{G} s_1(t). \quad (3.157)$$

Тогда, согласно (3.156), импульсная характеристика оптимального фильтра

$$g(t) = \frac{2}{G} s_1(t_0 - t). \quad (3.158)$$

Таким образом, импульсная характеристика рассматриваемого фильтра с точностью до постоянного множителя $k = \frac{2}{G}$ представляет собой зеркальное отображение входного сигнала. Такой оптимальный фильтр носит название *согласованный фильтр*.

Следует отметить, что время запаздывания t_0 должно быть не меньше момента времени окончания входного сигнала $s_1(t)$. В противном случае согласованный фильтр выработывал на своем выходе функцию $g(t)$ еще до того, как на его вход в момент $t = 0$ поступит сигнал в виде δ -функции. Ясно, что такой фильтр являлся бы физически неосуществимым.

Определим передаточную функцию согласованного фильтра, которая является прямым преобразованием Фурье от импульсной характеристики:

$$K_c(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} k s_1(t_0 - t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Обозначим $t = t' + t_0$, тогда

$$\begin{aligned} K_c(j\omega) &= k \exp(-j\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(-t') \exp(-j\omega t') dt' = \\ &= k S_1^*(j\omega) \exp(-j\omega t_0). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Здесь $S_1^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(-t') \exp(-j\omega t') dt'$ - функция, комплексно-

сопряженная спектральной функции $S_1(j\omega)$ полезного сигнала.

Таким образом, передаточная функция согласованного фильтра пропорциональна функции, комплексно-сопряженной спектральной функции принимаемого полезного сигнала.

Свойства согласованного фильтра:

1. среди всех линейных фильтров согласованный фильтр позволяет получить на выходе максимально возможное отношение сигнала к шуму;
2. временная функция сигнала на выходе согласованного фильтра соответствует автокорреляционной функции входного сигнала;
3. корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра пропорциональна автокорреляционной функции входного полезного сигнала.

Первое свойство. Выражение для величины отношения сигнала к шуму на выходе произвольного линейного фильтра с передаточной функцией $K(j\omega)$ имеет вид

$$\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_1(j\omega) K(j\omega) \exp(j\omega t^*) d\omega \bigg/ \sqrt{\frac{G}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (3.160)$$

где t^* - момент времени, в который сигнал на выходе фильтра достигает своего максимального значения.

Для анализа соотношения (3.160) воспользуемся неравенством Буняковского-Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} C(j\omega) F(j\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |C(j\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.161)$$

Теперь, на основании (3.161) и с учетом (3.160), запишем следующее выражение:

$$\frac{\left| \int_0^{\infty} S_1(j\omega) K(j\omega) \exp(j\omega t^*) d\omega \right|^2}{\left[\frac{G}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\left[\int_0^{\infty} |S_1(j\omega)|^2 d\omega \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{G}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Откуда

$$\frac{\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_1(j\omega) K(j\omega) \exp(j\omega t^*) d\omega \right|}{\left[\frac{G}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}} \leq \left[\frac{2}{\pi G} \int_0^{\infty} |S_1(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}. \quad (3.162)$$

Неравенство (3.162) переходит к равенству в единственном случае, если $K(j\omega) = S_1^* \exp(-j\omega t^*)$, т.е. при передаточной функции согласованного фильтра.

Правая часть неравенства (3.162) принимает вид

$$\left[\frac{2}{\pi G} \int_0^{\infty} |S_1(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} = \left(\frac{2E}{G} \right)^{1/2} = \mu_c. \quad (3.163)$$

Соотношение (3.163) характеризует величину отношения сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра. Таким образом, согласованный фильтр обеспечивает максимально возможное значение отношения сигнала к шуму на выходе.

Второе свойство. Представим сигнал на выходе согласованного фильтра посредством интеграла Дюамеля:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau) g(\tau) d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau) s_1(t_0-\tau) d\tau.$$

Обозначим $t-\tau = \tau_1$, а $t-t_0 = \tau_2$, тогда

$$\begin{aligned} s_2(t) &= k \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau_1) s_1[\tau_1 - (t-t_0)] d\tau = \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau_1) s_1(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 = kR(\tau_2). \end{aligned} \quad (3.164)$$

$R(\tau_2)$ - автокорреляционная функция входного сигнала.

Третье свойство. Корреляционную функцию шума на выходе согласованного фильтра $B_{2c}(\tau)$ выразим согласно теореме Винера-Хинчина обратным преобразованием Фурье от энергетического спектра шума на выходе согласованного фильтра $G_c(\omega)$:

$$B_{2c}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_c(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega.$$

Так как

$$G_c(\omega) = G|K_c(j\omega)|^2 = G|kS_1^*(j\omega t)\exp(-j\omega t^*)|^2 = k^2G|S_1(j\omega t)|^2,$$

то

$$B_{2c}(\tau) = \frac{k^2G}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(j\omega t)|^2 d\omega = k^2GR(\tau_2), \quad (3.165)$$

так как квадрат модуля спектральной функции детерминированного сигнала и его автокорреляционная функция связаны между собой парой преобразования Фурье.

3.2.3. Синтез согласованных фильтров

В качестве иллюстрации рассмотрим построение согласованных фильтров для приема простых по форме сигналов.

1) Согласованный фильтр для приема прямоугольного импульса

Аналитическое выражение для прямоугольного импульса имеет вид

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{при } |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Спектральная функция этого сигнала равна

$$S(j\omega) = A \exp\left(-\frac{j\omega\tau}{2}\right) \frac{\exp(j\omega\tau) - 1}{j\omega}.$$

Функция, комплексно-сопряженная этой спектральной функции, будет

$$S^*(j\omega) = A \exp\left(\frac{j\omega\tau}{2}\right) \frac{1 - \exp(-j\omega\tau)}{j\omega}.$$

Следовательно, если положить $A = 1$ и $t_0 = \tau/2$, передаточную функцию согласованного фильтра можно представить в виде

$$K_c(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [1 - \exp(-j\omega\tau)]. \quad (3.166)$$

Передаточной функцией $1/j\omega$ обладает интегрирующее устройство, а функция $\exp(-j\omega t)$ описывает устройство задержки на время τ . Следовательно, согласованный фильтр для приема прямоугольного импульса состоит из интегратора (\int), устройства задержки на время τ (U_{Z_τ}) и вычитающего устройства ($-$). Структурная схема такого согласованного фильтра приведена на рис. 3.14. Если на вход этого фильтра подадим сигнал в виде δ -функции, то на выходе интегратора будем иметь колебание в виде функции Хевисайда (функции единичного

скачка) $e(t)$, как показано на рис.3.15. На выходе фильтра будет прямоугольный импульс единичной величины и длительностью τ . Он образуется как разность функций единичного скачка $e(\tau)$ и $e(t-\tau)$, смещенных относительно друг друга на время τ . Реакция линейной системы на входное воздействие в виде δ -функции является импульсной характеристикой этой линейной системы. Полученный прямоугольный импульс на выходе рассматриваемого фильтра при входном воздействии дельта-функции является зеркальным отображением входного сигнала и, следовательно, приведенная на рис. 3.14 структурная схема является оптимальной.

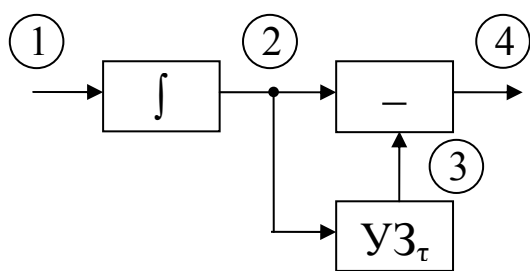


Рис. 3.14. Структурная схема согласованного фильтра

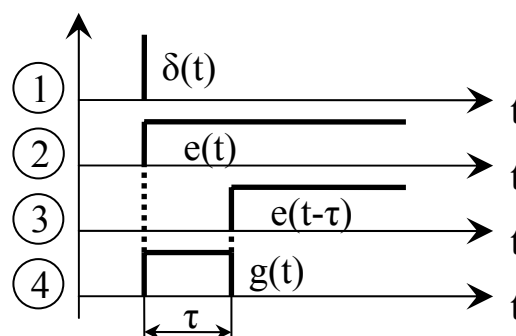


Рис.3.15. Временные диаграммы сигналов в согласованном фильтре

2) Построение согласованных фильтров для приема трапециевидного и треугольного импульсов.

Трапециевидный импульс единичной величины аналитически можно представить в виде

$$s(t) = \frac{2}{\tau - \tau_1} \left(\left(t + \frac{\tau}{2} \right) e \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) e \left(t + \frac{\tau_1}{2} \right) - \left(t - \frac{\tau_1}{2} \right) e \left(t - \frac{\tau_1}{2} \right) + \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right),$$

где τ_1 - длительность плоской части импульса, $\frac{\tau - \tau_1}{2}$ - длительность фронта и спада импульса, $e(t)$ - функция Хевисайда.

Спектральная функция такого импульса определяется выражением

$$S(j\omega) = \frac{2}{\tau - \tau_1} \exp\left(-\frac{j\omega\tau}{2}\right) \frac{1}{(j\omega)^2} \times \\ \times \left[1 - \exp\left(j\omega \frac{\tau - \tau_1}{2}\right)\right] \left[1 - \exp\left(j\omega \frac{\tau + \tau_1}{2}\right)\right].$$

Полагая для упрощения, что

$$\frac{2}{\tau - \tau_1} = \frac{1}{k} \text{ и } \frac{\tau}{2} = t_0,$$

приходим к следующей форме записи передаточной функции согласованного фильтра при приеме трапециевидного импульса:

$$K_c(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \left[1 - \exp\left(-j\omega \frac{\tau - \tau_1}{2}\right)\right] \left[1 - \exp\left(-j\omega \frac{\tau + \tau_1}{2}\right)\right]. \quad (3.167)$$

Анализ выражения (3.167) показывает, что согласованный фильтр для приема трапециевидного импульса состоит из двух интеграторов, двух задерживающих и двух вычитающих устройств. Структурная схема этого фильтра приведена на рис.3.16.

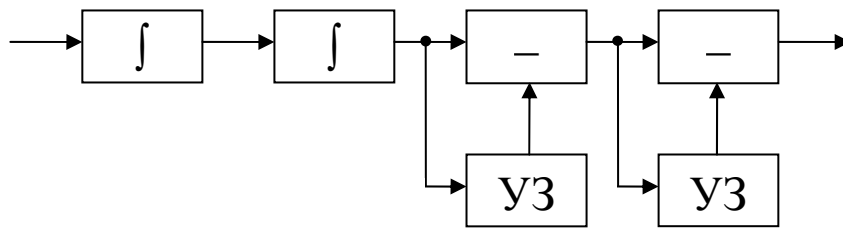


Рис. 3.16.

Структурная схема согласованного фильтра для приема трапециевидного импульса

Треугольный импульс является частным случаем трапециевидного, у которого длительность плоской части равна нулю ($\tau_1 = 0$). Спектральная функция треугольного импульса единичной величины

$$S(j\omega) = \frac{2}{\tau} \exp\left(-\frac{j\omega\tau}{2}\right) \frac{1}{(j\omega)^2} \left[1 - \exp\left(j\omega \frac{\tau}{2}\right)\right]^2.$$

Следовательно, передаточная функция согласованного фильтра для приема треугольного импульса будет определяться зависимостью

$$K_c(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \left[1 - \exp\left(-j\omega \frac{\tau}{2}\right)\right]. \quad (3.168)$$

Структурная схема такого согласованного фильтра такая же, как и для фильтра при приеме трапециевидного импульса, с той лишь разницей, что в устройствах задержки $\tau_1 = 0$.

3.2.4. Оптимальные линейные фильтры для приема детерминированных сигналов на фоне окрашенных шумов

В условиях приема детерминированных сигналов на фоне окрашенных шумов импульсная характеристика оптимального фильтра, как выше указывалось, определяется решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (3.155). Однако решение этого интегрального уравнения имеет место при определенных условиях, предъявляемых к ядру уравнения $B_2(t, \tau)$, которым является корреляционная функция помехи. Решение таких уравнений при некоторых корреляционных функциях помех может быть связано с непреодолимыми трудностями. Можно получить необходимые результаты и менее формальным путем, используя частотный метод [7].

