

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

В.А. ЗВЕРЕВ, Е.В. КРИВОПУСТОВА

ОПТОТЕХНИКА НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Учебное пособие



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2006

Зверев В.А., Кривоустова Е.В. ОПТОТЕХНИКА  
НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ  
ИТМО, 2006. – 203 с.

Рассмотрены виды несферических поверхностей и их аберрационные свойства, определяющие смысл и целесообразность их применения при композиции оптических систем. Представлен анализ технологических параметров несферических поверхностей.

Рассмотрены возможные схемы контроля формы поверхности несферических поверхностей, виды компенсаторов компенсационных схем контроля и их свойства, выполнен анализ методов контроля формы несферических поверхностей.

Учебное пособие предназначено для студентов по направлению подготовки "Оптотехника", а также может быть полезно для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием оптических систем, изготовлением и исследованием оптических деталей с несферическими поверхностями.

Учебное пособие подготовлено на кафедре Прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики.

Рецензенты:

д.т.н., профессор Э.С. Путилин (СПбГУ ИТМО)

д.т.н., профессор М.Н. Сокольский (ОАО «ЛОМО»)

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оптоэлектроники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров "Оптотехника" и оптическим специальностям.

© СПбГУ ИТМО  
(Санкт-Петербургский  
государственный университет  
информационных технологий,  
механики и оптики), 2006

© В.А. Зверев,  
Е.В. Кривоустова, 2006

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>5</b>
<b>1. НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ОПТИКЕ.....</b>	<b>7</b>
<b>1.1. Декартовы несферические поверхности.....</b>	<b>7</b>
1.1.1. Несферические преломляющие поверхности.....	10
1.1.2. Декартовы отражающие поверхности вращения несферической формы.....	14
<b>1.2. Первичные aberrации оптических систем, содержащих     несферические поверхности вращения второго     порядка.....</b>	<b>19</b>
<b>1.3. Малые деформации оптических поверхностей.....</b>	<b>25</b>
<b>1.4. Анастигматические несферические поверхности     второго порядка.....</b>	<b>27</b>
<b>1.5. Эквидистантные поверхности профессора     Д.Т. Пуряева.....</b>	<b>30</b>
<b>1.6. Бинарные поверхности.....</b>	<b>34</b>
<b>2. ПАРАМЕТРЫ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....</b>	<b>51</b>
<b>2.1. Геометрические свойства несферических     поверхностей.....</b>	<b>51</b>
<b>2.2. Технологические параметры несферических     поверхностей.....</b>	<b>54</b>
<b>2.3. Допустимые отклонения обрабатываемых     поверхностей от номинальной формы.....</b>	<b>62</b>
<b>3. ПРИНЦИПАЛЬНЫЕ СХЕМЫ КОНТРОЛЯ НЕСФЕРИ- ЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....</b>	<b>68</b>
<b>3.1. Схемы контроля линз, формирующих     безабберационное изображение осевой точки предмета.....</b>	<b>69</b>

3.2. Схемы контроля, основанные на применении анаберрационных точек отражающих несферических поверхностей второго порядка.....	73
3.3. Компенсационная схема контроля несферических поверхностей.....	80
<b>4. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ КОМПЕНСАТОРОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....</b>	<b>83</b>
4.1. Идеальные компенсаторы.....	83
4.2. Схемы контроля выпуклой поверхности гиперboloида вращения.....	91
4.3 Компенсаторы для контроля вогнутых отражающих поверхностей объективов астрономических телескопов....	111
4.3.1. Основные компенсационные схемы контроля несферических поверхностей.....	111
4.3.2. Компенсационная схема контроля с линзовым компенсатором.....	117
4.3.3. Универсальные компенсаторы.....	131
<b>5. МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....</b>	<b>139</b>
5.1. Теневой метод Фуко.....	144
5.2. Метод нити.....	148
5.3. Метод Гартмана.....	150
5.4. Интерференционный метод контроля.....	166
5.4.1. Интерферометр Майкельсона.....	170
5.4.2. Интерферометр Тваймана-Грина.....	175
5.4.3. Интерферометр Физо.....	178
5.4.4. Интерферометры сдвига.....	182
5.5. Метод изофотометрической фоторегистрации.....	194
Литература.....	198

## **ВВЕДЕНИЕ**

В наиболее значительном труде Рене Декарта, посвященном точным наукам, имеется раздел "Диоптрика", в котором рассмотрены вопросы, связанные с расчётом геометрической формы преломляющих поверхностей линз, свободных от сферической аберрации. Р. Декарт показал, что в том случае, когда на оптическую систему падает параллельный пучок лучей, сферическую аберрацию в изображении осевой точки можно исправить путем комбинации эллипсоидной и гиперболоидной поверхностей со сферической и плоской поверхностями соответственно. Р. Декарт показал, что в общем случае сферическую аберрацию в изображении точки, образованном с помощью одной линзы, можно исправить, если одну из сферических преломляющих поверхностей заменить несферической поверхностью четвертого порядка. В заключительной части раздела "Диоптрика" Р. Декартом рассмотрены вопросы, связанные с изготовлением линз с несферическими поверхностями. Здесь автор приводит подробные описания и чертежи конструкций станков для обработки несферических поверхностей. Даже в наше время изготовление линз с несферическими поверхностями представляет значительные трудности. Во времена же Декарта разработка технологии и оборудования для изготовления подобных линз была поистине пионерским начинанием. Поэтому мы вправе считать Рене Декарта одним из основоположников применения несферических поверхностей в оптике. Таким образом, история применения несферических поверхностей в оптике насчитывает более трёх столетий. Тем не менее, и сегодня изготовление деталей с несферическими поверхностями остаётся весьма трудоёмким, а, соответственно, и дорогостоящим делом. Этим объясняется тот факт, что несферические поверхности достаточно широко применяются в оптических системах осветительных устройств, где требования к точности их обработки невысоки, и в тех случаях, когда другими средствами решить задачу создания необходимой оптической системы невозможно. Так, например, построить оптическую систему крупногабаритного объектива астрономического телескопа без применения несферических отражающих поверхностей просто невозможно.

Одной из наиболее наукоёмких и трудоёмких операций процесса обработки несферических поверхностей являются контроль и аттестация формы поверхности. Проблемы, связанные с выполнением

этой процедуры, рассмотрены в монографии профессора Д.Т. Пуряева "Методы контроля оптических асферических поверхностей".

Растущие потребности в создании оптических систем с более высокими характеристиками (относительное отверстие, угловое или линейное поле, качество изображения и т.п.) определяют необходимость в существенном расширении их коррекционных возможностей. В рамках научной школы профессора М.М. Русинова, развивая предложенные им идеи композиции оптических систем, проводятся исследования, связанные с изучением свойств и разработкой методов расчёта несферических поверхностей. Обобщение результатов исследований представлено в монографиях М.М. Русинова "Несферические поверхности в оптике".

Заметное развитие методы и средства контроля и аттестации несферических поверхностей получили в процессе поиска решения этих задач при обработке главного зеркала астрономического телескопа БГА, диаметр которого равен 6,05 м, а форма отражающей поверхности представляет собой параболоид вращения. Результаты этих поисков представлены авторами исследований в ряде журнальных публикаций.

