

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ



ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ИННОВАЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ВУЗОВ

Т.В.Родина
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2009

Т.В. Родина Комплексные числа. Учебно-методическое пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 30с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов 1-го курса всех специальностей и содержит подробный разбор одной из тем, являющихся введением в курс математического анализа: «Комплексные числа». Работа содержит большое количество разобранных задач, поэтому может служить пособием для самостоятельного изучения данной темы. Предлагается также достаточное количество задач повышенного уровня сложности.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета.
29.09.09, протокол №2



СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007-2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

©Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2009

©Т.В. Родина, 2009

Введение

Практически каждый ребенок может сказать, что у него три яблока или три игрушки, но попробуйте даже взрослого человека, не являющегося профессиональным математиком, спросить, что такое «три». Вы получите маловразумительный ответ, что это есть способ измерения количества предметов (а что такое количество?) или что-нибудь подобное. Числа «три», как и любого другого в природе не существует, это плод нашего мышления, результат абстрагирования, которое происходит при рассмотрении множеств элементов различной природы, содержащих по три элемента. Ребенок воспринимает идею числа интуитивно, абстрактный характер этой идеи понимается только на достаточно высоком уровне развития. Интересно отметить, что у некоторых примитивных народов до сих пор сохранились различные числительные для обозначения одного и того же количества предметов различной природы или различной формы.

Естественно, что человек сначала научился пользоваться натуральными числами, затем появились рациональные дроби, затем ноль и отрицательные числа и только потом числа иррациональные. Первыми, кто попытался построить законченную теорию вещественного числа, были греки, которые свели рассмотрение чисел к рассмотрению отрезков прямой, т.е. подошли к изучению числа с точки зрения геометрии. Современные математики усовершенствовали систему греков. В основу математической теории может быть положен некоторый абстрактный (идеальный) объект, который не определяется, но формулируются свойства этого объекта или правила действий с этими объектами (эти свойства называются аксиомами). Используя этот подход можно строго построить теорию натуральных чисел, все остальные числа можно построить на основе натуральных. «Бог создал натуральные числа, все прочее – дело рук человека» - так сформулировал эту идею немецкий математик Леопольд Кронекер (1823-1891).

Еще античные математики заметили, что действия сложения и умножения с натуральными числами обладают свойствами:

- 1) коммутативный закон сложения

$$a + b = b + a$$

- 2) ассоциативный закон сложения

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

- 3) коммутативный закон умножения

$$ab = ba$$

- 4) ассоциативный закон умножения

$$(ab)c = a(bc)$$

- 5) дистрибутивный закон умножения относительно сложения

$$a(b + c) = ab + ac$$

Эти свойства будем называть основными законами сложения и умножения. Очевидно, что этими свойствами обладают и расширенные числовые мно-

жества: множества всех целых чисел, множество рациональных чисел и множество всех вещественных чисел.

Интересно отметить, что последовательное расширение понятия числа от натурального до вещественного обусловлено не только практическими потребностями человеческой деятельности, но и внутренними требованиями самой математики. На множестве натуральных чисел мы всегда можем производить действия сложения и умножения, но обратные действия возможны не всегда. После введения нуля и отрицательных чисел, т.е. после расширения множества натуральных чисел до множества целых действие вычитания становится возможным для любых двух чисел. Аналогично, становится возможным действие деления для любых двух чисел, взятых из множества рациональных (разумеется, при условии, что делитель отличен от нуля).

Множество, на котором заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие основным законам 1) – 5), и выполнимы обратные операции: вычитания и деления (за исключением случая, когда делитель равен нулю) называется полем.

Таким образом, множество рациональных чисел образует простейшее числовое поле. Но на множестве рациональных чисел, за исключением редких случаев, невозможна операция, обратная к операции возведения в степень. Если ввести иррациональные числа, этот пробел частично ликвидируется. На множестве всех вещественных чисел можно извлекать корни любой степени, но только из неотрицательных чисел. Множество вещественных чисел также образует поле, но для того чтобы операция извлечения корня была возможна всегда, требуется дальнейшее его расширение.

Сделаем это с помощью введения искусственных (идеальных) элементов.

§1 Основные определения

Рассмотрим множество элементов вида $a + bi$, где a и b - вещественные числа, а i - символ, называемый мнимой единицей (смысл такого названия будет ясен позже). На множестве этих символов введем следующие операции:

1) сравнение: $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

2) сложение: $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

3) умножение: $(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Элементы указанного вида с введенными операциями называются **комплексными числами**. Множество комплексных чисел обычно обозначают буквой C , а элементы этого множества – буквой z .

Вещественное число a будем называть вещественной частью комплексного числа $a + bi$ и обозначать $\text{Re}(a + bi)$ или $\text{Re} z$, а b - его мнимой частью и обозначать $\text{Im}(a + bi)$ или $\text{Im} z$. (Re и Im - начальные буквы латинских слов *realis* – действительный и *imaginiarius* мнимый).

Например, $\text{Re}(2 - 3i) = 2$, $\text{Im}(2 - 3i) = -3$.

Таким образом, операции 1)-3) можно сформулировать следующим образом:

1. Два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их вещественные и мнимые части.

2. Суммой двух комплексных чисел является комплексное число, вещественная часть которого равна сумме вещественных частей слагаемых, а мнимая – сумме мнимых.

3. Произведением двух комплексных чисел $(a_1 + b_1i)$ и $(a_2 + b_2i)$ является комплексное число z такое, что $\operatorname{Re} z = a_1a_2 - b_1b_2$ и $\operatorname{Im} z = a_1b_2 + b_1a_2$.

Обратите внимание, на то, что для комплексных чисел определено сравнение только типа равны или не равны. Сравнение типа больше – меньше для этих чисел невозможно.

Замечание.

Очевидно, что комплексное число будет задано, если заданы его вещественная и мнимая части, т.е. заданы два вещественных числа. Поэтому иногда в курсах алгебры комплексные числа определяют как упорядоченные пары вещественных чисел (a, b) , на множестве которых определены те же три операции:

1) сравнение: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

2) сложение: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2))$

3) умножение: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = ((a_1a_2 - b_1b_2), (a_1b_2 + a_2b_1))$.

Примеры.

1. Образует ли поле множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b - рациональные числа?

Решение. Очевидно, что на множестве таких чисел определены четыре арифметических действия (действие деления возможно всегда, кроме случая, когда делитель имеет вид $0 + 0\sqrt{2}$). Также очевидно, что результаты сложения, вычитания и умножения чисел данного вида дают числа такого же вида. Нужно доказать только, что частное таких чисел будет числом этого вида. Рассмотрим

$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}$, где $c^2 + d^2 \neq 0$. Преобразуем эту дробь следующим образом:

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}$$

Дроби $\frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}$ и $\frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}$ существуют (докажите!) и являются рациональными числами, следовательно, частное

$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}}$ есть число из данного множества.

2. Найти вещественную и мнимую части числа $(1 + 2i)(2 - i) + (1 - 2i)(2 + i)$.

Решение.

По правилу умножения комплексных чисел получим $(1 + 2i)(2 - i) = (2 + 2) + (4 - 1)i = 4 + 3i$ и $(1 - 2i)(2 + i) = (2 + 2) + (1 - 2)i = 4 - i$.

