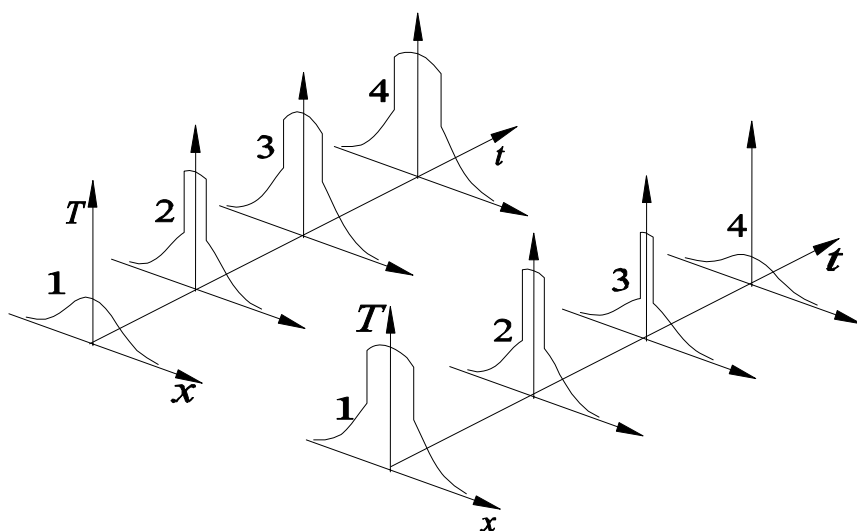


Н.Н. Розанов

# **ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

**Часть I. Диссипативные оптические солитоны в тонком  
слое полупроводника**



Санкт-Петербург

2009

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**



**ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ**

**Н.Н. Розанов**

***ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ОПТИЧЕСКИМИ  
МЕТОДАМИ***

**Часть I. Диссипативные оптические солитоны в тонком  
слое полупроводника**



**Санкт-Петербург**

**2009**

УДК 538.56

**Розанов Н.Н. Обработка информации оптическими методами.**

**Часть I. Диссипативные солитоны в тонком слое полупроводника**

СПб: СПб ГУИТМО, 2009. – 70 с.

Дан обзор общих свойств диссипативных оптических солитонов, перспективных для обработки информации в системах с повышенными требованиями к точности и надежности операций, и схем их формирования. Систематически изложена теория пространственного гистерезиса и пространственных структур света – волн переключения и диссипативных солитонов – в тонком слое полупроводника, возбуждаемом внешним излучением. Включены задания для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для бакалавров и магистров обучающихся по направлению «Фотоника и Оптоинформатика», а также для студентов и аспирантов оптических и информационных специальностей смежных направлений.

Рекомендовано к печати Учёным советом факультета ФиОИ

Протокол №5 от 18 февраля 2009



В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

© Санкт-Петербургский  
государственный университет  
информационных технологий,  
механики и оптики, 2009

© Н.Н. Розанов, 2009

## Содержание

<b>Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ДИССИПАТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ .....</b>	<b>4</b>
1.1. Свойства оптических солитонов .....	4
1.2. Схемы формирования диссипативных оптических солитонов ..	8
1.3. Историческая справка и план дальнейшего изложения .....	12
Литература к главе 1.....	17
<b>Глава 2. НЕКОГЕРЕНТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СЛОЯ ПОЛУПРОВОДНИКА .....</b>	<b>20</b>
2.1. Модель схемы и приближение среднего поля.....	20
2.2. Поперечно-однородные распределения .....	24
2.3. Стационарные распределения в одномерной схеме .....	29
2.4. Устойчивость стационарных распределений .....	34
2.5. Волны переключения.....	36
2.5.1. Волны переключения и механическая аналогия	36
2.5.2. Устойчивые и неустойчивые волны переключения	38
2.6. Пространственное переключение .....	44
2.7. Эффекты неоднородностей. Пространственный гистерезис ....	49
2.7.1. Асимптотический анализ	49
2.7.2. Пространственная бистабильность	52
2.7.3. Пространственный гистерезис	56
2.8. Поперечно-двумерные структуры	58
2.9. Другие факторы	60
Литература к главе 2.....	669
<b>Глава 3. КОГЕРЕНТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СЛОЯ ПОЛУПРОВОДНИКА .....</b>	<b>64</b>
3.1. Оптические характеристики конденсата Бозе-Эйнштейна.....	66
3.2. Бистабильность и диссипативные солитоны .....	66
Литература к главе 3.....	69

*Представлен обзор общих свойств диссипативных пространственных и временных оптических солитонов и схем их формирования. Приведена справка о первых исследованиях диссипативных солитонов.*

### 1.1. Свойства оптических солитонов

*Оптические солитоны – устойчивые структуры света, локализованные вследствие баланса линейного расплывания и нелинейного сжатия в нелинейной среде [1] – делятся на два класса. Консервативные солитоны реализуются в прозрачных средах, в которых потери излучения пренебрежимо малы, приток энергии отсутствует и локализация является следствием баланса линейного расплывания (дифракции для пучка и/или дисперсии для импульса) и нелинейной фокусировки (рис. 1.1а). Оптические диссипативные солитоны (автосолитоны) также являются устойчивыми структурами света, но локализованными вследствие баланса притока и оттока энергии в нелинейной среде или системе (рис. 1.1б) [2]. Эффект уравнивания линейного расплывания нелинейной фокусировкой для диссипативных солитонов может как присутствовать, так и отсутствовать.*

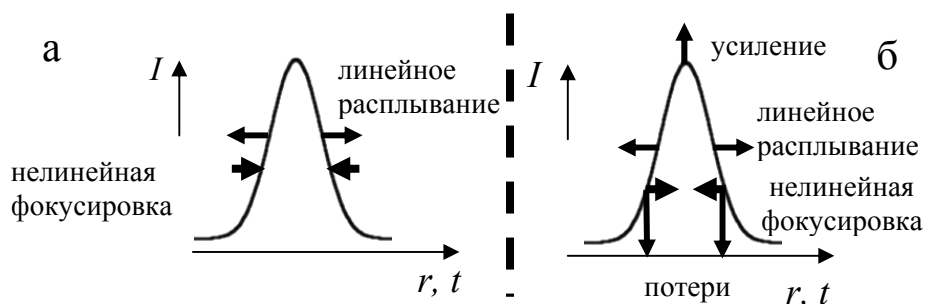


Рис. 1.1. Консервативный (а) и диссипативный (б) солитоны как баланс линейного расплывания и нелинейной фокусировки (а, б) и притока и оттока энергии (б);  $I$  – интенсивность,  $r$  и  $t$  – координата и время для пространственных и временных солитонов, соответственно

Консервативные и диссипативные солитоны как существенно нелинейные волновые объекты имеют как общие свойства, так и принципиальные отличия. В обоих случаях необходимо наличие оптической нелинейности – в линейном режиме исходный сгусток света расплывается. Консервативные солитоны составляют семейства с непрерывно меняющимся параметром, например, шириной солитона или его максимальной интенсивностью. Требование энергетического баланса для диссипативных солитонов приводит к дополнительному условию на

их параметры, из-за чего набор основных параметров становится не сплошным, а дискретным. Это обстоятельство приводит к повышенной устойчивости диссипативных оптических солитонов, что делает их перспективными для различных приложений, в том числе для оптической обработки информации.

Солитоны могут быть пространственными (локализация в пространстве пучка непрерывного излучения), временными (локализация импульса по времени) и пространственно-временными (локализация и в пространстве, и по времени). Как консервативные, так и диссипативные солитоны характеризуются геометрической размерностью  $D$ . Под ней подразумевают число измерений, по которым ограничение достигается за счет нелинейных факторов, тогда как по остальным  $(3 - D)$  измерениям такое ограничение может достигаться неоднородностью линейных характеристик среды или системы, например показателя преломления. На рис. 1.2 приведены примеры временных (а, нелинейный одномодовый световод), пространственных (б, планарный нелинейный волновод, и в, объемная нелинейная среда) и пространственно-временных (г, объемная нелинейная среда) солитонов размерности  $D = 1, 2, 3$ .

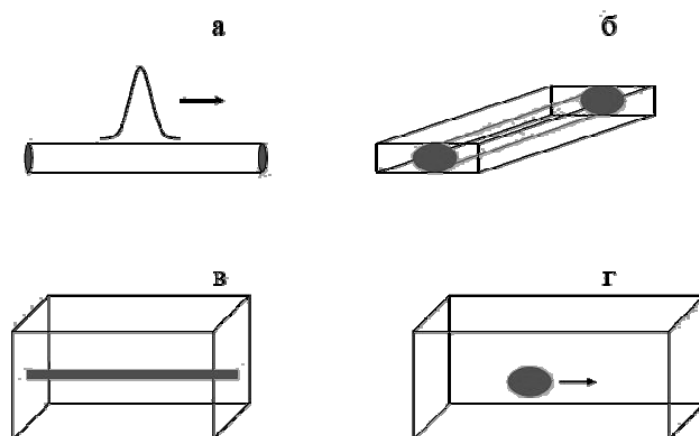


Рис. 1.2. Примеры пространственных, временных и пространственно-временных солитонов. Размерность солитона  $D = 1$  (а, б), 2 (в) и 3 (г)

Оптические солитоны могут быть когерентными и некогерентными. Приток энергии может быть реализован вводом в оптическую систему пучка непрерывного когерентного излучения (рис. 1.3а) или некогерентным внешним сигналом или накачкой, приводящей к усилению излучения (рис. 1.3б). Для когерентных солитонов в первом случае внешний сигнал навязывает излучению частоту и фазу. Во втором случае общая фаза излучения произвольна (инвариантность к сдвигу фазы на

постоянную величину).

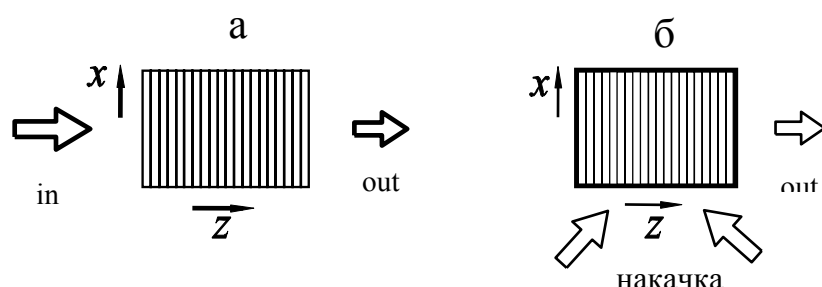


Рис. 1.3. Геометрия схем с внешним когерентным сигналом (а) и без него (некогерентный внешний сигнал или накачка, б);  $z$  – продольная и  $x$  – поперечная координаты

В процессе эволюции солитонов возможно установление их постоянной формы, либо периодические, квазипериодические или даже хаотические пульсации (при сохранении локализации). Для когерентных оптических солитонов характерны высокочастотные (с оптической частотой) осцилляции компонент электрической напряженности при неизменности огибающей (рис. 1.4а). Тогда говорят о солитонах огибающей. Но даже для оптических когерентных солитонов возможны предельно короткие (с длительностью порядка обратной средней частоты излучения) или предельно узкие (с шириной порядка средней длины волны излучения и менее) солитоны (рис. 1.4б).

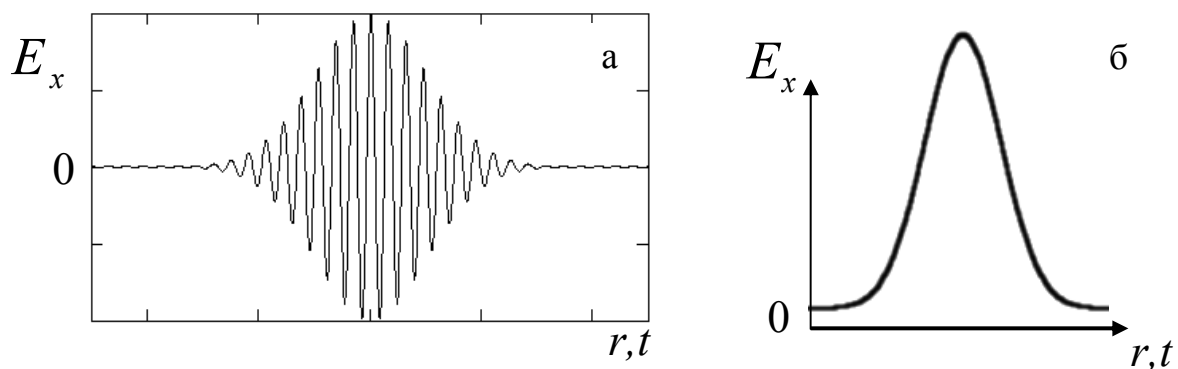


Рис. 1.4. Солитон огибающей (а) и предельно короткий или узкий солитон (б);  $E_x$  –  $x$ -я компонента электрической напряженности

Первоначально под солитонами понимались локализованные структуры в пространственно однородной (по  $D$  измерениям) неограниченной нелинейной среде. При этом имеет место трансляционная

инвариантность к сдвигу по этим координатам на произвольную величину. Однако в литературе наметилась тенденция к расширению определения солитонов, когда допускается неоднородность среды того или иного вида. Широко распространенным здесь является случай периодического изменения характеристик среды (например, «брэгговские солитоны» [1]), в литературе встречаются и такие термины как «поверхностные солитоны», что связано с важной ролью резкой границы системы. Конечно, всегда сохраняется требование того, чтобы причиной локализации света была бы оптическая нелинейность среды.

Еще одно терминологическое замечание относится к некоторой условности понятия локализации. Диссипативные солитоны во многих случаях поддерживаются в идеальной схеме бесконечной плоской волной излучения. Тогда солитон представляет локальное увеличение (светлый солитон) или уменьшение (темный солитон) какой-либо характеристики поля (например, интенсивности) на общем однородном фоне (в действительности фон может быть и слабо промодулирован). Под это определение не подпадают переходные структуры, например рассмотренные ниже в гл. 2 одномерные волны переключения, у которых температурное поле по разные стороны от неоднородности приближается к постоянным, но различающимся друг от друга значениям. Поэтому здесь нельзя говорить о «температурном солитоне». Но правомочно использование термина «солитон» для механических напряжений, так как они пропорциональны градиенту температуры и, соответственно, приближаются к нулю при удалении от неоднородности по обе ее стороны. Тем самым, солитон для одного физического поля формально может не быть солитоном для другого физического поля в той же системе и в тех же условиях.

Солитоны не следует смешивать с развивающимися при модуляционной неустойчивости, например в среде с керровской нелинейностью, филаментами (интенсивными нитями излучения) [3]. Существенно, что одновременно должны быть устойчивыми состояния без солитона и при его наличии. В этом смысле можно говорить о бистабильности или мультистабильности солитонных систем. Другими словами, должна быть возможность как создания (записи), так и уничтожения (стирания) пространственного солитона в нелинейной среде или системе. Такое свойство связано и с возможностью использования солитонов в системах памяти.

Солитоны как существенно нелинейный локализованный волновой объект по-новому ставят вопрос о соотношении между волнами и частицами. Разумно переформулировать этот вопрос следующим образом. Если сопоставить солитонам «частицы», то каковы свойства этих «частиц»? Далее для ряда типов диссипативных оптических солитонов мы покажем, что эти свойства оказываются весьма необычными. В частности,



такие «частицы» не элементарны, а обладают внутренней структурой с различным характером потоков энергии.

Еще одно замечание вызвано наличием шума (флуктуаций) в реальных системах и в падающем излучении. Наиболее принципиальным их следствием является возможность самопроизвольных переходов между различными солитонными и бессолитонными структурами излучения, имея в виду указанную выше бистабильность или мультистабильность. Поэтому принципиально солитон обладает конечным временем жизни (он метастабилен). Но поскольку солитон устойчив относительно малых возмущений, то переходы могут быть вызваны только крупными и потому маловероятными флуктуациями. Соответственно, время жизни солитона весьма велико за исключением случаев близости параметров к границам его устойчивости. Эффективно флуктуации уменьшают диапазон устойчивости солитона.

Принципиально неустранимыми являются квантовые флуктуации излучения. Квантовые флуктуации оптических солитонов представляют значительный интерес не только с прикладной, но и с общезначимой точки зрения, поскольку их анализ выявляет существенно неклассические свойства этих макроскопических объектов. В следующей части Пособия мы увидим, что солитон можно рассматривать не только как классическую, но и как квантовую «частицу», совершающую броуновское движение под действием флуктуаций вакуума.

## 1.2. Схемы формирования диссипативных оптических солитонов

К настоящему времени известен ряд схем, в которых возможно формирование диссипативных оптических солитонов. Естественно, что во всех таких схемах по крайней мере один из размеров должен быть большим по сравнению с размерами солитона.

*Когерентное возбуждение полупроводникового слоя* (рис. 1.5а). В таких схемах среда обладает коэффициентом поглощения  $\alpha$ , который возрастает с ростом интенсивности излучения  $I$ . На тонкий образец воздействует непрерывное некогерентное излучение с интенсивностью  $I_{in}$ . Более нагляден тепловой механизм оптической нелинейности, в котором коэффициент поглощения растет при увеличении температуры образца  $T$ . Тогда в некотором диапазоне параметров возникает следующая ситуация. Если первоначально образец холодный, то из-за малого коэффициента поглощения он почти не нагревается и сохраняет холодное состояние. Но исходно нагретый образец, при той же интенсивности  $I_{in}$ , будет поглощать почти все излучение и, соответственно, будет поддерживать горячее состояние. Это является причиной реализующейся в схеме *бистабильности на основе возрастающего поглощения*, известной для концентрационного  $\alpha(n(I))$  (см. [4, 5]) и теплового  $\alpha(T)$  (см. [6])

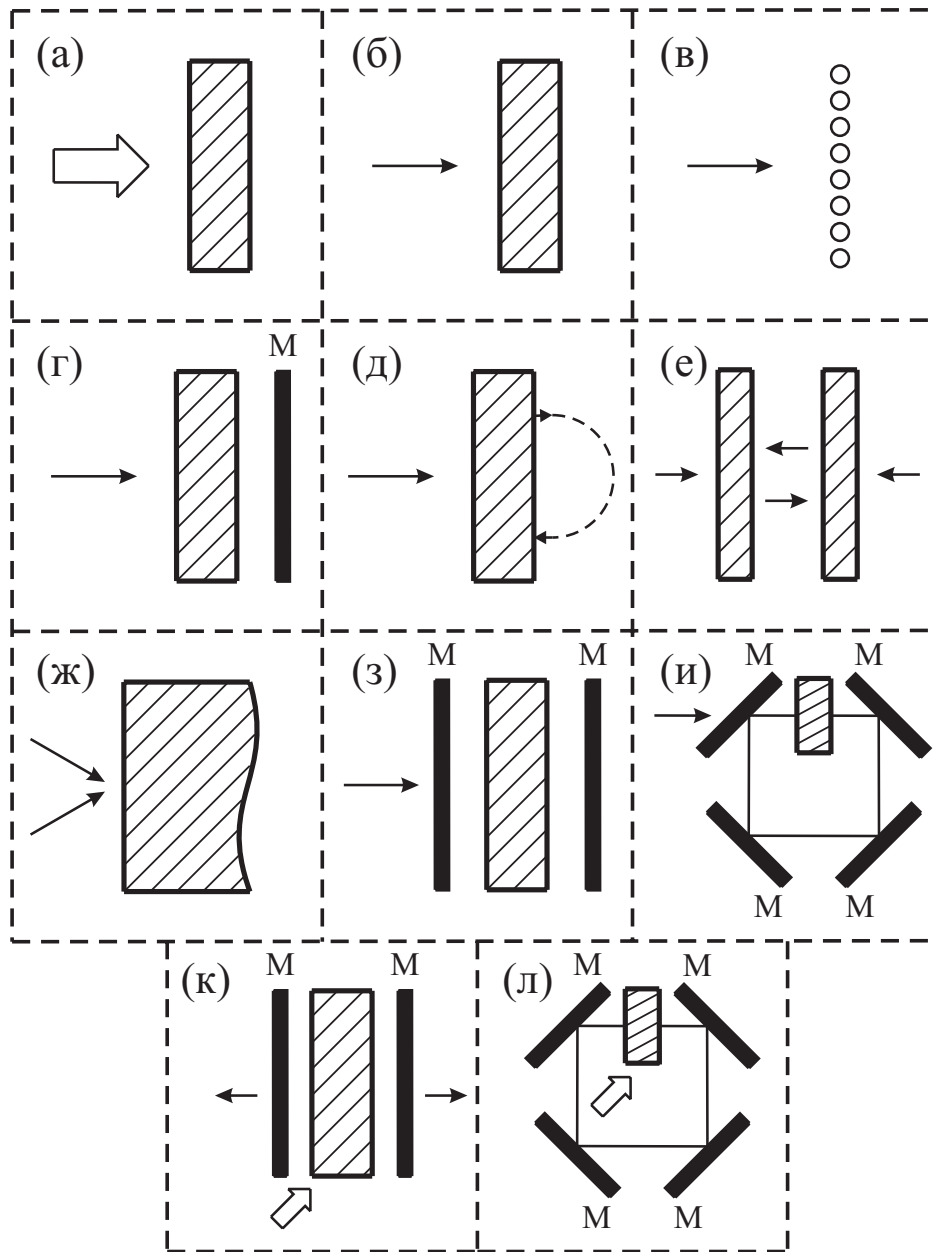


Рис. 1.5. Широкоапертурные схемы формирования пространственных диссипативных солитонов: а – некогерентное возбуждение тонкого слоя полупроводника; б – когерентное возбуждение тонкого слоя полупроводника; в – когерентное возбуждение молекулярной цепочки; г – когерентное возбуждение слоя среды с зеркалом обратной связи; д – когерентное возбуждение слоя среды с цепью обратной связи; е – когерентное возбуждение двух слоев среды; ж – когерентное возбуждение полубесконечного слоя среды; з – когерентное возбуждение нелинейного интерферометра Фабри – Перо; и – когерентное возбуждение нелинейного кольцевого интерферометра; к – лазер с двухзеркальным резонатором; л – лазер с двухзеркальным резонатором; л – кольцевой лазер. В схемах могут присутствовать дополнительные линейные и нелинейные элементы

механизмов нелинейности коэффициента поглощения в полупроводниках ( $n$  – концентрация носителей заряда,  $T$  – температура образца). Некогерентные пространственные структуры возникают в образце в виде длинного полупроводникового стержня или пластины, нагреваемых интенсивным излучением. Схема может быть однородной (по направлению вдоль оси стержня или по поперечным направлениям в пластине) или неоднородной с пространственной модуляцией характеристик по указанным направлениям.