Для оценки эффективности, оправданности применения несферических поверхностей в оптических системах, для определения оптимальных средств и технологического процесса обработки поверхностей, их контроля и аттестации необходимо знание свойств несферических поверхностей и методов их расчёта, а также свойств оптических методов и средств, определяющих саму возможность обработки поверхностей.

# 1. НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ОПТИКЕ

## 1.1. Декартовы несферические поверхности

Оптические системы, которые все лучи света, исходящие из некоторой точки  $A$  предмета, направляют в точку  $A'$  изображения, сопряжённую с точкой  $A$ , называют стигматическими (или анаберрационными) оптическими системами. В основу определения условия образования точечного изображения могут быть положены следующие соображения.

Пусть из некоторой точки предмета, помещенного в среду с показателем преломления  $n$ , исходит гомоцентрический пучок световых лучей. В таком случае, если среда однородна ( $n = const$ ), волновые поверхности (поверхности равного эйконала) в пространстве предметов имеют сферическую форму с центром кривизны в точке  $A$ . Пусть сферическая поверхность  $L_s$  представляет собой одну из этих волновых поверхностей, радиус кривизны которой равен  $r$ . Эту волновую поверхность будем считать фиксированной. После прохождения через оптическую систему пучок лучей, излучаемый точкой  $A$ , выходит в среду пространства изображений, показатель преломления которой равен  $n'$ . В случае однородной среды в пространстве изображений показатель преломления  $n' = const$ . Будем считать, что лучи в пространстве изображений пересекаются в одной точке  $A'$ . Пусть  $L_i$  – волновая сферическая поверхность радиуса  $r'$ , зафиксированная в пространстве изображений, как показано на рис.1.1.

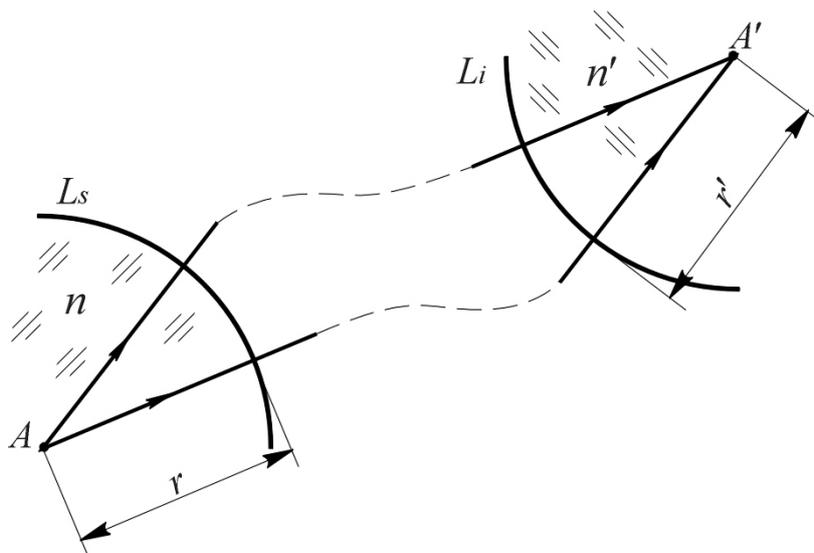


Рис.1.1. Условие образования точечного изображения

Согласно определению волновых поверхностей, световые колебания на сферах  $L_s$  и  $L_i$  находятся в фазе, если оптические пути вдоль любого луча между сферами  $L_s$  и  $L_i$  одинаковы при любой сложности оптической системы, что может быть записано в виде:

$$[L_s L_i] = const. \quad (1.1)$$

В пространстве предметов оптический путь  $nr$  по принятому условию является величиной постоянной. При сферической форме волнового фронта  $L_i$ , т.е. при точечном изображении точки  $A$ , оптический путь  $n'r'$  также является величиной постоянной. Следовательно, при сферической форме волновых фронтов  $L_s$  и  $L_i$  имеем:

$$nr + [L_s L_i] + n'r' = const. \quad (1.2)$$

Вполне очевидно, что выражение (1.2) распространяет понятие оптической длины пути лучей на весь проходимый светом путь от точки  $A$  предмета до сопряжённой точки  $A'$  изображения. Поэтому формулу (1.2) можно записать в виде:

$$[AA'] = const. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) определяет условие образования точечного (или стигматического) изображения точки: для того, чтобы изображение некоторой точки  $A$  предмета, образованное оптической системой, было точечным, необходимо, чтобы оптическая длина пути всех лучей, соединяющих точку  $A$  с сопряжённой с ней точкой  $A'$ , была одинаковой.

Для практических вычислений выражение (1.3) удобно заменить выражением:

$$nr + [L_s L_i] = const. \quad (1.4)$$

Если условие (1.4) при  $n' = const$  не выполняется, то разность

$$W = nr + [L_s L_i] - nr - [L_s R'] = [L_s L_i] - [L_s R']$$

или

$$W = [A L_i] - [A R'], \quad (1.5)$$

где  $R'$  – сфера, концентричная номинальному положению точки  $A'$ , вершина которой совмещена с вершиной волновой поверхности  $L_i$ , определяет волновую аберрацию.

Отдельная преломляющая (или отражающая) поверхность, строго удовлетворяющая условию (1.3), образует точечное изображение некоторой точки  $A$  предмета и называется анаберрационной поверхностью. Определим уравнение такой поверхности.

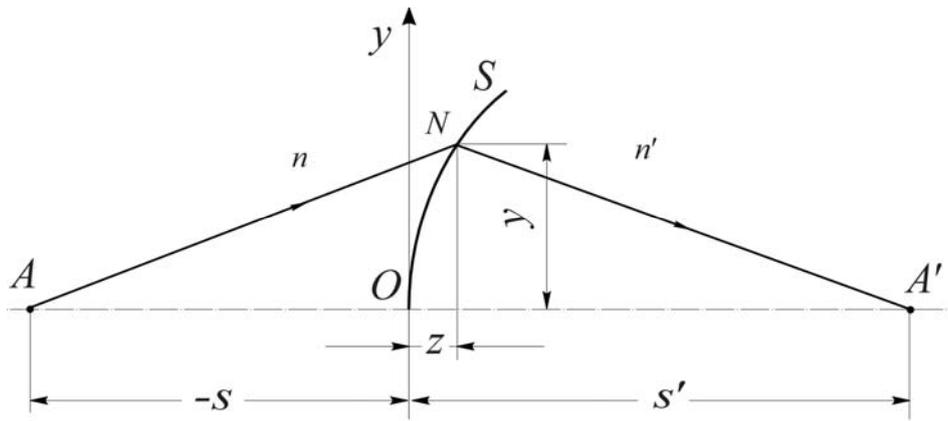


Рис.1.2. Меридиональное сечение декартовой несферической преломляющей поверхности

Пусть кривая  $OS$  представляет собой меридиональное сечение преломляющей поверхности вращения, разделяющей сферы с показателями преломления  $n$  и  $n'$ , как показано на рис.1.2. Требуется определить такую форму преломляющей поверхности, при которой все лучи, исходящие из точки  $A$ , лежащей на оптической оси, собирались бы в некоторой точке  $A'$ . Пусть  $ANA'$  – один из лучей, исходящих из точки  $A$  и пересекающих оптическую ось в пространстве изображений в точке  $A'$ ;  $N$  – точка падения луча на преломляющую поверхность. Положение точек  $A$  и  $A'$  на оптической оси задано отрезками  $s$  и  $s'$ . Для выполнения сформулированного требования необходимо соблюдение условия (1.3) точечного изображения точки, которое в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$nAN + n'NA' = -ns + n's'. \quad (1.6)$$

Правая часть этого выражения определяет величину оптического пути по ходу луча вдоль оптической оси.