Тогда сумма $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)=(4+3i)+(4-i)=8+2i$. Отсюда, $\operatorname{Re}((1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i))=8$ и $\operatorname{Im}((1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i))=2$.

3. Найти вещественные числа x и y такие, чтобы $(2x-3yi)(2x+3yi)+(y+xi)=100+2i$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в левой части равенства по определению умножения и сложения комплексных чисел:

$$(2x-3yi)(2x+3yi)=(4x^2+9y^2)+(6xy-6xy)i=(4x^2+9y^2)+0i;$$

$$(2x-3yi)(2x+3yi)+(y+xi)=((4x^2+9y^2)+0i)+(y+xi)=(4x^2+9y^2+y)+xi.$$

Теперь приравняем вещественную и мнимую части получившейся суммы вещественной и мнимой части числа, стоящего в правой части данного равенства.

Получим систему $\begin{cases} 4x^2+9y^2+y=100 \\ x=2 \end{cases}$, из которой $x=2, y=3$ или

$$x=2, y=-\frac{28}{9}.$$

4. Найти $\sqrt{5-12i}$.

Решение. Пусть $\sqrt{5-12i}=x+yi$. Тогда $x^2-y^2+2xyi=5-12i$. Согласно условию равенства двух комплексных чисел, получим $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=-12 \end{cases}$. Эта система

имеет два решения: $x=3, y=-2$ и $x=-3, y=2$. Таким образом, $\sqrt{5-12i}=\pm(3-2i)$.

Упражнения.

1. Образует ли поле

- множество иррациональных чисел;
- множество всех конечных десятичных дробей;
- множество чисел вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b - рациональные числа?

2. Вычислите а) $(5+i)(15-3i)+(3+4i)(6-5i)$

б) $(5+3i)(-2+3i)+(2-i)(-3-4i)$.

3. Найти вещественные числа x и y такие, чтобы

а) $\left(0+\frac{2i}{x}\right)+(4-4i)=-\frac{8}{x}+2y+3i$; б) $(-y+xi)^2=6-8i+(x+yi)^2$

4. Найти а) $\sqrt{-7-24i}$; б) $\sqrt{-24+70i}$.

§2 Поле комплексных чисел

Операции сложения и умножения, введенные на множестве комплексных чисел, обладают следующими свойствами:

1. **Коммутативность сложения:** $z_1+z_2=z_2+z_1$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$. Используя определение суммы комплексных чисел, составим суммы, стоящие в левой и правой частях доказываемого равенства $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
 $z_2 + z_1 = (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i) = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i$

Так как имеет место коммутативность вещественных чисел, то правые части этих равенств равны между собой, следовательно, равны и левые.

2. Ассоциативность сложения: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ и $z_3 = a_3 + b_3i$. Тогда
 $(z_1 + z_2) + z_3 = ((a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)) + (a_3 + b_3i) = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) + (a_3 + b_3i) =$
 $= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i$ и
 $z_1 + (z_2 + z_3) = (a_1 + b_1i) + ((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) = (a_1 + b_1i) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) =$
 $= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i$.

Так как правые части этих равенств равны, то равны и левые.

3. Коммутативность умножения: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$. Используя определение произведения комплексных чисел, составим произведения, стоящие в левой и правой частях доказываемого равенства $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$
 $z_2 \cdot z_1 = (a_2 + b_2i) \cdot (a_1 + b_1i) = (a_2a_1 - b_2b_1) + (a_2b_1 + a_1b_2)i$

Левые части равенств равны, так как равны правые.

4. Ассоциативность умножения: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

5. Дистрибутивность сложения и умножения:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Доказательства четвертого и пятого свойств проводятся аналогично предыдущим и предоставляются читателю.

Введем действия, обратные сложению и умножению.

Определение 1.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 - z_2$ называется такое число z_3 , которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое, т.е. $z_3 + z_2 = z_1$.

Теорема 1.

Для любой пары комплексных чисел z_1 и z_2 существует разность $z_1 - z_2$, причем это число единственное.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$. Сначала предположим, что разность $z_3 = z_1 - z_2$ существует. Тогда $z_3 + z_2 = z_1$. Обозначим $z_3 = x + yi$. По определению суммы $z_3 + z_2 = (x + yi) + (a_2 + b_2i) = (x + a_2) + (y + b_2)i = a_1 + b_1i$.

Отсюда, по условию равенства двух чисел получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + a_2 = a_1 \\ y + b_2 = b_1 \end{cases},$$

из которой составляющие числа z_3 находятся единственным обра-

зом:

$$\begin{cases} x = a_1 - a_2 \\ y = b_1 - b_2 \end{cases}.$$

Таким образом мы доказали единственность разности $z_1 - z_2$. Чтобы доказать, что это число существует, достаточно взять $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ и убедиться в том, что $z_3 + z_2 = z_1$.

Определение 2.

Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое число z_3 , которое, умноженное на делитель, дает делимое, т.е. $z_3 \cdot z_2 = z_1$.

Теорема 2.

Для любой пары комплексных чисел z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0 + 0i$) существует частное $\frac{z_1}{z_2}$, причем единственное.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, причем $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$. Также как и в теореме 1, сначала предположим, что частное $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ существует. Тогда что $z_3 \cdot z_2 = z_1$.

Обозначая $z_3 = x + yi$, получим

$$(x + yi)(a_2 + b_2i) = (xa_2 - yb_2) + (xb_2 + a_2y)i = a_1 + b_1i.$$

Отсюда получим систему уравнений

$$\begin{cases} xa_2 - yb_2 = a_1 \\ xb_2 + ya_2 = b_1 \end{cases}.$$

Для решения этой системы сначала умножим первое уравнение на a_2 , второе на b_2 и сложим получившиеся равенства:

$$\begin{cases} xa_2^2 - yb_2a_2 = a_1a_2 \\ xb_2^2 + ya_2b_2 = b_1b_2 \end{cases}.$$

Получим $x(a_2^2 + b_2^2) = a_1a_2 + b_1b_2$, откуда $x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Аналогично, умножая первое из уравнений исходной системы на $(-b_2)$, второе на a_2 и складывая, получим $y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Таким образом, существует единственное решение исходной системы и число z_3 , если оно существует, единственно.

Чтобы доказать, что частное существует, возьмем число $z_3 = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$ и умножим его на $z_2 = a_2 + b_2i$:

$$\begin{aligned}
z_3 \cdot z_2 &= \left(\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) a_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2) b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left(\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2) a_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i = \\
&= \frac{a_1 a_2^2 + b_1 b_2 a_2 - a_2 b_1 b_2 + a_1 b_2^2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_1 a_2 b_2 + b_1 b_2^2 + a_2^2 b_1 - a_1 a_2 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \\
&= \frac{a_1 (a_2^2 + b_2^2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 (a_2^2 + b_2^2)}{a_2^2 + b_2^2} i = a_1 + b_1 i
\end{aligned}$$

Равенство $z_3 \cdot z_2 = z_1$ верно, значит частное существует всегда, когда $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Мы доказали, что на множестве комплексных чисел действия сложения и умножения удовлетворяют основным законам и существуют действия, обратные к ним. Следовательно, мы доказали, что множество комплексных чисел образует поле.

Замечание.

В процессе доказательства теорем 1 и 2 получены формулы для вычисления разности и частного двух комплексных чисел, но пользоваться на практике рекомендуется только формулой для разности. Что касается частного, эта формула слишком сложна для запоминания и в дальнейшем мы введем способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания этой формулы.