Данная схема явно диссипативна (энергия внешнего излучения вкладывается в образец, а потери тепловой энергии отвечают теплоотводу с его поверхности). Схема безрезонаторная и не содержит зеркал. Оптическая нелинейность нелокальна – отклик среды в данной точке зависит от распределения интенсивности излучения и в других точках из-за теплопроводности. Можно сказать, что эта простейшая схема однокомпонентна, если понимать под компонентностью число независимых величин, полностью определяющих состояние соответствующей точечной (пространственно нераспределенной) системы [7].

*Когерентное возбуждение полупроводникового слоя* (рис. 1.5б). Это тоже безрезонаторная и беззеркальная диссипативная схема с нелокальным откликом тонкого слоя среды. Отличие от предыдущей схемы состоит в том, что внешнее излучение когерентно, а среда отвечает макроскопическому квантовому состоянию – конденсату экситонов, реализующемся при температурах ниже критической и характеризующемся их когерентностью [8, 9]. Соответственно, система, по крайней мере, двухкомпонентна (излучение и волновая функция конденсата определяются двумя вещественными величинами – амплитудой и фазой), что приводит к увеличению числа типов пространственных структур по сравнению с предыдущим случаем.

*Молекулярные цепочки, резонансно возбуждаемые когерентным излучением.* Примером служат ориентированные  $J$ -агрегаты цианиновых красителей, состоящие из большого числа молекул с одинаково ориентированными дипольными моментами (рис. 1.5в). Внешнее лазерное излучение раскачивает молекулярные диполи, так что дипольное излучение одной молекулы воздействует на соседние молекулы (механизм нелокальности оптического отклика). В таких цепочках теоретически продемонстрирована бистабильность [10].

В описанных выше схемах отсутствуют зеркала или другие виды внешней обратной связи, а в общей динамике структур распространение излучения играет вспомогательную роль. Например, в приближении среднего поля характеристики излучения внутри системы усредняются в продольном направлении и выпадают из динамической модели. Иначе обстоит дело с приведенными ниже схемами, в которых либо имеются

элементы внешней обратной связи, либо существенна продольная распределенность схемы.

*Родственные слоистые схемы.* Пространственные структуры могут возникать и в схемах с несколько более сложной геометрией. Одним из примеров служит широкоапертурная схема, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды и зеркала обратной связи, отстоящего от слоя на некоторое расстояние (рис. 1.5г). Когерентные пространственные структуры возбуждаются внешним лазерным излучением [11]. Несколько ранее была изучена более общая схема слоя среды с обратной связью, которая могла быть не чисто оптической и включала дополнительные операции поворота поля, пространственной фильтрации и т.д. (рис. 1.5д) [12, 13]. Другим примером является схема двух параллельных и разнесенных друг от друга нелинейных слоев, возбуждаемых с двух сторон различными внешними сигналами (рис. 1.5е) [14]. Оптическую нелинейность среды здесь можно считать локальной ввиду выраженной продольной протяженности схемы. Принципиально возможно и формирование пространственных структур при отражении интенсивного излучения от полуограниченного слоя нелинейной среды, однако в этом случае их наблюдение реально скорее при возбуждении двумя наклонными пучками или при пространственной модуляции параметров схемы или внешнего излучения (рис. 1.5ж) [7, 15].

*Нелинейные интерферометры, возбуждаемые когерентным излучением.* В этих схемах внутри двухзеркального интерферометра Фабри – Перо (рис. 1.5з) или кольцевого интерферометра (рис. 1.5и) размещается нелинейная среда, а извне интерферометр подпитывается когерентным лазерным излучением. Ввиду резонансного увеличения интенсивности поля внутри добротного интерферометра когерентные пространственные структуры реализуются уже при сравнительно низкой интенсивности внешнего сигнала. Для этой резонаторной схемы оптическую нелинейность среды также можно считать локальной. Сама нелинейность может быть почти любой – керровской (кубичной или с насыщением) или квадратичной нелинейностью показателя преломления, абсорбционной и т.д. Точечная (без учета поперечной распределенности) схема была предложена в 1969 г. [16], экспериментально бистабильность продемонстрировали в 1975 г. Мак-Колл, Гиббс, Черчилл и Венкатесан [17, 18].

*Лазерные схемы.* Далее в этом разделе мы будем рассматривать схемы без внешнего когерентного сигнала (хотя и лазерная схема может возбуждаться извне когерентным излучением, но этот вариант практически не отличается от указанного выше случая пассивного интерферометра). Лазерные схемы можно разделить на резонаторные (рис. 1.5к,л) и безрезонаторные (усилительные, рис. 1.2). Исторически первой (безотносительно к пространственным структурам) изучалась

резонаторная схема *лазера с насыщающимся поглотителем* (внутри двухзеркального или кольцевого лазерного резонатора помимо усиливающей среды помещалась ячейка со средой, поглощение в которой убывало с ростом интенсивности излучения), причем в эксперименте наблюдалась бистабильность [19]. Механизм бистабильности следующий. Параметры схемы выбираются таким образом, чтобы для слабого излучения потери превышали усиление, ввиду чего безгенерационный режим устойчив. При увеличении интенсивности излучения поглощение насыщается быстрее, чем усиление, поэтому становится возможным жесткое возбуждение генерации. Аналогичен случай *лазерного усилителя с насыщающимся поглощением*. В этой схеме зеркала отсутствуют, и излучение распространяется вдоль одномодового световода (рис. 1.2а, планарного волновода (рис. 1.2б) или в сплошной среде (рис. 1.2в,г), причем в среде имеются частицы двух сортов – активные, с накачкой и насыщающимся усилением, и пассивные, с насыщающимся поглощением. Эти частицы могут быть перемешаны равномерно вдоль трассы распространения излучения, или чередоваться слоями, причем различие между этими двумя случаями не принципиально при достаточно малой толщине слоев.

### **1.3. Историческая справка и план дальнейшего изложения**

Неоптические диссипативные солитоны в литературе впервые описаны в 1831 г. М. Фарадеем [20]. Фарадей проводил эксперименты с мелким порошком, помещенным на колеблющейся поверхности. Он заметил, что порошок собирается в мелкие «кучки» различного размера, которые могут быть неподвижными или движущимися, одиночными и объединенными в «агрегаты». Сейчас такого рода диссипативные солитоны в гранулярных материалах на колеблющейся платформе называют осциллонами [21]. Заметим, что Фарадей опубликовал свои эксперименты на три года раньше первых наблюдений Р. Скоттом консервативных гидродинамических солитонов и на 13 лет раньше соответствующей публикации Скотта [22].

В 20-м веке диссипативные солитоны (автосолитоны) активно изучались в широком круге различных физических, химических и биологических систем, главным образом, в рамках модели реакции-диффузии [23, 24]. Эта модель описывает локализованные структуры, отвечающие распространению импульсов в нервном волокне и волокне сердечной мышцы, возникающие в химических реакциях активаторов, способствующих росту концентрации какого-либо вещества, и ингибиторов, подавляющих этот рост, при протекании электрического тока в газах, плазме и полупроводниках и т.д.

Тема оптических солитонов стала актуальной лишь в лазерную эру, когда оптическая нелинейность оказалась вполне доступной для

экспериментов. Первым примером оказалось предсказание Г.А. Аскарьяном пространственного консервативного солитона в прозрачной среде с самофокусирующей нелинейностью (показатель преломления среды возрастает с ростом интенсивности излучения) [25]. Слабоинтенсивный пучок излучения, для которого нелинейность незначительна, будет по мере распространения расширяться из-за дифракции. Но для пучка мощного излучения, например гауссовой формы, показатель преломления вблизи оси больше, чем на периферии. Поэтому лучи будут загибаться к оси и нелинейная среда становится эквивалентной распределенной фокусирующей линзе, способной компенсировать дифракционное расплывание. В дальнейшем был найден временной аналог таких солитонов в одномодовых световодах с керровской нелинейностью [26], а с 2002 г. в Австралии на их основе действует коммерческая линия передачи информации [27].

Если в варианте Аскарьяна считать, что среда не прозрачная, а обладает нелинейными усилением и поглощением, то мы естественным образом получим диссипативные пространственные оптические солитоны. Далее нам будет удобнее изложить относящийся к диссипативным оптическим солитонам материал не в хронологическом порядке, а следуя представленному в § 1.2 списку схем, в которых эти солитоны возможны.

*Некогерентное возбуждение полупроводникового слоя.* Эффекты поперечной (по отношению к направлению распространения излучения) распределенности в этой схеме впервые были изучены в [28, 29]. Результаты достаточно подробно излагаются в гл. 2. В поперечно-однородной схеме с некогерентным внешним сигналом и классической бистабильностью (два устойчивых пространственно-распределенных состояния) с помощью наглядной «механической аналогии» удастся аналитически показать существование и устойчивость температурных волн переключения. Как пояснялось выше, отсюда следует наличие некогерентных диссипативных солитонов механического напряжения. Для схем с поперечной неоднородностью описана пространственная бистабильность и ее кинетика – пространственный гистерезис. С общефизической точки зрения важно, что здесь представлен первый пример пространственного гистерезиса – гистерезиса в системе с существенной пространственной распределенностью, и многие из приведенных результатов могут быть перенесены на общий случай систем с фазовым переходом первого рода. Одновременно для системы с квазипериодической поперечной модуляцией получен некогерентный температурный солитон и показана возможность организации многоканальной памяти. Тем самым выявляется важная роль неоднородностей в системе и возможность динамической перестройки схемы. Вместе с эффектом пространственного гистерезиса это может

служить основой нового подхода к нелинейной обработке информации, который более подробно обсуждается в следующей части Пособия.

*Когерентное возбуждение полупроводникового слоя.* В такой поперечно однородной схеме модуляционная неустойчивость показана в [30], а когерентные диссипативные солитоны найдены в работе [31], которой главным образом и следует изложение в гл. 3. Среди результатов наиболее примечательно то, что для наличия когерентных оптических солитонов достаточно только одного слоя нелинейной среды без каких-либо дополнительных зеркал. Обращают на себя внимание и сравнительно малые (хотя и не рекордные среди рассматриваемых здесь) размеры солитонов.

*Молекулярные цепочки, резонансно возбуждаемые когерентным излучением.* Хотя консервативным молекулярным солитонам посвящена обширная литература, включая монографию [32], их диссипативные аналоги анализировались, насколько нам известно, только в [33]. Они принадлежат к дискретным предельно узким солитонам и могут обладать рекордно малой шириной ( $\sim 1$  нм), что представляет значительный научный и прикладной интерес. Такие солитоны анализируются в гл. 3.

Остальные схемы будут рассмотрены в следующей части Пособия, но здесь для полноты мы дадим их краткий обзор.

*Родственные слоистые схемы.* Схему тонкого слоя нелинейной среды с зеркалом обратной связи предложил Ферс [11], который показал для нее возможность модуляционной неустойчивости. В схеме жидкокристаллического пространственного модулятора с обратной связью и пространственной фильтрацией типа рис. 1.5д были, насколько нам известно, впервые экспериментально найдены диссипативные оптические солитоны [34]. Обзор теоретических и экспериментальных исследований диссипативных солитонов в подобных схемах приводится в [35]. Для схемы с двумя слоями нелинейной среды расчеты [14] также показывают наличие диссипативных оптических солитонов.

*Нелинейные интерферометры, возбуждаемые когерентным излучением.* Такая широкоапертурная схема была предложена и изучена в [36], где для кольцевого интерферометра была продемонстрирована модуляционная неустойчивость и возможность ее подавления с помощью пространственной фильтрации. Были выявлены в [36] также волны переключения, влияние неоднородности интенсивности падающего излучения (пространственный гистерезис) и особенности случая наклонного (по отношению к оси интерферометра) падения излучения – отвечающий неоднородности фазы падающего излучения геометрический снос лучей приводит к движению структур в поперечном направлении. Для интерферометра Фабри – Перо, заполненного керровской средой, условия развития модуляционной неустойчивости получены в [37]. В [38] было показано, что устойчивые локализованные структуры –

диссипативные оптические солитоны – могут быть сформированы в широкоапертурном нелинейном интерферометре с периодической модуляцией интенсивности падающего излучения. В [39] для интерферометра с конечной апертурой были выполнены расчеты нелинейной стадии модуляционной неустойчивости (филаментации), и отдельные филаменты (число которых убывает с уменьшением апертуры интерферометра) были названы «уединенными волнами». Во избежание недоразумений подчеркнем качественное отличие «уединенных волн» (следствия конечности апертуры и найденной в [36] модуляционной неустойчивости) от диссипативных солитонов (даже для бесконечной апертуры при фиксированных параметрах схемы в зависимости от начальных условий может быть возбужден только один или вообще ни одного солитона). Диссипативные пространственные солитоны в поперечно однородном нелинейном интерферометре были найдены и изучены в [40-42] и в большом числе последующих работ, обзор которых можно найти в монографиях [7, 15, 43-45].

По-видимому, эта схема к настоящему времени изучена наиболее детально как теоретически, так и экспериментально. Теория структур излучения существенно упрощается в модели среднего поля (усреднение огибающей в продольном направлении) [46]. Диссипативные солитоны могут быть найдены численно почти для произвольного вида оптической нелинейности, что подчеркивает их универсальный характер. Основные их свойства можно определить и аналитически для нелинейности модельного типа (пороговая нелинейность [47, 7, 15]). Таким образом выявляется дискретный набор одиночных диссипативных солитонов и дискретный набор их связанных структур. Еще одним важным результатом, первоначально полученным в рамках этой модели, но имеющим общий характер, является вывод об асимметрии структуры как одном из источников ее движения. Также для этой схемы был предложен новый подход к нелинейно-оптической обработке информации на основе волн переключения и дифракционных солитонов и динамического управления архитектурой системы наложением на нее пространственной модуляции [48, 49]. Для широкоапертурных нелинейных интерферометров удастся развить теорию квантовых флуктуаций диссипативных солитонов, которая предсказывает более медленное временное нарастание неопределенности их положения, чем для консервативных солитонов. Экспериментально наиболее впечатляющие результаты по диссипативным солитонам были получены для полупроводниковых микрорезонаторов на основе квантовых ям [44, 45]. Эти вопросы будут обсуждены в следующей части Пособия.

*Лазерные схемы.* Диссипативные пространственные оптические солитоны впервые были найдены в резонаторной схеме лазера с насыщающимся поглотителем [50]. Анализ показал, что в простейшем



варианте безынерционной нелинейности те же уравнения описывают и временные диссипативные солитоны в усилительных системах.

Отсутствие внешнего когерентного излучения и соответствующая инвариантность к сдвигу фазы приводит к дальнейшему расширению набора диссипативных солитонов в лазерных схемах. Так, устойчивыми могут стать вихревые (топологические) солитоны с различными значениями топологического заряда (тогда как в линейной оптике структуры с топологическим зарядом, превышающим единицу, неустойчивы). Внутренняя структура одиночных лазерных солитонов содержит большее число ячеек с различным видом потоков энергии. Привлечение этих построений позволяет четко различить случаи слабого и сильного взаимодействия лазерных солитонов [51]. Лазерные солитоны могут быть даже трехмерными («лазерные пули»), что возможно в сплошной среде с нелинейными усилением и поглощением.

Еще одним важным моментом является характер движения лазерных солитонов и их комплексов (в однородном окружении). В литературе описаны неподвижные, движущиеся прямолинейно, вращающиеся и движущиеся криволинейно солитонные структуры [52, 53]. Систематизировать эту солитонную механику помогает симметричный анализ. Популярное изложение этих вопросов содержится в [54].

Введение в схему неоднородностей не только влияет на движение и свойства солитонов, но и резко увеличивает набор локализованных структур. Ярким примером служат диссипативные брэгговские световодные солитоны, формирующиеся в одномодовом световоде с нелинейными усилением и поглощением и наведенной в сердцевине световода брэгговской решеткой показателя преломления [55]. В схеме возможны неподвижные и движущиеся с дискретным набором скоростей временные диссипативные солитоны. Другим примером служат диссипативные дискретные солитоны в двумерной системе связанных одномодовых световодов также с нелинейными усилением и поглощением, которые могут быть неподвижными, движущимися и вращающимися [56].

Диссипативные факторы могут быть использованы и для получения предельно коротких лазерных импульсов (фемтосекундного или даже субфемтосекундного уровня). Предложенная и исследованная в [57-59] схема отвечает режиму импульсов самоиндуцированной прозрачности при внедрении в пассивную среду частиц двух сортов: активных (с накачкой) и пассивных (с нелинейным поглощением). В этом случае также перспективно в качестве «частиц» использовать наноструктуры (квантовые точки).

Экспериментальные исследования лазерных солитонов сейчас разворачиваются в ряде лабораторий и наиболее перспективными здесь выглядят полупроводниковые лазеры с вертикальным резонатором на основе квантовых точек. Одним из достоинств лазерных солитонов по

сравнению, например, с солитонами в нелинейных интерферометрах является отсутствие внешнего когерентного излучения и нулей фона солитона (интенсивность излучения на периферии лазерного солитона стремится к нулю). Это обеспечивает высокий контраст при записи информации солитонами.

Упомянутые вопросы обсуждаются в монографиях [15, 43-45], а также будут раскрыты в последующей части Пособия.

### **Литература к главе 1**

1. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. М.: Физматлит, 2005.
2. Розанов Н.Н. Автосолитон. Большая Российская Энциклопедия. Т. 1. С. 171.
3. Беспалов В.И., Таланов В.И. Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 471.
4. Елесин В.Ф., Копаев Ю.В. ЖЭТФ. 1972. Т. 63. С. 1447.
5. Dneprovskaya T.S. Phys. Stat. Sol. (b). 1972. V. 52. P. 39.
6. Эпштейн Э.М. ЖТФ. 1978. Т. 48. С. 1733.
7. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М.: Наука, 1997.
8. Келдыш Л.В. В сб. Проблемы теоретической физики, М.: Наука, 1972, с. 433.
9. Moskaleiko S.A., Snoke D.W. Bose-Einstein condensation of excitons and biexcitons and coherent nonlinear optics with excitons. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
10. Malyshev V., Moreno P. Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 416.
11. Firth W.J. J. Mod. Opt. 1990. V. 37. P. 151.
12. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 611.
13. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. В сб. Новые физические принципы оптической обработки информации. Под ред. С.А. Ахманова и М.А. Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 263.
14. Павлов П.В., Бабушкин И.В., Лойко Н.А., Розанов Н.Н., Федоров С.В. Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Вып. 10-11. С. 1000.
15. Rosanov N.N. Spatial Hysteresis and Optical Patterns. –Berlin: Springer, 2002.
16. Szoke A., Daneu V., Kurnit N.A. Appl. Phys. Lett. 1969. V. 15. P. 376.
17. McCall S.L., Gibbs H.M., Churchill G.G., Venkatesan T.N.C. Bull. Am. Phys. Soc. 1975. V. 20. P. 636.
18. McCall S.L., Gibbs H.M., Venkatesan T.N.C. J. Opt. Soc. Am. 1975. V. 65. P. 1184.
19. Лисицын В.Н., Чеботаев В.П. Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7. С. 3.
20. Faraday M. Philos. Trans. R. Soc. London. 1831. V. 122. Part II. P. 299.

21. Unbanhowar P., Melo F., Swinney H.L. *Nature (London)*. 1996. V. 382. P. 793.
22. Scott R.J. Report on waves. In: *Rep. 14<sup>th</sup> Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science, London, John Murray (1844)*.
23. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы*.—М.: Наука, 1987.
24. Кернер Б.С., Осипов В.В. *Автосолитоны* М.: Наука, 1991.
25. Аскарьян Г.А. *ЖЭТФ*. 1962. Т. 42. С. 1567.
26. Hasegawa A., Tappert F. *Appl. Phys. Lett.* 1973. V. 23. P. 142.
27. Ultra Long-Haul Photonic Line System (June 2004).—  
<http://www.marconi.com>.
28. Розанов Н.Н. *Письма в ЖТФ*. 1980. Т. 6. С. 778.
29. Розанов Н.Н. *ЖЭТФ*. 1981. Т. 80. С. 96.
30. Балкарей Ю.И., Коган А.С. *Письма в ЖЭТФ*. 1993. Т. 57. С. 277.
31. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Хаджи П.И., Белоусов И.В. *Письма в ЖЭТФ*. 2007. Т. 85. С. 524.
32. Давыдов А.С. *Солитоны в молекулярных системах*.—Киев: Наукова Думка, 1984.
33. Киселев Ал.С., Киселев Ан.С., Розанов Н.Н. *Письма в ЖЭТФ*. 2008. Т. 87. С. 763.
34. Рахманов А.Н. *Опт. и спектр*. 1993. Т. 74. С. 1184.
35. Ackemann T., Firth W.J. In: *Dissipative Solitons*. Akhmediev N., Ankiewicz A., Eds. *Lecture Notes Phys. V. 661*. Berlin: Springer, 2005. P. 55.
36. Розанов Н.Н., Семенов В.Е. *Опт. и спектр*. 1980. Т. 48. С. 108.
37. Власов С.Н. *Квант. электрон*. 1984. Т. 11. С. 1842.
38. Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Ходова Г.В. *Квант. электрон*. 1983. Т. 10. С. 2355.
39. McLaughlin D.W., Moloney J.V., Newell A.C. *Phys. Rev. Lett.* 1983. V. 51. P. 75.
40. Розанов Н.Н., Ходова Г.В. *Опт. и спектр*. 1988. Т. 65. С. 1375.
41. Rosanov N.N., Fedorov A.V., Khodova G.V. *Phys. Stat. Sol. (b)*. 1988. V. 150. P. 499.
42. Rosanov N.N., Khodova G.V. *J. Opt. Soc. Am. B*. 1990. V. 7. P. 1057.
43. Akhmediev N., Ankiewicz A. *Solitons: Nonlinear pulses and beams*. London: Chapman and Hall, 1997.
44. *Dissipative Solitons*. Akhmediev N., Ankiewicz A., Eds. *Lecture Notes Phys. V. 661*. Berlin: Springer, 2005.
45. *Dissipative Solitons: From optics to biology and medicine*. Akhmediev N., Ankiewicz A., Eds. *Lecture Notes Phys. V. 751*. Berlin: Springer, 2008.
46. Lugiato L.A., Lefever R. *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 2209.
47. Розанов Н.Н. *Опт. и спектр*. 1991. Т. 70. С. 1342; Т. 71. С. 816.
48. Розанов Н.Н., Федоров А.В. *Опт. и спектр*. 1990. Т. 68. С. 969.
49. Розанов Н.Н. *Опт. и спектр*. 1992. Т. 72. С. 447.