Введем декартову систему координат  $xuz$ , расположив начало системы координат в осевой точке  $O$  преломляющей поверхности, ось  $u$  – в плоскости рисунка, а ось  $z$  – на оптической оси поверхности при положительном направлении слева направо. В общем случае уравнение преломляющей поверхности вращения можно записать в виде:  $\rho^2 = f(z)$ , где  $\rho^2 = x^2 + u^2$ . Положив  $x = 0$ , получаем уравнение сечения этой поверхности меридиональной плоскостью, т.е. плоскостью, проходящей через оптическую ось. В соответствии с рис.1.2 имеем

$$AN = \sqrt{y^2 + (z - s)^2}, \quad NA' = \sqrt{y^2 + (s' - z)^2}.$$

Эти соотношения позволяют уравнение (1.6) представить в виде:

$$n' \sqrt{y^2 + (s' - z)^2} = n's' - ns - n \sqrt{y^2 + (z - s)^2}.$$

Возведя левую и правую части этого выражения в квадрат, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{n'^2 - n^2}{2} (y^2 + z^2) - (n'^2 s' - n^2 s) z + \frac{1}{2} (n'^2 s'^2 - n^2 s^2) - \frac{1}{2} (n's' - ns)^2 = \\ = -n(n's' - ns) \sqrt{y^2 + (z - s)^2}. \end{aligned}$$

Возведя обе части найденного выражения в квадрат, в результате последующих преобразований получаем окончательный вид уравнения кривой, образующей анаберрационную поверхность вращения:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{n'^2 - n^2}{2} (y^2 + z^2) - (n'^2 s' - n^2 s) z \right]^2 = \\ = n'n(n's' - ns) \left[ (ns' - n's)(y^2 + z^2) + 2(n' - n)s'sz \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Отсюда следует, что в общем случае анаберрационная преломляющая поверхность вращения имеет несферическую форму, определяемую уравнением образующей кривой четвертой степени. Такие поверхности называют декартовыми поверхностями, а образующие их кривые – овалами Декарта или картезианскими овалами (от латинизированного имени Р. Декарта *Cartesius* – Картезий). В ряде частных случаев уравнение (1.7) существенно упрощается. Рассмотрим некоторые из них.

### 1.1.1. Несферические преломляющие поверхности

В практике проектирования оптических систем преломляющую поверхность вращения второго порядка в декартовой системе координат, начало которой расположено в осевой точке поверхности, а ось  $z$  направлена вдоль оси вращения слева направо, наиболее часто принято представлять уравнением вида:

$$x^2 + y^2 = 2rz - (1 + \sigma_e)z^2, \quad (1.8)$$

где  $r$  – радиус кривизны в осевой точке поверхности, величину которого считают положительной, если центр кривизны расположен справа от поверхности, и, наоборот, отрицательным, если центр кривизны расположен слева от неё;  $\sigma_e = -e^2$ , где  $e$  – эксцентриситет кривой второго порядка, образующей поверхность вращения. Константу  $\sigma_e$  принято называть коэффициентом деформации сферической поверхности. Иногда оказывается удобным то же уравнение решить относительно координаты  $z$ , представив его в виде:

$$z = \frac{r}{1 + \sigma_e} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} (1 + \sigma_e)} \right], \quad (1.9)$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$ .

Разделив левую и правую части уравнения (1.7) на  $n^4 s^2$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{n'^2 - n^2}{2n^2} \frac{y^2 + z^2}{s} + \left( 1 - \frac{n'^2}{n^2} \frac{s'}{s} \right) z \right]^2 = \\ & = \frac{n'^2}{n^2} \left( 1 - \frac{n'}{n} \frac{s'}{s} \right) \left[ \left( 1 - \frac{n'}{n} \frac{s'}{s} \right) (y^2 + z^2) - 2 \frac{n' - n}{n'} s' z \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При  $s = \infty$  отрезок  $s'$  становится равным фокусному расстоянию преломляющей поверхности, т.е. при  $s = \infty$  отрезок  $s' = f'$ . При этом выражение (1.10) принимает вид уравнения кривой второго порядка:

$$y^2 = 2 \frac{n' - n}{n'} f' z - \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \right) z^2. \quad (1.11)$$

Полученное уравнение определяет образующую кривую несферической поверхности второго порядка; радиус кривизны в осевой точке поверхности в соответствии с уравнением (1.8) равен

$$r = \frac{n' - n}{n'} f', \quad (1.12)$$

а коэффициент деформации сферической поверхности

$$\sigma_e = -\frac{n^2}{n'^2}. \quad (1.13)$$

Вид образующей кривой преломляющей поверхности вращения определяется значением коэффициента деформации  $\sigma_e$ , т.е., как следует из соотношения (1.13), величиной отношения показателей преломления разделяемых сред. При  $n' > n$  величина

$e^2 = -\sigma_e = \frac{n^2}{n'^2} < 1$ . При этом уравнение (1.11) определяет сечение

меридиональной плоскостью поверхности эллипсоида вращения. Дополнив поверхность эллипсоида сферической поверхностью, концентричной заднему фокусу преломляющего эллипсоида, получаем сфероэллипсоидную линзу, как показано на рис.1.3, образующую стигматическое изображение бесконечно удалённой осевой точки предмета.

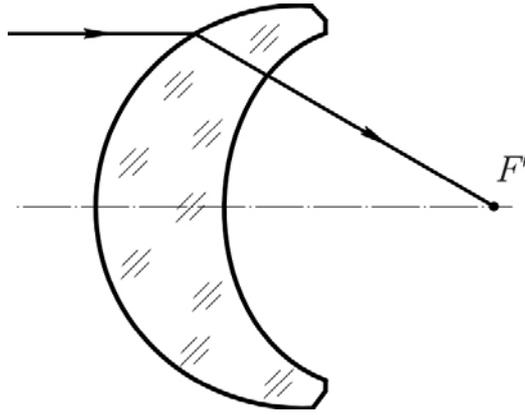


Рис.1.3. Сфероэллипсоидная линза

Пусть  $n' < n$ . При этом величина  $e^2 > 1$ . В этом случае уравнение (1.11) определяет сечение меридиональной плоскостью поверхности гиперboloида вращения. Сочетание плоской поверхности с гиперboloидом образует плоскогиперboloидную линзу, формирующую стигматичное изображение бесконечно удалённой осевой точки предмета, как показано на рис.1.4. Плоскогиперboloидная и сфероэллипсоидная линзы применяются в устройствах формирования лазерного пучка лучей, а также в осветительных оптических системах для улучшения светораспределения на поверхности изображения, образованного проекционными устройствами.