Отметим теперь свойства некоторых комплексных чисел.

1. Число $z_0 = 0 + 0i$ обладает свойством: для любого комплексного числа z выполняется равенство $z_0 + z = z$. Такое число естественно называть *нулем* на множестве C .

2. Произведение нуля на любое число равно нулю: $z_0 \cdot z = z_0$.

3. Если произведение двух комплексных чисел равно нулю, то, по крайней мере, один из сомножителей равен нулю.

Действительно, пусть $(a + bi)(c + di) = 0 + 0i$. Тогда, если $a + bi \neq 0 + 0i$, то $c + di = \frac{0 + 0i}{a + bi} = 0 + 0i$ (это легко вычисляется по формуле для частного).

4. Число $z^{(1)} = 1 + 0i$ обладает свойством: для любого комплексного числа z выполняется равенство $z^{(1)} \cdot z = z$. Такое число естественно называть *единицей* на множестве C .

5. Для произвольного комплексного числа $z = a + bi$ число $-z = (-a) + (-b)i$ будем называть *противоположным* числу z .

Очевидно, что число z является противоположным числу $-z$, поэтому числа z и $-z$ принято называть взаимно противоположными. Сумма взаимно противоположных чисел всегда равна нулевому элементу: $(a + bi) + ((-a) + (-b)i) = 0 + 0i$.

Полезно также отметить, что разность двух комплексных чисел можно заменить суммой вычитаемого и числа, противоположного уменьшаемому:

$$z_1 + (-z_2) = (a_1 + b_1i) + ((-a_2) + (-b_2)i) = (a_1 + (-a_2)) + (b_1 + (-b_2))i = \\ = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

6. Для произвольного комплексного числа z , отличного от нулевого, существует число \tilde{z} такое, что $\tilde{z} \cdot z = 1 + 0i$. Это число называется *обратным* к числу z .

§3 Комплексные числа и вещественные числа.

Рассмотрим комплексные числа вида $a + 0i$.

Легко видеть, что

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i$$

$$(a_1 + 0i) \cdot (a_2 + 0i) = a_1 \cdot a_2 + 0i$$

$$(a_1 + 0i) - (a_2 + 0i) = (a_1 - a_2) + 0i$$

$$\frac{a_1 + 0i}{a_2 + 0i} = \frac{a_1}{a_2} + 0i$$

То есть, результаты арифметических операций совпадают с результатами, которые мы получили бы, действуя с вещественными числами a_1 и a_2 . Этот факт позволяет отождествлять комплексные числа вида $a + 0i$ с вещественными числами и говорить, что множество вещественных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел C : $R \subset C$.

Аналогично, числа вида $0 + bi$ будем называть чисто *мнимыми* и обозначать bi . Символ i будем называть *мнимой единицей*. Пользуясь правилом умножения комплексных чисел, получим основное свойство мнимой единицы: $i^2 = -1$.

Теперь мы можем рассматривать каждое комплексное число как сумму (или разность) вещественного и чисто мнимого чисел: $a + bi = (a) + (bi)$ и $a + (-b)i = (a) - (bi)$, а число bi как произведение $b \cdot i$.

Очевидно, что сложение и вычитание комплексных чисел можно производить как сложение и вычитание двучленов, считая подобными те члены, которые не содержат мнимую единицу, и те, которые ее содержат.

Аналогично, правило умножения комплексных чисел получается как результат перемножения двучленов с учетом основного свойства мнимой единицы:

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i.$$

Пример. Вычислить $i^{25} - 8i^{14} + 5i^4 - 4i^2 - 10$.

Решение. Отметим интересную особенность степени i^n : значения этой последовательности повторяются с периодом в 4 шага $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ и т.д. Поэтому, чтобы вычислить натуральную степень мнимой единицы, нужно уменьшить показатель степени на число, кратное четырем, а потом выбрать одно из четырех значений степени. Отсюда $i^{25} = i^{25-24} = i, i^{14} = i^{14-12} = i^2 = -1$ и все выражение равно $i^{25} - 8i^{14} + 5i^4 - 4i^2 - 10 = i + 8 + 5 + 4 - 10 = 7 + i$.

Упражнения.

5. Можно ли вычислять $(a + bi)^2$ и $(a + bi)^3$ по формулам квадрата и куба суммы двух вещественных чисел? Почему?

6. Вычислить а) $(1 - 2i)^2$; б) $(1 + i)^6$; в) $(2 + i)^3$; д) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

7. Вычислить $i^{17} - 3i^{12} + 5i^{11} - i^6$.

8. Вычислить $(2 + i\sqrt{2})^3 + (2 - i\sqrt{2})^3$.

9. При каких натуральных n выполняется равенство $(1 + i)^n = (1 - i)^n$?

§4 Комплексно-сопряженные числа. Практический способ деления

Определение.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *комплексно-сопряженными*. Если обозначить число $a + bi = z$, то сопряженное ему число $a - bi$ будем обозначать \bar{z} .

Таким образом, z и \bar{z} - сопряженные тогда и только тогда, когда выполняются два условия
$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z} \\ \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z} \end{cases}$$

Свойства комплексно-сопряженных чисел:

1. $\overline{\bar{z}} = z$

Доказательство. Пусть $z = a + bi$. Тогда $\bar{z} = a - bi$, следовательно, $\overline{\bar{z}} = a - (-b)i = a + bi$.

2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Доказательство. Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Тогда $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ и $\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$. Такой же будет и сумма $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$. Следовательно, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. (Доказать самостоятельно)

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. (Доказать самостоятельно)

5. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$

Доказательство. $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z$.

6. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Доказательство. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 + 0i$.

Последнее свойство используется для практического деления комплексных чисел.

Найдем частное $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i}$.

Используем основное свойство дроби: величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же число, отличное от нуля.

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $\overline{z_2}$:

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Полученный результат совпадает с формулой, которая была приведена выше.

Пример. Вычислить $\frac{7 - 2i}{2 + 7i}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на число, сопряженное знаменателю. Получим

$$\frac{7 - 2i}{2 + 7i} = \frac{(7 - 2i)(2 - 7i)}{(2 + 7i)(2 - 7i)} = \frac{(14 - 14) + (-49 - 4)i}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Рассмотрим теперь квадратное уравнение с вещественными коэффициентами и дискриминантом, меньшим нуля: $ax^2 + bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$.

Корнями такого уравнения будут комплексные числа $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Так

как $\sqrt{D} = \sqrt{(-1)|D|} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|D|} = i\sqrt{|D|}$, то корни можно переписать в виде

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|D|}}{2a}i$, т.е. корнями такого уравнения будут комплексно сопряженные числа.

Замечание.

В дальнейшем мы узнаем, что всегда существует два значения квадратного корня, в частности $\sqrt{-1} = \pm i$, но второе значение не даст новых корней нашего уравнения.

Упражнения.

10. Вычислить $\frac{3 - 2i}{1 + i}$.

11. Вычислить а) $\frac{(1+i)(3-i)}{(1-i)}$; б) $\frac{(8+i)^2}{(2-3i)^2}$.

12. Вычислить $\left(\frac{2i-1}{1+4i} + \frac{5-2i}{4-i}\right) \cdot \frac{34}{1-i}$.