Положим, что на вход фильтра поступает детерминированный сигнал $s_1(t)$ со спектральной функцией $S_1(j\omega)$ и гауссов шум $x(t)$ с энергетическим спектром $G_1(\omega) = GF(\omega)$. Определим структуру оптимального фильтра для такого случая. Разобьем оптимальный фильтр на два последовательно соединенных устройства с передаточными функциями $K_1(j\omega)$ и $K_2(j\omega)$. При этом выберем передаточную функцию первого устройства $K_1(j\omega)$ такой, чтобы на выходе этого устройства энергетический спектр шума оказался равномерным (белый шум). Для этого необходимо, чтобы $K_1(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{F(\omega)}}$. Устройство с такой передаточной

функцией будем называть *отбеливателем*. Одновременно с шумом будет преобразовываться по спектру и полезный сигнал. На выходе отбеливателя получим следующие значения энергетического спектра шума и спектральной функции сигнала:

$$G_2(\omega) = G_1(\omega) |K_1(j\omega)|^2 = G,$$

$$S_2(j\omega) = S_1(j\omega) K_1(j\omega) = \frac{S_1(j\omega)}{\sqrt{F(\omega)}}.$$

Теперь для получения максимально возможного отношения сигнала к шуму в качестве второго устройства используем согласованный фильтр для сигнала со спектральной функцией $S_2(j\omega)$. Передаточная функция $K_2(j\omega)$ согласованного фильтра имеет вид

$$K_2(j\omega) = k \frac{S_1^*(j\omega)}{\sqrt{F(\omega)}} \exp(-j\omega t_0).$$

Следовательно, передаточная функция оптимального фильтра будет определяться соотношением

$$K_0(j\omega) = K_1(j\omega)K_2(j\omega) = k \frac{S_1^*}{F(\omega)} \exp(-j\omega t_0). \quad (3.169)$$

Таким образом, передаточная функция оптимального фильтра для приема детерминированного сигнала на фоне окрашенного гауссова шума прямо пропорциональна функции, комплексно сопряженной спектральной функции входного сигнала, и обратно пропорциональна энергетическому спектру входных шумов.

Импульсная характеристика оптимального фильтра в этом случае удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1^*(j\omega)}{F(\omega)} \exp([j\omega(t-t_0)]) d\omega. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Умножив обе части равенства (3.170) на $B_2(\tau-t)$ (где $B_2(\tau)$ -корреляционная функция входных шумов) и проинтегрировав на бесконечно большом интервале по t , получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)B_2(\tau-t) dt &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau-t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1^*(j\omega)}{F(\omega)} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \right] dt = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_1^*(j\omega)}{F(\omega)} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} B_2(x) e^{-j\omega x} dx \right] \exp[-j\omega(t_0-\tau)] d\omega = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(-j\omega) \exp[-j\omega(t_0-\tau)] d(-\omega) = ks(t_0-t). \end{aligned} \quad (3.171)$$

так как, согласно теореме Винера-Хинчина,

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_2(x) e^{-j\omega x} dx = F(\omega).$$

Учитывая соотношение (3.156), уравнение (3.171) можно записать как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t)B_2(\tau-t) dt = s(t),$$

что соответствует интегральному уравнению (3.155). Следовательно, импульсная характеристика (3.170) оптимального фильтра удовлетворяет решению интегрального уравнения (3.155).

Величина отношения сигнала к шуму на выходе оптимального фильтра с учетом (3.169) будет определяться зависимостью

$$\mu = \left[\frac{2}{\pi G} \int_0^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{F(\omega)} d\omega \right]^{1/2}. \quad (3.172)$$

Если на вход воздействует белый шум, то формулы (3.169) и (3.172) соответственно преобразуются к выражениям (3.159) и (3.163) для согласованного фильтра.

В качестве иллюстрации рассмотрим пример построения оптимального фильтра, когда на его вход поступает шум с энергетическим спектром

$$G(\omega) = \frac{2aq^2}{\omega^2 + q^2}$$

и сигнал в виде прямоугольного импульса.

Рассматриваемый шум имеет корреляционную функцию

$$B_2(\tau) = \frac{aq}{2} e^{-q|\tau|}$$

и, следовательно, может быть получен путем пропускания белого шума через RC -фильтр нижних частот с постоянной времени $T = RC$.

Согласно выражению (3.169), передаточная функция оптимального фильтра в данном случае

$$K_0(j\omega) = k \frac{1}{j\omega} [1 - \exp(-j\omega\tau)] \frac{\omega^2 + q^2}{2aq^2}.$$

Полагая, для упрощения, $k = 2aq^2$, получим

$$K_0(j\omega) = \left(\frac{q^2}{j\omega} - j\omega \right) [1 - \exp(-j\omega\tau)]. \quad (3.173)$$

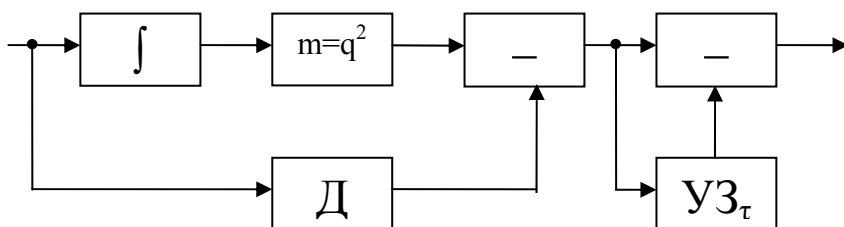


Рис. 3.17.
Структурная схема
оптимального
фильтра
при окрашенном шуме
Так как $j\omega$

представляет собой передаточную функцию дифференцирующего устройства, то оптимальный фильтр в рассматриваемом случае состоит из

совокупности интегрирующего устройства (\int) , устройства с коэффициентом передачи $m = q^2$, дифференцирующего (D) и вычитающего $(-)$ устройств, а также устройства задержки (УЗ) на время, равное длительности импульса τ , и вычитающего устройства $(-)$. Структурная схема рассмотренного оптимального фильтра приведена на рис. 3.17.

3.2.5. Оптимальная фильтрация с позиции минимума искажения полезного сигнала

Наряду с задачей обнаружения также необходимо обеспечить определенную зависимость между выходным эффектом $z(t)$ и входным полезным сигналом $s(t)$, который в общем случае является случайным процессом. Однако любая реальная система не может выполнить свои функции идеально. Если требуемое значение выходного эффекта обозначить за $z^*(t)$, то зависимость между $s(t)$ и $z^*(t)$ можно представить уравнением

$$\psi(s, z^*) = 0. \quad (3.174)$$

Эта зависимость может быть различной и определяется назначением устройства. Например, для систем автоматического регулирования требуется, чтобы $z^*(t) = s(t)$, для систем связи: $z^*(t) = ks(t - \tau)$, и т.п. Выходной эффект будет неизбежно отличаться от требуемого $z^*(t)$. Величина

$$\varepsilon(t) = z^*(t) - z(t) \quad (3.175)$$

является погрешностью, обусловленной искажениями сигналов как при их преобразовании в системе, так и при воздействии помехи.

Задача оптимальной фильтрации с позиции минимума искажения полезного сигнала сводится к выбору такой импульсной характеристики или передаточной функции фильтра, которая минимизирует средний квадрат ошибки $\varepsilon(t)$, т.е.

$$m_1 \{ \varepsilon^2(t) \} = \min. \quad (3.176)$$

Будем исходить из предположения, что на вход фильтра поступает аддитивная смесь двух эргодических процессов, один из которых является помехой $[x(t)]$: $y(t) = s(t) + x(t)$.

Полагая, что импульсная характеристика фильтра $g(t)$, выходной эффект можно представить в виде

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) [s(t-\tau) + x(t-\tau)] d\tau.$$

Ошибка воспроизведения теперь будет равна

$$\varepsilon(t) = z^*(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

Квадрат ошибки запишем в виде

$$\varepsilon^2(t) = \left[z^*(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau \right] \left[z^*(t) - \int_{-\infty}^{\infty} g(v) y(t-v) dv \right]. \quad (3.177)$$

Введение во втором интеграле переменной v ничего не меняет, однако позволит произведение интегралов заменить двойным интегралом.

Раскрывая скобки выражения (3.177), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) &= [z^*(t)]^2 - z^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} g(v) y(t-v) dv \right] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(v) y(t-v) dv = [z^*(t)]^2 - \\ &- 2z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(v) y(t-\tau) y(t-v) d\tau dv. \end{aligned}$$

Так как $z^*(t)$ и $y(t)$ являются случайными процессами, то и $\varepsilon(t)$ является случайным процессом. Определим математическое ожидание $\varepsilon^2(t)$:

$$\begin{aligned} m_1 \{ \varepsilon^2(t) \} &= m_1 \{ [z^*(t)]^2 \} - 2m_1 \left\{ z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) y(t-\tau) d\tau \right\} + \\ &+ m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(v) y(t-\tau) y(t-v) d\tau dv \right\} = m_1 \{ [z^*(t)]^2 \} - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) m_1 \{ z^*(t) y(t-\tau) \} d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\nu) m_1 \{y(t-\tau)y(t-\nu)\} d\tau d\nu . \quad (3.178)$$

Так как для стационарных процессов

$$m_1 \{y(t-\tau)y(t-\nu)\} = B_{2y}(t-\tau, t-\nu) = B_{2y}(\tau-\nu) \text{ является}$$

корреляционной функцией входного процесса $y(t)$,

$$m_1 \{z^*(t)y(t-\tau)\} = B_{zy}(t, t-\tau) = B_{zy}(\tau) \text{ - взаимной}$$

корреляционной функцией процессов $z^*(t)$ и $y(t)$, а

$$m_1 \left\{ \left[z^*(t) \right]^2 \right\} = B_{2z}(0) \text{ - мощностью процесса } z^*(t),$$

то формулу (3.178) можно представить в виде

$$m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\} = B_{2z}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) B_{zy}(\tau) d\tau + \quad (3.179)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\nu) B_{2y}(\tau-\nu) d\tau d\nu .$$

Определение функции $g(t)$, минимизирующей $m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\}$, представляет собой задачу вариационного исчисления. Воспользуемся следующей методикой [8]. Положим, что $g(t)$ - функция, при которой средний квадрат ошибки минимален. Имеется импульсная характеристика $g(t) + \lambda f(t)$, где λ - некоторое число, $f(t)$ - какая-либо функция. Если вместо $g(t)$ подставить в формулу (3.179) функцию $g(t) + \lambda f(t)$, то значение $m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\}$ должно увеличиваться при любом $\lambda \neq 0$. Только при $\lambda = 0$ будет минимум функции $m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\}$, которая теперь может рассматриваться как функция параметра λ . Заменяя в формуле (3.179) $g(t)$ функцией $g(t) + \lambda f(t)$, получим

$$m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\} = B_{2z}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) B_{zy}(\tau) d\tau - 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) B_{zy}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\nu) B_{2y}(\tau-\nu) d\tau d\nu + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\nu) B_{2y}(\tau-\nu) d\tau d\nu +$$

$$+\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\nu)B_{2y}(\tau-\nu)d\tau d\nu.$$

Это соотношение можно представить в виде

$$m_1 \{ \varepsilon^2(t) \} = A + 2\lambda D + \lambda^2 C, \quad (3.180)$$

где

$$A = B_{2z}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)B_{zy}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(\nu)B_{2y}(\tau-\nu)d\tau d\nu,$$

$$D = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)B_{zy}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(\tau)B_{2y}(\tau-\nu)d\tau d\nu,$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\nu)B_{2y}(\tau-\nu)d\tau d\nu.$$

Минимальное значение $m_1 \{ \varepsilon^2(t) \}$ будет определяться из условия

$$\frac{\partial m_1 \{ \varepsilon^2(t) \}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{или} \quad D + \lambda C = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lambda = -\frac{D}{C}.$$

Но $m_1 \{ \varepsilon^2(t) \}$ будет минимальна, как указывалось выше, при $\lambda = 0$.

Следовательно, должно выполняться условие $D = 0$, т.е.

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)B_{zy}(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(\tau)B_{2y}(\tau-\nu)d\tau d\nu = 0. \quad (3.181)$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)B_{2y}(\tau-\nu)d\nu - B_{zy}(\tau) \right] d\tau = 0. \quad (3.182)$$

Это условие справедливо для любой функции $f(\tau)$ только в случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю:

$$B_{zy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)B_{2y}(\tau-\nu)d\nu. \quad (3.183)$$

Выражение (3.183) является линейным интегральным уравнением Винера-Хопфа, решение которого определяет импульсную характеристику

$g(t)$ оптимального фильтра с позиции минимума искажения полезного сигнала.

Пренебрегая физической реализуемостью фильтра, решим уравнение Винера-Хопфа методом интеграла Фурье. Для этого умножим обе части уравнения (3.183) на $\exp(-j\omega\tau)$ и проинтегрируем их в бесконечных пределах по переменной τ . Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{zy}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) B_{2y}(\tau - \nu) \exp(-j\omega\tau) d\nu d\tau. \quad (3.184)$$

Правая часть уравнения (3.184) является преобразованием Фурье от интегральной свертки и, согласно свойству преобразования Фурье о спектральной функции свертки, равна $K_0(j\omega)G_y(\omega)$. Поэтому соотношение (3.184) принимает вид

$$G_{zy}(\omega) = K_0(j\omega)G_y(\omega). \quad (3.185)$$

В этой формуле

$$K_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau - \text{передаточная функция}$$

оптимального фильтра;

$$G_{zy}(\omega) = G_s(\omega) + G_{sx}(\omega) \text{ и}$$

$$G_y(\omega) = G_s(\omega) + G_x(\omega) + G_{sx}(\omega) + G_{xs}(\omega), \text{ если случайные}$$

процессы $s(t)$ $x(t)$ когерентны;

$$G_{zy}(\omega) = G_s(\omega) \text{ и } G_y(\omega) = G_s(\omega) + G_x(\omega), \text{ если некогерентны;}$$

$$G_s(\omega) \text{ и } G_x(\omega) - \text{энергетические спектры сигнала и помехи;}$$

$$G_{sx}(\omega) \text{ и } G_{xs}(\omega) - \text{взаимные энергетические спектры сигнала и}$$

помехи.