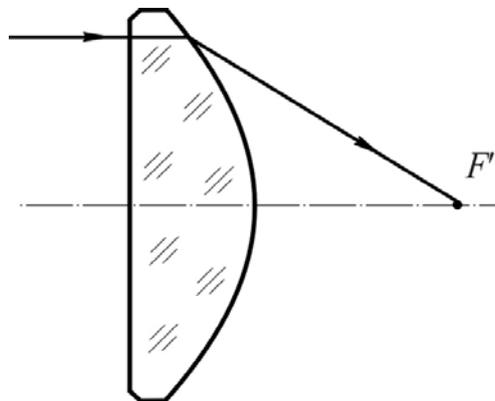


Рис.1.4. Плоскогиперboloидная линза

Положив в уравнении (1.11) ординату  $y=0$ , находим значения абсцисс  $z_1$  и  $z_2$ , определяющих положение вершин кривой второго порядка:  $z_1=0$ ,  $z_2=2\frac{n'}{n'+n}f'$ . В смещенной системе координат  $y, z$  на расстояние  $z_c=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{n'}{n'+n}f'$  относительно исходного положения уравнение (1.11) принимает вид:

$$\frac{z^2}{\frac{n'^2}{(n'+n)^2} f'^2} + \frac{y^2}{\frac{n'-n}{n'+n} f'^2} = 1.$$

При  $n' > n$  это уравнение принимает вид канонического уравнения эллипса:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При этом расстояние между геометрическими фокусами эллипса равно

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{n'^2}{(n'+n)^2} f'^2 - \frac{n'-n}{n'+n} f'^2} = \frac{n}{n'+n} f',$$

а расстояние от вершины эллипса до геометрических фокусов равно

$$OF = a \pm c, \text{ причём } OF_1 = a + c = f', \quad OF_2 = a - c = \frac{n'-n}{n'+n} f'.$$

При  $n' < n$  имеем каноническое уравнение гиперболы вида:

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Расстояние между геометрическими фокусами гиперболы равно:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{n}{n'+n} f'.$$

При этом расстояние от вершины гиперболы до геометрических фокусов равно:

$$OF = c \pm a,$$

причём

$$OF_1 = c + a = \frac{n}{n'+n} f' + \frac{n'}{n'+n} f' = f',$$

$$OF_2 = c - a = -\frac{n'-n}{n'+n} f'.$$

Из полученных соотношений следует, что декартовы преломляющие поверхности вращения второго порядка образуют изображение бесконечно удалённого предмета в дальнем геометрической фокусе поверхности.

### 1.1.2. Декартовы отражающие поверхности вращения несферической формы

При формальном применении закона преломления к случаю отражения принято считать, что в случае отражения света показатель преломления второй среды  $n' = -n$ . Положив в уравнении (1.7)  $n' = -n$  и преобразовав его, получаем

$$y^2 = 4 \frac{ss'}{s+s'} z - 4 \frac{ss'}{(s+s')^2} z^2. \quad (1.14)$$

Полученное уравнение определяет образующую кривую несферической поверхности вращения второго порядка, при этом в соответствии с уравнением (1.8) радиус кривизны в осевой точке поверхности

$$r = 2 \frac{ss'}{s+s'}, \quad (1.15)$$

а коэффициент деформации

$$\sigma_e = -e^2 = -\left(\frac{s'-s}{s'+s}\right)^2. \quad (1.16)$$

Уместно напомнить, что при  $\sigma_e = 0$  условие (1.8) определяет окружность, при  $-1 < \sigma_e < 0$  – эллипс, при  $\sigma_e = -1$  – параболу, а при  $\sigma_e < -1$  гиперболу. Из соотношения (1.16) следует, что  $\sigma_e = 0$  при  $s = s'$ . При этом в соответствии с соотношением (1.15)  $r = s = s'$ , т.е. в этом случае осевые точки предмета и изображения расположены в центре кривизны отражающей сферы.

Положив в уравнении (1.14) ординату  $y = 0$ , находим абсциссы  $z_1$  и  $z_2$  двух точек пересечения кривой с осью вращения:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = s + s'$ . Как известно, центр  $C$  кривой второго порядка делит пополам расстояние между её вершинами, положение которых определяется абсциссами  $z_1$  и  $z_2$ , то есть

$$z_c = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(s + s').$$

Положив  $z = \tilde{z} + z_c$ , что эквивалентно переносу начала координат в центр кривой, преобразуем уравнение (1.14) к каноническому виду:

$$\frac{\tilde{z}^2}{\left(\frac{s+s'}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{ss'} = 1. \quad (1.17)$$

Если длины отрезков  $s$  и  $s'$  определяются величинами одного знака, то каноническое уравнение (1.17) примет вид:  $\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

т.е., в этом случае уравнение (1.17) определяет эллипс. При этом полуоси эллипса:  $a = \frac{1}{2}\sqrt{(s+s')^2}$ ,  $b = \sqrt{ss'}$ , а половина расстояния между геометрическими фокусами  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(s-s')^2}$ .

Расстояние от второго геометрического фокуса эллипса до его первой вершины в соответствии с рис.1.5 равно:

$$F_2O_1 = a + c = \sqrt{(a+c)^2} = \sqrt{s^2}.$$

Расстояние от первого фокуса до первой вершины равно

$$F_1O_1 = a - c = \sqrt{(a-c)^2} = \sqrt{s'^2}.$$

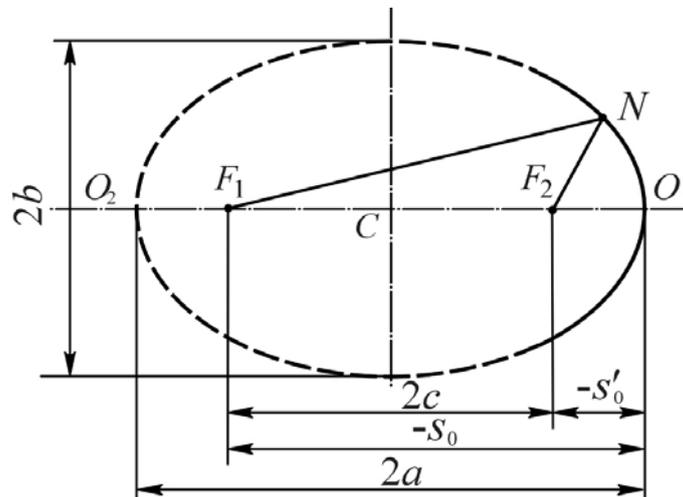


Рис.1.5. Положение осевых точек предмета и его изображения, образованного отражающей поверхностью эллипсоида

При этом в соответствии с рисунком имеем

$$O_2F_2 = a - c = F_1O_1 = \sqrt{s'^2}; \quad O_2F_1 = a + c = F_2O_1 = \sqrt{s^2}.$$

Отсюда следует, что отражающая поверхность эллипсоида вращения стигматично отображает его геометрические фокусы, причём отражающей поверхностью может быть как внутренняя, так и наружная поверхность эллипсоида. При  $s \rightarrow \infty$  отрезок  $F_2O_1 \rightarrow \infty$ , а отрезок  $F_1O_1 \rightarrow f'$ . При этом в соответствии с выражением (1.16) коэффициент деформации  $\sigma_e = -1$ , а уравнение (1.14) принимает вид уравнения параболы:  $y^2 = 2rz$ , где  $r = 2f'$ . Таким образом, отражающая поверхность параболоида образует стигматическое изображение удалённой на бесконечно большое расстояние осевой точки предмета

в точке заднего фокуса, совпадающей с первым геометрическим фокусом параболоида, как показано на рис.1.6.