13. Найти вещественные числа x и y такие, чтобы было верным равенст-

во $\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$.

14. При каких вещественных значениях x и y числа $4 + xyi$ и $x + y + 5i$ будут сопряженными?

15. Доказать, что кубы сопряженных чисел представляют собой сопряженные числа.

16. Упростить $(a + 1 + i)(a - 1 + i)(a - 1 - i)(a + 1 - i)$.

17. Упростить $(x + 2 - 3i)(x - 2 + 3i)(x + i)(x - i)$.

18. Составьте квадратное уравнение, одним из корней которого является число $2 - i$.

19. Найти комплексное число, равное квадрату числа, сопряженного с ним.

20. Найти все комплексные числа, которые удовлетворяют условию $(1 - i)\bar{z} = (1 + i)z$.

21. Доказать равенство $\frac{6 - i}{3 + 4i} = \frac{13 + 41i}{-25 + 25i}$.

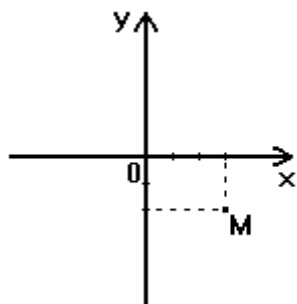
§5 Геометрическая интерпретация комплексного числа

Как известно из школьного курса математики, вещественное число изображается точкой на числовой прямой. Комплексное число $a + bi$ определяется двумя вещественными числами, поэтому ему можно сопоставить точку $M(a, b)$ координатной плоскости и, наоборот, каждой точке плоскости $M(a, b)$ можно сопоставить комплексное число $a + bi$. Поэтому можно рассматривать комплексные числа как точки плоскости, которую мы будем называть комплексной плоскостью. Ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой.

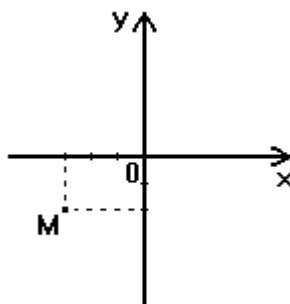
Примеры:

Изобразить на комплексной плоскости числа

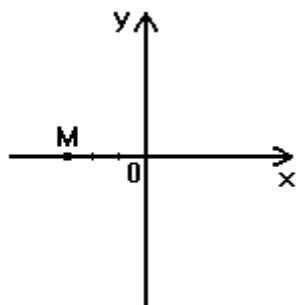
$$z = 3 - 2i$$



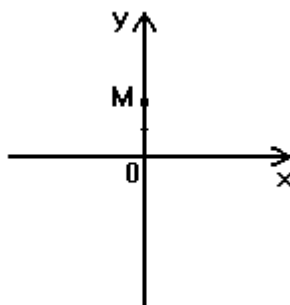
$$z = -3 - 2i$$



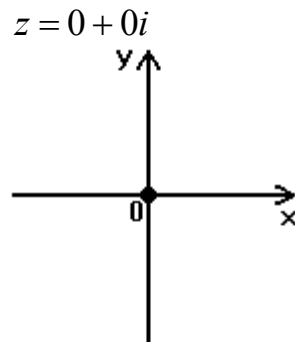
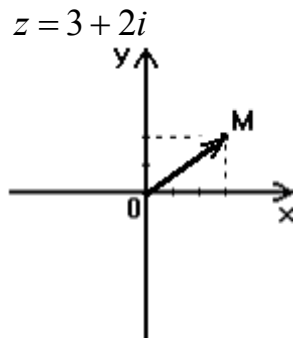
$$z = -3$$



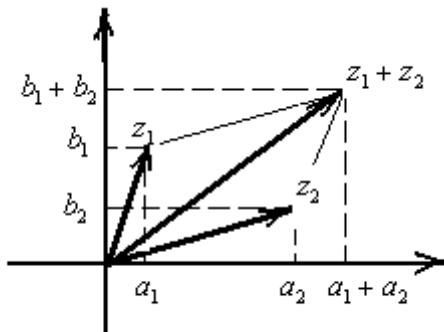
$$z = 2i$$



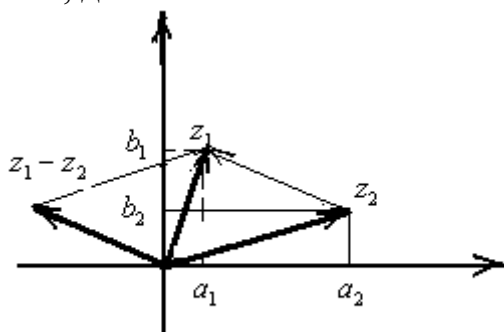
Часто комплексное число интерпретируют как вектор, направленный из начала координат в точку $M(a,b)$. Точке $O(0,0)$ соответствует нулевой вектор или число $0 + 0i$.



Интересно отметить, что сложение комплексных чисел, введенное в их определении, полностью согласуется со сложением векторов по правилу параллелограмма.



Аналогично можно дать геометрическую иллюстрацию разности двух комплексных чисел, но нужно помнить, что вектор, изображающий комплексное число, должен начинаться в начале координат.



Используя интерпретацию комплексного числа в виде вектора, можно задать два параметра, полностью определяющие комплексное число.

Определение 1.

Модулем комплексного числа называется длина вектора, соответствующего этому числу.

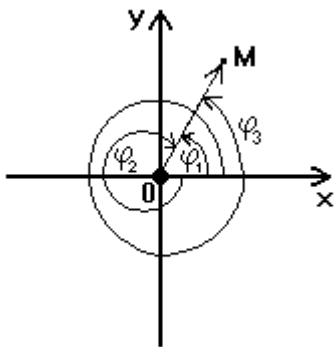
Для модуля z используют обозначение $|z|$. Используя формулу для длины вектора, получим $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Очевидно, для всякого z справедливо $|z| \geq 0$, причем равенство $|z| = 0$ будет выполнено тогда и только тогда, когда $z = 0 + 0i$.

Из геометрической интерпретации суммы двух комплексных чисел видно, что для комплексных чисел выполнено неравенство треугольника $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Определение 2.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и вектором z , причем, в правой системе координат угол считается положительным, если он измеряется против часовой стрелки, и отрицательным, если измерение угла производится по часовой стрелке. Для числа $z = 0 + 0i$ аргумент не определяется.

Аргумент числа z будем обозначать $Argz$ или φ . Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. На рисунке углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – возможные значения $Argz$.



Ясно, что, если φ_0 – какое-нибудь значение $Argz$, то $Argz = \varphi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Значения аргументов комплексного числа $a + bi$ можно найти из любого из уравнений:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \text{ или } \sin \varphi = \frac{b}{|z|} \text{ или } \cos \varphi = \frac{a}{|z|}.$$

Замечание.

Каждое из этих уравнений имеет больше решений, чем требуется. Нужные решения отбирают, определяя квадрант комплексной плоскости, где расположено данное комплексное число.

Примеры. Найти модуль и аргумент для чисел

a) $2 - 2\sqrt{3}i$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; c) -5 ; d) $3i$.