Напомним, что некогерентными случайными процессами называются такие процессы, взаимные корреляционные функции которых равны постоянной величине или обращаются в ноль.

Таким образом, согласно (3.185), передаточная функция оптимального фильтра с позиции минимума искажения полезного сигнала для некогерентных полезного сигнала и помехи будет определяться зависимостью

$$K_0(j\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_x(\omega)}. \quad (3.186)$$

При этом величина минимальной среднеквадратической ошибки будет равна [9]

$$m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\}_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega) G_x(\omega)}{G_s(\omega) + G_x(\omega)} d\omega. \quad (3.187)$$

Зависимость (3.187) указывает на то, что эта погрешность в оптимальном линейном фильтре может быть сведена к нулю в том случае, если энергетические спектры процессов $s(t)$ и $x(t)$ не перекрываются. В противном случае ошибка неизбежна.

При фильтрации процесса на фоне белого шума минимальная среднеквадратическая погрешность равна

$$m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\}_{\min} = \frac{G_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_x} d\omega, \quad (3.188)$$

т.е. *при воздействии белого шума при фильтрации ошибки не избежать.*

Если процессы $s(t)$ и $x(t)$ когерентны, то передаточная функция оптимального фильтра будет определяться зависимостью

$$K_0(j\omega) = \frac{G_s(\omega) + G_{sx}(\omega)}{G_s(\omega) + G_x(\omega) + G_{sx}(\omega) + G_{xs}(\omega)}, \quad (3.189)$$

а минимальная среднеквадратическая погрешность будет равна

$$m_1 \left\{ \varepsilon^2(t) \right\}_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_s(\omega) G_y(\omega) - |G_s(\omega) + G_{sx}(\omega)|^2}{G_y(\omega)} d\omega. \quad (3.190)$$

Часть 4

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Сигнал, поступающий в приемное устройство, несет в себе информацию для потребителя, которая содержится в значениях тех или иных параметров: величине сигнала, времени запаздывания, длительности сигнала, начальной фазе колебания, частоте колебания и др. Потребителю для получения требуемой информации необходимо определить значения параметров сигнала. При этом значения информационных параметров принимаемого сигнала не обязательно соответствуют истинным, так как полезный сигнал в реальных условиях искажен помехой.

Положим, что нас интересует значение информационного параметра α в принимаемом сигнале $s(t, \alpha)$ в условиях аддитивности сигнала и шума:

$$y(t) = s(t, \alpha) + x(t).$$

Вследствие того, что параметр α искажается под действием шума, задача заключается в определении так называемой оценки этого параметра $\hat{\alpha}$, дающей наилучшее приближение к действительному значению параметра.

Кроме этого на определение величины информационного параметра могут влиять так называемые несущественные параметры. Например, в лазерных дальномерах и локаторах информация о дальности заключена во времени запаздывания отраженного сигнала. Однако в случае фиксации временного положения сигнала по фронту на оценку времени запаздывания влияет флуктуация величины полезного сигнала, обусловленная турбулентностью среды распространения, случайным изменением отражательных свойств объекта локации, флуктуациями величины излучаемого лазерного лучистого сигнала.

Ввиду случайного отклонения определяемых значений параметров от истинных и невозможности компенсации этих отклонений наблюдатель должен выработать такую стратегию, при которой отрицательные последствия влияния помех были бы минимальными. Таким образом, необходимо сформулировать оптимальные правила определения параметров сигналов.

4.1. БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Будем первоначально исходить из предположения, что сигнал не содержит мешающих параметров. В качестве критерия оптимальности оценки естественно принять критерий минимума соответствующего ей среднего риска для всех возможных значений параметров α и всех возможных реализаций смеси сигнала с шумом. При этом припишем

каждому значению ошибки оценки $\hat{\alpha} - \alpha$ определенную стоимость потерь $\Pi(\hat{\alpha}, \alpha)$, называемую функцией потерь или функцией стоимости.

Используя формулу (3.21) величину среднего риска для выбранной функции потерь $\Pi(\hat{\alpha}, \alpha)$ и известного совместного распределения вероятностей принимаемой реализации и параметра $W(y, \alpha)$ запишем в виде

$$R = \int_{\Omega(\bar{y})} d\Omega(\bar{y}) \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\hat{\alpha}, \alpha) W_n(\bar{y}, \alpha) d\alpha. \quad (4.1)$$

Так как внутренний интеграл в (4.1) положителен, условие минимума среднего риска можно заменить условием минимума внутреннего интеграла выражения (4.1) для каждой реализации $y(t)$, т.е.

$$\frac{d}{d\hat{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\hat{\alpha}, \alpha) W(\bar{y}, \alpha) d\alpha = 0. \quad (4.2)$$

Значения оценок в соответствии с выражением (4.2) зависят от вида функции потерь $\Pi(\hat{\alpha}, \alpha)$. Обычно в задачах оценки используются функции потерь следующих видов.

1) Простая функция потерь.

$$\Pi(\hat{\alpha}, \alpha) = C \left[1 - \delta(\hat{\alpha} - \alpha) \right]. \quad (4.3)$$

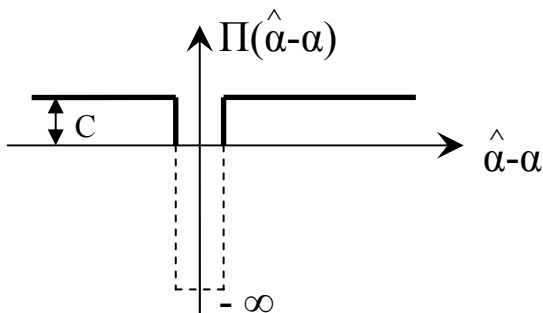


Рис. 4.1. Простая функция потерь

Простая функция потерь (рис. 4.1) всем правильным решениям приписывает потери, равные $(-\infty)$, а всем неправильным решениям, независимо от величины ошибок, приписывает постоянные потери $(+C)$.

2) Линейная функция потерь

$$\Pi(\hat{\alpha}, \alpha) = |\hat{\alpha} - \alpha|. \quad (4.4)$$

Линейная функция потерь (рис. 4.2) приписывает правильному решению

нулевые потери, а всем неправильным решениям – потери, увеличивающиеся по линейному закону с ростом модуля ошибки решения.

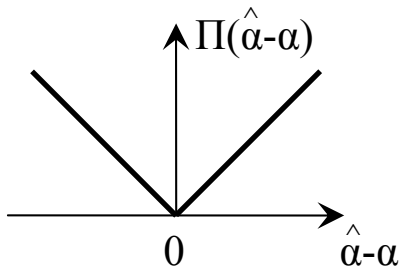


Рис. 4.2. Линейная функция потерь

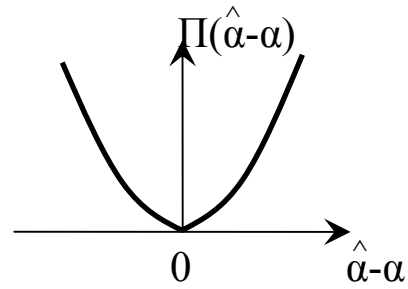


Рис. 4.3. Квадратичная функция потерь

3) Квадратичная функция потерь

$$\Pi(\hat{\alpha}, \alpha) = (\hat{\alpha} - \alpha)^2. \quad (4.5)$$

Квадратичная функция потерь приписывает всем неправильным решениям потери, изменяющиеся по квадратическому закону с ростом ошибки; ее график приведен на рис. 4.3.

4) Равномерная функция риска

$$\Pi(\hat{\alpha}, \alpha) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\Delta}\right), \quad (4.6)$$

где $\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1/2 \end{cases}$ - правильная функция,

описывающая прямоугольный импульс единичной величины и длительности, симметричный относительно $x = 0$.

Равномерная функция риска, приведенная на рис. 4.4, при оценке параметра α предлагает считать потери от ошибок, не выходящих за пределы $\pm \Delta/2$, нулевыми, а при прочих ошибках – постоянными.

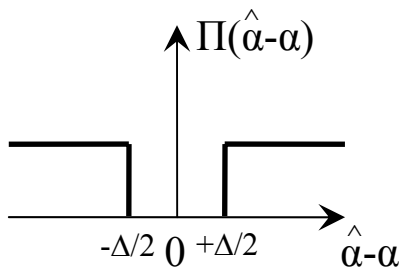


Рис. 4.4. Равномерная функция потерь

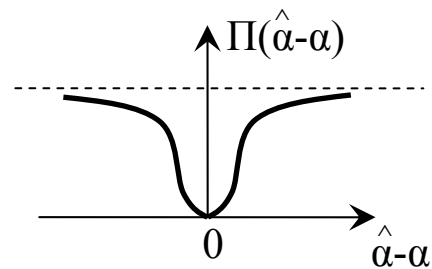


Рис. 4.5. Функция потерь с насыщением

5) Функция потерь с насыщением

$$L(\hat{\alpha}, \alpha) = 1 - \exp\left[-C(\hat{\alpha} - \alpha)\right]. \quad (4.7)$$

Функция потерь с насыщением (рис. 4.5) применяется в случае, если целесообразно учитывать тот факт, что потери не могут расти безгранично с ростом ошибок решения.

Определим оптимальные оценки при некоторых, характерных для практики, функций потерь.

Для простой функции потерь (4.3) условие (4.2) принимает вид

$$\frac{d}{d\hat{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} C\left[1 - \delta(\hat{\alpha} - \alpha)\right] W_n(\bar{y}, \alpha) d\alpha = 0.$$

Учитывая, что по теореме умножения вероятностей

$$W_n(\bar{y}, \alpha) = W_n(\bar{y}) W(\alpha|\bar{y})$$

и используя фильтрующее свойство δ -функции, получим

$$\frac{d}{d\hat{\alpha}} W_n(\hat{\alpha}|\bar{y}) = 0. \quad (4.8)$$

Таким образом, оптимальной оценкой при простой функции потерь является абсцисса моды апостериорного распределения параметра, т.е. положение максимума апостериорной плотности вероятностей параметра.

Для линейной функции потерь (4.4) условие (4.2) будет таким:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\hat{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\alpha} - \alpha| W_n(\bar{y}, \alpha) d\alpha = \\ = \frac{d}{d\hat{\alpha}} \left[W_n(\bar{y}) \int_{-\infty}^{\hat{\alpha}} (\hat{\alpha} - \alpha) W_n(\alpha|\bar{y}) d\alpha + \int_{\hat{\alpha}}^{\infty} (\alpha - \hat{\alpha}) W_n(\alpha|\bar{y}) d\alpha \right] = 0 \end{aligned}$$

или

$$\int_{-\infty}^{\hat{\alpha}} W_n(\alpha|\bar{y}) d\alpha = \int_{\hat{\alpha}}^{\infty} W_n(\alpha|\bar{y}) d\alpha. \quad (4.9)$$

В этом случае оптимальной байесовской оценкой является абсцисса медианы апостериорного распределения параметра (медиана делит площадь под кривой плотности вероятностей на две равные части).

Квадратичная функция потерь (4.5) приводит к выражению

$$\frac{d}{d\hat{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\alpha} - \alpha)^2 W_n(\bar{y}, \alpha) d\alpha =$$

$$= 2\bar{\alpha}W_n(\bar{y}) \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\alpha|\bar{y})d\alpha - 2W_n(\bar{y}) \int_{\bar{\alpha}}^{\infty} \alpha W_n(\alpha|\bar{y})d\alpha = 0.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(\alpha|\bar{y})d\alpha = 1, \text{ получим}$$

$$\bar{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha W_n(\alpha|\bar{y})d\alpha. \quad (4.10)$$

Выражение (4.10) указывает на то, что оптимальной оценкой параметра при квадратичной функции потерь является абсцисса центра тяжести апостериорного распределения возможных значений параметра (апостериорное математическое ожидание величины параметра).

В случае, если функция потерь представляет собой равномерную функцию (4.6), условие (4.2) принимает вид

$$\frac{d}{d\bar{\alpha}} \int_{\bar{\alpha}-\Delta/2}^{\bar{\alpha}+\Delta/2} W_n(\alpha|\bar{y})d\alpha = 0. \quad (4.11)$$

Если апостериорная плотность вероятностей $W(\alpha|y)$ имеет отчетливо выраженный максимум с координатой α_0 , симметричный в пределах $[\alpha_0 - \Delta/2, \alpha_0 + \Delta/2]$, то минимум среднего риска будет достигаться при $\alpha = \alpha_0 = \bar{\alpha}$, т.е. оптимальная оценка будет определяться абсциссой моды апостериорного распределения параметра.

Нетрудно показать, что и при использовании функции потерь с насыщением оптимальной оценкой также является абсцисса моды апостериорного распределения параметра.

Во многих случаях, при которых апостериорное распределение параметра оказывается симметричным, абсциссы центра тяжести, моды и медианы этого распределения совпадают. Такая инвариантность по отношению к выбору функции потерь является полезной из-за субъективности тех соображений, которые закладываются при выборе функций потерь. Некоторые условия, при которых эта инвариантность соблюдается, определена *свойствами Шермана* [11].