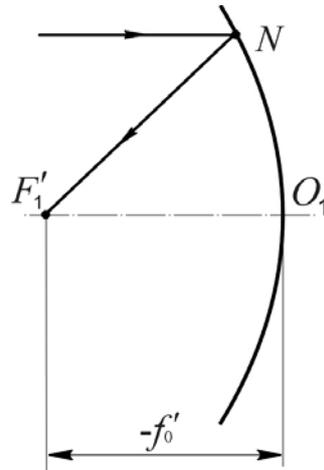


Рис.1.6. Отражающая поверхность параболоида

Если длина отрезков  $s$  и  $s'$  определяется величинами разного знака, то каноническое уравнение (1.17) принимает вид:

$$\frac{\tilde{z}^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т.е., в этом случае уравнение (1.17) определяет гиперболу. При этом полуоси гиперболы:  $a = \frac{1}{2}\sqrt{(s+s')^2}$ ;  $b = \sqrt{-ss'}$ , а половина расстоя-

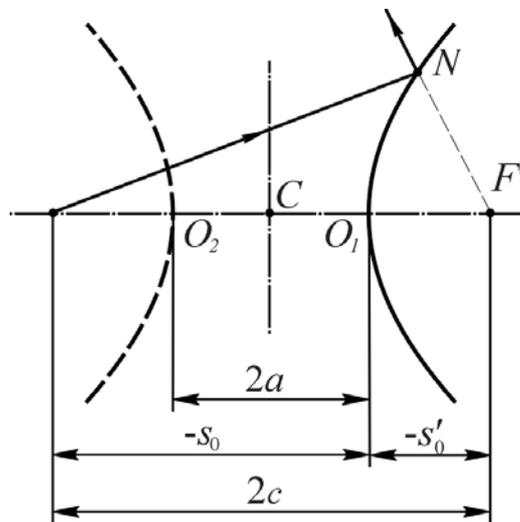


Рис.1.7. Положение осевых точек предмета и его изображения, образованного отражающей поверхностью гиперболоида

ния между геометрическими фокусами  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(s-s')^2}$ . В

соответствии с рис.1.7 имеем:

$$F_2O_1 = c + a = \sqrt{(c+a)^2} = \sqrt{s^2}.$$

$$F_1O_1 = c - a = \sqrt{(c - a)^2} = \sqrt{s'^2} .$$

$$O_2F_2 = c - a = F_1O_1 = \sqrt{s'^2} ; O_2F_1 = a + c = F_2O_1 = \sqrt{s^2} .$$

Отсюда следует, что отражающая поверхность гиперboloида, образованного вращением любой из двух ветвей образующей кривой (гиперболы), стигматично отображает его геометрические фокусы, при этом отражающей поверхностью может быть любая из поверхностей гиперboloида.

Несферические отражающие поверхности применяются со времен Декарта и Ньютона в оптических системах объективов астрономических телескопов. Вполне очевидно, что, совместив один из геометрических фокусов одной поверхности с геометрическим фокусом другой, получим оптическую систему из двух отражающих поверхностей, формирующих точечное изображение фокусов. Совместив, например, фокус одного параболоида с фокусом другого, получим афокальную (телескопическую) систему отражающих поверхностей, при этом в образованном ею изображении бесконечно удалённого предмета отсутствует не только сферическая aberrация, но и такие aberrации, как первичная кома и астигматизм. Оптическую схему телескопа, состоящего из большого вогнутого и малого выпуклого зеркал, отражающая поверхность которых имеет форму параболоида, впервые предложил французский ученый Марен Мерсенн в 1634 году. Оптическая схема телескопа Мерсена представлена на рис.1.8.

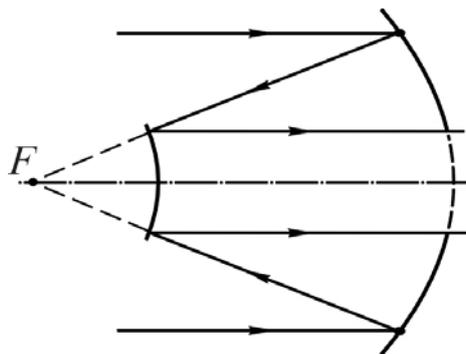


Рис.1.8. Оптическая схема телескопа Мерсена

Если совместить фокус параболоида с одним из геометрических фокусов эллипсоида, получим систему отражающих поверхностей вращения, образующих стигматичное изображение бесконечно удалённой осевой точки предмета во втором геометрическом фокусе эллипсоида. Эта точка одновременно является и задним фокусом оптической системы двух отражающих поверхностей в целом. Оптическую схему объектива телескопа, состоящую из большого

главного вогнутого зеркала с параболоидной формой отражающей поверхности и малого (вторичного) вогнутого зеркала с эллипсоидной формой отражающей поверхности впервые предложил шотландский математик и астроном Джеймс Грегори в 1663 году. Оптическая схема объектива Грегори представлена на рис.1.9.

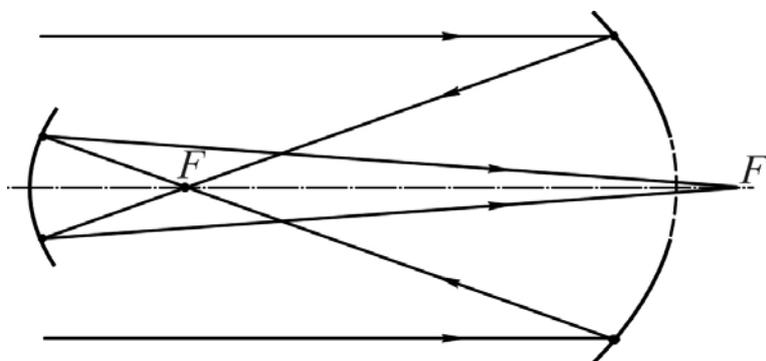


Рис.1.9. Оптическая схема объектива телескопа Грегори

Стигматичное изображение бесконечно удалённой осевой точки предмета получим, если фокус параболоида совместим с одним из геометрических фокусов гиперboloида, при этом задний фокус оптической системы из двух отражающих поверхностей будет расположен во втором геометрическом фокусе гиперboloида. Оптическую схему объектива телескопа, состоящего из большого вогнутого зеркала с параболоидной формой отражающей поверхности и малого выпуклого зеркала с гиперboloидной формой отражающей поверхности впервые предложил Г. Кассегрен в 1672 году. Оптическая схема объектива Г. Кассегрена представлена на рис.1.10.