Решение.

a) По условию, $a = \operatorname{Re}(2 - 2\sqrt{3}i) = 2$, $b = \operatorname{Im}(2 - 2\sqrt{3}i) = -2\sqrt{3}$. Поэтому

$$|2 - \sqrt{3}i| = \sqrt{4 + 12} = 4 \text{ и } \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Точка на плоскости, соответствующая числу $2 - 2\sqrt{3}i$, лежит в четвертой четверти, поэтому мы должны указать угол, тангенс которого равен $-\sqrt{3}$, и который лежит в четвертой четверти. Это будет, например, угол $-\frac{\pi}{3}$. Общая

формула для такого угла $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

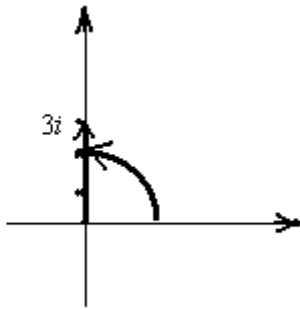
b) $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Тогда $\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

В этом случае точка лежит в третьей четверти, поэтому $\varphi = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

с) Здесь $a = -5$, $b = 0$. Поэтому $|-5| = \sqrt{25 + 0} = 5$ и $\operatorname{tg} \varphi = 0$. Используя геометрическую интерпретацию числа -5 , получим $\varphi = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что, используя геометрическую интерпретацию числа, в этом примере легко найти и модуль.

d)



Число $3i$ изображается точкой, лежащей на мнимой оси, на верхней ее части. Модуль этого числа, равный длине вектора, проведенного из начала координат в эту точку, равен 3, а аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вещественную и мнимую части комплексного числа можно выразить через его модуль $|z| = r$ и аргумент φ следующим образом: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

Таким образом, каждое комплексное число полностью определяется заданием его модуля и одного из значений аргумента. Значение аргумента, лежащее в промежутке $(-\pi, \pi]$ будем называть главным значением аргумента и обозначать $\operatorname{arg} z$.

Заметим, что для комплексно-сопряженных чисел выполняются соотношения $|z| = |\bar{z}|$, $\operatorname{arg} z = -\operatorname{arg} \bar{z}$.

Упражнения.

22. Построить на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам: $2 - 5i$; $-3 + 4i$; 5 ; $-3i$.

23. Найти модуль и главное значение аргумента чисел: а) $3 + 3\sqrt{3}i$; б) $-2\sqrt{3} + 2i$; в) $-2 - 2i$; д) -2 .

24. Докажите, что если $|z| = 1$, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

25. Вычислите модули комплексных чисел а) $z = (1 + i)^4 - 3i$;

б) $z = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + i\sqrt{2ab}}{(a - b) + 2i\sqrt{ab}}$.

26. Докажите, что для любых двух комплексных чисел выполняется равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Дайте геометрическую интерпретацию этого равенства.

27. Докажите, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, соответствующими этим числам.

28. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы квадрат комплексного числа равнялся квадрату его модуля.

§6 Тригонометрическая форма комплексного числа.

Используя выражения для вещественной и мнимой частей комплексного числа через его модуль и аргумент, получим $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Это представление называется тригонометрической формой комплексного числа. Запись $z = a + bi$ называется его алгебраической формой.

Два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули и взятые значения аргументов отличаются на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В тригонометрической форме удобно производить действия с комплексными числами, связанные с умножением.

1. Умножение

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Произведение комплексных чисел есть число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент – сумме их аргументов.

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } z_1 \cdot z_2 &= (r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)) \cdot (r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Следствие. Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел.

Пример. Найти произведение $z_1 \cdot z_2$ двух комплексных чисел, если $z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ и $z_2 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение. Модуль произведения равен $|z_1| \cdot |z_2| = 3 \cdot 2 = 6$ и аргумент произведения - $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{3} = \frac{23\pi}{15}$. Поэтому $z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos \frac{23\pi}{15} + i \sin \frac{23\pi}{15}\right)$.

2. Деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Частное двух комплексных чисел есть число, модуль которого равен частному модулей этих чисел, а аргумент – разности их аргументов.

Доказательство. Обозначим через $\rho(\cos\psi + i \sin\psi)$ тригонометрическую форму числа, которое получится в результате деления $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$

Тогда $(r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2))(\rho(\cos\psi + i \sin\psi)) = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ или $r_2 \cdot \rho(\cos(\varphi_2 + \psi) + i \sin(\varphi_2 + \psi)) = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$.

Отсюда $r_2 \cdot \rho = r_1 \Rightarrow \rho = \frac{r_1}{r_2}$ и $\varphi_2 + \psi = \varphi_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k$,

т.е. $\varphi_1 - \varphi_2$ - одно из значений аргумента числа $\frac{z_1}{z_2}$.

Следствие. Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел.

Пример. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел, если $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{5}\right)$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение. Модуль частного равен $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{3}{2}$ и аргумент частного - $\frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{17\pi}{15}$. Очевидно, что это значение аргумента эквивалентно $\frac{13\pi}{15}$. Поэтому $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i \sin\frac{13\pi}{15}\right)$.

3. Возведение в степень с натуральным показателем

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

При возведении числа в степень с натуральным показателем, его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Эта формула называется *формулой Муавра*. (Муавр (1667 – 1754) – английский математик.)

Доказательство. Из формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме, получим

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

$$z^3 = r^3 (\cos(2\varphi + \varphi) + i \sin(2\varphi + \varphi)) = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$$

и т.д.

Строгое доказательство получится, если применить метод математической индукции.

Пример. Вычислить $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$.

Решение. Переведем основание степени в тригонометрическую форму:

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi. \text{ Тогда } \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15} = \cos \frac{30}{3}\pi + i \sin \frac{30}{3}\pi = 1.$$

4. Извлечение корня.

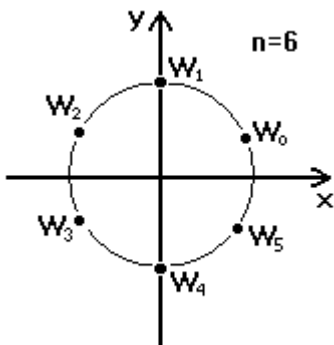
Определение. Число w называется *корнем* степени n из числа z , если $w^n = z$.

Обозначать корень n -ой степени из z будем $\sqrt[n]{z}$.

Каждое решение уравнения $w^n = z$ является корнем n -ой степени из z . Все корни n -ой степени из числа z можно найти по формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень из модуля числа z , а φ - одно из значений $Argz$.

Доказательство. Обозначим $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$. Тогда $w^n = \rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z$. Отсюда $\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, и $n\psi = \varphi + 2\pi k \Rightarrow \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Множество значений аргумента ψ содержит n различных элементов, которые получаются, когда k принимает любые последовательные n целых значений, например, от 0 до $n-1$.



Так как модуль каждого значения $\sqrt[n]{z}$ равен $\sqrt[n]{r}$, то все корни лежат на одной окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$, так как разность между соседними значениями аргумента корня равна $\frac{\varphi + 2\pi(k+1)}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{2\pi}{n}$, то точки, изображающие $\sqrt[n]{z}$, делят эту окружность на n равных частей.

Примеры.

1. Вычислить $\sqrt{8 + 8\sqrt{3}i}$.