Свойство 1. Если функция потерь симметричная и выпуклая:

$$\begin{cases} \Pi(\bar{\alpha}, \alpha) = \Pi[-(\bar{\alpha}, \alpha)] - \text{симметричность,} \\ \Pi[bx_1 + (1-b)x_2] \leq b\Pi(x_1) + (1-b)\Pi(x_2) - \text{выпуклость,} \end{cases}$$

а апостериорное распределение параметра симметрично относительно математического ожидания, то оптимальная оценка будет идентична абсциссе центра тяжести апостериорного распределения параметра.

Если при этом $\Pi(\bar{\alpha}, \alpha)$ строго выпукла, то оптимальная оценка является единственной и равной абсциссе центра тяжести апостериорного распределения параметра.

Свойство 2. Если функция потерь – симметричная неубывающая функция, а апостериорная плотность вероятностей параметра симметрична относительно математического ожидания, то оптимальная оценка идентична абсциссе центра тяжести апостериорного распределения параметра.

Это свойство охватывает и такие функции потерь, которые не являются выпуклыми (например, равномерная функция потерь).

Эти свойства показывают, что практически не следует преувеличивать роль выбора конкретной функции потерь, считая универсальной оценкой, например, оценку по максимуму апостериорного распределения параметра.

При высокоточных измерениях, когда область неопределенности значений параметра α при известной реализации $y(t)$, определяемая апостериорным распределением $W_n(\alpha|\bar{y})$, много меньше области возможных значений параметра, определяемой распределением $W(\alpha)$, можно принять $W(\alpha) \approx const$.

Согласно формуле Байеса, апостериорную плотность вероятностей можно представить в виде

$$W_n(\alpha|\bar{y}) = \frac{W(\alpha)W_n(\bar{y}|\alpha)}{\int_{-\infty}^{\infty} W(\alpha)W_n(\bar{y}|\alpha)d\alpha}. \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует. Что при $W(\alpha) \approx const$ апостериорная плотность вероятностей пропорциональна функции правдоподобия $W_n(\bar{y}|\alpha)$. Поэтому при высокоточных измерениях максимум апостериорной плотности вероятностей сводится к максимуму функции правдоподобия.

4.2. ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ, ГРАНИЦА КРАМЕРА-РАО

Байесовские оценки предполагают, что случайные величины параметров и их априорные вероятности известны. Однако во многих ситуациях отсутствует надежная априорная информация о параметре α , что исключает использование байесовских оценок, поскольку параметр является

неизвестной величиной.

Так как оценка является случайной величиной, то одна из продуктивных стратегий определения оптимальной оценки неизвестного параметра базируется на двух мерах качества, которыми служат математическое ожидание $m_1\{\hat{\alpha}\}$ и дисперсия $M_2\{\hat{\alpha}\}$ оценки.

Возможные значения математического ожидания оценки можно подразделить на три вида:

1. $m_1\{\hat{\alpha}\} = \alpha$ при всех значениях α , и эта оценка является несмещенной. Это означает, что среднее значение оценки равно величине, которую необходимо оценить;

2. $m_1\{\hat{\alpha}\} = \alpha + \beta$, где β не зависит от α и известно. В этом случае оценка имеет известное смещение, и ее можно получить путем вычитания β из $m_1\{\hat{\alpha}\}$;

3. $m_1\{\hat{\alpha}\} = \alpha + \beta(\alpha)$, что означает неизвестное смещение, которое нельзя просто вычесть из оценки.

Дисперсия оценки $M_2\{\hat{\alpha}\}$ дает меру рассеяния ошибки оценки.

Естественно, наблюдатель должен стремиться к такой стратегии, при которой имеется наименьшая дисперсия несмещенной оценки. Таким образом, условия

$$m_1\{\hat{\alpha} - \alpha\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\alpha} - \alpha) W(y|\alpha) dy = 0, \quad (4.13)$$

$$M_2\{\hat{\alpha}\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\alpha} - \alpha)^2 W(y|\alpha) dy = \min. \quad (4.14)$$

в совокупности можно рассматривать как единый критерий качества, определяющий оптимальную оценку, имеющую потенциальную точность.

Следует заметить, что интегралы (4.13) и (4.14) записаны с учетом того, что после наблюдения возникает необходимость оценки, и эту оценку можно представить в общем виде как $\hat{\alpha}(y)$.

Эффективность указанной процедуры определяется вычислением смещения и дисперсии оценки, что не всегда удается сделать. Ввиду этого находится нижняя граница дисперсии, которая устанавливается неравенством (границей) Крамера-Рао.

Для определения этой границы продифференцируем соотношение (4.13), имея в виду, что производные

$$\frac{dW(y|\alpha)}{d\alpha} \text{ и } \frac{d^2W(y|\alpha)}{d\alpha^2}$$

существуют и абсолютно интегрируемы. Получим

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha) W(y|\alpha) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} (\bar{\alpha} - \alpha) W(y|\alpha) dy = 0. \quad (4.15)$$

С учетом правила дифференцирования произведения выражение (4.15) приобретает вид

$$-\int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) dy + \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha) \frac{dW(y|\alpha)}{d\alpha} dy = 0. \quad (4.16)$$

В равенстве (4.16) при любом α первый интеграл равен единице. Учитывая, что $\frac{d \ln z}{dx} = \frac{dz}{z dx}$,

получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha) W(y|\alpha) \frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} dy = 1. \quad (4.18)$$

Запишем неравенство Буняковского-Шварца в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha)^2 W(y|\alpha) dy \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{dW(y|\alpha)}{d\alpha} \right]^2 W(y|\alpha) dy \geq \\ & \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha) \sqrt{W(y|\alpha)} \frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} \sqrt{W(y|\alpha)} dy \right|^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

С учетом зависимости (4.18) неравенство (4.19) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha)^2 W(y|\alpha) dy \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} \right]^2 W(y|\alpha) dy \geq 1. \quad (4.20)$$

В неравенстве (4.20) первый множитель является дисперсией оценки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\alpha} - \alpha)^2 W(y|\alpha) dy = M_2 \{ \bar{\alpha} \}.$$

Продифференцируем дважды по α выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) dy = 1.$$

При первом дифференцировании получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(y|\alpha)}{d\alpha} dy = \int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} dy = 0.$$

Повторное дифференцирование по α с учетом (4.17) дает соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \frac{d^2 \ln W(y|\alpha)}{d\alpha^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \left[\frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} \right]^2 dy = 0$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \frac{d^2 \ln W(y|\alpha)}{d\alpha^2} dy = - \int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \left[\frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} \right]^2 dy. \quad (4.21)$$

Значения правой и левой частей этого равенства называют *информацией Фишера* [12].

С учетом (4.21) неравенство (4.20) принимает вид

$$M_2 \{ \hat{\alpha} \} \geq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \left[\frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} \right]^2 dy \right\}^{-1} =$$

$$= - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \frac{d^2 \ln W(y|\alpha)}{d\alpha^2} dy \right\}^{-1}.$$
(4.22)

Это соотношение и определяет *границу Крамера-Рао*.

Несмещенная оценка, для которой неравенство (4.22) обращается в равенство, называется *эффективной оценкой*.

Необходимым и достаточным условием эффективной оценки является превращение неравенства Буняковского-Шварца (4.19) в равенство, которое возможно только тогда, когда [13]

$$\hat{\alpha} - \alpha = k(\alpha) \frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha}, \quad (4.23)$$

где $k(\alpha)$ - некоторая функция параметра α .

Следует сделать следующие выводы по рассмотрению границы Крамера-Рао:

1. Никакая несмещенная оценка не может иметь дисперсию, меньшую обратной информации Фишера;
2. Если эффективной оценки не существует, то неизвестно, насколько оптимальной является оценка;
3. Для использования границы Крамера-Рао необходимо убедиться в несмещенности оценки.

Следует отметить, что существуют более точные границы, чем граница Крамера-Рао. Одной из них является граница Бхаттачария [13], процедура отыскания которой сопряжена с большой вычислительной работой. Второй более точной границей является граница Баранкина, недостатком которой является необходимость достаточно сложной процедуры максимизации по функции.

4.3. ОЦЕНКА ПО МАКСИМУМУ ПРАВДОПОДОБИЯ

В практических задачах определение параметров должно выполняться с высокой точностью, для достижения которой необходимо либо увеличить число наблюдений (N), либо существенно превысить полезным сигналом уровень помех. В этих условиях при неограниченном увеличении числа наблюдений или величины сигнала гарантируется несмещенность оценки и минимум ее дисперсии асимптотически. Такими свойствами обладает оценка по максимуму правдоподобия: $\hat{\alpha}$ - такое значение величины параметра α , при котором функция правдоподобия максимальна. Если максимум лежит внутри области изменения величины α , а $\ln W(y|\alpha)$ имеет непрерывную первую производную, то оценку по максимуму правдоподобия можно получить из уравнения правдоподобия

$$\left. \frac{d \ln W(y|\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0. \quad (4.24)$$

Следует указать следующие свойства, связанные с оценкой по максимуму правдоподобия:

1) решение уравнения правдоподобия сходится по вероятности к точному знанию параметра α при $N \rightarrow \infty$. Любая оценка с этим свойством называется состоятельной. Следовательно, оценка по максимуму правдоподобия является состоятельной;

2) оценка по максимуму правдоподобия является асимптотически эффективной [14], т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2(\hat{\alpha} - \alpha)}{\left[- \int_{-\infty}^{\infty} W(y|\alpha) \frac{d^2 \ln W(y|\alpha)}{d\alpha^2} dy \right]^{-1}} = 1;$$

3) оценка по максимуму правдоподобия является асимптотически нормальной;

4) оценка по максимуму правдоподобия асимптотически совпадает с байесовской оценкой при любых априорных плотностях вероятностей параметра и функции потерь.

$$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{F[y(t)|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]}{F[y(t)|0]}.$$

При гауссовой статистике шума и смеси сигнала с шумом функционал правдоподобия параметра будет определяться зависимостью

$$F[y(t)|\alpha] = h(\Delta) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \theta(t_1, t_2) [y(t_1) - s(t_1, \alpha)] \times \right. \\ \left. \times [y(t_2) - s(t_2, \alpha)] dt_1 dt_2 \right\}.$$

А отношение правдоподобия оцениваемого параметра, согласно (3.59), представим в виде

$$\Lambda(\alpha) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T s(t_1, \alpha) s(t_2, \alpha) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \right. \\ \left. + \int_0^T \int_0^T y(t_1) s(t_2, \alpha) \theta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}.$$

Если ввести функцию

$$\mathcal{G}(t, \alpha) = \int_0^T \theta(t, t_2) s(t_2, \alpha) dt_2,$$

удовлетворяющую интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau, \alpha) d\tau = s(t, \alpha), \quad (4.28)$$

где в качестве ядра фигурирует корреляционная функция шума $B_2(\tau)$, то отношение правдоподобия оцениваемого параметра примет вид

$$\Lambda(\alpha) = \exp \left[\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t, \alpha) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \right],$$

а уравнение правдоподобия будет определяться соотношением

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \Lambda(\alpha) \Big|_{\alpha=\hat{\alpha}} = \\ = \frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t, \alpha) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \right]_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0. \quad (4.29)$$

Оцениваемые параметры сигналов можно разделить на две группы: энергетические и неэнергетические параметры. К энергетическим параметрам относятся такие, от которых зависит энергия сигналов: величина

и длительность сигналов. К неэнергетическим параметрам относятся, например, время запаздывания сигнала, фаза и частота колебаний.

Рассмотрим оценку по максимуму правдоподобия некоторых параметров сигнала при его приеме на фоне белого гауссова шума.

4.4. ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА

Ограничимся рассмотрением оценки и дисперсии оценки такого важного энергетического параметра, как величина сигнала, при воздействии аддитивного белого гауссова шума с нулевым средним значением.

Для белого шума при

$$B_2(\tau) = \frac{G}{2} \delta(\tau)$$

интегральное уравнение (4.28) принимает вид

$$\frac{G}{2} \int_0^T \mathcal{G}(\tau, \alpha) \delta(\tau - t) d\tau = s(t, \alpha).$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, получим

$$\mathcal{G}(t, \alpha) = \frac{2}{G} s(t, \alpha).$$

В этом случае, переходя к бесконечным пределам, уравнение правдоподобия (4.29) представим в виде

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) s(t, \alpha) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \alpha) dt \right]_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0.$$

Так как $s(t, \alpha) = as(t)$, (a - величина сигнала, $s(t)$ - нормированная по величине сигнальная функция) то окончательно приходим к следующей записи уравнения правдоподобия при оценке величины сигнала:

$$\frac{d}{da} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) as(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a^2 s^2(t) dt \right]_{a=\hat{a}} = 0. \quad (4.30)$$

Здесь $\int_{-\infty}^{\infty} y(t) as(t) dt$ - корреляционный интеграл, который можно

трактовать как оптимальный выходной эффект, а $\int_{-\infty}^{\infty} a^2 s^2(t) dt$ - энергия

входного сигнала.