50. Розанов Н.Н., Федоров С.В. Опт. и спектр. 1992. Т. 72. С. 1394.
51. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Шацев А.Н. ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 486.
52. Rosanov N.N., Fedorov S.V., Shatsev A.N. Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 053903.
53. Rosanov N.N., Fedorov S.V., Shatsev A.N. Appl. Phys. B. 2005. V. 81. P. 937.
54. Розанов Н.Н. Природа. 2007. Вып. 6. С. 51.
55. Чан С.Ч., Розанов Н.Н. Опт. и спектр. 2008. Т. 105. С. 432.
56. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Федоров С.В., Шацев А.Н. Опт. и спектр. 2008. Т. 105. С. 478.
57. Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Семенов В.Е. Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 83. С. 337.
58. Rosanov N.N., Semenov V.E., Vysotina N.V. Laser Physics. 2007. V. 17. P. 1311.
59. Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Высотина Н.В. Квант. электрон. 2008. Т. 38. С. 137.

## Глава 2. НЕКОГЕРЕНТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СЛОЯ ПОЛУПРОВОДНИКА

В этой главе мы опишем, по-видимому, наиболее простые локализованные структуры, возможные в поперечно-распределенной диссипативной системе. Приток энергии здесь обеспечивается поглощением падающего извне излучения, а отток отвечает выводу энергии в окружающую среду. Сама (безрезонаторная) система известна как схема оптической бистабильности на основе возрастающего поглощения. В ней отсутствуют требования к когерентности излучения, поэтому соответствующие структуры принадлежат к числу некогерентных. Наиболее нагляден тепловой механизм нелинейности – коэффициент поглощения излучения возрастает с ростом температуры. Этот механизм нелокален – нагрев в какой-либо точке среды вызывает вследствие теплопроводности нагрев в других точках и соответствующее изменение оптических характеристик среды. Выведенное ниже управляющее уравнение в приближении среднего поля (усреднение по продольной координате) составлено для средней по толщине пластинки или стержня температуры, то есть характеристики среды, а роль излучения состоит в поставке энергии в систему.

Материал этой главы основан, главным образом, на работе [1]; более полный список публикаций приведен в книгах [2, 3].

### 2.1. Модель схемы и приближение среднего поля

Пусть на поверхность пластины (рис. 2.1) падает излучение с поперечным распределением интенсивности по этой поверхности  $I_{in}(x, y, t)$ . Считаем, что пластина состоит из изотропной среды с объемным коэффициентом поглощения  $\alpha$ . Полагаем толщину пластины  $d$  достаточно малой по сравнению с дифракционной длиной пучка излучения, что позволяет описывать излучение в рамках геометрической оптики. Пучок считается коллимированным и световые лучи идут параллельно оси  $z$ , совпадающей с нормалью к входной ( $z = 0$ ) и выходной ( $z = d$ ) поверхностям пластины. Уравнение переноса для интенсивности излучения  $I$  имеет вид

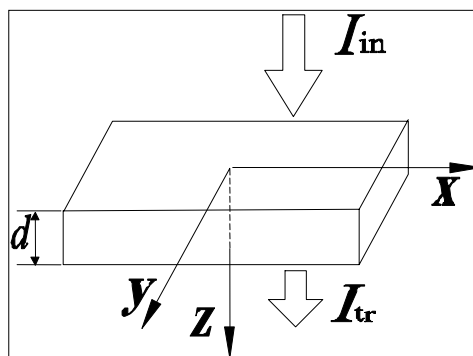


Рис. 2.1. Схема бистабильности при возрастающем поглощении

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\alpha I \quad (0 < z < d). \quad (2.1.1)$$

Входная грань пластины характеризуется коэффициентом отражения (по интенсивности)  $R_0$ , а выходная грань считается неотражающей (просветленной). Тогда из (1) следует

$$I(x, y, z, t) = (1 - R_0) I_{\text{in}} \exp\left(-\int_0^z \alpha dz\right).$$

В частности, интенсивность прошедшего через пластину излучения

$$I_{\text{tr}} = I(x, y, d, t) = (1 - R_0) I_{\text{in}} \exp\left(-\int_0^d \alpha dz\right). \quad (2.1.2)$$

Коэффициент поглощения  $\alpha$  предполагается возрастающим с ростом интенсивности. Для большей наглядности рассмотрим тепловой механизм нелинейности, отвечающий температурной зависимости коэффициента поглощения (см. § 1.2):

$$\alpha = \alpha(T). \quad (2.1.3)$$

Распределение температуры  $T$  внутри пластины определяется из уравнения теплопроводности

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\Lambda \text{grad } T) + w_v. \quad (2.1.4)$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность среды,  $c_v$  – теплоемкость (при постоянном объеме),  $\Lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $w_v$  – плотность тепловыделения за счет поглощения излучения:

$$w_v = -\frac{\partial I}{\partial z} = \alpha I.$$

Граничные условия имеют стандартный вид:

$$\Lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h(T_{z=0} - T_{\text{amb}}), \quad \Lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=d} = -h(T_{z=d} - T_{\text{amb}}), \quad (2.1.5)$$

где  $h$  – коэффициент теплоотдачи,  $T_{\text{amb}}$  – температура внешней среды.

Для получения локализованных структур достаточно наличия температурной зависимости только коэффициента поглощения  $\alpha$  (3), так что коэффициент теплопроводности  $\Lambda$  можно считать постоянным. Тогда вид (4) упрощается:

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \left( \Delta_{\perp} T + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial I}{\partial z}, \quad (2.1.6)$$

где введен поперечный оператор Лапласа

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Усредним это уравнение по толщине пластины, т.е. обе части (6) проинтегрируем по  $z$  в пределах от 0 до  $d$  и поделим на  $d$ . Введя среднюю температуру

$$\langle T \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d T(x, y, z, t) dz,$$

с учетом граничных условий (5) получим

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \Lambda \Delta_{\perp} \langle T \rangle - \frac{2h}{d} \left( \frac{T_{z=0} + T_{z=d}}{2} - T_{\text{amb}} \right) + \frac{1}{d} [(1 - R_0) I_{\text{in}} - I_{\text{tr}}]. \quad (2.1.7)$$

Последние члены правой части (7) с привлечением (2) запишем в виде

$$\frac{1}{d} [(1 - R_0) I_{\text{in}} - I_{\text{tr}}] = \frac{1 - R_0}{d} I_{\text{in}} \left[ 1 - \exp \left( - \int_0^d \alpha dz \right) \right] \approx \frac{1 - R_0}{d} I_{\text{in}} [1 - \exp[-\alpha(\langle T \rangle)d]]. \quad (2.1.8)$$

Последняя запись получена ценой приближенной замены  $\alpha \rightarrow \alpha(\langle T \rangle)$ , что оправдано при небольших перепадах температуры по толщине пластинки:  $d \ll \Lambda / h$ . (2.1.9)

При этом относительное изменение интенсивности излучения в пределах толщины пластины может быть не малым. По аналогичной причине можно приближенно заменить члены правой части (7), описывающие теплоотдачу:

$$\frac{T_{z=0} + T_{z=d}}{2} - T_{\text{amb}} \approx \langle T \rangle - T_{\text{amb}}.$$

Указанные приближения среднего поля позволяют получить замкнутое уравнение для средней по толщине температуры  $\langle T \rangle$ . Опуская далее знак усреднения  $\langle T \rangle \rightarrow T$ , запишем это уравнение в виде

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \Delta_{\perp} T - F(T). \quad (2.1.10)$$

Здесь

$$F(T) = -P(T)I_{\text{in}} + H(T - T_{\text{amb}}), \quad P(T) = \frac{1 - R_0}{d} [1 - \exp(-\alpha(T)d)], \quad H = \frac{2h}{d}. \quad (2.1.11)$$

Величина  $P(T)$  характеризует долю поглощенной в пластине мощности излучения. При весьма малых толщинах ( $\alpha d \ll 1$ )

$$P(T) \approx (1 - R_0)\alpha(T). \quad (2.1.12)$$

При изменении масштабов времени и координат

$$t' = t / (\rho_0 c_v), \quad x' = x / \sqrt{\Lambda}, \quad y' = y / \sqrt{\Lambda} \quad (2.1.13)$$

запись уравнения (10) упрощается

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \Delta'_{\perp} T - F(T). \quad (2.1.14)$$

Приведенное уравнение теплопроводности (10) позволяет определять температурные распределения  $T(x,y,t)$ , с которыми в силу соотношения (2) однозначно связаны распределения интенсивности прошедшего излучения  $I_{tr}(x,y,t)$ . Более полный анализ без использования приближения среднего поля можно найти в [2]. Можно также получить более простое уравнение для поперечно одномерной схемы нагрева тонкого стержня с осью вдоль  $x$  (рис. 2.2), для чего дополнительно следует усреднить (10) по координате  $y$ :

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - F(T). \quad (2.1.15)$$

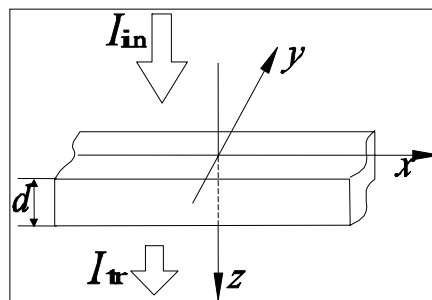


Рис. 2.2. Стержневая схема

То же уравнение получается из (10) для температурных распределений, не зависящих от поперечной координаты  $y$ . Если неравенство типа (9) выполняется для всех трех измерений пластины, то приближение среднего поля описывает сосредоточенную систему

$$\rho_0 c_v \frac{dT}{dt} = -F(T). \quad (2.1.16)$$

Это же уравнение описывает поперечно-однородные распределения с не зависящими от  $x$  и  $y$  характеристиками.

Начальные условия к уравнениям (10), (15) и (16) состоят в задании температурного распределения в начальный момент времени  $t = 0$ . Ближе к эксперименту может быть несколько иная постановка этих условий. В одном из вариантов до момента  $t = 0$  на образец не падало излучение, т.е.  $I_{in}(t < 0) = 0$ . Тогда естественно считать, что при  $t = 0$  температура совпадает с температурой окружающей среды  $T_{amb}$ . Во втором варианте на рассматриваемый объект помимо поддерживающего излучения с интенсивностью  $I_{in}$  падает дополнительный иницирующий импульс-пучок излучения, причем длительность импульса много меньше характерного времени изменения температуры. Тогда в (4) можно положить  $w_v = Q(\mathbf{r})\delta(t)$ , где  $Q(\mathbf{r})$  - распределение энергии тепловыделения за все время действия иницирующего импульса. Проинтегрировав (4) в пренебрежении теплопроводностью по малому интервалу времени, включающему всю длительность импульса, найдем



$$\delta T(\mathbf{r}, 0) = Q(\mathbf{r}) / (\rho_0 c_v), \quad (2.1.17)$$

где  $\delta T$  – изменение температуры за время импульса и  $Q$  – плотность поглощенной энергии импульса. Это изменение нужно еще усреднить по одному, двум или трем измерениям для уравнений (10), (15) и (16), соответственно. До падения импульса можно считать, что объект находился в стационарном состоянии, установившемся для заданной интенсивности поддерживающего излучения  $I_{in}$ . Тем самым, в зависимости от профиля усредненной плотности поглощенной энергии импульса  $Q$  можно сформировать различные распределения начальной температуры.

## 2.2. Поперечно-однородные распределения

Пусть интенсивность падающего излучения не зависит ни от поперечных координат, ни от времени. Тогда временная зависимость температуры  $T(t)$  определяется согласно (1.16) неявным соотношением

$$\int_{T_0}^T \frac{dt}{F(T)} = -\frac{t - t_0}{\rho_0 c_v}, \quad (2.2.1)$$

где  $T_0 = T(t_0)$  - начальное значение температуры. Стационарные значения температуры  $\Theta = T(\infty)$  отвечают равновесному балансу тепла (1.11)

$$F(\Theta) = 0. \quad (2.2.2)$$

Для них стационарное тепловыделение ( $PI_{in}$ ) компенсируется теплоотводом  $H(\Theta - T_{amb})$ . Это условие можно записать в форме

$$I_{in} = \frac{H}{P(\Theta)} (\Theta - T_{amb}) \quad (2.2.3)$$

или же

$$P(\Theta) = \frac{H}{I_{in}} (\Theta - T_{amb}). \quad (2.2.4)$$

Практически удобно, варьируя  $\Theta$ , находить по (3) зависимость  $I_{in}(\Theta)$ , которая хотя и однозначна, но может быть немонотонной ( $N$ -образной). Тогда обратная зависимость  $\Theta(I_{in})$  будет неоднозначной ( $S$ -образной).

Бистабильность наблюдается в случае возрастания коэффициента поглощения  $\alpha$  с ростом температуры. При этом, если образец исходно холодный, то он почти не поглощает излучения и потому сохраняется в холодном состоянии. Если же, при той же интенсивности падающего излучения, образец горячий, то он поглощает излучение почти полностью и, соответственно, поддерживает горячее состояние. Аналогичную природу имеет концентрационный механизм бистабильности при возрастании поглощения, в случае которого, однако, резко сокращаются временные масштабы [4].

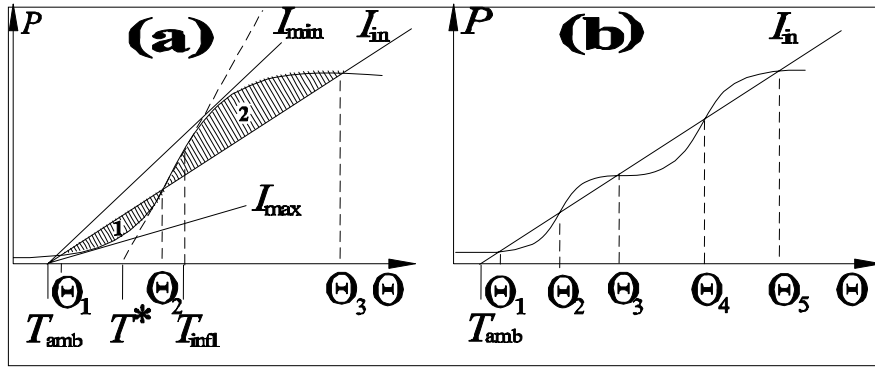


Рис. 2.3. Графическое определение стационарных режимов: *a* – бистабильность, *б* – мультистабильность

Графически стационарные значения температуры  $\Theta$  находятся по точкам пересечения кривой  $P(\Theta)$  (левая часть (4)) с прямой (правая часть (4)), выходящей из точки  $\Theta = T_{\text{amb}}$  с наклоном  $H/I_{\text{in}}$  (рис. 2.3). Для бистабильности необходимо, чтобы зависимость  $P(\Theta)$  обладала точкой перегиба, в которой  $d^2P/d\Theta^2 = 0$ . Обозначим через  $T^*$  точку пересечения касательной к кривой  $P(\Theta)$  в точке перегиба с осью  $\Theta$  (см. рис. 2.3). При высоких температурах внешней среды  $T_{\text{amb}} > T^*$  для любых интенсивностей имеется только одна точка пересечения кривой  $P(\Theta)$  и указанной прямой, т.е. только одно стационарное значение температуры  $\Theta$  (моностабильность). Критические условия  $T_{\text{amb}} = T^*$ ,  $I_{\text{in}} = H / (dP/dT)_{T=T^*}$  отвечают тройному корню уравнения (2)  $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$ . Если же  $T_{\text{amb}} < T^*$ , то в диапазоне

$$I_{\text{min}} < I_{\text{in}} < I_{\text{max}} \quad (2.2.5)$$

(границные значения отвечают касанию, см. рис. 2.3а) таких точек пересечения три. Соответственно при одном и том же значении интенсивности падающего излучения  $I_{\text{in}}$  существуют три стационарные решения:  $\Theta_1$  (нижняя, или «низкотемпературная» ветвь),  $\Theta_2$  (промежуточная ветвь) и  $\Theta_3$  (верхняя, или «высокотемпературная» ветвь). При этом нижнюю (термодинамическую) ветвь мы соотносим режимам, непрерывно переходящим при уменьшении интенсивности ( $I_{\text{in}} \rightarrow 0$ ) в тривиальное состояние  $\Theta = T_{\text{amb}}$ . При более сложной (с несколькими точками перегиба) зависимости  $P(\Theta)$  достигается мультистабильность (большее число устойчивых стационарных решений (2), см. рис. 2.3б). Зависимость стационарных значений температуры от интенсивности при  $T_{\text{amb}} < T^*$  показана на рис. 2.4а.

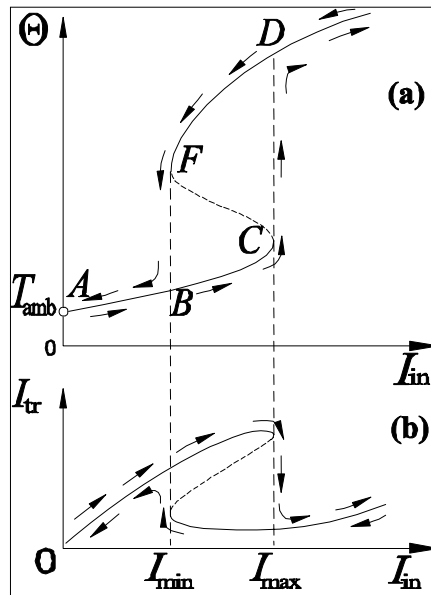


Рис. 2.4. Бистабильность и гистерезис в точечной схеме; промежуточная ветвь передаточной функции изображена пунктиром ввиду неустойчивости отвечающих ей состояний

Типичный вид температурной зависимости результирующего баланса тепла  $F(T)$  (при необходимом условии бистабильности  $T_{\text{amb}} < T^*$ ) для различных значений интенсивности дан на рис. 2.5. При наличии только одного стационарного решения уравнения (2) и начальной температуре  $T_0 = T_{t=0}$ , отличающейся от стационарного значения  $\Theta$ , температура со временем в соответствии с (1.16) будет монотонно приближаться к значению  $T = \Theta$  (рис. 2.6а). Отсюда следует устойчивость (единственного) стационарного режима по отношению к произвольным (в том числе большим) отклонениям температуры. Характерное время установления стационарного режима  $\tau_s$  получается при линеаризации уравнения (1.16) в окрестности  $T = \Theta$  по малым отклонениям температуры  $\delta T = T - \Theta$ :

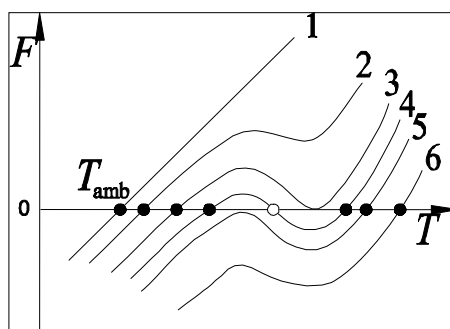


Рис. 2.5. Температурная зависимость функции теплового баланса  $F(T)$ : 1 -  $I_{\text{in}} = 0$ , 2 -  $I_{\text{in}} < I_{\text{min}}$ , 3 -  $I_{\text{in}} = I_{\text{min}}$ , 4 -  $I_{\text{min}} < I_{\text{in}} < I_{\text{max}}$ , 5 -  $I_{\text{in}} = I_{\text{max}}$ , 6 -  $I_{\text{in}} > I_{\text{max}}$

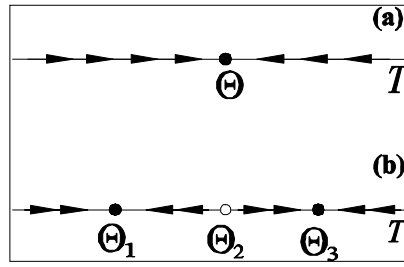


Рис. 2.6. Установление температуры в случае моностабильности (а) и бистабильности (б) точечной схемы. Стрелки показывают возрастание времени

$$\rho_0 c_v \frac{d\delta T}{dt} = -V_\Theta \delta T, \quad (2.2.6)$$

где

$$V_\Theta = \left. \frac{dF}{dT} \right|_{T=\Theta}. \quad (2.2.7)$$

Отсюда

$$\delta T(t) = \delta T_0 \exp(-t/\tau_s) \quad (2.2.8)$$

и

$$\tau_s = \rho_0 c_v / V_\Theta. \quad (2.2.9)$$

Устойчивость достигается при  $\tau_s > 0$ , или  $V_\Theta > 0$ , что отвечает положительному наклону кривой  $F(T)$  в точке  $T = \Theta$  на рис. 2.5.

Более интересен случай наличия трех стационарных значений температуры (5). Как видно из рис. 2.5, знак  $F(T)$  таков, что при начальной температуре  $T < \Theta_2$  устанавливается «низкотемпературный режим  $T = \Theta_1$ , а при  $T > \Theta_2$  - «высокотемпературный» режим  $T = \Theta_3$ , см. рис. 2.6b. Соответственно, если система приведена в состояние, близкое к неустойчивому ( $T \approx \Theta_2$ ), то время установления устойчивого состояния ( $T = \Theta_1$  или  $\Theta_3$ ) аномально возрастает (логарифмически по отклонению  $|T - \Theta_2|$ ). О таком поведении иногда говорят как о некритическом затягивании [5-7]. Стационарное решение  $T = \Theta_2$  оказывается неустойчивым (и потому промежуточная ветвь на рис. 2.4 указана пунктиром). Это означает, что при малейших отклонениях начальной температуры от значения  $\Theta_2$  ( $\delta T_0 = T - \Theta_2$ ) система приходит со временем к режиму  $\Theta_1$  (при  $\delta T_0 < 0$ ) или  $\Theta_3$  (при  $\delta T_0 > 0$ ). Физический смысл неустойчивого решения  $T = \Theta_2$  состоит, таким образом, в том, что значение  $\Theta_2$  служит «водоразделом» - границей областей притяжения двух устойчивых режимов  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$ . Время их установления также можно

оценить по формуле (9), подставляя в нее вместо  $\Theta$  соответственно  $\Theta_1$  или  $\Theta_3$ . Отметим также, что при приближении интенсивности к значениям  $I_{\min}$  или  $I_{\max}$  величина  $V_{\Theta}$  для стационарного состояния, отвечающего краю соответствующей ветви зависимости  $\Theta(I_{\text{in}})$  (рис. 2.4), приближается к нулю. Поэтому время установления такого режима неограниченно возрастает (эффект «критического замедления», см., например, [8]).