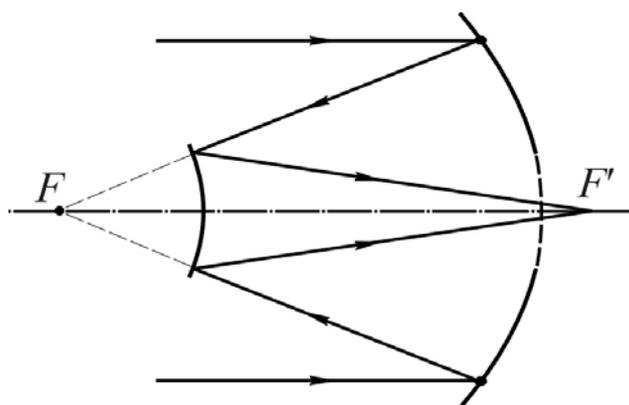


Рис.1.10. Оптическая схема объектива телескопа Кассегрена

Заслуга создания первого рефлектора, пригодного для наблюдения, принадлежит английскому математику, механику, астроному и физику Исааку Ньютону, который в 1668 году собственноручно изготовил рефлектор с вогнутым зеркалом из

зеркальной бронзы диаметром  $D = 2,5$  см при фокусном расстоянии  $f' = 16,5$  см, при этом для вывода изображения из падающего на зеркало пучка лучей И. Ньютон применил плоское диагональное зеркало. Схема объектива Ньютона представлена на рис.1.11.

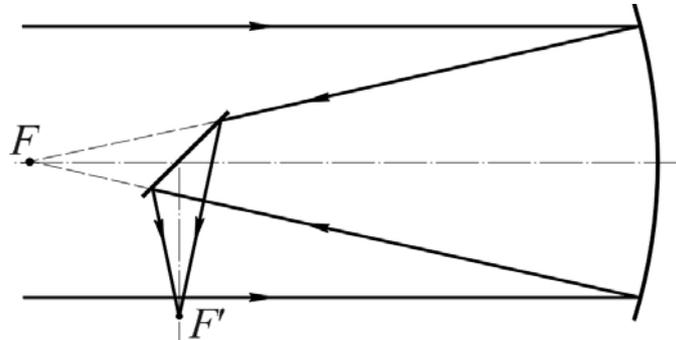


Рис.1.11. Оптическая схема объектива телескопа Ньютона

Следует отметить, что при стигматичном изображении осевой точки предмета все оптические системы, образованные сочетанием декартовых поверхностей, по крайней мере одна из которых имеет несферическую форму, образуют изображение внеосевых точек предмета, обладающее значительной величиной такой аберрации, как кома.

В настоящее время несферические поверхности начинают применять в составе сложных оптических систем, например таких, как фотографические и проекционные объективы, объективы телевизионных камер, окуляры зрительных труб и т.п., где они позволяют существенно повысить их параметры и характеристики качества. Несмотря на то, что изготовление деталей с несферическими поверхностями остаётся по-прежнему весьма трудоёмким делом, проблема построения оптических систем на основе применения несферических поверхностей приобретает всё более высокую актуальность.

## 1.2. Первичные аберрации оптических систем, содержащих несферические поверхности вращения второго порядка

Меридиональная и сагиттальная составляющая третьего порядка (первичные аберрации) поперечной аберрации в изображении точки, образованной системой оптических поверхностей, определяются, соответственно, выражениями вида:

$$\begin{aligned}
-2n'\delta g' &= \sigma'_m (\sigma_m'^2 + \sigma_s'^2) S_I + (3\sigma_m'^2 + \sigma_s'^2) w S_{II} + \\
&+ \sigma'_m w^2 (3S_{III} + J^2 S_{IV}) + w^3 S_V,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
-2n'\delta G' &= \sigma'_s (\sigma_m'^2 + \sigma_s'^2) S_I + 2\sigma'_m \sigma'_s w S_{II} + \\
&+ \sigma'_s w^2 (S_{III} + J^2 S_{IV}),
\end{aligned} \tag{1.19}$$

при этом значение угла, образованного первым нулевым лучом с оптической осью в пространстве изображений, и значение угла, образованного вторым нулевым лучом с оптической осью в пространстве предметов, приняты равными единице ( $\alpha' = 1, \beta = 1$ ). Здесь  $J$  – инвариант Лагранжа-Гельмгольца:  $J = n\alpha l = n'\alpha'l'$ ;  $w$  – угол, образованный главным лучом с оптической осью в пространстве предметов (полевой угол);  $\sigma'_m, \sigma'_s$  – апертурные углы, образованные пересечением с оптической осью проекций луча осевого пучка на меридиональную и сагиттальную плоскости. Коэффициенты aberrаций  $S_I, \dots, S_V$  можно определить выражениями вида:

$$\left. \begin{aligned}
S_I &= \sum_{i=1}^{i=n} h_i Q_i, \\
S_{II} &= \sum_{i=1}^{i=n} H_i Q_i - J \sum_{i=1}^{i=n} W_i, \\
S_{III} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i^2}{h_i} Q_i - 2J \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{h_i} W_i + J^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i}{h_i}, \\
S_{IV} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_i \alpha_{i+1} - v_{i+1} \alpha_i}{h_i}, \\
S_V &= \sum \frac{H_i^3}{h_i^2} Q_i - 3J \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{h_i^2} W_i + J^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{h_i^2} [3(v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i) + \\
&+ (v_i \alpha_{i+1} - v_{i+1} \alpha_i)] - J^3 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{h_i^2},
\end{aligned} \right\} \tag{1.20}$$

где  $Q_i = T_i \sigma_{ei} + P_i$ ;  $W_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} (v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i)$ ;  $v_i = \frac{1}{n_i}$ ;

$P_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} W_i$ ;  $T_i = \frac{(n_{i+1} \alpha_{i+1} - n_i \alpha_i)^3}{(n_{i+1} - n_i)^2}$ ;  $\sigma_{ei}$  – коническая константа

(коэффициент деформации сферической поверхности) в уравнении поверхности вращения второго порядка вида:

$$x^2 + y^2 = 2r_i z - (1 + \sigma_{ei})z^2.$$

Из выражений (1.20) следует, что замена сферических поверхностей несферическими поверхностями вращения второго порядка влияет на величину всех коэффициентов, определяющих aberrации третьего порядка, кроме коэффициента  $S_{IV}$ , величина которого, как легко убедиться, определяется кривизной поверхностей в осевой точке.

В том случае, когда осевая точка предмета расположена на бесконечно большом расстоянии от оптической системы, выражения (1.18) и (1.19) удобно представить в виде:

$$-2n'\delta g' = \frac{m(m^2 + M^2)}{f'^3} S_I + \frac{3m^2 + M^2}{f'^2} w S_{II} + \quad (1.21)$$

$$+ \frac{m}{f'} w^2 (3S_{III} + J^2 S_{IV}) + w^3 S_V,$$

$$-2n'\delta G' = \frac{M(m^2 + M^2)}{f'^3} S_I + \frac{2mM}{f'^2} w S_{II} + \quad (1.22)$$

$$+ \frac{M}{f'} w^2 (S_{III} + J^2 S_{IV}).$$

В этом случае  $J = n\alpha l = n'\alpha'l' = n'(-f'\beta) = -n'f'$ .