Решение. Переведем число, стоящее под корнем в тригонометрическую форму: $8 + 8\sqrt{3}i = 16 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Тогда $\sqrt{8 + 8\sqrt{3}i} =$

$$= \sqrt{16} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} \right) = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi k \right) \right), \text{ где } k$$

принимает значения 0 или 1. При этих значениях k получим

$$z_1 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3} + 2i \text{ и, аналогично, } z_2 = -2\sqrt{3} - 2i.$$

2. Вычислить $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Тригонометрическая форма числа, стоящего под корнем имеет вид $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$. Тогда $\sqrt[3]{-8} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right)$, где $k = 0, 1, 2$. Выписывая каждое значение корня, получим $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$ и $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

3. Вычислить $\sqrt[3]{\frac{(2 + 2\sqrt{3}i)^5 (-2 + 2i)^6}{(\sqrt{3} + i)^{10}}}$.

Решение. Сначала каждое число представим в тригонометрической форме: $2 + 2\sqrt{3}i = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, $-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ и $\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. Модуль подкоренного выражения будет равен $\frac{4^5 \cdot (2\sqrt{2})^6}{2^{10}} = 2^9$, а аргумент $5 \cdot \frac{\pi}{3} + 6 \cdot \frac{3\pi}{4} - 10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi}{2}$, что эквивалентно $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, число, стоящее под корнем равно $2^9 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, и, извлекая корень, получим $8 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right)$, где $k = 0, 1, 2$.

Упражнения.

29. Вычислить в тригонометрической форме а) $\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$; б) $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$;

в) $\frac{(1 + i)^5 (\sqrt{3} + i)^{10}}{(1 - i)^4 (1 - i\sqrt{3})^{11}}$; д) $\frac{(1 - i)^7 (-\sqrt{3} - i)^{12}}{(1 + i)^{15}}$; е) $\frac{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}{1 + \cos \varphi - i \sin \varphi}$;

ф) $(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^8$.

30. Вычислите а) $\sqrt[3]{-1 + i}$; б) $\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[4]{-81}$; д) $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$.

31. Вычислите $\sqrt[4]{\frac{(-1 + i)^3 (\sqrt{3} - i)^5}{(2 + 2\sqrt{3}i)^7}}$.

32. Доказать, что если $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, то $\frac{1}{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

33. Вычислить модуль числа $\frac{a+bi}{a-bi}$.

34. Доказать, что отношение двух комплексных чисел с равными аргументами равно вещественному числу.

35. Дан треугольник с вершинами z_1, z_2 и z_3 . Установить геометрический смысл аргумента числа $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$.

36. Доказать, что если аргументы чисел $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ и $\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$ равны между собой, то точки z_1, z_2, z_3 и z_4 лежат на одной прямой или на одной окружности.

37. Найти все корни уравнения $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

38. Выразите через $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ 1) $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ 2) $\cos 5\varphi$; $\sin 5\varphi$.

39. Решите уравнения а) $8z^3 + 27 = 0$; б) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$.

40. Вычислить $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$, $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

41. Вычислить $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

42. Доказать равенство $(\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n = 2^{n+1} \cos \frac{\pi n}{6}$.

43. Доказать равенство $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \varphi}{1-i \operatorname{tg} \varphi}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\varphi}{1-i \operatorname{tg} n\varphi}$.

§7 Показательная форма комплексного числа

Определим операцию возведения числа e в степень с комплексным показателем следующей формулой

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Здесь число $w = e^{x+iy}$ определено в тригонометрической форме, где $|w| = e^x$ и y - одно из значений аргумента. Следовательно, если произвольное комплексное число записать в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то его также можно записать и в виде $z = r \cdot e^{i\varphi}$, который называется показательной формой комплексного числа.

Очевидно, что $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

Из формул $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ и $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ следуют формулы $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ и $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$, которые называются формулами Эйлера.

Примеры.

1. Вычислить $e^{2\pi i}$.

Решение. $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

2. Найдите сумму 1) $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$; 2) $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$.

Решение. Обозначим первую сумму - S_1 , а вторую - S_2 . Тогда $S_1 + iS_2 = (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \dots + (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi}$. Сумма, стоящая в правой части равна $\frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1}$, как сумма геометрической прогрессии. Тогда

$$S_1 + iS_2 = \frac{(e^{i(n+1)\varphi} - e^{i\varphi})(e^{-i\varphi} - 1)}{(e^{i\varphi} - 1)(e^{-i\varphi} - 1)} = \frac{e^{in\varphi} - 1 - e^{i(n+1)\varphi} + e^{i\varphi}}{2 - (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} =$$

$$= \frac{(\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi - 1 + \cos \varphi) + i(\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin \varphi)}{2(1 - \cos \varphi)}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим $S_1 = \frac{\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi - 1 + \cos \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}$ и

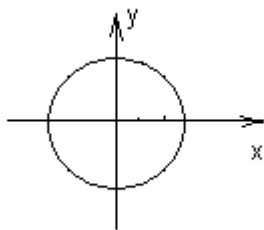
$$S_2 = \frac{\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)}.$$

§8 Построение кривых и областей на комплексной плоскости

Рассмотрим несколько задач.

1. Построить на комплексной плоскости кривую, все точки которой удовлетворяют условию а) $|z| = 3$; б) $Argz = \frac{2\pi}{3}$; в) $Re z = -1$.

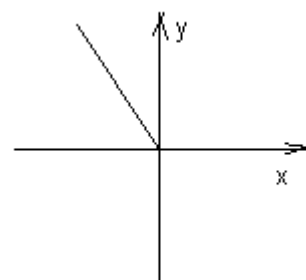
Решение.



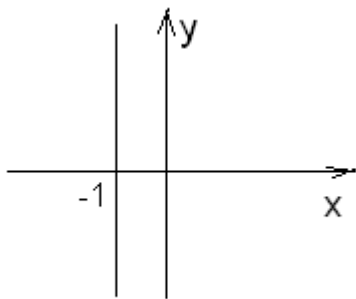
а) Модуль комплексного числа равен длине вектора, идущего из начала координат в точку, изображающую это число на комплексной плоскости. Следовательно, условию $|z| = 3$ будут удовлетворять все числа, которым соответствуют точки на плоскости, находящиеся на расстоянии 3 от начала координат. Эти точки лежат на окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

ординат.

б) Все точки комплексной плоскости, имеющие один и тот же аргумент φ , лежат на луче, составляющем угол φ с вещественной осью. Поэтому точки, удовлетворяющие условию $Argz = \frac{2\pi}{3}$, лежат на луче,



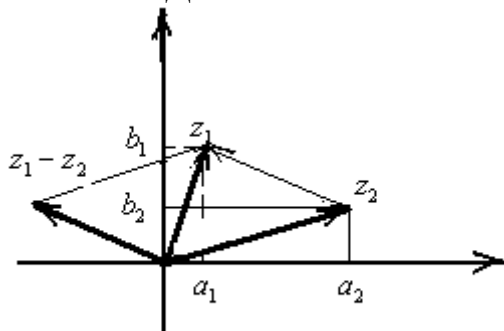
составляющем угол $\frac{2\pi}{3}$ с вещественной осью.



с) Если положить $z = x + iy$, то числа, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} z = -1$, имеют $x = -1$ и произвольный y . Следовательно, соответствующие точки будут лежать на прямой $x = -1$.