Приведенное рассмотрение показывает наличие «температурной бистабильности» - существование при фиксированной интенсивности падающего излучения двух устойчивых состояний системы с различным значением температуры. Отсюда в соответствии с соотношением (1.2) следует и «оптическая бистабильность» - наличие при тех же условиях двух различных значений интенсивности прошедшего излучения (рис. 2.4b).

Каким образом совершается гистерезисный переход между различными устойчивыми состояниями? Пусть интенсивность падающего излучения медленно возрастает, начиная от малых значений. Тогда, пока  $I_{\text{in}}(t) < I_{\max}$ , режим будет описываться нижней (низкотемпературной) ветвью  $\Theta_1$  (рис. 2.4, ветвь *ABC*). Когда  $I_{\text{in}}$  превысит  $I_{\max}$ , произойдет переход на остающийся при столь больших интенсивностях единственный режим  $\Theta_3$ , отвечающий верхней (высокотемпературной) ветви *CDE*. При убывании интенсивности падающего излучения временные изменения следуют другому пути (*DFBA*). Таким образом получается гистерезисная петля *BCDFB*.

Переключение между ветвями гистерезисной кривой происходит и при медленном изменении других параметров, например температуры внешней среды  $T_{\text{amb}}$ . Медленность здесь понимается в масштабе времени установления стационарных режимов  $\tau_s$  (9). Однако в окрестности краев ветвей изменение параметров с любой фиксированной скоростью перестает быть медленным ввиду эффекта критического замедления ( $\tau_s \rightarrow 0$ ). Анализ этого вопроса содержится в [2].

В любых схемах неизбежно присутствие шумов, вызванных термодинамическими и квантовыми флуктуациями и флуктуациями интенсивности падающего излучения. Крупные (и, соответственно, маловероятные) флуктуации будут вызывать переходы между стационарными (в отсутствие шумов) режимами с температурами  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$ . Вероятность переходов под действием слабого шума мала из-за устойчивости стационарных режимов относительно слабых возмущений. Поэтому время пребывания системы в состоянии  $T \approx \Theta_1$  или  $T \approx \Theta_3$  хотя и конечно, но весьма велико (вне малой окрестности краев интервала бистабильности (5)). Соответственно рассматриваемую схему следовало

бы называть уже не бистабильной, а «биметастабильной». Анализ вероятностей переходов приведен в [2].

### 2.3. Стационарные распределения в одномерной схеме

Рассмотрим стационарные режимы в одномерной (стержневой, рис. 2.2) схеме. Уравнение (1.15) для данной задачи сводится к виду

$$\Lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = F(T). \quad (2.3.1)$$

По-прежнему считаем падающее излучение плоской волной. Тогда  $F$  не зависит явно от  $x$ :  $F = F(T)$ , и уравнение (1) интегрируется в квадратурах для произвольного вида нелинейности (см. ниже (7)). Для наглядного представления удобна «механическая аналогия», в рамках которой мы интерпретируем (1) как уравнение Ньютона движения материальной точки с массой  $m$  под действием силы  $F$ :

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = F(X). \quad (2.3.2)$$

Соответствие величин в уравнениях (1) и (2) показывает следующая схема:

Уравнение теплопроводности (1)	Механическое уравнение Ньютона (2)
Коэффициент теплопроводности $\Lambda$	Масса $m$
Температура $T$	Координата $X$
Координата $x$	Время $t$
Баланс тепла $F(T)$	Сила $F(X)$

По «силе»  $F$  строится «потенциальная энергия»

$$U = - \int^T F(T) dT. \quad (2.3.3)$$

С учетом вида  $F(T)$  (см. (1.11))

$$U = A(T)I_{in} - B(T), \quad (2.3.4)$$

где

$$A(T) = \int^T P(T) dT, \quad B(T) = \frac{H}{2} (T - T_{amb})^2 + \text{const} \quad (2.3.5)$$

Определение стационарного температурного распределения  $T(x)$  сводится, таким образом, к решению классической задачи механики об одномерном движении материальной точки в потенциальном поле [9]. Удобно привлечь интеграл движения, соответствующий закону сохранения механической энергии

$$\frac{\Lambda}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + U(T) = W = \text{const}. \quad (2.3.6)$$

Первое слагаемое левой части отвечает кинетической энергии. Из (6) находим общее решение уравнения (1):

$$x = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{2}} \int \frac{dT}{\sqrt{W - U(T)}}. \quad (2.3.7)$$

Температурное распределение  $T(x)$  получается обращением зависимости (7).

Согласно (1.11) и (4), «сила»  $F$  и «потенциал»  $U$  – линейные функции интенсивности падающего излучения  $I_{in}$ . Характерная для условий бистабильности (§ 2.2) серия зависимостей «силы»  $F(T)$  для различных значений интенсивности  $I_{in}$  изображена на рис. 2.5, а на рис. 2.7 представлена соответствующая серия потенциальных кривых  $U(T)$ .

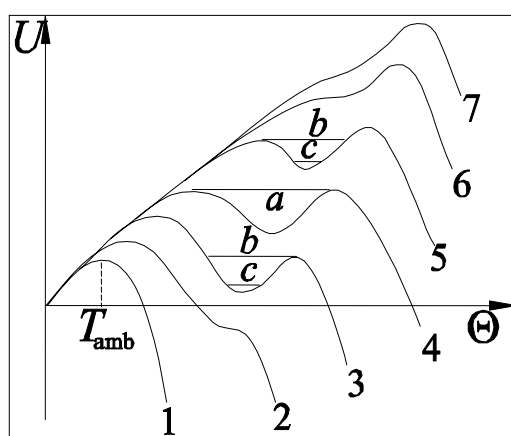


Рис. 2.7. «Потенциальные кривые»  $U(\Theta)$  для различных значений интенсивности падающего излучения: 1 -  $I_{in} = 0$ , 2 -  $I_{in} = I_{min}$ , 3 -  $I_{min} < I_{in} < I_0$ , 4 -  $I_{in} = I_0$ , 5 -  $I_0 < I_{in} < I_{max}$ , 6 -  $I_{in} = I_{max}$ , 7 -  $I_{in} > I_{max}$

Экстремумы потенциальных кривых отвечают поперечно-однородным (температура не зависит от координаты  $x$ ) режимам  $T = \Theta$ , изученным в предыдущем разделе и определяемым уравнением (2.2). Вне диапазона бистабильности, при  $I_{in} < I_{min}$  и  $I_{in} > I_{max}$ , потенциальные кривые «одногогорбые» (с одним максимумом), а внутри диапазона бистабильности (условие (2.5)) – «двугорбые» (два максимума). Решение  $T = \Theta_2$ , отвечающее минимуму потенциальной кривой (промежуточная ветвь зависимости  $\Theta(I_{in})$ , рис. 2.4), как мы видели в § 2.2, неустойчиво уже относительно поперечно-однородных возмущений. Устойчивость режимов  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$  (максимумы потенциальной кривой) по отношению к малым возмущениям с произвольной пространственной структурой будет показана в § 2.4.

Левый горб потенциальной кривой выше правого, если интенсивность падающего излучения находится в диапазоне

$$I_{\min} < I_{\text{in}} < I_0, \quad (2.3.8)$$

и ниже, если

$$I_0 < I_{\text{in}} < I_{\max} \quad (2.3.9)$$

Интенсивность  $I_0$ , отвечающая равенству высот двух горбов ( $U(\Theta_1) = U(\Theta_3)$ ), определяется соотношением

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_3} F(T) dT = 0. \quad (2.3.10)$$

Геометрически это правило можно интерпретировать также как условие равенства двух заштрихованных площадей 1 и 2 на рис. 2.3. Еще одна интерпретация этого важного для нас соотношения будет дана в § 2.5.

Механическая аналогия и рис. 2.7 показывают наличие, помимо поперечно-однородных состояний  $T = \Theta_1$ ,  $\Theta_2$  и  $\Theta_3$ , и неоднородных стационарных температурных распределений  $T(x)$ . В соответствии с (6) они отвечают на рис. 2.7 участкам горизонтальных прямых  $W = \text{const}$  в классически разрешенных областях  $W > U(T)$ . Мы ограничимся в этом разделе анализом асимптотически устанавливающихся (в поперечном направлении) решений, удовлетворяющих естественным граничным условиям:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (2.3.11)$$

На языке механической аналогии условия (11) означают, что траектории – горизонтальные отрезки на рис. 2.7, изображающие температурные распределения  $T(x)$ , должны начинаться ( $x = -\infty$ ) и заканчиваться ( $x = +\infty$ ) в максимумах потенциальных кривых. Такие траектории могут быть двух типов:

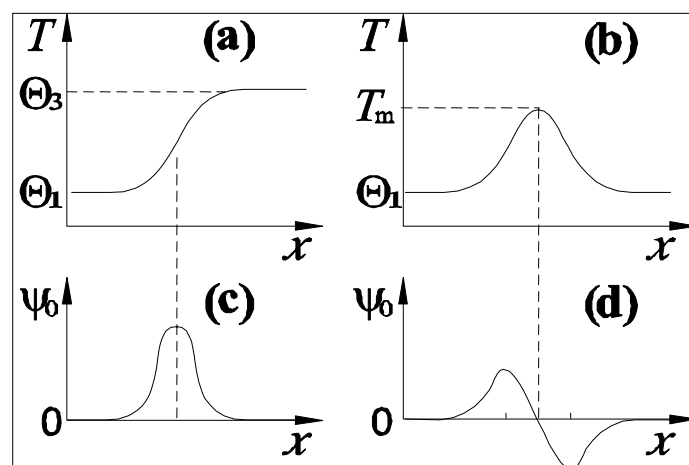


Рис. 2.8. Стационарные температурные распределения для «траекторий»  $a$  и  $b$  рис. 2.7 ( $a, b$ ) и соответствующие собственные функции возмущений ( $c, d$ )



а) Траектория  $a$  на рис. 2.7 существует только при условии (10), то есть при  $I_{\text{in}} = I_0$ . Как показано на рис. 2.8а, она отвечает плавному переходу при изменении координаты  $x$  между двумя устойчивыми стационарными состояниями  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$  - нижней и верхней ветвями гистерезисной зависимости  $\Theta(I)$  для поперечно-однородной задачи (рис. 2.4). Такие режимы обладают асимптотикой

$$T_{x \rightarrow -\infty} = \Theta_1, \quad T_{x \rightarrow +\infty} = \Theta_3 \quad (2.3.12)$$

или же

$$T_{x \rightarrow -\infty} = \Theta_3, \quad T_{x \rightarrow +\infty} = \Theta_1 \quad (2.3.13)$$

По причинам, излагаемым в § 2.5, эти режимы будем называть неподвижными волнами переключения.

Наличие указанного стационарного температурного распределения переходного вида означает спонтанное нарушение пространственной симметрии, допустимое ввиду характера температурной зависимости коэффициента поглощения  $\alpha(T)$ . Более холодная часть стержня ( $T \approx \Theta_1$ ) не нагревается из-за малого поглощения и тепловыделения в ней, а в более горячей части поддерживается высокая температура ( $T \approx \Theta_3$ ) из-за повышения коэффициента поглощения и, соответственно, тепловыделения. Пространственное сосуществование двух асимптотически однородных температурных режимов ( $T = \Theta_1$  и  $T = \Theta_3$ ) напоминает сосуществование двух термодинамических фаз (например, пара и жидкости), а само условие такого сосуществования (10) – известное в теории фазовых переходов первого рода «правила Максвелла» [10]. По этой причине определяемое (10) значение интенсивности  $I_0$  можно назвать максвелловским. Более подробно аналогия с фазовыми переходами прослежена в [2].

б) Траектория  $b$  на рис. 2.7 существует при любом значении интенсивности внутри диапазона бистабильности (2.5), кроме максвелловского значения  $I_{\text{in}} = I_0$ . Она отвечает симметричному (относительно координаты экстремального значения температуры  $T_m$ ) распределению  $T(x)$  (рис. 2.8б). Соответственно асимптотические значения температуры при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$  для них совпадают:

$$T_{x \rightarrow \pm\infty} = \begin{cases} \Theta_3, & I_{\text{in}} < I_0, \\ \Theta_1, & I_{\text{in}} > I_0. \end{cases} \quad (2.3.14)$$

При приближении интенсивности к максвелловскому значению  $I_0$  температурное распределение напоминает выброс стабильного состояния на фоне метастабильного; при этом ширина такого стационарного выброса неограниченно возрастает. Зависимость экстремального (минимального при (8) и максимального при (9)) значения  $T_m$  от интенсивности излучения  $I_{\text{in}}$  показана на рис. 2.9. В связи с тем, что при  $I_{\text{in}} \neq I_0$  значение  $T_m$  не достигает стационарного температурного значения  $\Theta$  для другой (по сравнению с асимптотическим уровнем при  $x \rightarrow \pm\infty$ ) ветви, о таких

распределениях можно говорить как о «режимах неполного переключения» или же, по соображениям, приводимым далее в § 2.7, называть их «критическими зародышами». Заметим, что на фазовой плоскости уравнения (1) стационарные поперечно-однородные режимы  $dT/dx = 0$ ,  $T = \Theta_1$  и  $\Theta_3$  отвечают седлам, волны переключения – гетероклиническим траекториям, выходящим при  $x \rightarrow -\infty$  из одного узла и входящим в другое при  $x \rightarrow +\infty$ , а критические зародыши – гомоклиническим траекториям, выходящим и входящим в то же самое седло. Однако здесь нам удобнее использовать не фазовую плоскость, а «потенциальные портреты» типа рис. 2.7.

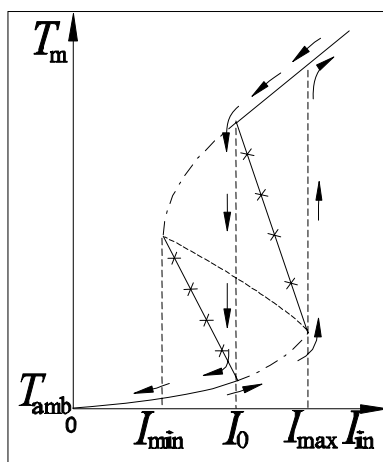


Рис. 2.9. Характеристики стационарных состояний для распределенной системы. На нижней и верхней ветвях передаточной функции штрихпунктиром помечены метастабильные состояния, а линии с крестами – экстремальные значения для критических зародышей

Поскольку рассматриваемая задача инвариантна по отношению к сдвигу по оси  $x$ , оба типа решений также инвариантны к этой операции. Это проявляется и в форме соотношения (7), согласно которому  $x$  определяется с точностью до постоянной. Другими словами, если известно некоторое решение (1)

$$T = T(x), \tag{2.3.15}$$

то решением (1) является и

$$T = T(x + \delta x), \tag{2.3.16}$$

где  $\delta x = \text{const}$ . Отметим, что для неподвижной волны переключения вместе с распределением  $T(x)$  с граничным условием (12) имеется и распределение  $T(-x)$  с граничным условием (13). Это обстоятельство отвечает равноправию направлений  $x$  и  $-x$ .

Для нахождения явного вида стационарных распределений  $T(x)$  необходимо задать конкретную зависимость  $F(T)$ . В ряде случаев интеграл

в (7) выражается через элементарные функции [11]. Заметим, что для ступенчатой зависимости коэффициента поглощения (кусочно-линейная аппроксимация)

$$\alpha(T) = \begin{cases} \alpha_1, & T < T_s \\ \alpha_2, & T > T_s \end{cases} \quad (2.3.17)$$

аналитическое решение уравнения (1) позволяет найти условия бистабильности, а также явный вид обоих типов неоднородных распределений.

*Задание 2.1.* Для зависимости (17) получить условия бистабильности.

*Задание 2.2.* Для зависимости (17) получить профиль неподвижной волны переключения и вид «условия Максвелла».

#### 2.4. Устойчивость стационарных распределений

Инвариантность к сдвигу координаты  $x$  как стационарного (3.1), так и нестационарного (1.15) уравнений теплопроводности существенно используется при определении устойчивости стационарных решений относительно малых возмущений [12].

Устойчивость стационарного решения  $T_{st} = T_{st}(x)$  будет иметь место, если близкое к нему в начальный момент времени  $t = 0$  температурное распределение

$$T(x, 0) = T_{st}(x) + \delta T(x, 0) \quad (2.4.1)$$

при больших временах представляется в виде

$$T(x, t) = T_{st}(x + \delta x) + \delta T(x, t), \quad (2.4.2)$$

где  $\delta x = \text{const}$ , а  $\delta T(x, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . При этом считается, что начальное возмущение достаточно быстро убывает при  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $\delta T(\pm\infty, 0) = 0$ ). То, что согласно (2) результатом действия начального возмущения может быть сдвиг стационарного решения по координате на постоянную величину  $\delta x$ , не означает неустойчивости исходного решения.

Малость возмущения позволяет линеаризовать уравнение (1.15) и перейти к следующему уравнению для отклонения  $\delta T(x, t)$ :

$$\rho_0 c_v \frac{\partial}{\partial t} \delta T = \Lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta T - V(x) \delta T, \quad (2.4.3)$$

где

$$V(x) = \left( \frac{dF}{dT} \right)_{T=T_{st}(x)} = - \left( \frac{d^2 U}{dT^2} \right)_{T=T_{st}(x)} \quad (2.4.4)$$

(после вычисления производных в (4) вместо  $T$  подставляется исследуемое на устойчивость стационарное распределение  $T_{st}(x)$ ). Разделяя переменные в (3), приходим к экспоненциальному временному изменению возмущения

$$\delta T(x, t) = \psi(x) \exp(-\gamma t) \quad (2.4.5)$$

и уравнению типа стационарного квантовомеханического уравнения Шредингера

$$\Lambda \frac{d^2 \psi}{dx^2} + [\rho_0 c_v \gamma - V(x)] \psi = 0 \quad (2.4.6)$$

с граничными условиями

$$\psi_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (2.4.7)$$

Это уравнение принадлежит к типу детально изученных краевых задач Штурма – Лиувилля [13, 14] с (вещественными) собственными значениями  $\gamma$  и собственными функциями  $\psi$ . Если помечать отдельные решения этой задачи индексом  $n$ , то общим решением (6) служит суперпозиция

$$\delta T(x, t) = \sum_n C_n \psi_n(x) \exp(-\gamma_n t). \quad (2.4.8)$$

Стационарное решение  $T_{st}(x)$  будет неустойчивым, если среди собственных значений  $\gamma_n$  найдется хотя бы одно отрицательное, и устойчивым, если отрицательных собственных значений нет. Постоянные  $C_n$  определяются видом начального возмущения  $\delta T(x, 0)$  и не влияют на характер устойчивости стационарного решения.

Для поперечно-однородных стационарных режимов  $T_{st} = \Theta_1$  или  $\Theta_3$  (горбы потенциальной кривой) из (4) следует  $V = V_{1(3)} > 0$ . Поэтому для всех  $n$  будет  $\gamma_n > V_{1(3)} / (\rho_0 c_v) > 0$  (в противном случае с возрастанием  $|x|$  собственная функция возрастала бы неограниченно). Отсюда и вытекает устойчивость состояний  $T_{st} = \Theta_1$  и  $\Theta_3$  относительно малых возмущений с произвольным поперечным профилем. Неустойчивость состояний  $T_{st} = \Theta_2$  (промежуточная ветвь), естественно, сохраняется.

Не столь тривиален анализ устойчивости найденных в § 2.3 поперечно-неоднородных распределений. В связи с инвариантностью уравнения (1.15) к пространственному ( $x \rightarrow x + \delta x$ ) и временному ( $t \rightarrow t + \delta t$ ) сдвигам комбинация

$$\psi_0(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{T_{st}(x + \delta x) - T_{st}(x)}{\delta x} = \frac{d}{dx} T_{st}(x) \quad (2.4.9)$$

будет служить решением (6) с собственным значением  $\gamma = 0$ . Этот вывод приложим как к неподвижной волне переключения, так и к критическому зародышу. Разница между этими двумя решениями – в характере координатной зависимости собственной функции – т.н. «нейтральной моды  $\psi_0(x)$ . Для неподвижной волны переключения  $T_{st}(x)$  – монотонная функция, поэтому  $\psi_0(x) = dT_{st}/dx$  – колоколообразная функция, не имеющая узлов (нулей) при конечных  $x$  (см. рис. 2.8с). В этом случае  $\gamma = 0$  служит низшим собственным значением уравнения (6). Остальные

собственные значения в разложении (8) могут быть только положительными, из чего следует устойчивость неподвижной волны переключения. Для критического же зародыша зависимость  $T_{st}(x)$  колоколообразная, поэтому  $\psi_0(x)$  имеет узел (нуль) при координате  $x = x_m$ , отвечающей экстремальной температуре  $T(x_m) = T_m$  (см. рис. 2.8d). Отсюда следует, что должно быть и более низкое отрицательное собственное значение, отвечающее собственной функции без узлов. Поэтому критический зародыш неустойчив. Заметим, что в разложении (8) имеется только одно отрицательное собственное значение  $\gamma < 0$ , тогда как число положительных собственных значений дискретного спектра зависит от конкретного вида потенциала  $U(T)$  (или  $F(T)$ ).

Аналогичные соображения показывают и неустойчивость стационарных распределений с периодическим изменением температуры  $T_{st}(x)$  в неограниченном стержне (траектории  $c$  на рис. 2.7). Действительно, в соответствующей задаче Штурма – Лиувилля с периодическими граничными условиями решение  $\psi_0(x) = dT_{st}/dx$ , отвечающее  $\gamma_0 = 0$ , имеет узел внутри каждого периода зависимости  $T_{st}(x)$ . Поэтому, как и в случае критического зародыша, должна иметься и безузловая собственная функция  $\psi(x)$  с отрицательным собственным значением ( $\gamma < \gamma_0 = 0$ ), откуда следует неустойчивость рассматриваемого распределения. Траектории типа  $d$  на рис. 2.7 нефизичны, так как для них температура неограниченно возрастает с ростом координаты. Поэтому полученные в § 2.3 решения, удовлетворяющие граничным условиям (3.11), фактически исчерпывают все возможные стационарные режимы однородно нагреваемого неограниченного стержня.

## 2.5. Волны переключения

### 2.5.1. Волны переключения и механическая аналогия

Как мы установили в § 2.3, даже при не зависящей от поперечных координат интенсивности падающего излучения (плоская волна) установившееся температурное распределение может быть поперечно-неоднородным, если выполняется соотношение  $I_{in} = I_0$  («правило Максвелла», см. условие (3.10)). Естественен вопрос: что будет происходить с таким профилем температуры, если интенсивность падающего излучения отличается от  $I_0$ ? Ответ на этот вопрос приводит к важному классу структур – волнам переключения.