После дифференцирования (4.30) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)s(t)dt - \hat{a} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = 0. \quad (4.31)$$

Однако входная реализация $y(t)$ представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала $as(t)$ и белого гауссова шума $x(t)$, т.е.

$$y(t) = as(t) + x(t).$$

С учетом этого соотношения уравнение (4.31) будет иметь вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)dt + a \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt - \hat{a} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = 0.$$

Отсюда оценка величины сигнала

$$\hat{a} = a + \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt. \quad (4.32)$$

Математическое ожидание оценки \hat{a} равно величине a , так как случайный процесс $x(t)$ имеет нулевое среднее значение и, следовательно,

$$m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)dt \right\} = 0.$$

Таким образом, искомая оценка \hat{a} величины сигнала является несмещенной.

Определим дисперсию оценки, которую можно записать в виде

$$M_2 \{ \hat{a} \} = M_2 \{ a \} + M_2 \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)s(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt} \right\} = \frac{B_{22}(0)}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt \right]^2}, \quad (4.33)$$

так как дисперсия постоянной величины равна нулю, а дисперсия отношения интегралов при нулевом среднем значении входного случайного процесса представляет собой значение корреляционной функции проинтегрированного (выходного) случайного процесса $B_{22}(\tau)$ при $\tau = 0$, умноженное на квадрат

постоянного множителя $1 / \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$.

Корреляционная функция $B_{22}(\tau)$ равна

$$\begin{aligned}
B_{22}(\tau) &= m_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(u) s(u) du \int_{-\infty}^{\infty} x(v-\tau) s(v) dv \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s(v) m_1 \{x(u) x(v-\tau)\} dudv = \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s(v) B_{21}(u-v+\tau) dudv,
\end{aligned}$$

где $B_{21}(u-v+\tau) = m_1 \{x(u) x(v-\tau)\}$ - корреляционная функция входного шума $x(t)$.

Учитывая, что входной случайный процесс – белый шум с корреляционной функцией $B_{21}(\tau) = \frac{G}{2} \delta(\tau)$, и применяя фильтрующее свойство δ -функции, получим

$$B_{22}(0) = \frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s(v) \delta(u-v) dudv = \frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt.$$

Таким образом, дисперсия оценки величины сигнала будет равна

$$M_2 \{ \hat{a} \} = \frac{G}{2 \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt} = \frac{\sigma_{\text{ввх}}^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \right]^2}, \quad (4.34)$$

где $\sigma_{\text{ввх}}^2$ - мощность шумов на выходе.

Из выражения (4.34) следует, что дисперсия оценки величины сигнала пропорциональна значению энергетического спектра входных шумов и обратно пропорциональна энергии нормированного по величине принимаемого полезного сигнала.

Следует отметить, что абсолютная погрешность оценки величины сигнала не зависит от значения его величины. Относительная же погрешность обратно пропорциональна отношению сигнала к шуму на выходе согласованного фильтра.

4.5. ОЦЕНКА НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА

Снова обратимся к уравнению правдоподобия (4.29):

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t, \alpha) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \right]_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0.$$

В приведенном уравнении α будем считать неэнергетическим параметром.

Второй интеграл этого уравнения определяет энергетическую характеристику выходного процесса, которая не зависит от неэнергетического параметра, и, следовательно, уравнение правдоподобия при оценке неэнергетического параметра примет вид

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \right]_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0. \quad (4.35)$$

Корреляционный интеграл уравнения (4.35) можно представить в следующем виде:

$$\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt = \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt + \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt, \quad (4.36)$$

где α_0 - истинное значение параметра.

Так как решение интегрального уравнения (4.28) дает весовую функцию $\mathcal{G}(t, \alpha)$ для оптимальной системы, то и выходной эффект $\int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt$ является оптимальным. Таким образом, оптимальный выходной эффект представляет собой сумму математического ожидания этого эффекта, или взаимную корреляционную функцию входного сигнала $s(t, \alpha)$, и весовой функции $\mathcal{G}(t, \alpha)$ (сигнальной функции) и случайной функции с нулевым средним значением (отклонения выходного эффекта от математического ожидания).

Для нахождения смещения и дисперсии оценки необходимо решить уравнение (4.35) при условии

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\hat{\alpha}} < 0 \quad (4.37)$$

и из всех возможных максимумов корреляционного интеграла выбрать наибольший. Уравнение (4.35) является нелинейным и в общем виде относительно $\alpha = \hat{\alpha}$ не разрешается. Однако при достаточно надежном наблюдении (большом отношении сигнала к шуму) случайной функцией можно пренебречь. Тогда положение максимума логарифма отношения правдоподобия будет совпадать с истинным значением оцениваемого параметра. Если максимум логарифма отношения правдоподобия лежит в окрестности истинного значения оцениваемого параметра α_0 , и между $\hat{\alpha}$ и α_0 нет других максимумов, то отклонение оценки от истинного параметра

можно искать приближенным методом [15]. Все известные приближенные методы решения нелинейного уравнения (4.35) основаны на разложении взаимной корреляционной функции сигнала в ряд Тейлора

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots,$$

с ограничением несколькими членами этого ряда.

Ограничимся двумя первыми членами ряда и получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \int_0^T y(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{d}{d\alpha} \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \\ &+ (\hat{\alpha} - \alpha_0) \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \\ &+ \frac{d}{d\alpha} \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

В момент отсчета $\alpha = \hat{\alpha}$ функция $\int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt$ переходит через максимум. Следовательно, ее первая производная равна нулю, и соотношение (4.38) принимает вид

$$(\hat{\alpha} - \alpha_0) \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{d}{d\alpha} \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (4.39)$$

Из (4.39) получим оценку неэнергетического параметра:

$$\hat{\alpha} = \alpha_0 - \frac{\frac{d}{d\alpha} \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0}}{\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0}}. \quad (4.40)$$

Второе слагаемое формулы (4.40) является случайной функцией с нулевым средним значением. Поэтому математическое ожидание оценки $\hat{\alpha}$ равно истинному значению параметра, и, следовательно, оценка неэнергетического параметра сигнала может считаться в первом приближении несмещенной (учитывая предпосылку о низком уровне шума).

Дисперсия оценки неэнергетического параметра в окрестности $\alpha = \alpha_0$ будет равна

$$\begin{aligned}
M_2 \{\hat{\alpha}\} &= M_2 \{\alpha_0\} - M_2 \left\{ \frac{\frac{d}{d\alpha} \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0}}{\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0}} \right\} = \\
&= - \frac{M_2 \left\{ \frac{d}{d\alpha} \int_0^T x(t) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} \right\}}{\left[\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^T s(t, \alpha_0) \mathcal{G}(t, \alpha) dt \Big|_{\alpha=\alpha_0} \right]^2}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Из выражения (4.41) видно, что дисперсия оценки неэнергетического параметра сигнала в первом приближении обратно пропорциональна кривизне сигнальной функции. Отметим также, что правая часть выражения (4.41) всегда положительна, так как по условию максимума вторая производная сигнальной функции меньше нуля.

В качестве иллюстрации рассмотрим две задачи.

1) Оценка времени запаздывания сигнала, принимаемого на фоне белого гауссова шума.

При белом гауссовом шуме, как было показано, весовая функция

$$\mathcal{G}(t, \alpha) = \frac{2}{G} s(t, \alpha) = ks(t, \alpha).$$

Следовательно, в этом случае, переходя в выражении (4.40) к бесконечным пределам интегрирования, оценку времени запаздывания сигнала \hat{T} можно записать в виде

$$\hat{T} = T_0 - \frac{\frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t-T) dt \Big|_{T=T_0}}{\frac{d^2}{dT^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-T_0) s(t-T) dT \Big|_{T=T_0}},$$

которая, в первом приближении, является несмещенной.

Дисперсия оценки времени запаздывания сигнала согласно (4.41) будет определяться выражением

$$M_2(\overline{T}) = - \frac{M_2 \left\{ \frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t-T) dt \Big|_{T=T_0} \right\}}{\left[\frac{d^2}{dT^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-T_0) s(t-T) dt \Big|_{T=T_0} \right]}. \quad (4.42)$$

Числитель соотношения (4.42) равен значению корреляционной функции шума на выходе оптимальной приемной системы при аргументе, равном нулю, и, учитывая, что на входе имеет место белый гауссов шум, по аналогии с результатами п. 4.5 получим

$$M_2 \left\{ \frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t-T) dt \Big|_{T=T_0} \right\} = \frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [s'(t-T_0)]^2 dt, \quad (4.43)$$

где $s'(t-T_0) = \frac{d}{dT} s(t-T) \Big|_{T=T_0}$.

Знаменатель соотношения (4.42) запишем в виде

$$\left[\frac{d^2}{dT^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-T_0) s(t-T) dt \Big|_{T=T_0} \right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t-T_0) s''(t-T_0) dt \right]^2,$$

где $s''(t-T_0) = \frac{d^2}{dT^2} s(t-T) \Big|_{T=T_0}$.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t-T_0) s''(t-T_0) dt \right]^2 &= \\ &= \left[s(t-T_0) s'(t-T_0) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} [s'(t-T_0)]^2 dt \right]^2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Первый член правой части выражения (4.44) равен нулю, так как реальные сигналы имеют конечную длительность: $s(\infty) = s(-\infty) = 0$.

С учетом (4.43) и (4.44), выражение для дисперсии оценки времени запаздывания сигнала (4.42) принимает вид

$$M_2(\overline{T}) = - \frac{G}{2 \int_{-\infty}^{\infty} [s'(t-T_0)]^2 dt}. \quad (4.45)$$

В соответствии с равенством Парсеваля имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s'(t - T_0)]^2 dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega,$$

где $S(j\omega)$ - спектральная функция входного сигнала.

С учетом этого (4.45) приобретает вид

$$M_2 \{T\} = \frac{G}{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (4.46)$$

Таким образом, дисперсия оценки времени запаздывания сигнала будет прямо пропорциональна энергетическому спектру входных шумов и обратно пропорциональна энергии проинтегрированного входного сигнала.

Умножим и разделим соотношение (4.46) на $\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$ и окончательно получим формулу для расчетов дисперсии оценки времени запаздывания сигнала в виде

$$M_2 \{T\} = \frac{1}{\mu^2 \omega_1^2}, \quad (4.47)$$

где

$$\mu = \left[\frac{2}{\pi G} \int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} - \text{отношение}$$

максимума сигнала к среднеквадратическому значению шума на выходе оптимальной приемной системы,

$$\omega_1 = \left[\frac{\int_0^{\infty} \omega^2 |S(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2} - \text{среднеквадратическая частота}$$

спектра сигнала.

Формула (4.47) определяет потенциальную точность измерения дальности. Дисперсия при этом будет тем меньше, чем более изрезанным будет «рельеф» сигнала [16].

Отметим, что распределение ошибки оценки времени запаздывания сигнала является нормальным.

2) Оценка доплеровского смещения частоты при приеме сигнала на фоне белого гауссова шума.

Доплеровская добавка частоты позволяет определять радиальную скорость цели и при равномерном и прямолинейном движении цели связана с радиальной скоростью соотношением

$$F_d = f_c \frac{2v_u}{c},$$

где v_u - радиальная скорость цели, f_c - частота посылаемого сигнала, c - скорость света.

Согласно соотношению (4.40), оценка доплеровской добавки частоты в принимаемом сигнале на фоне белого гауссова шума будет равна

$$\hat{F}_d = F_{d0} - \frac{\frac{d}{dF_d} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}}}{\frac{d^2}{dF_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, F_{d0}) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}}}. \quad (4.48)$$

Эта оценка в первом приближении является несмещенной, а дисперсия ее в соответствии с (4.41) определяется зависимостью

$$M_2 \left\{ \hat{F}_d \right\} = - \frac{M_2 \left\{ \frac{d}{dF_d} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}} \right\}}{\left[\frac{d^2}{dF_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, F_{d0}) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}} \right]^2}. \quad (4.49)$$

Аналогично задаче определения оценки времени запаздывания сигнала, учитывая, что корреляционная функция входных шумов равна

$B_{21}(\tau) = \frac{G}{2} \delta(\tau)$, числитель соотношения (4.49) равен

$$M_2 \left\{ \frac{d}{dF_d} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}} \right\} = \frac{G}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [s'(t, F_{d0})]^2 dt, \quad (4.50)$$

где $s'(t, F_{d0}) = \frac{d}{dF_d} s(t, F_d) \Big|_{F_d=F_{d0}}$.