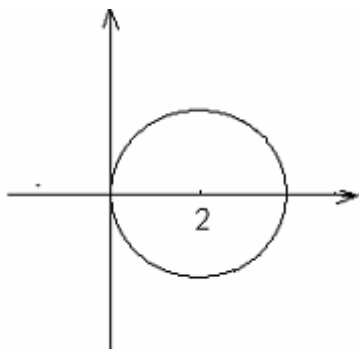
2. Доказать, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, соответствующими этим числам.

Решение. Доказательство этого утверждения очевидно из рисунка:

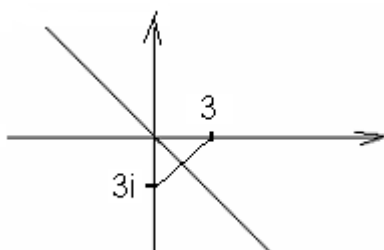


3. Построить на комплексной плоскости кривую, точки которой удовлетворяют условию а) $|z - 2| = 2$; б) $|z - 3| = |z + 3i|$; в) $|z| = \operatorname{Re}(z + 2)$.

Решение.



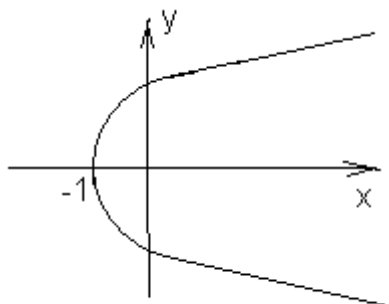
а) Используя результат предыдущей задачи, получим, что искомая кривая – окружность с центром в точке 2 и радиуса 2.



б) *Первый способ.* Так как $|z + 3i| = |z - (-3i)|$, то $|z + 3i|$ равен расстоянию от точки z до точки $-3i$. Тогда условие $|z - 3| = |z + 3i|$ означает, что расстояние от точки z до точки 3 равно расстоянию от точки z до точки $-3i$. Как известно из геометрии, все точки, равноудаленные от двух данных, лежат на прямой, пер-

пендикулярной отрезку, соединяющему эти точки и проходящему через его середину. Очевидно, это будет прямая $y = -x$.

Второй способ. Положим $z = x + iy$. Тогда $|z - 3| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$ и $|z + 3i| = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$. Условие $|z - 3| = |z + 3i|$ дает уравнение $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$. Преобразуя это уравнение, получим $y = -x$.

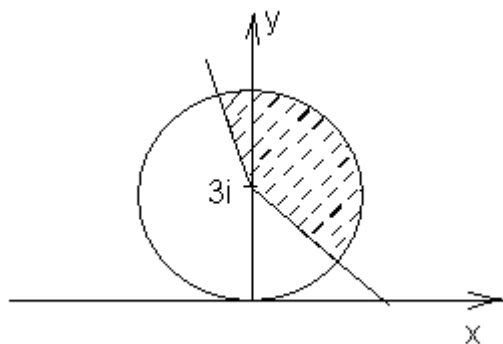


с) Применим алгебраический способ. Т.е. положим $z = x + iy$ и условие $|z| = \operatorname{Re}(z + 2)$ запишем в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$. Возводя последнее уравнение в квадрат, получим уравнение параболы: $y^2 = 4x + 4$.

1. Построить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условию

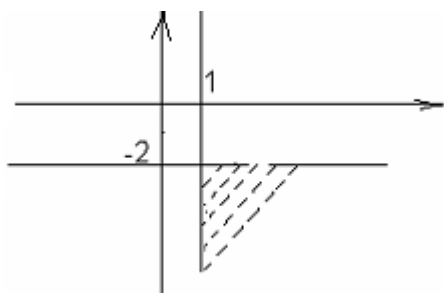
$$\text{a) } \begin{cases} |z - 3i| \leq 3 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 3i) \leq \frac{3}{5}\pi \end{cases}; \text{ b) } \begin{cases} \operatorname{Re} z \geq 1 \\ \operatorname{Im} z \leq -2 \end{cases}.$$

Решение.



а) Первому условию удовлетворяют точки круга с центром в точке $3i$ радиуса 3. Второму условию будут удовлетворять точки, лежащие внутри угла с вершиной в точке $3i$, образованного лучами, составляющими с положительным направлением вещественной оси углы $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3}{5}\pi$.

Решением задачи будет общая часть этих множеств. Граница этого сектора входит в искомое множество.



в искомое множество.

б) Точки, удовлетворяющие первому условию, лежат правее прямой $x = 1$, а точки, удовлетворяющие второму – ниже прямой $y = -2$. Искомое множество – угол, лежащий в пересечении этих полуплоскостей. Стороны этого угла входят

Упражнения.

44. Построить на комплексной плоскости кривую, точки которой удовлетворяют условию а) $|z+i|=2$ б) $|z+3i|=|z-i|$ в) $|z|=\operatorname{Im}(z+i)$ д) $z \cdot \bar{z} + 3\bar{z} + 3z = 0$.

45. Построить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условию а) $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ б) $|z-i| > 1$ в) $|z-i| < |z+1|$ д) $|\operatorname{Im} z| \leq 1$

е) $|1+z| < |1-z|$ ф) $\begin{cases} 1 < |z+2i| < 2 \\ |\arg(z+2i)| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ г) $\begin{cases} |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| \leq 1 \\ |\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z| \leq 1 \end{cases}$ х) $\begin{cases} |z| < \operatorname{Im} z + 1 \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$.

Ответы и решения.

1. а) нет; б) нет; в) да; 2. а) $116+9i$ б) $-29+4i$. 3. а) $\left(\frac{2}{7}, 16\right)$; б) $(1,2), (-1,-2)$.

4. а) $\pm(3-4i)$; б) $\pm(5+7i)$; 5. можно; 6. а) $-3-4i$; б) $-8i$; в) $2+11i$; д) 1;

7. $-2-4i$; 8. -8 ; 9. $n=4k, k \in N$; 10. $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$; 11. а) $1+3i$ б) $-3+4i$; 12. $26+32i$;

13. $(0,7)$; 14. $(5,-1); (-1,5)$; 16. a^4+4 ; 17. $x^4+x^2(6+12i)+5+12i$;

18. x^2-4x+5 ; 19. **Решение.** Обозначим искомое число через $x+yi$. Требуется

найти число, удовлетворяющее равенству $x+yi=(x-yi)^2$ или $x+yi=$

$=x^2-y^2-2xyi$. Приравнявая вещественные и мнимые части, получим систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=x \\ -2xy=y \end{cases}, \text{ откуда получаем четыре решения } (0,0), (1,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). 20. a(1-i), a \in R; 23. \text{ а) } |z|=6, \arg z = \frac{\pi}{3}, \text{ б) } |z|=4, \arg z = \frac{5\pi}{6};$$

в) $|z|=2\sqrt{2}, \arg z = -\frac{3\pi}{4}$; д) $|z|=2, \arg z = \pi$; 25. а) 5; б) 1; 28. Число должно

быть вещественным; 29. а) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i; \text{ в) } \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right); \text{ д) } 256\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=256i;$$

е) $\cos\varphi+i\sin\varphi$; ф) $256\cos^8\frac{\varphi}{2}(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)$;

30. а) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k\right)\right), k=0,1,2;$

б) $2\left(\cos\frac{\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi k}{2}\right), k=0,1,2,3$ в) $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)\right),$

$$k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{d) } 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} k \right) \right) \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$31. \frac{1}{2^{9/8}} \left(\cos \left(-\frac{11}{48} + \frac{\pi}{2} k \right) + i \sin \left(-\frac{11}{48} + \frac{\pi}{2} k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad 33. 1; \quad 35. \text{ Модуль этого}$$