Так как интересующие нас распределения не могут быть стационарными (все стационарные распределения с естественными граничными условиями (3.11) уже были найдены в § 2.3), то для их анализа необходимо обратиться к нестационарному уравнению теплопроводности (1.15) с граничными условиями

$$T_{x \rightarrow -\infty} = \Theta_n, \quad T_{x \rightarrow +\infty} = \Theta_m, \quad n \neq m. \quad (2.5.1)$$

В условиях бистабильности (2.5) функция теплового баланса  $F(T)$  трижды обращается в нуль (см. рис. 2.5). Как уже указывалось, нули отвечают двум устойчивым ( $T = \Theta_1$  и  $\Theta_3$ ) и одному неустойчивому ( $T = \Theta_2$ ) поперечно-однородным режимам.

Уравнения такого типа с подобным поведением функции  $F(T)$  детально изучены применительно к задачам диффузионного распространения пороговых химических реакций и пламени, а также в целом ряде родственных задач [11]. Теория описываемых такими уравнениями стационарных и нестационарных режимов изложена в [11], где приведена и обширная библиография; математически строгие доказательства содержатся в [15]. Ниже мы поясним относящиеся к волнам переключения результаты, используя наглядную механическую аналогию.

Наличие волн переключения связано с инвариантностью уравнения (3.11) по отношению к сдвигу времени  $t$  и координаты  $x$ , а также с числом нулей функции  $F(T)$  в интересующем нас диапазоне. Они характеризуются установившимся температурным профилем, движущимся вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $v$ , так что температура зависит от единственной координаты  $\xi$ :

$$T(x, t) = T(\xi), \quad \xi = x - vt. \quad (2.5.2)$$

Асимптотика (1) для них сохраняется. Для таких профилей из (3.11) следует

$$\Lambda \frac{d^2 T}{d\xi^2} + \rho_0 c_v v \frac{dT}{d\xi} - F(T) = 0. \quad (2.5.3)$$

При  $v = 0$  уравнение (3) совпадает с (3.1). Поэтому найденное в § 2.3 стационарное решение переходного типа является волной переключения с нулевой скоростью, что возможно только при  $I_{in} = I_0$ .

Член уравнения (3), пропорциональный скорости  $v$  и отвечающий в рамках механической аналогии «трению», приводит к несохранению введенной соотношением (3.6) «энергии»  $W$ :

$$\frac{dW}{d\xi} = -\rho_0 c_v v \left( \frac{dT}{d\xi} \right)^2. \quad (2.5.4)$$

Наряду с волной со скоростью  $v$  и граничными условиями (1) ввиду инвариантности уравнения (1.15) относительно замены  $x \rightarrow -x$  при фиксированном значении интенсивности  $I_{in}$  имеется и волна переключения со скоростью  $-v$  и инвертированными граничными условиями  $n \leftrightarrow m$ . Примем для определенности, что  $v > 0$ . Тогда из (4) следует, что при увеличении  $\xi$  величина  $W$  должна убывать; убывание прекращается для значений  $W = U(\Theta_n)$ , отвечающих одному из

поперечно-однородных режимов  $T = \Theta_n = \text{const}$ . На плоскости  $(W, T)$  траектория  $T(\xi)$  представляется кривыми с убывающей (точнее, не возрастающей) «энергией»  $W$ , которые по-прежнему расположены в классически разрешенных областях  $W > U(T)$  (рис. 2.10). Между точками поворота, в которых  $U(T) = W$ , траектория определяется уравнением

$$\frac{dW}{dT} = \mp \rho_0 c_v v \sqrt{(2/\Lambda)[W - U(T)]}. \quad (2.5.5)$$

Верхний знак выбирается для участков траектории, на которых температура увеличивается при возрастании координаты  $\xi$ , а нижний знак – в противном случае.

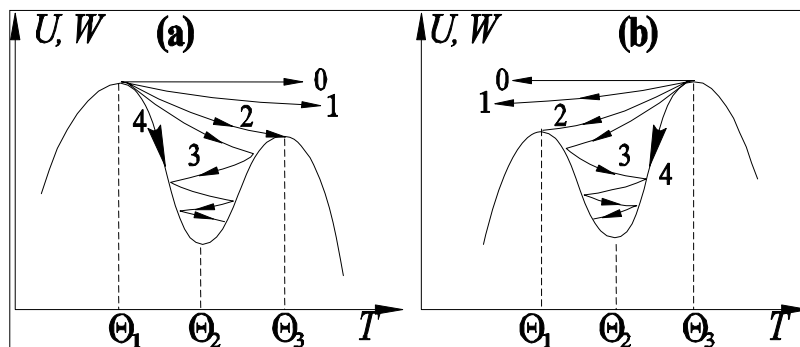


Рис. 2.10. Потенциальные кривые и траектории – решения уравнения (3) с граничным условием  $T_{\xi \rightarrow -\infty} = \Theta_1$  (a) и  $\Theta_3$  (b). Значение  $v$  возрастает от траектории 0 ( $v = 0$ ) к траектории 4 ( $v = \infty$ ), устойчивая волна переключения отвечает траектории 2

### 2.5.2. Устойчивые и неустойчивые волны переключения

**Устойчивые волны переключения.** Рассмотрим сначала волны переключения между устойчивыми поперечно-однородными состояниями  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$  при условии (3.8), когда левый горб потенциальной кривой выше правого. На рис. 2.10a изображено семейство траекторий, исходящих (при  $\xi = -\infty$ ) из вершины потенциальной кривой  $T = \Theta_1$ . Вблизи вершины

$$U(T) = U(\Theta_1) - |U''| (T - \Theta_1)^2 / 2, \quad (2.5.6)$$

где  $U'' = (d^2U/dT^2)_{T=\Theta_1} < 0$ . При этом траектория имеет форму параболы:

$$W(T) = U(\Theta_1) - \rho_0 c_v v \sqrt{|U''|/\Lambda} (T - \Theta_1)^2 / 2. \quad (2.5.7)$$

Из (5) (с верхним знаком в правой части) видно, что траектория при  $v = 0$  – горизонтальная прямая, при малых  $v$

$$W(T) = U(\Theta_1) - \rho_0 c_v v \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \int_{\Theta_1}^T \sqrt{U(\Theta_1) - U(T)} dT, \quad (2.5.8)$$

а при больших скоростях ( $v \rightarrow \infty$ ) траектория приближается к склону потенциального рельефа  $W(T) = U(T)$ ,  $\Theta_1 < T < \Theta_2$ . Поскольку при фиксированной температуре «энергия»  $W$  монотонно убывает с ростом скорости  $v$ , то имеется единственная траектория, попадающая при  $\xi \rightarrow +\infty$  в вершину  $T = \Theta_3$ . Другими словами, волны переключения между устойчивыми состояниями  $T = \Theta_1$  и  $T = \Theta_3$  с положительной скоростью существуют в диапазоне интенсивностей падающего излучения (3.8), причем каждому значению интенсивности отвечает единственное значение скорости волны переключения  $v$ .

Аналогичным образом, в диапазоне интенсивностей (3.9), когда правый горб потенциальной кривой выше левого (рис. 2.10b), волны переключения с положительной скоростью существуют, ввиду убывания  $W$  с ростом  $\xi$ , только при инвертированных граничных условиях  $T(\xi = -\infty) = \Theta_3$ ,  $T(\xi = +\infty) = \Theta_1$ . Если же вид граничных условий сохраняется, то скорость волны становится отрицательной. Таким образом, рассмотренные волны переключения существуют во всем интервале бистабильности (2.5) и их скорость однозначно связана с интенсивностью падающего излучения. При этом температура на фронте волны переключения изменяется монотонно от одного асимптотического значения ( $\Theta_1$ ) до другого ( $\Theta_3$ ) при изменении координаты  $\xi$  в бесконечных пределах. Характерная зависимость скорости  $v$  от интенсивности падающего излучения представлена на рис. 2.11 (пунктир отвечает инвертированным граничным условиям).

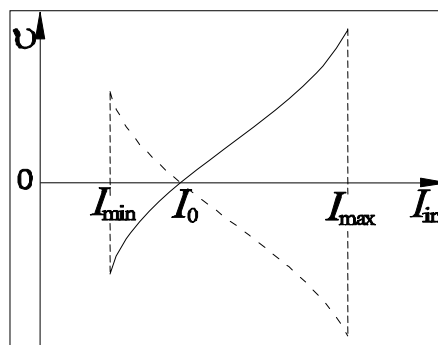


Рис. 2.11. Зависимость скорости волны переключения от интенсивности падающего излучения

Доказательство устойчивости найденных волн переключения с установившимся температурным профилем  $T_{sw}(\xi)$  сводится к уже проведенному в § 2.4. Действительно, положим (ср. с (4.8))

$$T(x, t) = T_{sw}(\xi) + \sum_n C_n \psi_n(\xi) \exp(-\gamma_n t). \quad (2.5.9)$$



Подставив (9) в линеаризованное по малым возмущениям уравнение (3.11), получим уравнение для собственных функций  $\psi_n$  в виде

$$\Lambda \frac{d^2 \psi_n}{d\xi^2} + [\rho_0 c_v \gamma - V(\xi)] \psi_n + \rho_0 c_v v \frac{d\psi_n}{d\xi} = 0 \quad (2.5.10)$$

где, в соответствии с (4.4),

$$V(\xi) = \left( \frac{dF}{dT} \right)_{T=T_{sw}(\xi)} = - \left( \frac{d^2 U}{dT^2} \right)_{T=T_{sw}(\xi)} \quad (2.5.11)$$

Дополнительный по сравнению с (4.6) последний член левой части (10) устраняется заменой  $\psi_n(\xi) = \chi(\xi) \exp[-\rho_0 c_v v \xi / (2\Lambda)]$ :

$$\Lambda \frac{d^2 \chi}{d\xi^2} + [\rho_0 c_v \gamma - V(\xi) - \frac{(\rho_0 c_v v)^2}{4\Lambda}] \chi = 0. \quad (2.5.12)$$

Теперь безузловой функцией с нулевым собственным значением  $\gamma = 0$  служит  $\chi(\xi) = (dT_{sw}/d\xi) \exp[\rho_0 c_v v \xi / (2\Lambda)]$ . Поэтому остальные собственные функции возмущений обладают положительными собственными значениями, так что волна переключения устойчива.

*Задание 2.3.* Для зависимости (3.17) получить профили и зависимость скорости (устойчивых) волн переключения от интенсивности падающего излучения.

**Неустойчивые волны переключения.** Рассмотренные выше структуры более точно следует называть устойчивыми волнами переключения. Механическая аналогия показывает существование наряду с ними волн переключения между устойчивыми и неустойчивыми поперечно однородными состояниями, для которых асимптотически (при  $\xi \rightarrow -\infty$  или  $\xi \rightarrow +\infty$ ) достигается неустойчивое состояние  $T = \Theta_2$  (первоначально волны подобного рода были найдены Колмогоровым, Петровским и Пискуновым [16] применительно к биологической задаче). Эти структуры будем называть неустойчивыми волнами переключения, поскольку они включают полубесконечный интервал неустойчивого состояния. Несмотря на неустойчивость, такие волны представляют интерес для описания кинетики температурных выбросов (§ 2.6).

Вернемся к изображенному на рис. 2.10а случаю (интенсивность падающего излучения в диапазоне (3.8)). Как мы видели, траектория, исходящая из вершины левого горба потенциальной кривой (граничное значение  $T_{\xi \rightarrow -\infty} = \Theta_1$ ), попадает в вершину правого горба при единственном значении скорости устойчивой волны переключения  $v = v_{st}$ . При большем значении скорости траектория пойдет ниже. Она достигнет склона потенциальной кривой при  $T < \Theta_3$  и после ряда поочередных

отражений от правого и левого склонов приблизится при  $\xi \rightarrow +\infty$  к минимуму потенциала  $T = \Theta_2$ . Таким образом, имеются неустойчивые волны переключения между состояниями  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  со сплошным спектром скоростей  $v_{st} < v < +\infty$ . Каждому значению скорости отвечает определенный температурный профиль, который может включать осцилляции. Если же граничное условие траектория исходит из вершины более низкого горба  $T = \Theta_3$  (граничное значение  $T_{\xi \rightarrow -\infty} = \Theta_3$ ), то, как видно из рис. 2.10а, она попадет в минимум потенциала  $T = \Theta_2$  при любой (положительной) скорости. Поэтому диапазон скоростей неустойчивых волн переключения между состояниями  $\Theta_3$  и  $\Theta_2$  иной:  $0 < v < +\infty$ .

Аналогичным образом из рис. 2.10b нетрудно увидеть, что для интенсивностей падающего излучения в диапазоне (3.9) имеющиеся неустойчивые волны переключения между состояниями  $\Theta_3$  ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) и  $\Theta_2$  ( $\xi \rightarrow +\infty$ ) характеризуются сплошным спектром скоростей  $v_{st} < v < +\infty$ , тогда как для переключения между состояниями  $\Theta_1$  ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) и  $\Theta_2$  ( $\xi \rightarrow +\infty$ ) спектр скоростей  $0 < v < +\infty$ . Отметим, что, в отличие от устойчивых волн переключения, для неустойчивых волн скорость не обращается в нуль ни при каком значении интенсивности внешнего излучения. Знак скорости таков, что граница области устойчивых состояний всегда надвигается на область неустойчивых состояний (протяженность области, занятой состоянием  $T \approx \Theta_2$  со временем сокращается). Температурный профиль неустойчивой волны переключения может включать осцилляции.

**Мультистабильность.** Проведенное рассмотрение справедливо и в случае большего числа нулей функции  $F(T)$ , когда потенциал имеет несколько максимумов и минимумов (мультистабильность). Механическая аналогия показывает наличие устойчивых и неустойчивых волн переключения между возросшим числом поперечно-однородных состояний  $\Theta_n$ . Пример представлен на рис. 2.12, где показаны три типа устойчивых волн переключения (между парами устойчивых состояний  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$ ,  $\Theta_1$  и  $\Theta_5$ ,  $\Theta_3$  и  $\Theta_5$ ). Столь же не трудно определить и диапазоны изменения скорости неустойчивых волн переключения.

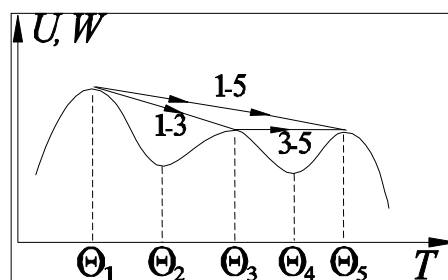


Рис. 2.12. Потенциальные кривые в случае тристабильности и устойчивые волны переключения между различными устойчивыми поперечно-однородными состояниями  $T = \Theta_n$

**Численные расчеты.** Для ряда модельных зависимостей  $F(T)$  скорость (устойчивой) волны переключения определяется аналитически (см., например, [11]). Не представляет труда найти скорость для кусочно-линейной аппроксимации (3.17). Для произвольной «силы»  $F(T)$  она может быть найдена по теории возмущений в окрестности «максвелловского» значения интенсивности  $I_0$ . Однако наиболее универсальным способом нахождения характеристик устойчивых волн переключения служит численное решение непосредственно нестационарного уравнения теплопроводности (1.15). В качестве начального условия можно использовать ступенчатую функцию

$$T(x, 0) = \begin{cases} \Theta_1, & x < 0, \\ \Theta_3, & x > 0. \end{cases} \quad (2.5.13)$$

Ввиду устойчивости волн переключения их установившиеся характеристики (скорость и форма профиля) не зависят от небольших изменений начального условия.

Граничные условия (3.11) в расчете ставятся на конечном удалении:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=\pm A} = 0. \quad (2.5.14)$$

Величина  $A$  должна быть достаточно большой, чтобы за время установления волны переключения ее фронт не приблизился к краю интервала  $(-A, A)$  (на расстояние, сравнимое с шириной фронта  $w_{\text{ф}}$ ). Для сокращения этого интервала можно использовать передвигающуюся систему координат, в которой центр расчетного интервала автоматически совпадал бы с координатой, для которой максимален температурный градиент.

Расчеты устойчивых волн переключения при лазерном нагреве образца Ge [17] подтверждают знакопеременность зависимости скорости волны  $v$  от интенсивности падающего излучения  $I_{\text{ин}}$ .

Остановимся на основном случае бистабильности и устойчивых волн переключения. Знак скорости волны переключения таков, что в интервале интенсивностей (3.9) расширяется «горячая» область стержня, т.е. происходит последовательное переключение участков стержня из «низкотемпературного» ( $\Theta_1$ ) в «высокотемпературное» ( $\Theta_3$ ) состояние (волна нагрева). При условии (3.8), напротив, в системе распространяется волна охлаждения.

Если в начальный момент времени распределение температуры содержит две ступеньки, например

$$T(x, 0) = \begin{cases} \Theta_1, & |x| < a, \\ \Theta_3, & |x| > a, \end{cases} \quad (2.5.15)$$

то при достаточной ширине исходно переключенного участка  $2a$  будут формироваться и распространяться уже две волны переключения. Волны независимы и пренебрежимо слабо взаимодействуют между собой, если расстояние между их фронтами превышает ширину фронтов. При  $I_{in} < I_0$  скорость волн переключения такова, что начальный выброс (15) со временем будет расширяться. Поэтому весь стержень постепенно перейдет в состояние, отвечающее низкотемпературной ветви ( $\Theta_1$ ). Если же  $I_{in} > I_0$ , то центральный выброс будет сужаться и исчезнет после столкновения встречных волн переключения (рис. 2.13). В этом случае весь стержень в конце концов окажется в состоянии с более высокой температурой  $\Theta_3$ . Рисунок 2.13 получен численным решением нестационарного уравнения теплопроводности (1.15), так как представления о независимых волнах переключения нарушаются при сближении их фронтов. Аналогична кинетика начальных выбросов типа (15) при замене  $\Theta_1 \leftrightarrow \Theta_3$ .

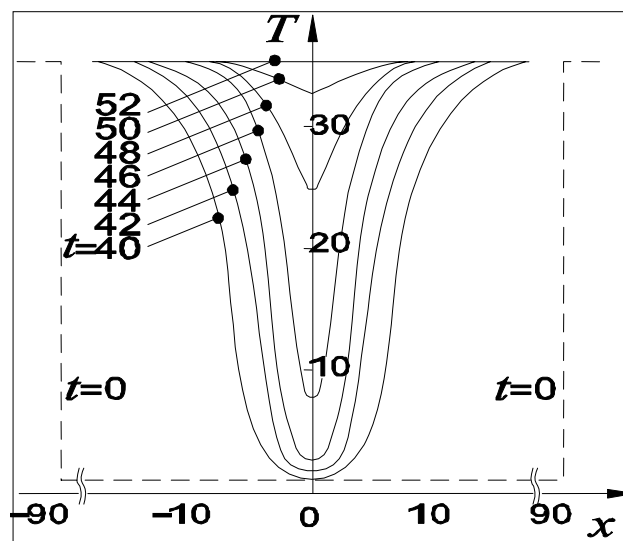


Рис. 2.13. Температурные профили при столкновении двух волн переключения в различные моменты безразмерного времени  $\tilde{t}$  [17]

**Волны переключения и солитоны.** Температурные градиенты на фронте устойчивых волн переключения вызывают заметные градиенты и волны давления или механических напряжений. Особого усиления механических напряжений следует ожидать в условиях, когда скорость волны переключения приближается к скорости звука в среде.

Устойчивые температурные волны переключения по принятой терминологии не принадлежат к числу солитонов, так как для них асимптотические значения по разные стороны от фронта различаются. Однако это различие снимается, например, для профиля механических

напряжений, пропорциональных градиенту температуры и потому обращающихся в нуль вдали от фронта волны переключения. Тем самым, мы получаем в данной схеме как неподвижные (при  $I_{in} = I_0$ ), так и движущиеся с фиксированной скоростью (определяемой значением  $I_{in} \neq I_0$ ) диссипативные оптико-механические солитоны.

## 2.6. Пространственное переключение

Приведенные свойства устойчивых волн переключения позволяют сделать вывод о стабильности или метастабильности стационарных, устойчивых по отношению к малым возмущениям поперечно-однородных состояний. Так как из-за наличия флуктуаций всегда есть конечная вероятность возникновения крупных температурных выбросов, то судьба исходного (поперечно-однородного) состояния определяется поведением этих выбросов. Ввиду малой вероятности спонтанного возникновения крупных выбросов можно считать их разнесенными по времени. При этом для состояний, изображенных на рис. 2.9 штрих-пунктиром (правый участок нижней ветви при (3.9) и левый участок верхней ветви при (3.8)), выбросы вида (5.15) и с инверсией  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$  будут расширяться. Со временем произойдет переключение в состояние, соответствующее другой (стабильной) ветви. Поэтому исходные поперечно-однородные состояния (штрих-пунктир на рис. 2.9) следует считать метастабильными в отличие от стабильных состояний, помеченных на рис. 2.9 сплошными линиями [18].

Разделение состояний на стабильные и метастабильные присуще именно пространственно-распределенным (широкоапертурным) бистабильным системам (которые, строго говоря, уже не следовало бы называть бистабильными из-за метастабильности одного из двух состояний). Вообще говоря, возможен флуктуационный переброс и их стабильного состояния в метастабильное. Однако для этого требуется не малый по амплитуде исходный выброс температуры практически на всей апертуре системы, что следует признать событием невероятным.

Выбросы, переводящие систему из метастабильного состояния в стабильное, естественно называть закритическими, заимствуя этот термин из теории фазовых переходов первого рода [10]. Ввиду устойчивости метастабильных состояний относительно малых возмущений последние будут со временем рассасываться, т.е. они являются докритическими. Конечно, начальные выбросы могут создаваться не только флуктуационным образом, но и искусственно. Для этого нужно подогреть некоторую область стержня дополнительным источником, а затем резко отключить его. Естественно задаться вопросом о кинетике различных начальных температурных выбросов и их разделении на докритические и закритические. Полный ответ на вопрос о кинетике крупных выбросов

реален лишь для сосредоточенных (точечных) систем (см. § 2.2 и рис. 2.6). Для пространственно-распределенных систем нестационарное уравнение теплопроводности (представленное в безразмерной форме)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - F(T) \quad (2.6.1)$$

описывает гораздо более разнообразную кинетику выбросов, которую мы рассмотрим далее, следуя [19].