Используя представление сигнала $s(t, F_{d0})$ в виде обратного преобразования Фурье от его спектральной функции:

$$s(t, F_{d0}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j2\pi f) \exp[j2\pi t(f + F_0)] df,$$

выражение (4.50) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 M_2 \left\{ \frac{d}{dF_d} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}} \right\} &= \\
 &= -\frac{G}{2} (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t S(j2\pi f) \exp[j2\pi t(f + F_{d0})] df \right]^2 dt = \\
 &= -\frac{G}{2} (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t, F_{d0}) dt. \tag{4.51}
 \end{aligned}$$

Знаменатель выражения (4.49) вычислим также с использованием представления сигнала посредством обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{d^2}{dF_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t, F_{d0}) s(t, F_d) dt \Big|_{F_d=F_{d0}} \right]^2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t, F_0) s''(t, F_{d0}) dt \right]^2 = \\
 &= \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} s(t, F_{d0}) \left[(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 S(j2\pi f) e^{j2\pi t(f+F_{d0})} df \right] dt \right\}^2 = \\
 &= \left[-(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t, F_{d0}) dt \right]^2. \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

С учетом (4.51) и (4.52) выражение для дисперсии оценки доплеровской добавки частоты принимает вид

$$M_2 \left\{ \overline{F_d} \right\} = \frac{G}{2(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t, F_0) dt}. \tag{4.53}$$

Умножив и разделив (4.53) на

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, F_{d0}) dt,$$

получим

$$M_2 \left\{ \overline{F_d} \right\} = \frac{1}{\mu^2 T_{\mathcal{E}}^2}, \tag{4.54}$$

где μ - отношение максимума сигнала к среднеквадратическому значению шума на выходе оптимальной приемной системы,

$$T_{\mathcal{E}} = \left[\frac{4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t, F_{d0}) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, F_{d0}) dt} \right]^{1/2} \quad \text{- эквивалентная длительность}$$

сигнала.

Зависимость дисперсии оценки частоты от длительности сигнала при заданной форме очевидна, так как чем больше длительность сигнала, тем меньше изменения частоты, различимые на фоне шума, приводят к смещению фазы за время наблюдения.

Эквивалентная длительность сигнала есть средневзвешенное значение t^2 с весовыми коэффициентами $s^2(t)$. Например, для гармонической посылки длительности τ_c (прямоугольный сигнал с внутриимпульсным заполнением)

$$T_{\mathcal{E}} = \pi^2 \frac{\tau_c^2}{3}.$$

4.6. СОВМЕСТНАЯ ОЦЕНКА НЕСКОЛЬКИХ ПАРАМЕТРОВ

Предположим, что наблюдается аддитивная смесь сигнала $s(t, A) = s(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и шума $x(t)$:

$$y(t) = s(t, A) + x(t),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - информационные параметры.

Требуется определить оценки этих параметров. Воспользуемся оценкой по максимуму правдоподобия, в соответствии с которой в качестве оценки \hat{A} выбираются значения $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n$, обращающие в максимум функционалы правдоподобия. Эти оценки определяются решением системы уравнений правдоподобия (4.27), которую можно представить также в следующем виде

$$\frac{d}{d\alpha_i} \ln \Lambda [y(t) | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \Big|_{\alpha_1 = \hat{\alpha}_1, \dots, \alpha_n = \hat{\alpha}_n} = 0, \quad (4.55)$$

где

$$\Lambda [y(t) | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \frac{F [y(t) | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]}{F [y(t) | 0]}.$$

Положим, что на самом деле присутствует сигнал, параметры которого имеют значения $A_0 = [\alpha_{10}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{n0}]$, а шум мал по сравнению с сигналом.

При воздействии на входе оптимальной приемной системы белого гауссова шума на ее выходе сигнальная функция может быть представлена зависимостью

$$S(A, A_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, A_0) s(t, A) dt,$$

а отклонение выходного эффекта от сигнальной функции (математического ожидания), или шумовая функция, определяется зависимостью

$$X(A) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s(t, A) dt.$$

При разложении правой части уравнения (4.55) в ряд Тейлора в окрестности точки A_0 получается, для первого приближения, система уравнений

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{dS(A, A_0)}{d\alpha_i d\alpha_j} \right]_{A=A_0} \alpha_{ij} + \left[\frac{dX(A)}{d\alpha_i} \right]_{A=A_0} = 0. \quad (4.56)$$

Записывая уравнение (4.56) в матричном виде, получим

$$BA_1 = -M, \quad (4.57)$$

где

$$B = [\beta_{ij}] = \left[\frac{dS(A, A_0)}{d\alpha_i d\alpha_j} \right]_{A=A_0},$$

$$M = \begin{bmatrix} \left. \frac{dX(A)}{d\alpha_1} \right|_{A=A_0} \\ \dots\dots\dots \\ \left. \frac{dX(A)}{d\alpha_n} \right|_{A=A_0} \end{bmatrix}.$$

Решение системы (4.57) имеет вид

$$A_1 = B^{-1}M, \quad (4.58)$$

где $B^{-1} = [\beta_{ij}^{-1}]$ - обратная матрица, получаемая на практике [17] из транспонированной матрицы \tilde{B} , в которой каждый элемент заменяют алгебраическим дополнением B_{ij} , деленным на определитель матрицы Δ .

Напомним, что транспонированная матрица \tilde{B} получается из матрицы B заменой строк столбцами, а алгебраическое дополнение соответствующего элемента есть определитель, полученный вычеркиванием в Δ i -строки и j -столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

Выражение (4.58) можно представить также в виде

$$\alpha_{i1} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{-1} \left[\frac{dX(A)}{d\alpha_j} \right]_{A=A_0}, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.59)$$

где β_{ij}^{-1} - элементы обратной матрицы.

Из соотношения (4.59) можно определить статистические характеристики оценок. Например, в случае совместной оценки двух параметров матрица B будет иметь вид [18]

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} & \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \\ \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2 d\alpha_1} & \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

а элементы обратной матрицы получают следующие выражения

$$\beta_{11}^{-1} = \frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2}}{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} \cdot \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} - \left[\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \right]^2},$$

$$\beta_{12}^{-1} = \frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2}}{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} \cdot \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} - \left[\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \right]^2},$$

$$\beta_{21}^{-1} = \frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2 d\alpha_1}}{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} \cdot \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} - \left[\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \right]^2},$$

$$\beta_{22}^{-1} = \frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2}}{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} \cdot \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} - \left[\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \right]^2},$$

Таким образом, дисперсии оценок будут определяться соотношениями

$$M_2 \{\hat{\alpha}_1\} = - \left(\left[\frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} - \frac{\left\{ \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \right\}^2}{d^2 S(A, A_0)}}{d\alpha_2^2} \right]_{A=A_0} \right)^{-1}, \quad (4.61)$$

$$M_2 \{\hat{\alpha}_2\} = - \left(\left[\frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} - \frac{\left\{ \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2} \right\}^2}{d^2 S(A, A_0)}}{d\alpha_1^2} \right]_{A=A_0} \right)^{-1}.$$

$$k = \frac{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1 d\alpha_2}}{\sqrt{\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} \cdot \frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2}}} \Bigg|_{A=A_0}, \quad (4.62)$$

k - коэффициент корреляции ошибок определения оценок $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$.

С учетом (4.62) соотношения для дисперсий (4.61) примут вид

$$M_2 \{\hat{\alpha}_1\} = - \left(\left[\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_1^2} (1 - k^2) \right] \right)^{-1}, \quad (4.63)$$

$$M_2 \{\hat{\alpha}_2\} = - \left(\left[\frac{d^2 S(A, A_0)}{d\alpha_2^2} (1 - k^2) \right] \right)^{-1}.$$

Определим совместную оценку времени запаздывания сигнала и доплеровского сдвига частоты. Такая оценка типична для локационных систем при совместном определении дальности до цели и ее радиальной скорости. Сигнальная функция $S(A, A_0)$ в этом случае при оптимальном приеме может быть представлена зависимостью [19]

$$S(A, A_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-T)s^*(t-T_0)\exp[j2\pi t(F_d - F_{d0})]dt. \quad (4.64)$$

$s(t)$ - комплексная функция.

При такой сигнальной функции, используя соотношения (4.47) и (4.54), получим дисперсии совместной оценки времени запаздывания сигнала и доплеровского смещения частоты в виде

$$M_2 \{ \overline{T} \} = \frac{1}{\mu^2 \omega_1^2 (1-k^2)}, \quad (4.65)$$

$$M_2 \{ \overline{F}_d \} = \frac{1}{\mu^2 T_0^2 (1-k^2)}. \quad (4.66)$$

Как видно из формул (4.65) и (4.66), дисперсии оценок будут минимальными при $k=0$, т.е. в условиях некоррелированности \overline{T} и \overline{F}_d (при отсутствии частотно-временной связи).

Необходимо подчеркнуть, что для любых сигналов без частотной модуляции коэффициент корреляции k равен нулю [12]. Ввиду этого дисперсия оценок времени запаздывания и доплеровского смещения частоты при совместных и отдельных измерениях могут совпадать и определяться по формулам (4.47) и (4.54) соответственно.

При рассмотрении совместной оценки времени запаздывания сигнала и доплеровского смещения частоты нельзя не остановиться на таком важном понятии, как функция неопределенности.

Поэтому снова обратимся к сигнальной функции (4.64). Модуль ее

$$|S(A, A_0)| = |s(T_0 - T_1, F_{d0} - F_d)| = \psi(T, F), \quad (4.67)$$

где $T_1 = T - T_0, F = F_d - F_0$.

После простых преобразований получим [19]

$$\psi(T_1, F) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-T)\exp(j2\pi Ft)dt \right|. \quad (4.68)$$

Эта функция в условиях оптимального приема называется двумерной автокорреляционной функцией сигнала. Она обладает важным свойством центральной симметрии:

$$\psi(T_1, F) = \psi(-T_1, -F).$$

В отсутствие помех значение двумерной автокорреляционной функции можно рассматривать как выходной оптимальный эффект, параметры которого – время запаздывания и частота – отличаются от ожидаемых на T_1 и F соответственно.

Нормированная двумерная автокорреляционная функция

$$\rho(T_1, F) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t-T) \exp(j2\pi Ft) dt \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}. \quad (4.69)$$

Эта функция получила предложенное Ф. Вудвордом название *функции неопределенности*. Геометрически функция неопределенности описывает некую поверхность над плоскостью $[T_1, F]$, максимум которой, равный единице, находится в точке $T_1 = 0, F = 0$, т.е.

$$\rho(0, 0) = 1.$$

Важным свойством функции неопределенности является независимость объема тела неопределенности от методов модуляции амплитуды и фазы сигнала. Объем тела неопределенности всегда постоянен и равен единице, т.е.

$$V_{\rho^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2(T_1, F) dT_1 dF = 1. \quad (4.70)$$

Соотношение (4.70) является строгой формулировкой принципа неопределенности в локации, согласно которому никакие изменения временного формирования сигнала не могут повлиять на объем тела неопределенности. А так как наряду с единичным объемом тело неопределенности имеет и единичную высоту, то при сжатии тела неопределенности по оси T_1 оно расширяется по оси F , и наоборот, при сжатии по оси F оно растягивается по оси T_1 .

Приведем доказательство справедливости соотношения (4.70), которое сводится к вычислению объема тела неопределенности. Подставим в (4.70) значение $\rho(T_1, F)$. Получим

$$V_{\rho^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - T_1) \exp(j2\pi Ft) dt \right|^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right]^2} dT_1 dF. \quad (4.71)$$

При вычислении (4.71) воспользуемся соотношением

$$\left| \int s(t) dt \right|^2 = \int s(t) dt \int s^*(u) du = \iint s(t) s^*(u) dt du. \quad (4.72)$$

Формула (4.71) примет вид

$$V_{\rho^2} = \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right]^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - T_1) s^*(u) s(u - T_1) \times \\ \times \exp[j2\pi F(t - u)] dt du dT_1 dF.$$

Интеграл по F сводится к δ -функции, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi F(t - u)] dF = \delta(t - u).$$

С учетом этого получим

$$V_{\rho^2} = \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right]^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - T_1) s^*(u) s(u - T_1) \times \\ \times \delta(t - u) dt du dT_1.$$

Используя фильтрующее свойство δ -функции, имеем

$$V_{\rho^2} = \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right]^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) s^*(u - T_1) s^*(u) s(u - T_1) du dT_1.$$

Интегрирование по T_1 в бесконечных пределах дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^*(u - T_1) s(u - T_1) dT_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt.$$

Окончательно получаем

$$V_{\rho^2} = \frac{1}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right]^2} \int_{-\infty}^{\infty} |s(u)|^2 du \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = 1. \quad (4.73)$$

Так как на функцию $s(t)$ не накладывались никакие ограничения, то соотношение (4.73) справедливо для любой формы сигнала, его длительности и величины.

4.7. АНОМАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотренная методика расчета дисперсий оценок параметров сигналов методом максимума правдоподобия позволяет судить о потенциальной точности измерений при условии, что превышение сигналом уровня шума настолько велико, что разброс оценки $\hat{\alpha}$ относительно параметра α полностью укладывается в пределы линейного участка производной функции выходного эффекта, смещенной в точку $\alpha = \alpha_0$.

Однако если отношение порогового уровня к среднеквадратическому значению шума (μ_0) недостаточно велико, то принятие шумового выброса за сигнальный может привести к результатам, в которых будет выдано далеко не истинное значение оценки $\hat{\alpha}$.

Следует отметить, что выбор отношения порог/шум, например, определяется, главным образом, вероятностью ложной тревоги $P_{ЛТ}$, которая задается в зависимости от вида прибора и требований к нему предъявляемых. Величина ложной тревоги может иметь значения от 10^{-2} (координаторы в головках самонаведения) до 10^{-5} (неконтактные взрыватели).