аргумента равен углу треугольника с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 , вершина которого находится в точке z_1 ; **37. Решение.** По формуле суммы геометрической

прогрессии $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^6 - 1}{x - 1}$. Корнями данного уравнения

будут те значения x , которые удовлетворяют условиям $\begin{cases} x^6 - 1 = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$. Корнями

уравнения $x^6 - 1 = 0$ будут числа $x = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{6} + i \sin \frac{2\pi k}{6} =$

$= \cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. При $k = 0$ получим $x = 1$ - посторонний

для данного уравнения корень. Отбрасывая его, получим ответ

$$x = \cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

38. 1) Решение. Рассмотрим выражение $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$. Преобразуем это выражение двумя различными способами. С одной стороны, по формуле Муавра $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$. С другой стороны, по формуле куба суммы $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi$. Сравнивая эти выражения и приравнивая их вещественные и мнимые части, получим

$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$ и $\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$. 2) $\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi$; $\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$;

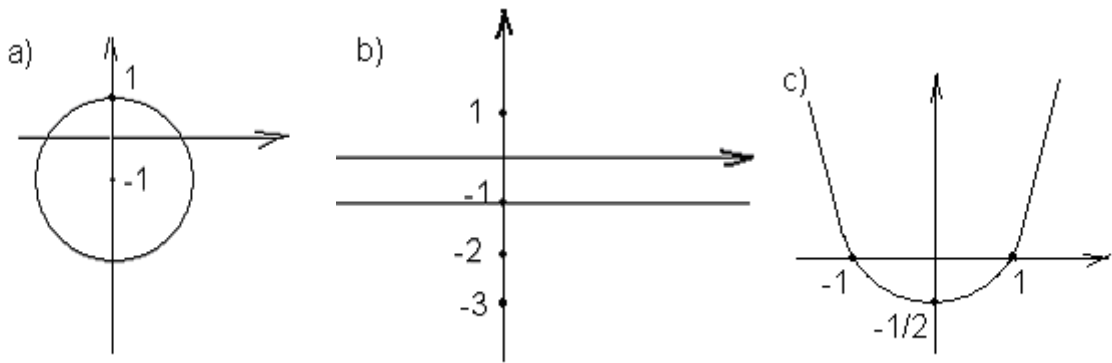
$$39. \quad \text{a) } \frac{3}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\text{b) } z_{1,2,3,4} = 2 \left(\cos \frac{\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi k}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad z_{5,6,7,8} = \cos \frac{\pi m}{2} + i \sin \frac{\pi m}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3;$$

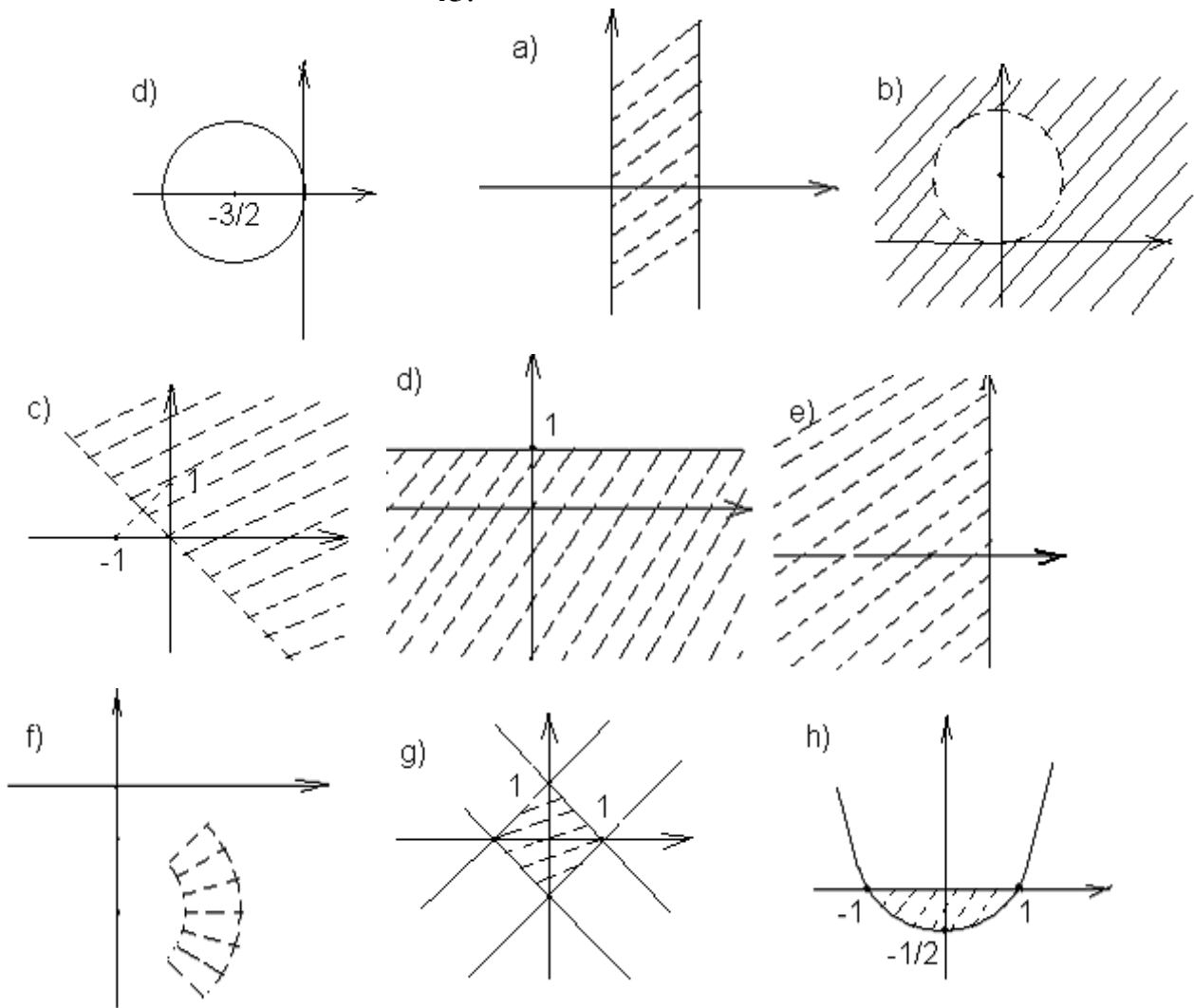
$$40. 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right);$$

$$41. (-1)^n \cdot 2 \cos \frac{\pi n}{3};$$

44.



45.





СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы и успешно реализовал инновационную образовательную программу «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий», что позволило выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворять возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях науки. Реализация этой программы создала основу формирования программы дальнейшего развития вуза до 2015 года, включая внедрение современной модели образования.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибающих поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда

первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 8 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г. Петрашени является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом. Область научных интересов профессора Качалова А.П. – современные методы теории дифракции.

Татьяна Васильевна Родина

Комплексные числа

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Дизайн

И.К. Иванов

Верстка

Т.В. Родина

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати 20.10.2009

Заказ № 2150

Тираж 500

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных техноло-
гий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