Положим для определенности  $I_0 < I_{in} < I_{max}$ , при этом метастабильны режимы с температурой  $\Theta_1$  (нижняя ветвь). Если максимальная температура в начальном выбросе не превосходит значения  $\Theta_2$  (промежуточная неустойчивая ветвь)

$$T^{(m)}(0) = \max T(x, 0) < \Theta_2, \quad (2.6.2)$$

то выброс будет докритическим (рассасывающимся) даже при его весьма большой ширине (включая бесконечно большую). При нарушении (2) в достаточно широкой пространственной области в ее центральной части происходит установление стабильного режима, отвечающего верхней ветви, а на границах области формируются волны переключения. Ширина области «стабильной фазы»  $2R$  линейно растет со временем

$$T^{(m)} \rightarrow \Theta_3, \quad \dot{R} \rightarrow v(I_{in}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.6.3)$$

где  $v$  – скорость устойчивой волны переключения (см. § 2.5). Такие выбросы будут, очевидно, закритическими.

Закритическим может быть и узкий начальный выброс, если в нем достаточно велико максимальное значение температуры  $T^{(m)}(0)$ . На первой стадии развития узких выбросов в правой части (1) превалирует первый член. Поэтому, пренебрегая вкладом  $F(T)$ , приходим к линейному уравнению теплопроводности с автомодельным решением (см., например, [20])

$$T(x, t) - T_\infty \sim t^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad T_\infty = \text{const}, \quad t > 0. \quad (2.6.4)$$

Соотношение (4) описывает расплывание выброса и снижение максимального значения температуры. Согласно (4) «высота»  $T^{(m)}$  и ширина  $2R$  выброса связаны соотношением

$$(T^{(m)} - T_\infty)R = \text{const}. \quad (2.6.5)$$

При заметных ширинах выброса оба члена правой части (1) сопоставимы, и первоначально узкий выброс может быть как докритическим, так и закритическим.

Чтобы перейти к общему случаю, нужно огрубить постановку вопроса и, отвлекаясь от описания детальной пространственной формы температурного выброса, характеризовать его двумя величинами – экстремальным значением температуры  $T^{(m)}(t)$  и полушириной выброса

$R(t)$  по какому-либо уровню. Если ограничиваться выбросами с колоколообразным пространственным профилем, то конкретная его форма не влияет на качественный характер кинетики пространственного переключения. Последняя определяется наличием описанных выше поперечно-неоднородных распределений – режима критического зародыша и волн переключения.

Схема, объединяющая указанные элементы, представлена на рис. 2.14. Стрелками показано направление возрастания времени. Неподвижная точка с параметрами  $(T_m, R_{cr})$  представляет критический зародыш – стационарный режим с характером неустойчивости типа седла (см. § 2.3). Сепаратрисами, входящими в такое седло, служат траектория 1, отвечающая автомодельному решению (4), и траектория 2, переходящая при  $t \rightarrow -\infty$  в неустойчивую волну переключения. Эти две траектории разделяют области параметров закритических (заштрихована) и докритических выбросов. Из «седла» выходят также две траектории – сепаратрисы 3 и 4. При больших временах режимы, описываемые сепаратрисой 3, как и траекториями для всех других закритических выбросов, переходят в устойчивую волну переключения. Сепаратриса 4 «заканчивается» в области метастабильного режима  $T = \Theta_1$ .

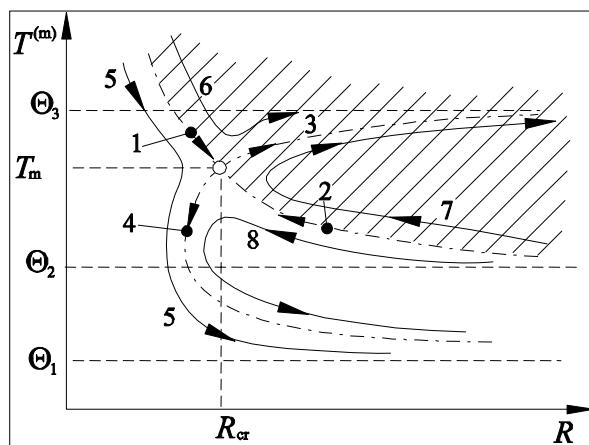


Рис. 2.14. Развитие крупных выбросов на фоне метастабильного состояния (заштрихована область закритических параметров;  $I_0 < I_{in} < I_{max}$ )

Интересной особенностью кинетики температурных выбросов, начальные параметры которых близки к входящим в седло сепаратрисам (кривые 1 и 2), служит немонотонное временное изменение параметров выбросов. Это иллюстрируется на рис. 2.14 траекториями 5–8. Например, для траектории 7 сначала будет наблюдаться сужение выброса (неустойчивая волна переключения), затем вблизи параметров критического зародыша максимальная температура резко повысится до уровня, близкого к  $\Theta_3$ , и далее будет происходить расширение в виде

устойчивой волны переключения. Ширина выброса изменяется немонотонно и для траекторий 5 и 8, а максимальная температура – для траекторий 6 и 8.

Отметим, что сходную с изображенной на рис. 2.14 схему разделения выбросов на докритические и закритические мы получили бы и при другом подходе, если считали бы  $T^{(m)}$  и  $R$  параметрами начальных температурных выбросов фиксированной (например, гауссовой) формы:

$$T(x, 0) = \Theta_1 + (T^{(m)} - \Theta_1) \exp(-x^2 / R^2). \quad (2.6.6)$$

Близкая к сепаратрисам 1 и 2 кривая возникала бы как разделяющая области параметров  $(T^{(m)}, R)$  выбросов, переводящих со временем систему в стабильное состояние  $\Theta_3$  или же рассасывающихся.

Еще один аспект рис. 2.14 связан с условиями формирования устойчивых волн переключения. Строго говоря, волна переключения занимает всю длину стержня  $(-\infty < x < +\infty)$ , поэтому описание выброса в виде двух волн переключения имеет приближенный (асимптотический) характер. Как видно из рис. 2.14, пользоваться представлениями о волнах переключения можно лишь в том случае, когда ширина соответствующего температурного выброса превышает ширину критического зародыша  $R_{cr}$ .

Рассмотрим более подробно формирование двух волн переключения из первоначального широкого симметричного температурного выброса. Считаем  $I_{in} > I_0$ , так что должны установиться две разбегающиеся волны переключения, взаимодействие которых между собой слабо из-за разнесенности фронтов волн. Следуя [21], определим координату фронта волны  $R(t)$  соотношением  $T(R(t), t) = \Theta_2$ . Домножив уравнение (1) на  $\partial T / \partial x$  и проинтегрировав (с учетом симметрии задачи) по  $x$  от 0 до  $\infty$ , получим

$$\dot{R} = v - F'_{T=\Theta_3} [\Theta_3 - T_{x=0}]^2 \left[ 2 \int_0^\infty \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{-1}. \quad (2.6.7)$$

Величина

$$v = - \int_{\Theta_1}^{\Theta_3} F(T) dT \left[ \int_0^\infty \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{-1} \quad (2.6.8)$$

представляет собой скорость одиночной волны переключения. Второй член в правой части (7) вызван учетом конечной ширины центральной области «высокотемпературной» фазы в выбросе, в которой  $T \approx \Theta_3$ . Он приводит к такой зависимости скорости движения фронта  $\dot{R}$  от ширины  $R$ , что  $\dot{R}$  растет вместе с  $R$ , асимптотически приближаясь к  $v$  при  $R \rightarrow \infty$  (так как при этом  $\Theta_3 - T_{x=0} \rightarrow 0$ ). При больших  $R$ , пользуясь малостью поправочного члена в (7), можно получить явный вид зависимости  $\dot{R}$  от



времени или ширины выброса. Проще и надежней, однако, найти эту зависимость численно. Результат такого расчета приведен на рис. 2.15.

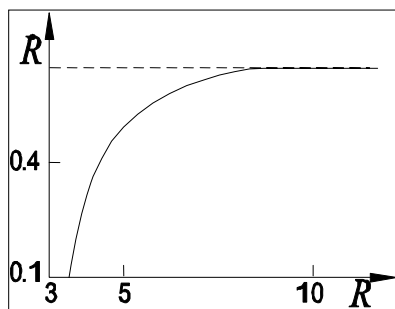


Рис. 2.15. Зависимость скорости движения фронта переключения от ширины выброса

Отметим, что экстраполяция формулы (7) в область  $\dot{R} = 0$  была бы неоправданной. Второй член в правой части (7) играет роль поправки и во всяком случае не может изменить знак  $\dot{R}$  при изменении  $R$ . Отсутствие неподвижных волн переключения при  $I_{in} \neq I_0$  следует и из «механической аналогии» (см. рис. 2.7). Неоправданно и отождествление режима «критического зародыша» с остановившимися волнами переключения, например, из-за качественного различия устойчивости этих двух режимов. Однако подобные режимы могут стать устойчивыми в системах с дифракционной поперечной связью (см. следующую часть Пособия).

Аналогичная картина кинетики выбросов получается и при  $I_{min} < I_{in} < I_0$ , когда метастабильны «высокотемпературные» режимы ( $T = \Theta_3$ ). Соответствующая схема приведена на рис. 2.16, и нам представляется, что она уже не требует комментариев. В реальных схемах выброс можно создавать пространственно локализованным импульсом дополнительного излучения, длительность которого много меньше характерных времен температурной кинетики. Тогда профиль импульса несуществен, а важен лишь интегральный за его длительность нагрев стержня. Заметим, что немонотонность кинетики параметров температурных выбросов подтверждена экспериментально [22]. Аналогичные результаты для кинетики искусственных выбросов в термодинамических системах с фазовым переходом первого рода до сих пор были получены только теоретически [23, 24].

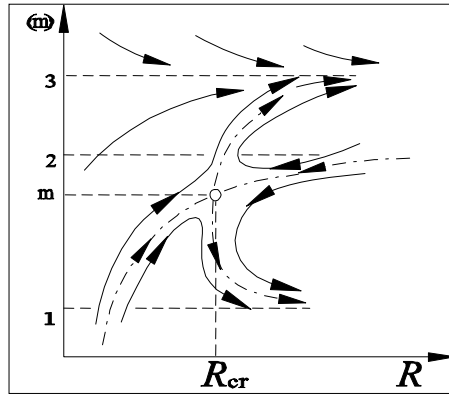


Рис. 2.16. Кинетика крупных выбросов при  $I_{\min} < I_{\text{in}} < I_0$

## 2.7. Эффекты неоднородностей. Пространственный гистерезис

### 2.7.1. Асимптотический анализ

В предыдущих разделах мы рассматривали «идеальную» систему с трансляционной инвариантностью. В этом разделе мы изучим важные эффекты неоднородности схемы, сосредоточившись на случае поперечной неоднородности интенсивности падающего на схему излучения.

Рассмотрим падение на стержень пучка излучения с характерным масштабом  $w_b$  поперечного изменения интенсивности, например гауссова пучка  $I_{\text{in}}(x) = I_m \exp(-x^2 / w_b^2)$ .

Стационарные профили температуры стержня  $T(x)$  по-прежнему определяются уравнением (3.1). Однако теперь «сила»  $F$  явно зависит от координаты:

$$F = F(T, x) = -P(T)I_{\text{in}}(x) + H(T - T_{\text{amb}}), \quad (2.7.1)$$

где вид  $P(T)$  дается выражением (1.11). Поэтому «энергия»  $W$  (соотношение (3.6)) уже не сохраняется. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\frac{dW}{dx} = P(t) \frac{dI_{\text{in}}}{dx}. \quad (2.7.2)$$

Результаты предыдущих разделов справедливы при  $dI_{\text{in}}/dx = 0$ , тогда из (2) следует  $W = \text{const}$ . Для пучка излучения «энергия»  $W$  растет (убывает) на участках возрастания (убывания) интенсивности  $I_{\text{in}}(x)$  со скоростью, пропорциональной градиенту интенсивности падающего излучения.

Сделаем теперь важное предположение. Будем считать пучок излучения широким, т.е. ширину колоколообразного профиля интенсивности  $w_b$  существенно превосходящей ширину фронта волны переключения  $w_{\text{fr}}$ :

$$w_b \gg w_{\text{fr}}. \quad (2.7.3)$$

При условии (3) можно получить решение стационарного уравнения теплопроводности (3.1) асимптотическим методом (сингулярных

возмущений) [25]. Для этого, следуя [1], перейдем к безразмерной координате  $x' = x / w_{\text{fr}}$ . Теперь уравнение (3.1) примет вид

$$\mu \frac{d^2 T}{dx'^2} = F(T, x'), \quad (2.7.4)$$

где появился малый параметр  $\mu = \Lambda / w_{\text{fr}}^2$  – малая «масса частицы» в духе механической аналогии.

Асимптотическое ( $w_b \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$ ) решение (4) строится из внешних разложений, сшиваемых внутренним разложением – пограничным слоем. Внешнее разложение отвечает решению (4) в виде ряда по целым степеням  $\mu$ :

$$T^{\text{ext}}(x') = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s T_s^{\text{ext}}(x'). \quad (2.7.5)$$

После подстановки (5) в (4) и приравнивания членов с одинаковыми степенями  $\mu$  получим алгебраические (не дифференциальные) соотношения для определения  $T_s^{\text{ext}}$ . В низшем приближении ( $\mu = 0$ ) таким образом находим

$$F(T_0^{\text{ext}}, x') = 0, \quad (2.7.6)$$

что совпадает с соотношением (2.2) для поперечно-однородных режимов. Соответствующий профиль  $T_0^{\text{ext}}(x')$  определяется обращением эквивалентной (2.3) зависимости

$$I_{\text{in}}(x') = H \frac{T_0^{\text{ext}}(x') - T_{\text{amb}}}{P(T_0^{\text{ext}}(x'))} \quad (2.7.7)$$

где координата  $x'$  играет роль параметра. Фактически для этого достаточно использовать построенную для поперечно-однородных режимов передаточную функцию – зависимость  $T(I_{\text{in}})$  (см. рис. 2.4). Это отвечает разбиению пучка излучения на невзаимодействующие лучевые трубки и геометрическому построению в приводимых ниже рис. 2.17 – 2.20.

В случае моностабильности внешнее разложение достаточно для построения профиля температуры  $T(x')$  при любых плавных профилях интенсивности падающего излучения  $I_{\text{in}}(x')$ . Внешним разложением можно обойтись и в случае бистабильности, если максимальная интенсивность  $I_m = \max_{x'} I(x')$  меньше пороговой для нижней ветви (хотя далее мы увидим, что и при этом условии возможны решения с не описываемым внешним разложением пространственным переключением между ветвями). При  $I_m > I_{\text{max}}$  внешнее разложение недостаточно, так как возможны только распределения с резким поперечным изменением температуры типа пограничного слоя. Но и для таких температурных профилей указанное внешнее разложение (приближение

невзаимодействующих лучевых трубок) справедливо «почти всюду». При этом на периферии пучка внешнее разложение строится по нижней ветви гистерезисной кривой рис. 2.4, а в центральной части – по верхней. Напомним, что в рамках механической аналогии этим режимам сопоставляются горбы потенциальной кривой (см. рис. 2.7). Нам же здесь необходимо найти решение с пространственным переключением между двумя горбами.

Для последовательного построения интересующих нас температурных распределений следует привлечь понятие о внутреннем (пограничном) слое, расположенном в окрестности заранее не известной координаты  $x'_0$ . Для описания резкого в этой области изменения температуры вводим новую («быструю») координату  $\tilde{x} = (x' - x'_0) / \mu^{1/2}$ . Разлагаем профиль интенсивности  $I_{in}(\tilde{x})$  в ряд Тейлора в окрестности  $x'_0$ :

$$I_{in}(\tilde{x}) = I_0 + \mu^{1/2} I_1 \tilde{x} + \frac{1}{2!} \mu I_2 \tilde{x}^2 + \dots, \quad (2.7.8)$$

где

$$I_0 = I_{in}(x'_0), \quad I_n = \left( \frac{d^n I_{in}}{dx'^n} \right)_{x'=x'_0}. \quad (2.7.9)$$

Уравнение (4) с учетом вида  $F$  (1.11) представляем в форме

$$\frac{d^2 T}{d\tilde{x}^2} = - \left[ I_0 + \mu^{1/2} I_1 \tilde{x} + \frac{1}{2!} \mu I_2 \tilde{x}^2 + \dots \right] P(T) + H(T - T_{amb}). \quad (2.7.10)$$

Решение (10) строится в виде ряда по степеням  $\mu^{1/2}$  (тогда как во внешнем разложении (5) фигурируют целые степени  $\mu$ ):

$$T^{int}(\tilde{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{s/2} T_s^{int}(\tilde{x}). \quad (2.7.11)$$

То, что в (11) фигурируют именно полуцелые степени малого параметра, связано с тем, что уравнение (4) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Подставив (11) в (10) и приравняв члены с одинаковыми степенями малого параметра  $\mu$ , получим уравнения для определения  $T_s^{int}(\tilde{x})$ . В низшем приближении по  $\mu^{1/2}$  основной член  $T_0^{int}(\tilde{x})$  находится из уравнения

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} T_0^{int} = -I_0 P(T_0^{int}) + H(T_0^{int} - T_{amb}) = F(T_0^{int}). \quad (2.7.12)$$

Мы пришли, с учетом (1), к исходному уравнению (4) при замене  $\mu \rightarrow 1$ . Теперь, однако,  $I_{in} = I_0 = \text{const}$ , и «сила»  $F$  не зависит явно от координаты  $x$ . Тем самым мы свели задачу к уже рассмотренной в § 2.3, хотя значение интенсивности  $I_0$  на фронте пограничного слоя пока еще не известно. Поэтому пограничный слой на языке механической аналогии (см. рис. 2.7) представляется участком горизонтальной прямой  $W = \text{const}$ . Наша

задача сводится, с учетом (2), к конструированию траектории, отвечающей движению по левым горбам ( $I_{in}(x) < I_0$ , периферийная часть пучка), «горизонтального» перехода от левого горба к правому при  $I_{in} \approx I_0$  и дальнейшего движения по правым горбам ( $I_{in}(x) > I_0$ , центральная часть пучка). Из изложенного ясно, что переход между горбами потенциальной кривой возможен лишь при их одинаковой высоте. Это позволяет отождествить величину  $I_0$  настоящего раздела с «максвелловским» значением интенсивности  $I_0$  (см. (3.10)). Действительно, именно при «максвелловском» условии имеются решения, отвечающие переходу между ветвями при изменении координаты  $x$  – неподвижные волны переключения.

В результате положение пограничного слоя (координата  $x_0$ ) определяется из условия

$$I_{in}(x_0) = I_0, \quad (2.7.13)$$

где значение  $I_0$  находится из соотношения (3.10). При удалении от фронта пограничного слоя – неподвижной волны переключения – при  $x \rightarrow \pm\infty$  мы приходим соответственно в вершину левого ( $T = \Theta_1$ ) или правого ( $T = \Theta_3$ ) горбов. С ростом  $\tilde{x}$  отклонения  $T_0^{int}(\tilde{x})$  от этих асимптотических значений ( $\Theta_1$  или  $\Theta_3$ ) экспоненциально затухают, что и позволяет сшить внутреннее разложение с внешним.

### 2.7.2. Пространственная бистабильность

В пренебрежении шириной пограничного слоя  $w_{fr} \sim \sqrt{\Lambda/H}$  по сравнению с шириной пучка излучения  $w_b$  мы приходим к изображенной на рис. 2.17 схеме определения стационарного профиля температуры. В квадранте I рисунка приведена совпадающая с рис. 2.4 S-образная зависимость температуры  $T = \Theta$  от интенсивности излучения  $I_{in}$  для поперечно-однородных распределений. Колоколообразный профиль интенсивности  $I_{in}(x)$  показан в квадранте IV. По этим двум зависимостям и известному значению  $I_0$  изображенным на рисунке построением находим профили температуры  $T(x)$  (квадрант II).

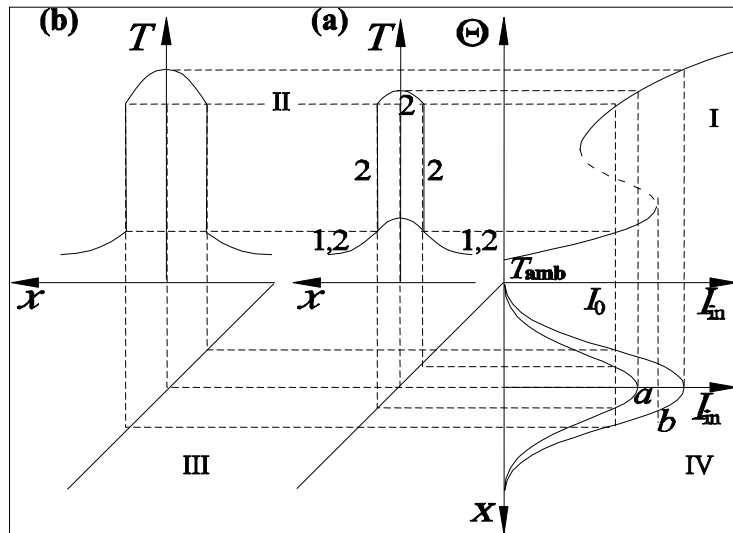


Рис. 2.17. Схема построения температурных профилей (пространственная бистабильность, квадрант II): I – передаточная функция, IV – профиль интенсивности падающего излучения; (a) – пространственная бистабильность (два профиля температуры 1 и 2 в квадранте II при  $I_0 < I_m < I_{max}$ , (b) – пространственная моностабильность при  $I_m > I_{max}$

Если максимальная по сечению пучка интенсивность  $I_m = I_{in}(0)$  меньше величины  $I_0$ , т.е.  $I_m < I_0$ , то имеется единственный профиль температуры  $T(x)$ , полностью определяемый нижней ветвью гистерезисной кривой. Заметим, что при этом не реализуется левый участок верхней ветви гистерезисной кривой (условие (3.8), штрих-пунктир на рис. 2.9). Этот участок проявляется для пучков излучения с провалом интенсивности до уровня, превышающего  $I_{min}$  (рис. 2.18). Единственным при колоколообразном профиле интенсивности будет решение и при  $I_m > I_{max}$ . Однако в этом случае температурный профиль уже не гладкий, а комбинированный. Он состоит из периферийной части, определяемой нижней ветвью ( $I_{in}(x) < I_0$ ), и центрального участка, отвечающего верхней ветви ( $I_{in}(x) > I_0$ ), с резким переключением между ветвями в окрестности максвелловского значения интенсивности  $I_{in}(x) \approx I_0$  (рис. 2.17). Бистабильность профиля температуры имеется только в диапазоне интенсивностей

$$I_0 < I_m < I_{max}. \quad (2.7.14)$$

При этом условии для фиксированных параметров пучка с колоколообразным профилем интенсивности существуют два возможных профиля температуры: гладкий профиль 1 и комбинированный профиль 2 с переключением между ветвями (квадрант II рис. 2.17). Очевидно, что бистабильность температурного профиля сопровождается

бистабильностью профиля интенсивности прошедшего через образец излучения. Соответствующая схема приведена на рис. 2.19.