Ошибки, обусловленные принятием шумового выброса за сигнальный и выводящие оценку параметра за пределы протяженности сигнальной функции по оси α , называются аномальными.

Рассмотрим влияние аномальных ошибок на точность определения информационных параметров для трех задач: оценки времени запаздывания сигнала \hat{T} , оценки величины сигнала \hat{a} и оценки длительности сигнала $\hat{\tau}_c$. Для этого воспользуемся часто применяемой приближенной методикой [12, 20].

Положим, что определяемый параметр запаздывания сигнала T принадлежит интервалу $[T_n, T_g]$ протяженностью $T_L = T_g - T_n$. В первом приближении можно считать, что шумовой выброс на интервале $[T_n, T_g]$

может возникнуть в любой точке с равной вероятностью. Таким образом, если рассматривать только аномальные наблюдения, то оценку \overline{T}_a для них следует положить равновероятной на интервале $[T_n, T_e]$. Поэтому дисперсия только аномальной оценки составит величину

$$M_2 \left\{ \overline{T}_a \right\} = \frac{T_L^2}{12}.$$

Так как аномальная погрешность и ее отсутствие – события несовместные, то для полной дисперсии оценки времени запаздывания сигнала, учитывающей аномальную и нормальную составляющие, можно записать выражение

$$M_2 \left\{ \overline{T}_\Pi \right\} = P_{ЛТ} \frac{T_L^2}{12} + (1 - P_{ЛТ}) \frac{1}{\mu^2 \omega_1^2}. \quad (4.74)$$

При оценке величины сигнала распределение аномальной составляющей оценки $\overline{\alpha}_a$ можно также в первом приближении аппроксимировать равновероятным законом с границами: U_Π пороговый уровень (нижняя граница) и U_D - верхняя граница динамического диапазона приемно-усилительного тракта. Такой подход вполне правомерен вследствие того, что при вероятностях ложной тревоги 10^{-2} и меньшей хвост нормального распределения в пределах $[U_D, U_\Pi]$ можно в первом приближении аппроксимировать прямоугольной функцией. В этом случае дисперсия величины сигнала с учетом аномальной составляющей будет определяться зависимостью

$$M_2 \left\{ \overline{\alpha}_\Pi \right\} = P_{ЛТ} \left(\frac{U_D - U_\Pi}{2\sqrt{3}} \right) + (1 - P_{ЛТ}) \frac{G}{2 \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}. \quad (4.75)$$

При оценке длительности сигнала для определения аномальной погрешности необходимо знать распределение длительности шумовых выбросов на уровне C . Строгое решение этой задачи связано со сложными выражениями и сопряжено с трудностями вычислительного характера. Однако при $C > 0$ подавляющая часть положительных шумовых выбросов имеет малую длительность. В этом случае поведение дифференцируемого нормального случайного процесса над уровнем $C > 0$ аппроксимируют параболой [21], и плотность вероятностей длительности выбросов нормального случайного процесса определяется соотношением [22]

$$W(\tau, C) = \frac{\tau}{4} B_2''(0) \mu_0^2 \exp\left(-\frac{\mu_0^2 \tau^2}{8} B_2''(0)\right), \left(\tau > 0, \mu_0 = \frac{C}{\sigma_{ш}} \square 1\right). \quad (4.76)$$

Здесь $B_2''(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega$ - мощность производной

случайного процесса, $\sigma_{ш} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega}$ - среднеквадратическое

значение случайного процесса, μ_0 - отношение порог/шум, $G(\omega)$ - энергетический спектр случайного процесса.

С учетом (4.76) дисперсия аномальной оценки длительности сигнала принимает вид

$$M_2 \left\{ \hat{\tau}_a \right\} = \int_0^{\infty} \left[\tau - m_1 \{ \tau \} \right]^2 \frac{\tau}{4} B_2''(0) \mu_0^2 \exp\left(-\frac{\mu_0^2 \tau^2}{8} B_2''(0)\right) d\tau, \quad (4.77)$$

где

$$m_1 \{ \tau \} = \frac{2\pi}{\sqrt{B_2''(0)}} \left[1 - F(\mu_0) \right] \exp\left(\frac{\mu_0}{2}\right) - \text{средняя длительность}$$

выброса случайного процесса на уровне C ,

$$F(\mu_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\mu_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx - \text{интеграл вероятностей.}$$

Таким образом, полная дисперсия оценки длительности сигнала будет определяться соотношением

$$M_2 \left\{ \hat{\tau}_{П} \right\} = P_{ПТ} \int_0^{\infty} \left[\tau - m_1 \{ \tau \} \right]^2 \frac{\tau}{4} B_2''(0) \mu_0^2 \exp\left(-\frac{\mu_0^2 \tau^2}{8} B_2''(0)\right) d\tau + \\ + (1 - P_{ПТ}) M_2 \left\{ \hat{\tau} \right\},$$

где $M_2 \left\{ \hat{\tau} \right\}$ - дисперсия оценки длительности сигнала, определяемая при фиксации его по фронту и спаду с учетом корреляции между ними.

В ряде случаев аномальная погрешность может привести к пересмотру пороговых соотношений, и пренебрегать ею нежелательно.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Решение интегральных уравнений

Интегральными уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную функцию $\mathcal{G}(t)$ под знаком интеграла. Определение оптимальной структуры приемной системы в условиях воздействия гауссовой помехи как при обнаружении полезного сигнала, так и при оценке его параметров, сводится к линейному интегральному уравнению

$$\int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau = s(t), \quad (\text{П.1})$$

относительно $\mathcal{G}(t)$ в области $[0, T]$.

Функции $B_2(t, \tau)$ и $s(t)$ называются соответственно ядром и свободным членом интегрального уравнения.

Если ядро $B_2(t, \tau)$ не содержит сингулярностей (например, отсутствует белый шум), то уравнение называется интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода и на конечном интервале $[0, T]$ непрерывного решения не существует, если только ядро $B_2(t, \tau)$ не имеет некоторых особенностей или интегрирование производится в неограниченных пределах.

Для определенных типов ядер решения могут быть получены, но включают в себя дельта-функции и их производные.

Если случайный процесс содержит составляющую белого шума:

$$B_2(t, \tau) = \frac{G}{2} \delta(t - \tau) + B_{20}(t, \tau),$$

где $B_{20}(t, \tau)$ - интегрируемая в квадрате функция, то в этом случае уравнение (П.1) получает вид

$$s(t) = \frac{G}{2} \mathcal{G}(t) + \int_0^T B_2(t, \tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau. \quad (\text{П.2})$$

Такое уравнение называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода, и интегрируемое в квадрате решение существует всегда.

Уравнение Фредгольма 1-го рода с рациональными ядрами

Метод решения такого уравнения сводится к отысканию дифференциального уравнения, соответствующего интегральному. Интегральное уравнение с рациональными ядрами будет соответствовать дифференциальному в сочетании с граничными условиями. Учет граничных условий осуществляется подстановкой найденного частного решения вместе с взвешенной суммой однородных решений обратно в интегральное

уравнение и подбором веса таким образом, чтобы удовлетворялось интегральное уравнение.

Схема решения уравнения представляется следующим образом.

Ядро, являющееся корреляционной функцией случайного процесса, выразим в виде обратного преобразования Фурье:

$$B_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega,$$

и положим, что энергетический спектр

$$G(\omega) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)}, \quad (\text{П.3})$$

где $N(\omega^2)$ и $D(\omega^2)$ - полиномы относительно ω^2 с действительными коэффициентами.

При этом ядро $B_2(t, \tau) = B_2(t - \tau)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$D(-p^2)B_2(t - \tau) = N(-p^2)\delta(t - \tau), \quad (\text{П.4})$$

где $D(-p^2)$ и $N(-p^2)$ - операторы дифференцирования,

$$p = \frac{d}{dt}.$$

Уравнение (П4) получается из следующих соображений. δ -функцию можно представить в виде обратного преобразования Фурье:

$$\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j\omega(t - \tau)] d\omega.$$

Дифференцирование по t дает

$$p\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \exp[j\omega(t - \tau)] d\omega. \quad (\text{П.5})$$

В более общем виде можно записать

$$N(-p^2)\delta(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega^2) \exp[j\omega(t - \tau)] d\omega. \quad (\text{П.6})$$

Аналогично

$$D(-p^2)B_2(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega^2)G(\omega) \exp[j\omega(t - \tau)] d\omega. \quad (\text{П.7})$$

Из формулы (П.3) видно, что правые части соотношений (П.6) и (П.7) тождественны. Следовательно, левые части этих соотношений равны, и тогда приходим к записи уравнения (П.4).

Если теперь на обе части интегрального уравнения (П.1) подействовать дифференциальным оператором $D(-p^2)$, то получим

$$D(-p^2)s(t) = \int_0^T D(-p^2)B_2(t-\tau)\mathcal{G}(\tau)d\tau. \quad (\text{П.8})$$

Используя уравнение (П.4) в правой части уравнения (П.8) и фильтрующее свойство δ -функции, получим

$$D(-p^2)s(t) = N(-p^2)\mathcal{G}(t), 0 \leq t \leq T. \quad (\text{П.9})$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами для $\mathcal{G}(t)$, частное решение $\mathcal{G}_0(t)$ которого может быть найдено при помощи преобразования Фурье или Лапласа. Для исключения эффектов, обусловленных конечными пределами интегрирования в (П.1), к частному решению нужно добавить решения однородного уравнения

$$N(-p^2)\mathcal{G}_i(t) = 0 \quad (\text{П.10})$$

с весовыми коэффициентами, а также добавить δ -функции и их производные, расположенные на концах интервалов. Это общее решение затем подставляется в (П.1), и вычисляются весовые коэффициенты из условия, что обе части уравнения равны на интервале $[0, T]$.

В качестве иллюстрации рассмотрим решение интегрального уравнения

$$s(t) = \sigma^2 \int_0^T \exp(-l|t-\tau|)\mathcal{G}(\tau)d\tau \quad (\text{П.11})$$

с ядром вида

$$B_2(\tau) = \sigma^2 \exp(-l|\tau|).$$

Энергетический спектр такого процесса

$$G(\omega) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-l|\tau|)\exp(-j\omega\tau)d\tau = \frac{2l\sigma^2}{\omega^2 + l^2}. \quad (\text{П.12})$$

Таким образом,

$$N(\omega^2) = 2l\sigma^2 \quad \text{и} \quad D(\omega^2) = \omega^2 + l^2.$$

Дифференциальное уравнение (П.8) в этом случае принимает вид

$$-s''(t) + l^2s(t) = 2l\sigma^2\mathcal{G}(t), \quad (\text{П.13})$$

где $s''(t)$ - вторая производная по параметру.

Таким образом, частное решение

$$\mathcal{G}_0(t) = \frac{l^2 s(t) - s''(t)}{2l\sigma^2}. \quad (\text{П.14})$$

Однородные решения не существуют, так как согласно (П.10)

$$\mathcal{G}_i(t) = 0.$$

Так как функция $s(t)$ может не обращаться в ноль на концах интервала интегрирования, к решению (П.14) следует добавить еще δ -функции с особенностями в точках $t = 0$ и $t = T$.

Теперь общее решение можно записать в виде

$$\mathcal{G}(t) = \frac{l^2 s(t) - s''(t)}{2l\sigma^2} + K_1 \delta(t) + K_2 \delta(t - T), \quad (\text{П.15})$$

где K_1 и K_2 определяются при подстановке (П.15) в (П.11).

Подставляя (П.15) в (П.11) и избавляясь от модуля, получим

$$s(t) = e^{-lt} \frac{1}{2l} \int_0^t [l^2 s(\tau) - s''(\tau)] d\tau + e^{lt} \frac{1}{2l} \int_t^T [l^2 s(\tau) - s''(\tau)] d\tau + \\ + \sigma^2 K_1 \exp(-lt) + \sigma^2 K_2 \exp[l(t - T)].$$

Интегрируя по частям члены уравнения, содержащие $s''(\tau)$, получим

$$s(t) = \sigma^2 K_1 e^{-lt} + \sigma^2 K_2 e^{l(t-T)} - \\ - \frac{1}{2l} \left\{ e^{-lt} [ls(0) - s'(0)] + e^{l(t-T)} [ls(T) + s'(T)] - 2ls(t) \right\} = \\ = e^{-lt} \left\{ \sigma^2 K_1 - \frac{1}{2l} [ls(0) - s'(0)] \right\} + \\ + e^{l(t-T)} \left\{ \sigma^2 K_2 - \frac{1}{2l} [ls(T) + s'(T)] \right\} + s(t).$$

Это соотношение должно выполняться при любых t в интервале $[0, T]$. Что имеет место, если выражения в фигурных скобках при e^{-lt} и $e^{l(t-T)}$ будут равны нулю. Отсюда коэффициенты K_1 и K_2 будут определяться зависимостями

$$K_1 = \frac{ls(0) - s'(0)}{2l\sigma^2}, \quad K_2 = \frac{ls(T) + s'(T)}{2l\sigma^2}. \quad (\text{П.16})$$

Таким образом, с учетом (П.16) решение интегрального уравнения принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) = & \frac{1}{2l\sigma^2} \{ [ls(0) - s'(0)] \delta(t) + \\ & + [ls(T) + s'(T)] \delta(t-T) + l^2 s(t) - s''(t) \} . \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Уравнение Фредгольма 2-го рода с рациональными ядрами

Рассмотрим решение уравнения (П.2). Так как корреляционная функция процесса содержит составляющую белого шума, то энергетический спектр можно представить в виде

$$G(\omega) = \frac{G}{2} + G_0(\omega) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)}. \quad (\text{П.18})$$

По аналогии с решением интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, составим соответствующее дифференциальное уравнение, которое имеет частное решение $\mathcal{G}_0(t)$ и однородные решения $\mathcal{G}_i(t)$:

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0(t) + \sum_i a_i \mathcal{G}_i(t). \quad (\text{П.19})$$

Подставляя (П.19) в интегральное уравнение (П.2), путем надлежащего выбора весов a_i всегда можно получить решение интегрального уравнения.