В простейшем случае оптическая система состоит из двух преломляющих поверхностей, образующих отдельную линзу в воздухе. В первом приближении толщину линзы удобно принять равной нулю. Будем считать, что осевая точка предмета расположена на бесконечно большом расстоянии от линзы. При этом линзу с помощью углов  $\alpha$  можно записать в виде:

$$\alpha_1 = 0 \quad n_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \alpha \quad d = 0 \quad n_2 = n$$

$$\alpha_3 = \alpha' \quad n_3 = 1.$$

При  $\alpha' = 1$  высота  $h_1 = h_2 = f'$ .

Для рассматриваемой системы имеем:

$$S_I = f'(Q_1 + Q_2) = f'(T_1\sigma_{e1} + T_2\sigma_{e2} + P_1 + P_2),$$

$$S_{II} = H_1(Q_1 + Q_2) + f'(W_1 + W_2).$$

При  $S_I = 0$  коэффициент  $S_{II} = W_1 + W_2$ . Используя принятые значения и обозначения параметров, получаем

$$W_1 + W_2 = \frac{n - (n+1)\alpha}{n-1},$$

$$P_1 + P_2 = n \frac{(2+n)\alpha^2 - (1+2n)\alpha + n}{(n-1)^2}.$$

При  $S_{II} = 0$ , т.е. при  $W_1 + W_2 = 0$ , угол  $\alpha = \frac{n}{n+1}$ .

При этом  $P_1 + P_2 = \frac{n^3}{(n^2-1)^2}$ . Тогда

$$S_I = f' \left[ T_1 \sigma_{e1} + T_2 \sigma_{e2} + \frac{n^3}{(n^2-1)^2} \right].$$

Для того, чтобы получить  $S_I = 0$ , достаточно, чтобы или  $\sigma_{e1} \neq 0$ , или  $\sigma_{e2} \neq 0$ . Пусть  $\sigma_{e2} = 0$ . При этом при  $S_I = 0$  коническая константа

$$\sigma_{e1} = -\frac{n^3}{T_1(n^2-1)^2}.$$

Но  $T_1 = \frac{n^3 \alpha^3}{(n-1)^2}$ . При  $\alpha = \frac{n}{n+1}$  параметр  $T_1 = \frac{n^6}{(n^2-1)^2(n+1)}$ .

Таким образом,

$$\sigma_{e1} = -\frac{n+1}{n^3}. \quad (1.23)$$

Отсюда следует, что при  $n > 1,325$  имеем  $0 < \sigma_{e1} \leq -1$ , т.е. сочетание преломляющей сферической поверхности с преломляющим эллипсоидом вращения образуют линзу, формирующую апланатическое изображение в области aberrаций третьего порядка.

Если вторая поверхность линзы плоская, то  $\alpha = \frac{1}{n}$ . Из очевидного

равенства  $\frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}$  следует, что рассматриваемая линза становится

плосковыпуклой при  $n = 1,618$ . Наиболее близким к этому значению показателем преломления обладает стекло ТК16 ( $n_e = 1,61519$ ) и стекло Ф1 ( $n_e = 1,61688$ ), что определяет возможность введения "хроматического" радиуса при необходимости компенсации хроматических aberrаций.

Оптическую систему из двух отражающих поверхностей можно записать в виде:

$$\alpha_1 = 0 \quad n_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \alpha \quad d_1 = d \quad n_2 = -1$$

$$\alpha_3 = \alpha' = 1 \quad n_3 = 1.$$

При  $\alpha' = 1$  высота  $h_1 = f'$ . Высота  $h_2 = h_1 - \alpha d$ .

Отношение  $\frac{h_2}{h_1} = \eta$  определяет коэффициент центрального

экранирования по диаметру светового пучка лучей. При этом  $h_2 = f' \eta$ ,  $\eta = 1 - \alpha \frac{d}{f'}$ . Из последнего соотношения следует, что  $\alpha = \frac{1-n}{d} f'$ .

Используя соотношения (1.20) и принятые значения и обозначения величин, получаем

$$S_I = h_1 Q_1 + h_2 Q_2 = f'(Q_1 + \eta Q_2),$$

$$S_{II} = H_1 Q_1 + H_2 Q_2 + f'(W_1 + W_2),$$

где  $Q_1 = -\frac{1 + \sigma_{e1}}{4} \alpha^3,$

$$Q_2 = \frac{1 + \alpha}{4} \left[ (1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2 \sigma_{e2} \right],$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \alpha^2, \quad W_2 = \frac{1 - \alpha^2}{2}.$$

В классических зеркальных системах объективов телескопа (схемы Кассегрена и Грегори) поверхность первого (главного) зеркала имеет форму параболоида вращения, в уравнении которого константа  $\sigma_{e1} = 0$ . Следовательно, в выражении, определяющем коэффициент  $S_I$ , параметр  $Q_1 = 0$ . При этом, положив  $S_I = 0$ , получаем  $Q_2 = 0$ , откуда следует, что

$$\sigma_{e2} = -\left( \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2.$$

Поскольку в схеме Кассегрена угол  $\alpha < 0$ , то в уравнении, определяющем форму вторичного зеркала, константа  $\sigma_{e2} < -1$ , т.е., вторая отражающая поверхность в схеме Кассегрена имеет форму гиперболоида вращения. В схеме Грегори угол  $\alpha > 0$ . Следовательно, в уравнении, определяющем форму вторичного зеркала в этом случае,  $-1 < \sigma_{e2} < 0$ , т.е., вторая отражающая поверхность в схеме Грегори имеет форму эллипсоида вращения.

При  $Q_1 = Q_2 = 0$  коэффициент  $S_{II} = \frac{1}{2}f'$ . Таким образом, все классические схемы зеркальных объективов телескопа обладают одинаковой и достаточно большой комой в изображении внеосевых точек, что существенно ограничивает угловое поле наблюдения из-за весьма сильного ухудшения качества изображения. Поэтому вполне естественна мысль, отойти от строгого стигматизма в изображении осевой точки и использовать канонические константы в уравнении поверхностей для устранения сферической аберрации и комы третьего порядка.

Пусть  $H_1 = 0$ . При этом  $n_1\beta_1 = n_2\beta_2$ , т.е.  $\beta_2 = -\beta = -1$ . Тогда  $H_2 = H_1 - \beta_2 d = d$ . Положив  $S_{II} = 0$ , получаем

$$Q_1 = -\frac{1+k}{4}f' = \frac{1}{2\tilde{d}}, \text{ где } \tilde{d} = \frac{d}{f'}$$

Подставив это соотношение в выражение, определяющее  $S_I$ , при  $S_I = 0$ , получаем

$$Q_2 = -\frac{1+\sigma_e}{4}\alpha^3 = -\eta Q_2 = -\frac{\eta}{2\tilde{d}}$$

Отсюда находим, что

$$\sigma_{e1} = \frac{2\eta}{\tilde{d}\alpha^3} - 1. \quad (1.24)$$

При  $S_{II} = 0$  имеем

$$Q_2 = \frac{1+\alpha}{4} \left[ (1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 \sigma_{e2} \right] = \frac{1}{2\tilde{d}}$$

Выразив отсюда  $k_2$ , получаем:

$$\sigma_{e2} = \frac{2}{\tilde{d}(1+\alpha)^3} - \left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^2. \quad (1.25)$$

Здесь  $\alpha = \frac{1-\eta}{\tilde{d}}$ . Двухзеркальную оптическую систему объектива телескопа при  $S_I = 0$  и  $S_{II} = 0$  принято называть рефлектором Ричи-Кретьена.