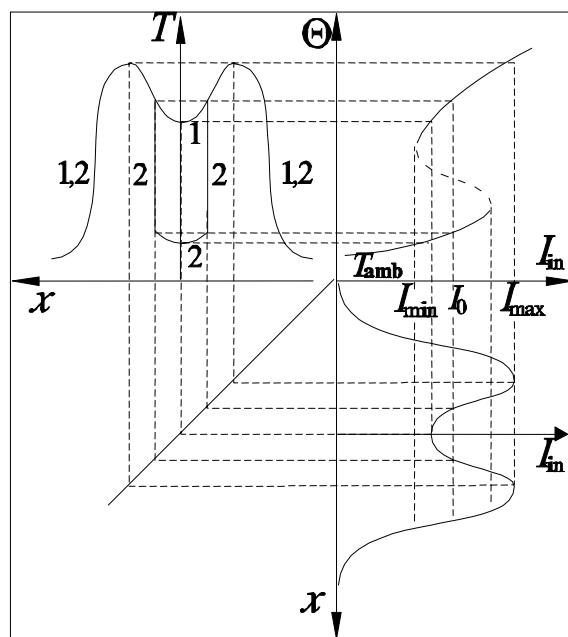


Рис. 2.18. Пространственная бистабильность в случае падающего пучка с провалом интенсивности в центре

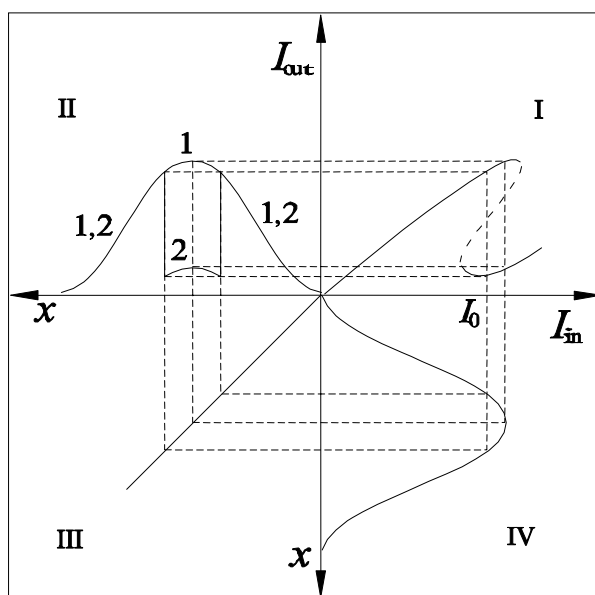


Рис. 2.19. Построение профилей интенсивности прошедшего излучения (квadrant II)

Представленная теория – асимптотическая, она справедлива для достаточно широких пучков излучения (условие (3)). Поскольку ниже ее приближение уже позволило найти решение задачи о гистерезисе профиля

температуры (и интенсивности излучения), нет необходимости в определении последующих приближений. Для сравнительно узких пучков, когда условие (3) нарушается, проще и надежнее численное решение задачи.

Естественно обобщение результатов на случай многогорбого профиля интенсивности падающего излучения, например, ее плавной периодической модуляции по координате  $x$  (рис. 2.20) [26]. Если максимальное значение интенсивности удерживается в диапазоне пространственной бистабильности (14), то модуляция наводит в системе почти независимые ячейки памяти, в которых переключение на верхнюю ветвь либо отсутствует (кодируется 0), либо присутствует (кодируется 1). Заметим, что при этом возможно формирование структур, локализованных только в одной или нескольких ячейках. Такие структуры, которые оказываются устойчивыми, можно отнести к числу температурных диссипативных солитонов, хотя в отсутствие пространственной модуляции, как мы видели в § 2.4, устойчивых локализованных распределений температуры в схеме не имеется.

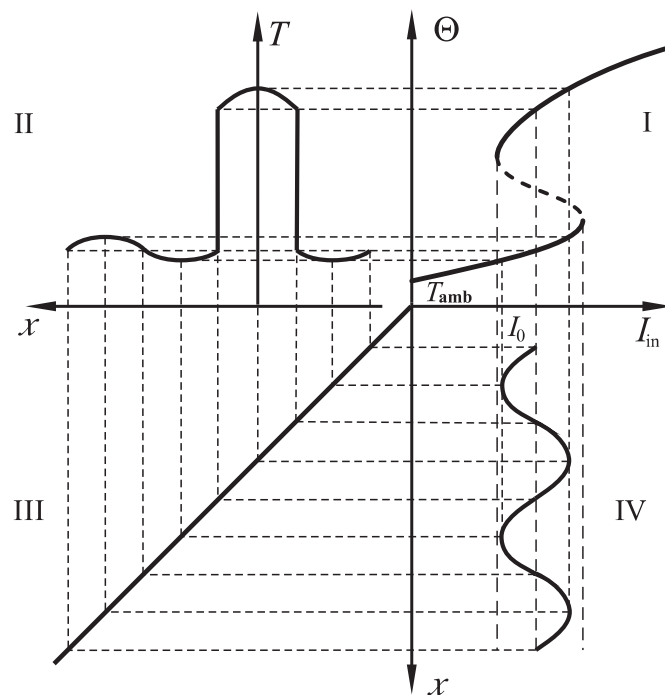


Рис. 2.20. Пространственная бистабильность и температурный диссипативный солитон в схеме с пространственной модуляцией интенсивности падающего излучения

Отметим, что указанные температурные профили составлены из элементов поперечно-однородной задачи, устойчивых относительно малых возмущений. Это служит аргументом в пользу устойчивости профилей для достаточно широких пучков излучения. Об этом же



свидетельствует и анализ кинетики пространственного гистерезиса, излагаемый в следующем разделе.

### 2.7.3. Пространственный гистерезис

Рассмотрим, как изменяется профиль температуры в стержне при медленном временном изменении максимальной интенсивности падающего излучения:  $I_m = I_m(t)$ . Координатную зависимость интенсивности будем считать для определенности фиксированной (колоколообразной):  $I_{in}(x, t) = I_m(t)f(x)$ ,  $\max f(x) = 1$ , а ширину пучка достаточно большой (условие (3)). Тогда мы можем говорить о волнах переключения с медленно меняющейся скоростью передвижения фронта, определяемой локальной интенсивностью излучения в пучке в месте расположения фронта  $I_{fr}$ :  $v = v(I_{fr})$ .

При медленном временном возрастании интенсивности  $I_m$  от малых значений до интенсивности  $I_{max}$  (край нижней ветви) профиль температуры  $T(x, t)$  в каждый момент времени будет плавным (типа 1 на рис. 2.21a), отвечающим нижней ветви гистерезисной кривой. В момент времени, когда  $I_m$  превысит значение  $I_{max}$ , в центре пучка возникнет узкий и резкий выброс температуры (профиль 2 на рис. 2.21a), который затем, даже при стабилизации  $I_m$ , будет постепенно расширяться в форме двух разбегающихся устойчивых волн переключения. Скорость передвижения этих температурных волн для широких пучков близка к определенной выше для внешнего излучения в виде плоской волны (см. рис. 2.11) скорости  $v = v(I_{fr})$ , где под  $I_{fr}$  следует понимать локальную интенсивность падающего излучения в области фронта волны. Поэтому для рассматриваемых колоколообразных пучков передвижение фронта будет замедляться (ввиду убывания локального значения интенсивности излучения  $I_{fr}$ ). И, наконец, фронт остановится там, где локальная интенсивность  $I_{fr} = I_0$  (напомним, что  $I_0$  определяется правилом Максвелла (3.10) и  $v(I_0) = 0$ ). Гистерезисный переход происходит, таким образом, не одновременно по всему сечению пучка, а только в его узкой зоне – движущемся с переменной скоростью фронте волны переключения (рис. 2.21a). Соответственно продолжительность гистерезисного перехода определяется временем поперечного распространения волны переключения.

Если затем максимальное значение интенсивности  $I_m$  начнет уменьшаться, то кинетика изменения температурного профиля будет следующей. Сначала температурный профиль по-прежнему будет комбинированного типа, с резким пространственным переключением в области  $I_{fr} = I_0$  (профиль 1 рис. 2.21b). Но при уменьшении  $I_m$

центральная (переключенная в верхнее состояние) область стержня будет постепенно сужаться, и при  $I_m \approx I_0$  этот центральный выброс полностью схлопнется (профиль 3 рис. 2.21b). Поэтому в диапазоне интенсивностей (7.14), в соответствии с результатами § 2.7, будут иметь место бистабильность и гистерезис профилей температуры и интенсивности прошедшего образец излучения, а также профилей давления или механического напряжения.

Хотя ввиду изложенных в § 2.6 результатов один из двух профилей (гладкий при  $I_m > I_0$ ) является метастабильным, вероятность его флуктуационного переброса в стабильное состояние (комбинированный профиль с переключенной в верхнее состояние центральной областью) для широких пучков излучения ничтожно мала вне малой окрестности края ветви  $I_m \approx I_{\max}$ ). Поэтому метастабильность здесь практически неотличима от стабильности.

Описанная кинетика гистерезисного перехода осуществляется с помощью волн переключения с нижней ветви на верхнюю ( $I_{in} > I_0$ ), но не наоборот. Это связано с принятым колоколообразным профилем интенсивности падающего излучения. Волны переключения в верхней ветви на нижнюю ( $I_{in} < I_0$ ) можно наблюдать для пучков с провалом интенсивности в центре. Заметим также, что положение неподвижной волны переключения в окрестности максвелловского значения  $I_0$  при плавном изменении интенсивности излучения в пучке может быть как устойчивым (если знаки градиентов интенсивности на фронте волны переключения и в рассматриваемой области пучка совпадают), так и неустойчивым (в противном случае).

Если профиль интенсивности падающего излучения содержит несколько разнесенных плавных пространственных осцилляций относительно уровня  $I_0$ , то на каждой такой осцилляции (независимо от других) может быть реализован свой пространственный гистерезис. При этом мы получаем многоканальную память на основе единственного (но широкоапертурного) бистабильного элемента [26], что представляет практический интерес.

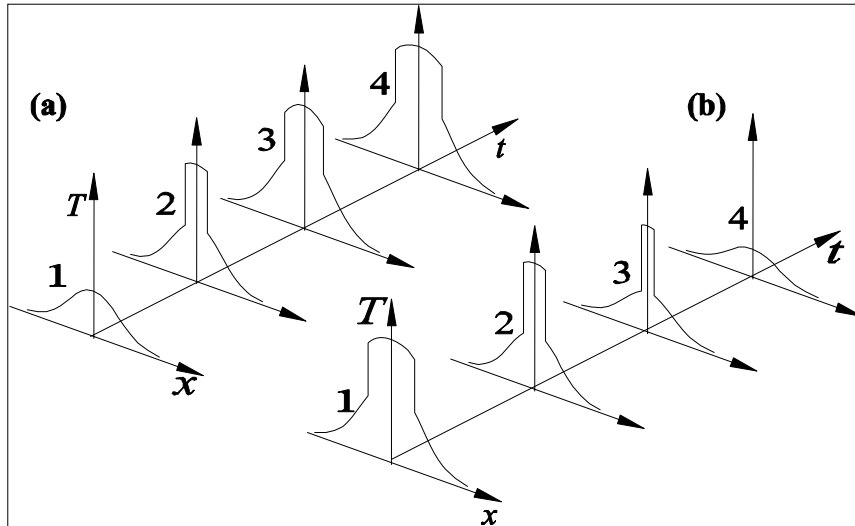


Рис. 2.21. Кинетика гистерезисных изменений поперечного профиля температуры при возрастании (а) и убывании (б) мощности пучка излучения

#### 2.7.4. Резкие неоднородности

«Механическая аналогия» (см. § 2.3) оказывается полезной и при нарушении условия (3), т.е. при резких изменениях теплофизических характеристик среды или для кусочно-однородных систем [27, 28]. Примерами могут служить задачи о нагреве полуограниченного стержня, на краю которого поддерживается заданное значение температуры, ограниченного стержня, ограниченного пучка излучения, «линейки» нескольких участков стержня с температурной зависимостью поглощения, разделенных линейными промежутками и т.д. В частности, такая задача демонстрирует роль неоднородностей, неизбежно присутствующих в широкоапертурных схемах. При этом существенно, что в реальных широкоапертурных схемах переключение инициируется локальными неоднородностями. Достаточно уже одной «закритической» локальной неоднородности, чтобы вся широкоапертурная система переключилась со временем из метастабильного состояния в стабильное. Примеры и оценки, а также соответствующие ссылки можно найти в [2].

#### 2.8. Поперечно-двумерные структуры

Напомним, что выведенное в § 2.1 нестационарное уравнение теплопроводности в приближении среднего поля (2.10) описывает поперечно-двумерные структуры температуры в тонкой пластинке. Соответственно при переходе от стержня к пластинке можно получить поперечно-двумерные локализованные структуры.

Для устойчивых волн переключения включение второй поперечной координаты  $y$ , очевидно, не меняет профиль волны и ее скорость. Нетрудно видеть, что при этом сохраняется и устойчивость волны.

Действительно, ввиду независимости распределения температуры в невозмущенной волне от  $y$  зависимость малых возмущений от  $y$  имеет вид  $\exp(iqy)$  с вещественной пространственной (поперечной) частотой  $q$ . Тогда линеаризованное уравнение для собственных функций возмущений имеет вид (5.10) с заменой

$$\gamma \rightarrow \tilde{\gamma} = \gamma - \Lambda q^2 / (\rho_0 c_v) \leq \gamma. \quad (2.9.1)$$

Тем самым, из результатов § 2.5 следует, что  $\tilde{\gamma} \geq 0$ . Поэтому  $\gamma \leq 0$ , что и доказывает устойчивость рассматриваемых волн переключения.

Для осесимметричных распределений интенсивности и температуры в приведенном уравнении теплопроводности возникает дополнительный по сравнению с (3.1) член с радиальной производной  $(\Lambda/r)\partial T/\partial r$ , где  $r$  – радиальная координата. В рамках «механической аналогии» этот член играет роль трения с зависящим от  $r$  коэффициентом трения. По-прежнему существуют режимы критического зародыша; в частности, при кусочно-линейной аппроксимации  $F(T)$  температурное распределение для них выражается через цилиндрические функции [19].

Применительно к цилиндрическим волнам переключения существенно, что радиальная координата меняется в полубесконечном интервале  $0 < r < \infty$ . Поэтому о таких волнах можно говорить лишь приближенно, при условии значительного превышения радиальной координаты фронта волны  $r_{\text{фр}}$  над шириной фронта волны переключения  $w_{\text{фр}}$  [19, 29]:

$$r_{\text{фр}} \gg w_{\text{фр}}. \quad (2.9.2)$$

При выполнении этого условия указанный дополнительный член уравнения теплопроводности служит малой добавкой и справедливы представления о цилиндрических волнах переключения, локально близких к плоским. Вместе с тем скорость движения фронта и его профиль будут зависеть от текущей координаты фронта  $r_{\text{фр}}$ , приближаясь к плосковолновым величинам при  $r_{\text{фр}} \gg w_{\text{фр}}$ . Поэтому кинетика осесимметричных локальных выбросов при падении плоской волны аналогична рассмотренной для стержневой схемы в § 2.6. При том же условии (2) справедливо и «квазиодномерное» описание пространственного гистерезиса при нагреве пластины осесимметричным пучком излучения. Более того, при одновременном выполнении (2) и (7.3) поправочный радиальный член не входит в низшее приближение применявшейся в § 2.7 сингулярной теории возмущений. Поэтому схема пространственной бистабильности и пространственного гистерезиса полностью сохраняется и для широких осесимметричных пучков. Падающий пучок может и не обладать осевой симметрией. Тогда к нему также применимы указанные выводы, если только в (2) под  $r_{\text{фр}}$  понимать радиус кривизны фронта волны переключения. Возможное, вообще говоря, нарастание азимутальных неоднородностей при распространении

цилиндрических волн переключения [12] отсутствует для рассматриваемой «однокомпонентной» схемы, описываемой приведенным уравнением (1.10). Они могут возбуждаться только в двух- и более компонентных системах.

Как указывалось в § 2.7.2, локализованные структуры могут быть сформированы при введении пространственной модуляции параметров схемы, например, интенсивности падающего излучения  $I_{in}$  около максвелловского значения  $I_{in}$ . Для получения поперечно-двумерных локализованных структур интенсивность должна быть плавно промодулирована по обеим поперечным координатам  $x$  и  $y$ . Соответствующее уравнение теплопроводности тогда имеет вид

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \Lambda \Delta_{\perp} T - F(T, I_{in}(x, y)). \quad (2.9.2)$$

Мы предлагаем читателю убедиться в том, что численное решение (2) подтверждает существование и устойчивость поперечно-двумерных локализованных распределений температуры в тонкой пластинке, нагреваемой внешним излучением с поперечно промодулированной интенсивностью.

## 2.9. Другие факторы

**Вне рамок приближения среднего поля.** Трехмерные волны переключения и пространственный гистерезис с кинетикой, аналогичной изложенной выше, могут быть реализованы в слабопоглощающих средах, например при высокочастотном нагреве плазмы [30]. В этом случае, естественно, уже неприемлемо приближение среднего поля и уравнение (1.10). Другие эффекты, связанные с существенностью продольной распределенности схемы, рассмотрены в [2] и в приведенной там литературе.

**Флуктуации и «критическая опалесценция».** Ввиду уже обсуждавшейся аналогии между оптической бистабильностью и фазовыми переходами первого рода для рассматриваемой бистабильной системы имеет место аномальный рост флуктуаций вблизи критических условий зарождения бистабильности, при которых дифференциальное усиление весьма велико. Более точно, такой аналог «критической опалесценции» наблюдается в докритической области, в которой в отсутствие шумов имеется единственное стационарное поперечно-однородное состояние (моностабильность). В противном случае бистабильности флуктуации вызвали бы переход системы в стабильное состояние, в котором флуктуации проявляются слабее. Ссылки на соответствующие исследования можно найти в [2].

**Изолированные петли.** В ряде случаев поглощение зависит как от температуры, так и непосредственно от интенсивности излучения:

$P = P(T, I_{in})$ . Если с ростом интенсивности происходит насыщение поглощения, то передаточная функция точечной системы может быть не только  $S$ -образной, но и содержать изолированные петли (рис. 2.22). Выводы § 2.5 о волнах переключения между устойчивыми состояниями  $\Theta_1$  и  $\Theta_3$  сохраняются, однако возникает следующее отличие. Если при любых интенсивностях  $I_{in}$  в диапазоне бистабильности точечной схемы (2.5) площади двух заштрихованных на рис. 2.22а фигур различаются (правило Максвелла не выполняется, например  $S_1 > S_2$ ), то скорость волн переключения не меняет знака. Это означает, что если в начальный момент времени на некоторой части апертуры сформировано состояние  $\Theta_1$ , а на остальной –  $\Theta_3$ , то со временем будет расширяться область с состоянием  $\Theta_1$  за счет состояния  $\Theta_3$ . Поэтому отвечающие петле устойчивые состояния метастабильны. Для падающего пучка пространственный гистерезис в этом случае не реализуется, хотя точечная схема бистабильна. Вместе с движущимися волнами переключения здесь будут наблюдаться и оптико-механические диссипативные солитоны.

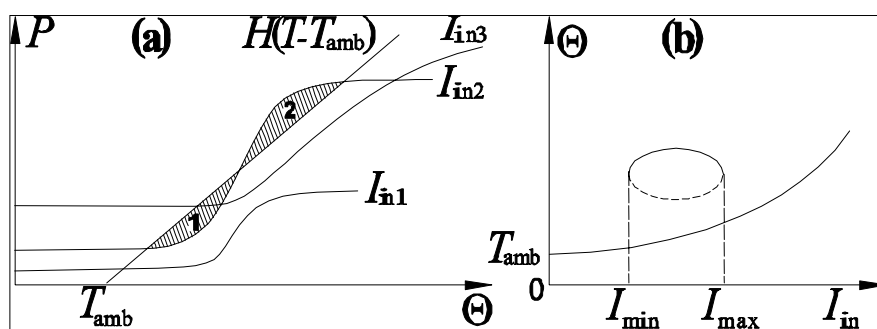


Рис. 2.22. Определение стационарных режимов (а) и изолированная петля передаточной функции (b)

**Многокомпонентность.** Состояние среды, в которой распространяется излучение, может характеризоваться не только температурой, но и концентрацией носителей заряда. Кинетическое описание в этом случае представляет систему связанных уравнений диффузионного типа. Важным примером служит система двух кинетических уравнений для температуры  $T$  и концентрации носителей  $n$ :

$$\tau_T \frac{\partial T}{\partial t} = L_T^2 \Delta T - F(T, n), \quad \tau_n \frac{\partial n}{\partial t} = L_n^2 \Delta n - G(T, n). \quad (2.9.1)$$

Здесь  $\tau_T$  и  $\tau_n$  – характерные времена установления температуры и концентрации,  $L_T$  и  $L_n$  – соответствующие длины диффузии. Функция  $F$  описывает баланс тепловыделения и теплоотвода, а  $G$  – генерацию и рекомбинацию носителей.

Анализу подобных систем диффузионных уравнений, описывающих множество автоволновых явлений, посвящена обширная литература, см.,

например, [11] и недавний обзор теории и экспериментов по диссипативным солитонам в таких системах [31].

**Эксперименты.** В [32] образец – полупроводник Ge, механизм нелинейности – тепловой, использовалось излучение непрерывного CO<sub>2</sub>-лазера. Хотя нелинейность весьма инерционна, такая схема из-за умеренных требований к интенсивности лазерного излучения (десятки Вт/см<sup>2</sup>) удобна для различных модельных экспериментов.

В [33-36] для кристаллов CdS экспериментально исследовалась кинетика поперечного профиля температуры. Выводы качественно согласуются с теоретическими представлениями, изложенными выше. Пространственный гистерезис в этих работах не наблюдался, по-видимому, из-за недостаточной ширины пучка по отношению к ширине фронта волны переключения. Вместе с тем и в условиях [35, 36] в интенсивности прошедшего излучения формировались резкие радиальные структуры, которые можно сопоставить с волнами переключения.