В качестве иллюстрации рассмотрим решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, если корреляционная функция процесса

$$B_2(\tau) = \frac{G}{2} \delta(\tau) + \sigma^2 e^{-l|\tau|}$$

При этом интегральное уравнение будет

$$s(t) = \frac{G}{2} \mathcal{G}(t) + \sigma^2 \int_0^T e^{-l|t-\tau|} \mathcal{G}(\tau) d\tau, \quad 0 < t < T. \quad (\text{П.20})$$

Энергетический спектр процесса

$$G(\omega) = \frac{G}{2} + \frac{2l\sigma^2}{\omega^2 + l^2} = \frac{G}{2} \left(\frac{\omega^2 + \eta^2}{\omega^2 + l^2} \right) = \frac{N(\omega^2)}{D(\omega^2)}, \quad \eta^2 = l^2 + \frac{4l\sigma^2}{G}.$$

В соответствие с изложенной выше методикой дифференциальное уравнение, соответствующее нашему интегральному уравнению, имеет вид

$$\eta^2 \mathcal{G}(t) - \frac{d^2 \mathcal{G}(t)}{dt^2} = \frac{2}{G} \left[l^2 s(t) - \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \right]. \quad (\text{П.21})$$

Частное решение можно получить путем непосредственного решения дифференциального уравнения (П.21) или методом интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega^2 + l^2}{\omega^2 + \eta^2} \right) S(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

где $S(j\omega)$ - спектральная функция свободного члена $s(t)$.

Однородные решения получим из уравнения

$$\eta^2 \mathcal{G}(t) - \mathcal{G}''(t) = 0.$$

Решения этого однородного дифференциального уравнения второго порядка дает

$$\mathcal{G}_1(t) = e^{\eta t} \text{ и } \mathcal{G}_2(t) = e^{-\eta t}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0(t) + a_1 e^{\eta t} + a_2 e^{-\eta t}. \quad (\text{П.23})$$

Подстановка (П.23) в интегральное уравнение (П.20) дает систему двух уравнений [23], которым должны удовлетворять a_1 и a_2 . Решение системы относительно a_1 и a_2 приводит к полному решению интегрального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1971.
2. Курикша А.А. Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Сов.радио, 1973.
3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966.
4. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979.
5. Харкевич А.А. Борьба с помехами. М.: Наука, 1965.
6. Прием сигналов при наличии шума: Сборник переводов под ред. Л.С. Гуткина. М.: Иностранная литература, 1960.
7. Лезин Ю.С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов М.: Сов. радио, 1969.
8. Теоретические основы связи и управления / Под ред. А.А. Фельдбаума. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1963.
9. Левин Б.Р. Статистические основы статистической радиотехники, т. 2. М.: Сов.радио, 1968.
10. Лебедько Е.Г. Математические основы передачи информации, ч. 1 и 2. СПб: ИТМО, 2005.
11. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
12. Радиотехнические системы / Под ред. Ю.Н. Казаринова. М.: Высшая школа, 1990, 496 с.
13. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции, т. 1. М.: Сов. радио, 1972.
14. Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.
15. Куликов Е.И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1969.
16. Липкин И.Ф. Основы статистической радиотехники, теории информации и кодирования. М.: Сов. радио.
17. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М: Наука, 1965.

18. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. М.: Сов. радио, 1971.
19. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970.
20. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигналов. М.: Сов. радио, 1970.
21. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М.: Сов. радио, 1961.
22. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.
23. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов, М.: Иностранная литература, 1965.
24. Лебедько Е.Г. Оценка параметров сигналов в оптико-электронных приборах, СПб: ИТМО, 2001.

В 2007 году СПбГУИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

КАФЕДРА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

История кафедры началась в 1936 году с организации в Ленинградском институте точной механики и оптики (ЛИТМО) кафедры военных оптических приборов. Первым заведующим кафедрой был К. Е. Солодилов, до этого возглавлявший Центральное конструкторское бюро (ЦКБ) Всесоюзного объединения оптико-механической промышленности (ВООМП). Преподавателями кафедры стали сотрудники этого ЦКБ - М.А. Резунов, М.Я. Кругер, С.Т. Цуккерман, В.А. Егоров, Б. М. Кулежнов.

В годы Великой Отечественной войны кафедра была эвакуирована в Черепаново, где ее объединили с кафедрой оптико-механических приборов под руководством профессора А.И. Захарьевского. После возвращения в Ленинград кафедрой в 1945-46 годах по совместительству заведовал начальник конструкторского бюро (КБ) Государственного оптического института им. С.И. Вавилова (ГОИ) М.А. Резунов.

В начале 1947 года кафедру возглавил профессор С.Т. Цуккерман, который руководил ею до 1972 года. В 1958 году кафедра была реорганизована в кафедру специальных оптических приборов, а в 1967 году в кафедру оптико-электронных приборов (ОЭП).

В 1958 г. при кафедре была организована отраслевая лаборатория "Специальные оптические приборы" с достаточно сильной группой конструкторов-разработчиков. С.Т. Цуккерман и старший научный сотрудник А.С. Гридин руководили разработкой приборов управления по лучу (ПУЛ), предназначенных для управления движением различных подвижных объектов по прямой линии или по программе.

В начале 60-х годов старший научный сотрудник Г.Г. Ишанин занимался разработкой фотометрической аппаратуры, предназначенной для паспортизации оптико-электронных приборов и систем различного назначения.

Значительное влияние на содержание подготовки специалистов и научных исследований оказало привлечение к работе на кафедре выдающегося специалиста в области оптико-электронного приборостроения, члена-корреспондента Российской академии наук (РАН), Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской премии профессора М. М. Мирошникова, который, работая на кафедре ОЭП с 1969 года по 1976 год в должности профессора по совместительству, поставил и читал курс "Теория оптико-электронных приборов".

С 1972 года по 1992 год кафедрой ОЭП заведовал заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор Л.Ф. Порфирьев, известный специалист в области автоматических ОЭПиС в комплексах навигации и управления авиационной и космической техникой. Соответственно тематика выполнения научно-исследовательских работ на кафедре приобрела новые направления, существенно увеличилось число тем, носящих поисковый фундаментальный характер. Были разработаны новый учебный план и программы учебных дисциплин.

Л.Ф. Порфирьев является автором 19 учебников, учебных пособий и монографий, среди которых можно выделить такие как "Теория оптико-электронных приборов и систем" (Л.: Машиностроение, 1980), "Основы теории преобразования сигналов в оптико-электронных системах" (Л.: Машиностроение, 1989). Результаты его работ можно оценить как значительный вклад в разработку общей теории оптико-электронных систем.

Л.Ф. Порфирьев как руководитель проводил достаточно жесткую кадровую политику, при которой на кафедре оставались работать только те сотрудники, которые отличались преданностью делу. При этом он оказывал всемерную поддержку сотрудникам кафедры по разработке ими различных направлений теории и практики оптико-электронного приборостроения. По результатам научно-исследовательских работ в этот период защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук Г. Н. Грязин (1983 г.), Е.Г. Лебедько (1985 г.), Э.Д. Панков (1986 г.), Г. Г. Ишанин (1988 г.), защищено много диссертаций на соискание ученой степени кандидата технических наук.

В этот период под руководством Э.Д. Панкова начали проводиться исследования по разработке новых оптико-электронных систем измерения взаимного положения разнесенных в пространстве объектов.

Г.Н. Грязин, перешедший на кафедру с радиотехнического факультета в конце 60-х годов, продолжил свои работы в области прикладного телевидения, в частности, по разработке систем наблюдения за быстродвижущимися объектами и быстропротекающими процессами.

С 1975 года заведующим отраслевой лабораторией стал старший научный сотрудник А.Н. Тимофеев, который продолжил исследования по разработке методов и средств контроля пространственного положения объектов с помощью ОЭП с оптической равносигнальной зоной для машиностроения, энергетики, строительства, судостроения и железнодорожного транспорта.

С 1975 года, после увольнения в запас, из Ленинградской военной инженерной краснознаменной академии (ЛВИКА) им. А.Ф. Можайского на кафедру пришел работать в должности профессора С.П. Авдеев, известный специалист в области ОЭПиС космических аппаратов. Он поставил курсы и читал лекции по учебным дисциплинам "Оптико-электронные приборы", "Оптико-электронные приборы систем управления", "Оптико-электронные приборы для научных исследований".

Существенное влияние на содержание подготовки специалистов и научных исследований оказало привлечение к работе на кафедре лауреата Ленинской и Государственной премий профессора Б.А. Ермакова, известного специалиста в области физической оптики и оптико-электронного приборостроения. Б.А. Ермаков работал на кафедре ОЭП с 1979 года по 1992 год в должности профессора по совместительству и поставил курс "Оптико-электронные приборы с лазерами".

В 70-80 годах под руководством доцента Е.Г. Лебедько проводились исследования законов отражения лазерного излучения от нестационарных поверхностей и протяженных объектов, исследования в области теории идентификации объектов по их излучению в сложной фоновой ситуации. Создан комплекс для лазерной локации крупногабаритных морских объектов сложной конфигурации и водной поверхности. В этих работах принимали участие доценты О.П. Тимофеев и С.Б. Лукин.

В 70-90 годах под руководством Л.Ф. Порфирьева был разработан ряд астродатчиков, систем астроориентации и космической навигации (В.И. Калинин, А.Л. Андреев, С.Н. Ярышев).

С 1992 г. заведующим кафедрой является заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор Э.Д. Панков. В 1992 году кафедра была переименована в кафедру оптико-электронных приборов и систем (ОЭПиС).

Под руководством Э.Д. Панкова в 70-90-х годах были проведены разработки ряда оптико-электронных приборов и систем специального и гражданского применения, нашедших практическое внедрение и способствующих научно-техническому прогрессу и укреплению обороноспособности нашей страны.

В рамках указанных работ доцентом И.А. Коняхиным проводились исследования, результаты которых можно классифицировать как разработку теории построения автоколлимационных систем с компонентами нарушенной типовой конфигурации.

В то же время доцентом В.В. Коротаевым разработан ряд поляризационных приборов и измерительных установок. Теоретическим результатом работ явилась разработка методологии анализа поляризационных свойств оптических систем с изменяющейся ориентацией элементов. По результатам указанных работ В.В. Коротаев (в 1997 г.) и И.А. Коняхин (в 1998г.) защитили диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук.

Применение многоэлементных приемников в системах пеленгации дало толчок развитию телевизионных систем технического зрения, измерительных телевизионных систем и систем обработки изображений. Результаты этих исследований были использованы доцентом А.Л. Андреевым при постановке учебных курсов "Оптико-электронные системы с ЭВМ", "Специализированные аппаратные и программные средства ОЭП", "Автоматизированные телевизионные вычислительные комплексы", а также доцентом С.Н. Ярышевым при постановке им в 1993 году учебной дисциплины "Видеотехника".

На основе обобщения методик расчета оптико-электронных систем различного назначения и принципа действия в 1981 году были развернуты работы по созданию элементов систем автоматизированного проектирования ОЭП. За период с 1981 по 1987 год под руководством И.А. Коняхина были разработаны оригинальные пакеты прикладных программ расчета параметров систем измерения пространственного положения объектов.

Развитие компьютерной техники и программного обеспечения общего назначения позволило создать проблемно-ориентированное программное обеспечение поддержки проектирования ОЭП на системотехническом уровне.

С 2007 г. заведующим кафедрой является почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, профессор В.В. Коротаев.

По результатам научных работ сотрудниками кафедры ОЭПиС выпущено в свет 15 монографий, 11 учебников и учебных пособий. На кафедре подготовлено 14 докторов наук, а также более 110 кандидатов наук.

На разработки кафедры получены авторские свидетельства СССР и патенты Российской Федерации на более чем 200 изобретений. Наибольший вклад в изобретательскую деятельность внес Э.Д. Панков - автор 123 изобретений, из которых 33 внедрены в промышленности.

Евгений Георгиевич Лебедько

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ
(части 3 и 4)

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

Е.Г. Лебедько

Верстка

Е.Г. Лебедько

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ № _____

Тираж 100 экз

Отпечатано на ризографе