Дальнейшие эксперименты с такими широкоапертурными схемами представляют интерес по следующим причинам. Во-первых, эти схемы не чувствительны к когерентности излучения и более просты; они служат удобным объектом анализа физики фазовых переходов. Во-вторых, практическая значимость таких схем существенно возросла бы при переходе от теплового механизма нелинейности к более быстрому электронному. Вид обсуждавшихся выше эффектов при этом сохраняется, но резко меняется масштаб времен. Так, скорости волн переключения в соответствии с оценкой  $v \sim l_{\text{dif}} / \tau_{\text{rel}}$ , где  $\tau_{\text{rel}}$  – время установления нелинейности, а  $l_{\text{dif}}$  – длина диффузии, могут достигать значений  $v \sim 10^7$  м/с.

## Литература к главе 2

1. Розанов Н.Н. ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 96.
2. Розанов Н.Н. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах.–М.: Наука, 1997.
3. Rosanov N.N. Spatial Hysteresis and Optical Patterns. –Berlin: Springer, 2002.
4. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света.–М.: Мир, 1988.
5. Bigot J.Y., Daunow A., Mandel P. Phys. Lett. 1987. V. A123. P. 123.
6. Segard B., Zemmouri J., Macke B. Opt. Commun. 1987. V. 63. P. 339.
7. Mitschke F., Boden C., Lange W., Mandel P. Opt. Commun. 1989. V. 71. P. 385.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика.–М.: Наука, 1988.
10. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика.–М.: Наука, 1979.

11. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы.–М.: Наука, 1987.
12. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.Н., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва.–М.: Наука, 1980.
13. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака.– М.: Наука, 1988.
14. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка.–М. –Л.: ИЛ, 1950.
15. Канель Я.И. Матем. сб. 1962. Т. 59. С. 245.
16. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Бюл. МГУ. Секц. А. 1, 1937. № 6. С. 1.
17. Розанов Н.Н. ЖТФ. 1981. Т. 51. С. 2136.
18. Розанов Н.Н. Опт. спектр. 1983. Т. 55. С. 211.
19. Розанов Н.Н., Ходова Г.В. Квант. электрон. 1986. Т. 13. С. 368.
20. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики.–М.: Наука, 1973.
21. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах.–М.: Мир, 1979.
22. Grohs J. Ph. D. Thesis. Kaiserslautern Univ. Germany. 1993.
23. Rosanov N.N. J. Phys. 1988. V. 49. Coll. C2. P. 429.
24. Розанов Н.Н. ДАН СССР. 1988. Т. 303. С. 852.
25. Васильева Ф.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.–М.: Наука, 1973.
26. Розанов Н.Н., Семенов В.Е., Ходова Г.В. Квант. электрон. 1983. Т. 10. С. 2355.
27. Розанов Н.Н., Федоров А.В. Опт. спектр. 1988. Т. 64. С. 1372.
28. Розанов Н.Н. Опт. спектр. 1989. Т. 66. С. 230.
29. Розанов Н.Н., Сутягин А.Н., Ходова Г.В. Изв. АН СССР. Сер. Физ. 1984. Т. 48. С. 1437.
30. Розанов Н.Н. ЖТФ. 1984. Т. 54. С. 1634.
31. Purwins H.-G., Bodeker H.U., Liehr A.W. Dissipative Solitons in Reaction-Diffusion Systems. In: Dissipative Solitons, Eds. N. Akhmediev, A. Ankiewicz. Lect. Notes Phys. V. 661. Springer: Berlin, 2005. P. 267.
32. Голик Л.Л., Григорьянц А.В., Елинсон М.И. Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. С. 118.
33. Nguyen H.X., Egorov V.D., Harendt A., Nazvanova E.V. Phys. Stat. Sol. (b). 1988. V. 148. P. 407.
34. Nguyen H.X., Egorov V.D. Phys. Stat. Sol. (b). 1988. V. 150. P. 519.
35. Koch S.W., Wright E.M. Phys. Rev. A. 1987. V. 35. P. 2542.
35. McGinnis B.P., Wright E.M., Koch S.W., Peyghambarian N. Opt. Lett. 1990. V. 15. P. 258.



## Глава 3. КОГЕРЕНТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СЛОЯ ПОЛУПРОВОДНИКА

*Рассматривается безрезонаторная диссипативная система, состоящая из тонкого слоя полупроводника, возбуждаемого когерентным лазерным излучением. В полупроводнике при температуре ниже критической реализуется бозе-эйнштейновская конденсация экситонов. Такая оптическая среда обладает пространственной дисперсией и кубической нелинейностью. Демонстрируется наличие диссипативных солитонов когерентного излучения и конденсата.*

### 3.1. Оптические характеристики конденсата Бозе-Эйнштейна

Бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) является макроскопическим квантовым состоянием вещества, характеризующимся единой волновой функцией [1]. Недавно реализованный БЭК атомарных газов требует весьма низких температур (критическая температура обратно пропорциональна массе атомов). В то же время эффективная масса экситонов в полупроводниках может быть близка к массе электрона, что существенно повышает критическую температуру их конденсации. БЭК экситонных поляритонов экспериментально наблюдался при температуре 7.3 К [2], причем оценки показывают возможность достижения БЭК экситонов даже при комнатной температуре, например, в полупроводниках с квантовыми ямами. БЭК обладает рядом уникальных свойств, в том числе аномально высокой оптической нелинейностью [3]. Перспективы достижения высокотемпературной БЭК экситонов (поляритонов) делают эти полупроводниковые системы привлекательными для многих фундаментальных и прикладных исследований [4].

Для БЭК коллективная волновая функция  $\Phi$ , квадрат модуля которой определяет концентрацию  $n = |\Phi|^2$  либо атомов (атомарный конденсат), либо экситонов (экситонный конденсат), подчиняется уравнению Гросса – Питаевского (атомарный конденсат) или Келдыша (экситонный конденсат). В последнем случае уравнение Келдыша для полупроводника, в котором внешнее лазерное излучение с частотой  $\omega$  и комплексной амплитудой  $E$  поддерживает когерентное состояние экситонов с волновой функцией (амплитудой экситонной волны)  $\Phi$  имеет вид [4, 5]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -(\gamma + i\delta\omega)\Phi + i\frac{\hbar}{2m}\Delta\Phi - i\frac{g}{\hbar}|\Phi|^2\Phi + i\frac{d_{ex}}{\hbar\sqrt{v_0}}(1 - \kappa|\Phi|^2)E. \quad (3.1.1)$$

Здесь  $t$  – время,  $\gamma$  – константа затухания экситонов,  $\delta\omega$  – отстройка частоты лазерного излучения от частоты экситонного перехода,  $m$  – эффективная (трансляционная) масса экситона,  $d_{ex}$  – дипольный момент

перехода из основного состояния кристалла в экситонное,  $v_0$  – объем элементарной ячейки кристалла,  $g$  – коэффициент упругого экситон-экситонного взаимодействия,  $\kappa$  – константа насыщения дипольного момента экситонного перехода. Входящие в (1) параметры определяются следующими приближенными выражениями [4]:

$$d_{\text{ex}} \approx \left( \frac{\varepsilon_b v_0 \hbar \omega_{\text{LT}}}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad g \approx \frac{26}{3} \pi I_{\text{ex}} a_{\text{ex}}^3, \quad \kappa \approx \frac{35}{4} \pi a_{\text{ex}}^3, \quad (3.1.2)$$

где  $\varepsilon_b$  – фоновая диэлектрическая проницаемость,  $a_{\text{ex}}$ ,  $\omega_{\text{LT}}$  и  $I_{\text{ex}}$  – борковский радиус, частота продольно-поперечного расщепления и энергия связи (потенциал ионизации) экситона, соответственно. Для лазерного излучения используется комплексная форма записи, в которой вещественное поле  $E_{\text{real}} = E \exp(-i\omega t) + E^* \exp(i\omega t)$ . Уравнение Келдыша (1) выведено в приближениях вращающейся волны и среднего поля, условия применимости которых указаны в [5]. Согласно (1), кинетическая энергия экситонов (член с оператором Лапласа  $\Delta$ ) отвечает нелокальности (на оптическом языке – пространственной дисперсии), а экситон-экситонное взаимодействие (член с коэффициентом  $g$ ) – кубической нелинейности отклика среды.

Рассмотрим теперь тонкий (субмикронной толщины) слой конденсата, в котором продольные изменения концентрации экситонов  $n_{\text{ex}} = |\Phi|^2$  и амплитуды излучения невелики. Тогда, как и в гл. 1, можно усреднить уравнение (1) в продольном направлении  $z$ . На границах слоя можно принять условия частичного отражения экситонов. Тогда придем к следующему виду управляющего уравнения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -(\gamma + i\delta\omega)\Phi + i\frac{\hbar}{2m}\Delta_{\perp}\Phi - i\frac{g}{\hbar}|\Phi|^2\Phi + i\frac{d_{\text{ex}}}{\hbar\sqrt{v_0}}(1 - \kappa|\Phi|^2)E. \quad (3.1.3)$$

При этом потери экситонов на границах пленки приводят к перенормировке коэффициента затухания  $\gamma$  и частотной расстройке  $\delta\omega$ , а учет ослабления лазерного излучения в пленке перенормирует величину дипольного момента  $d_{\text{ex}}$ .

Введя безразмерные переменные

$$t' = \gamma t, \quad \theta = \frac{\delta\omega}{\gamma}, \quad (x', y') = (x, y)\sqrt{\frac{2m\gamma}{\hbar}}, \quad \Psi = \sqrt{\frac{g}{\hbar\gamma}}\Phi, \quad (3.1.4)$$

$$\Psi_{\text{in}} = i\frac{d_{\text{ex}}\sqrt{g}}{(\hbar\gamma)^{3/2}\sqrt{v_0}}E, \quad \kappa' = \kappa\frac{\hbar\gamma}{g},$$

перепишем (3) в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t'} = -(1 + i\theta)\Psi + i\nabla_{\perp}^2\Psi - i|\Psi|^2\Psi + \Psi_{\text{in}}(1 - \kappa'|\Psi|^2). \quad (3.1.5)$$

Далее штрихи в (5) опускаем. По сравнению с управляющим уравнением для некогерентной системы (2.1.10) уравнение (5) имеет комплексную форму. В этом смысле (2.1.10) описывает однокомпонентную, а (5) – двухкомпонентную (вещественные амплитуда и фаза) систему. Соответственно, в случае когерентных систем и уравнения (5) имеется большее разнообразие пространственных структур, чем для некогерентных систем и уравнения (2.1.10). Для рассматриваемой когерентной системы сохраняются все основные эффекты, описанные в гл. 2 (бистабильность, волны переключения, пространственная бистабильность и гистерезис, неустойчивые локализованные структуры), и к ним добавляются новые (модуляционная неустойчивость, устойчивые локализованные структуры). Часть из них рассматривается ниже. Отметим также, что (5) близко к управляющему уравнению для структур в широкоапертурном интерферометре, возбуждаемом когерентным излучением (см. следующую часть Пособия); это уравнение первоначально было выведено в [6] для описания модуляционной неустойчивости в интерферометре (при  $\kappa = 0$  и для другого знака кубической нелинейности). В [7] на основе такого уравнения, также при  $\kappa = 0$ , была продемонстрирована модуляционная неустойчивость в слое экситонного БЭК, а устойчивые когерентные диссипативные солитоны в слое были найдены в [8].

### 3.2. Бистабильность и диссипативные солитоны

Для стационарных пространственно-однородных решений (1.5) выполняется соотношение

$$|\Psi_{\text{in}}|^2 = \frac{[1 + (\theta + |\Psi|^2)] |\Psi|^2}{(1 - \kappa |\Psi|^2)^2} \approx [1 + (\theta + |\Psi|^2)] (1 + 2\kappa |\Psi|^2) |\Psi|^2. \quad (3.2.1)$$

При переходе к последнему выражению в (1) концентрация экситонов предполагалась малой ( $\kappa |\Psi|^2 \ll 1$ ). Видно, что при  $\theta > 0$  правая часть (1) (как «точная», так и приближенная формы) монотонно возрастает с ростом пропорциональной концентрации экситонов величины  $|\Psi|^2$ . Поэтому для существования бистабильности – наличия двух устойчивых состояний с различными концентрациями при одном и том же значении интенсивности лазерного излучения, пропорциональной  $|\Psi_{\text{in}}|^2$  – необходимо условие  $\theta < 0$ . В действительности бистабильность реализуется в более узком диапазоне расстроек. Так, при  $\kappa = 0$  устойчивость двух стационарных однородных состояний относительно малых возмущений произвольной формы достигается при условии  $-2 < \theta < -\sqrt{3}$  (см. следующую часть Пособия).

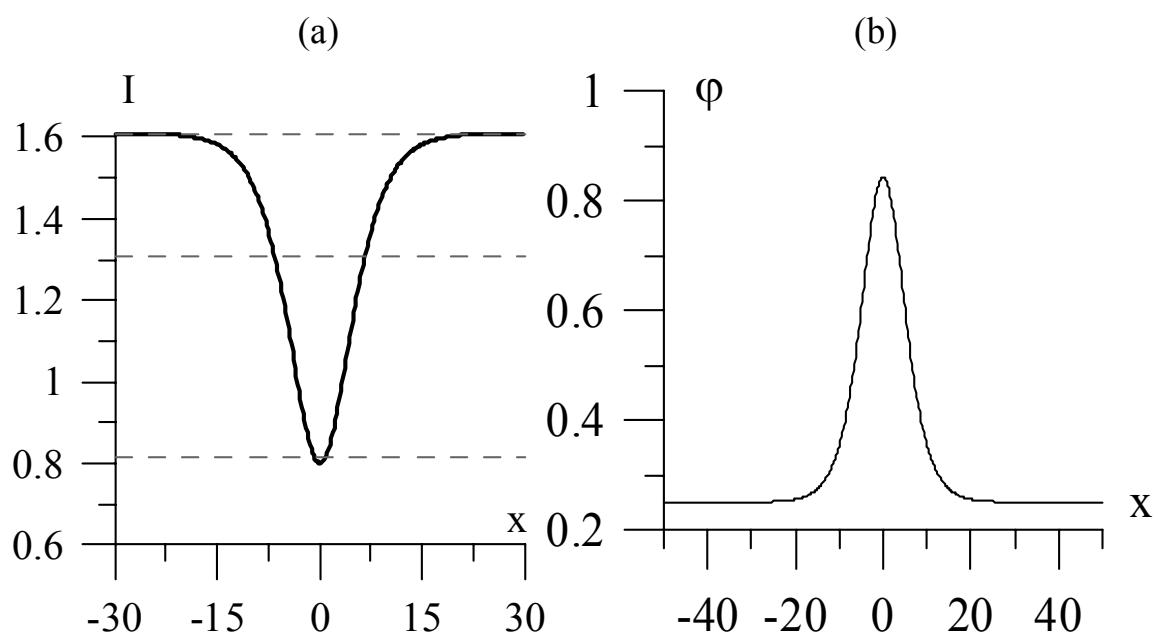
*Задание 3.1.* Из соотношения (1) получить условия моно- и бистабильности плосковолновых режимов.

Указание. Считать малым параметр  $\kappa$ .

*Задание 3.2.* Выполнить линейный анализ устойчивости стационарных поперечно-однородных решений уравнения (1.5). Обратить внимание на роль параметра  $\kappa$ .

Хотя в общем случае диссипативные солитоны могут существовать и вне диапазона бистабильности (см. следующую часть Пособия), в рассматриваемом варианте стационарные солитоны устойчивы только в сравнительно узком интервале внутри диапазона бистабильности. В [8] они получены численным решением (1.5) с граничным условием, отвечающим выходу на стационарное однородное состояние вдали от центра солитона:  $\partial |\Psi|^2 / \partial x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

На рис. 3.1 приведены профили (безразмерных) концентрации  $n = |\Psi|^2$ , фазы волновой функции  $\varphi = \arg \Psi$  и ее градиента для «темного» диссипативного солитона (с провалом концентрации в центральной части). Отметим, что отличие от нуля градиента фазы в центральной части солитона свидетельствует о наличии установившихся потоков экситонов, уравнивающих неоднородность притока энергии за счет поперечно неравномерного поглощения лазерного излучения и потерь экситонов из-за их гашения фононами и на границах пленки. Соответствующая скорость движения экситонов  $v = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi$ . Принципиально возможно и получение «светлого» диссипативного солитона экситонного БЭК, например, при введении поперечной периодической модуляции характеристик системы.



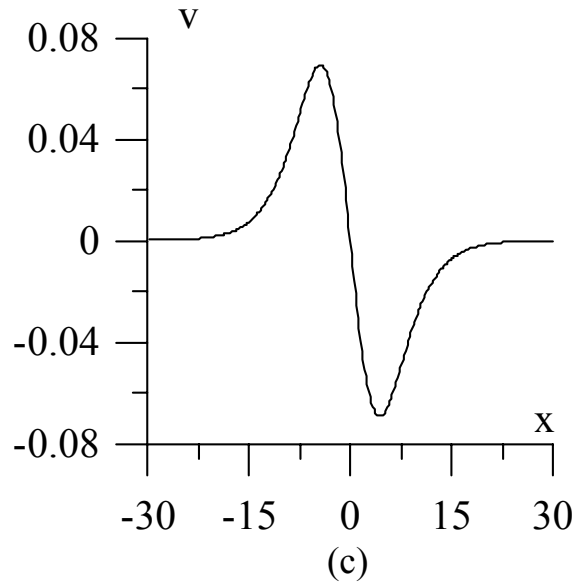


Рис. 3.1. Отвечающие темному диссипативному солитону экситонного БЭК поперечные профили концентрации экситонов  $n(x)=|\Psi(x)|^2$  (а), фазы волновой функции (b) и градиента фазы (с) при  $\theta = -1.87$  и  $|\Psi_{in}|^2 = 1.72$ . Горизонтальные штриховые линии на рис. (а) показывают уровень концентрации трех поперечно однородных распределений – нижней (устойчивый режим), промежуточной (неустойчивый режим) и верхней (устойчивый режим) ветвей гистерезисной передаточной функции [8]

Интенсивность лазерного излучения связана с комплексной амплитудой поля  $E$  соотношением  $I = \frac{n_0 c}{2\pi} |E|^2$  ( $n_0 = \sqrt{\varepsilon_b}$  – фоновый показатель преломления,  $c$  – скорость света в вакууме). Оценим интенсивность для полупроводника CdS, полагая эффективную массу экситона близкой к массе электрона и используя (1.2) и данные [4, 9-12]:

$$\varepsilon_b = 9.3, v_0 = 1.25 \cdot 10^{-22} \text{ см}^3, a_{ex} = 2.8 \text{ нм}, \quad (3.2.2)$$

$$\hbar\omega_{LT} = 1.9 \text{ мэВ}, I_{ex} = 29 \text{ мэВ}, \gamma = 10^{11} \text{ с}^{-1}.$$

Соответственно, получаем масштаб координат  $x_{real} = x \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ , так что ширина солитона, показанного на рис. 3.1, составляет  $\sim 200 \text{ нм}$ . Характерная концентрация когерентных экситонов  $\sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$ , ввиду чего насыщением дипольного момента можно пренебречь, считая  $\kappa = 0$ . Требуемый уровень интенсивности лазерного излучения  $I \sim 100 \text{ Вт/см}^2$ . Поскольку ширина запрещенной зоны CdS составляет 2.53 эВ, длина волны лазерного излучения лежит в видимой области спектра,  $\lambda \sim 0.5 \text{ мкм}$ . Это свидетельствует об уникальности характеристик диссипативных

ЭКСИТОННЫХ СОЛИТОНОВ И О ПЕРСПЕКТИВНОСТИ ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ.

### **Литература к главе 3**

1. Пятаевский Л.П. УФН. 2006. Т. 176. С. 345.
2. Richard M. et al. Phys. Rev. B. 2005. V. 72. P. 201301(R).
3. Розанов Н.Н., Смирнов В.А. Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 82. С. 27.
4. Moskalenko S.A., Snoke D.W. Bose-Einstein condensation of excitons and biexcitons and coherent nonlinear optics with excitons. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
5. Келдыш Л.В. В сб. Проблемы теоретической физики, М.: Наука, 1972, с. 433.
6. Lugiato L.A., Lefever R. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 2209.
7. Балкарей Ю.И., Коган А.С. Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57. С. 277.
8. Розанов Н.Н., Федоров С.В., Хаджи П.И., Белоусов И.В. Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 85. С. 524.
9. Ж. Панков. Оптические процессы в полупроводниках. М.: Мир, 1973.
10. Литовченко В.Г. и др. ФТП **36**, 447 (2002).
11. Экситоны. Под ред. Э.И. Ражба и М.Д. Стерджа. М.: Наука, 1985.
12. Бродин М.С., Мясников Э.Н., Марисова С.В. Поляритоны в кристаллооптике. Киев: Наукова думка, 1984.



В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.

---

## **КАФЕДРА ФОТОНИКИ И ОПТОИНФОРМАТИКИ**

Кафедра фотоники и оптоинформатики создана в 2002 году и работает под руководством лауреата премии Ленинского комсомола по науке и технике профессора С.А.Козлова. Одной из важнейших задач кафедры является организация учебного процесса и подготовка специалистов по оптоинформатике – стремительно развивающейся новой области науки и техники, в которой разрабатываются оптические технологии сверхбыстрой передачи, обработки и записи информации, создаются быстродействующие оптические компьютеры и системы искусственного интеллекта. Разработка таких оптических информационно-телекоммуникационных технологий, представляющих собой информационные технологии нового поколения, является приоритетным направлением развития российской науки, техники и технологий.

На кафедре сформирована признанная научно-педагогическая школа по фемтосекундной оптике и фемтотехнологиям – руководители: д.ф.м.н., проф. С.А.Козлов и д.ф.м.н., проф. В.Г.Беспалов.

Среди студентов и аспирантов кафедры – стипендиаты Президента и Правительства Российской Федерации, победители конкурсов научных работ, проводимых Российской Академией наук, крупнейшими мировыми научными обществами, такими как INTAS (Фонд научно-исследовательских работ Европейского сообщества), SPIE (Международное общество инженеров-оптиков), CRDF (Американский фонд гражданских исследований и развития).

Кафедра фотоники и оптоинформатики постоянно занимает призовые места по итогам конкурсов ведущих научно-педагогических коллективов Университета ИТМО.

Н.Н. Розанов

*ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ*

Часть I. Диссипативные оптические солитоны в тонком слое  
полупроводника

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

А.Е. Иванова

Верстка

А.А. Афонюшкин

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного  
университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж 100

Отпечатано на ризографе





**Редакционно-издательский отдел**  
Санкт-Петербургского государственного  
университета информационных технологий,  
механики и оптики  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