Как следует из соотношений (1.18), (1.19) и (1.20), применение несферических поверхностей вращения в оптической системе может служить эффективным средством коррекции аберраций третьего порядка. Однако широкому применению несферических поверхностей препятствует сравнительно высокая трудоёмкость их изготовления.

### 1.3. Малые деформации оптических поверхностей

Если бы оптическая система была геометрически совершенной, она отвечала бы трем условиям, сформулированным Д.К. Максвеллом в 1858 году:

- все лучи, вышедшие из точки предмета  $O(x, y)$  и прошедшие через оптическую систему, должны сойтись в точке изображения  $I(x', y')$ ;
- каждый элемент плоскости, нормальной к оптической оси и содержащей точку  $O(x, y)$ , должен быть изображён элементом плоскости, нормальной к оптической оси и содержащей точку  $I(x', y')$ ;
- высота изображения  $y'$  должна быть пропорциональна высоте предмета  $y$ , причём коэффициент пропорциональности должен быть постоянным независимо от местоположения точки  $O(x, y)$  в плоскости предмета.

Отклонение от первого условия определяет нарушение гомоцентричности пучков лучей в пространстве изображений, обусловленное аберрациями широких пучков лучей (сферической аберрацией и комой). Отклонения от второго и третьего условий определяются аберрациями узких полевых пучков лучей, при этом отклонение от второго условия определяет кривизну поверхности изображения, а отклонение от третьего условия – нарушение подобия изображения предмету, называемое дисторсией. Наибольшее значение при оценке качества изображения имеют отклонения от первого условия. Однако, при наблюдении изображения на плоском экране или при фиксации (считывании) изображения на плоскости необходимо считаться с отклонением от второго условия. Существуют области применения оптических систем (например, в картографии, в различного рода измерительных устройствах), где отклонение от третьего условия приобретает принципиальную важность.

В общем случае состояние коррекции аберраций должно соответствовать требуемому качеству изображения. Вполне очевидно, что возможность коррекции аберраций третьего порядка в изображении, образованном конкретно выбранной оптической системой, определяет принципиальную возможность достижения требуемого качества изображения.

Предположим, что в изображении, образованном некоторой оптической системой, исправлены аберрации третьего порядка, т.е. соответствующие коэффициенты аберраций третьего порядка равны

нулю. Однако, при сравнительно больших числовых апертурах и (или) сравнительно больших угловых (или линейных) полях в изображении точек, как правило, появляются остаточные aberrации более высокого, чем третий, порядка. Для устранения их влияния на качество изображения возможны два пути. Первый путь предполагает, по крайней мере, уменьшение aberrаций высшего порядка путем введения изменением параметров оптической системы остаточных aberrаций третьего порядка малой величины. В книге "Основы практической оптики" немецкий оптик М. Берек пишет: "Опыт, однако, показывает, что соотношения здесь весьма благоприятны, поскольку зейделевские aberrации (aberrации третьего порядка) являются как бы коротким плечом рычага, при малом изменении которого aberrации вне зейделевской области весьма подвижны. Это имеет место для всех ошибок изображения". И, тем не менее, такой путь далеко не в каждой оптической системе приводит к положительному решению задачи.

Другой путь заключается в том, что уравнение соответствующей поверхности дополняется членами более высокого, чем второй, порядка, которые не влияют на aberrации третьего порядка, как это следует из формул (1.20). С другой стороны, если поверхность расположена вблизи зрачка, т.е. если  $H_i \approx 0$ , то несферичность такой поверхности влияет только на изменение сферической aberrации, чем больше абсолютная величина высоты  $h_i$  тем больше влияние несферичности поверхности на полевые aberrации и тем меньше на сферическую aberrацию. Таким образом, выбор поверхности для дополнительной её деформации определяется состоянием остаточной коррекции aberrации при исправленных aberrациях третьего порядка.

Расстояние между несферической поверхностью вращения высшего порядка (более высокого, чем второго порядка) и сферой (в общем случае поверхностью вращения второго порядка) профессор М.М. Русинов назвал малой деформацией оптической поверхности. Следует заметить, что абсолютная величина деформации может быть далеко не малой. Ограничение применения малой деформации оптических поверхностей определяется, прежде всего, технологическими проблемами их обработки.

#### 1.4. Анастигматические несферические поверхности второго порядка

Положение оптически сопряжённых точек для бесконечно узких пучков лучей в меридиональной плоскости определяется формулой

$$\frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{s'_m} - \frac{n \cos^2 \varepsilon}{s_m} = \frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r_m}, \quad (1.26)$$

а в сагиттальной плоскости – формулой

$$\frac{n'}{s'_s} - \frac{n}{s_s} = \frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r_s}. \quad (1.27)$$

Здесь  $r_m$  и  $r_s$  – радиусы кривизны несферической поверхности в точке падения луча в меридиональной и сагиттальной плоскости соответственно. Для предмета, расположенного на бесконечно большом расстоянии, из формул (1.26) и (1.27) находим

$$s'_m = \frac{n' \cos \varepsilon' + n \cos \varepsilon}{n'^2 - n^2} n' \cos^2 \varepsilon' r_m, \quad (1.28)$$

$$s'_s = \frac{n' \cos \varepsilon' + n \cos \varepsilon}{n'^2 - n^2} n' r_s. \quad (1.29)$$

Отсутствие астигматизма в изображении точки определяется равенством  $s'_m = s'_s$ , что равносильно условию

$$r_s = r_m \cos^2 \varepsilon'. \quad (1.30)$$

Величина радиуса кривизны поверхности вращения в меридиональной плоскости с учетом знаков, принятых в системе, определяется формулой, известной из аналитической геометрии:

$$r_m = -\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (1.31)$$

Величину радиуса кривизны поверхности вращения в сагиттальной плоскости можно определить отрезком нормали между точками её пересечения с поверхностью и её осью вращения:

$$r_s = \frac{y}{\cos \alpha}, \quad (1.32)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha = y'$ . При этом

$$r_s = y \sqrt{1 + y'^2}. \quad (1.33)$$

Сопоставляя формулы (1.31) и (1.33), можно получить выражение, связывающее между собой величины  $r_m$  и  $r_s$ , в виде:

$$r_m = -\frac{r_s^3}{y^3 y''}. \quad (1.34)$$

Уравнение кривой второго порядка можно представить в виде:

$$y^2 = 2r_0z + Bz^2. \quad (1.35)$$

При этом

$$yy' = r_0 + Bz, \quad (1.36)$$

$$y'^2 + yy'' = B. \quad (1.37)$$

Из этих соотношений находим, что

$$y'^2 = \frac{(r_0 + Bz)^2}{y^2} = \frac{(r_0 + Bz)^2}{2r_0z + Bz^2} \quad (1.38)$$

и

$$yy'' = B - y'^2 = \frac{B(2r_0z + Bz^2) - (r_0 + Bz)^2}{y^2} = -\frac{r_0^2}{y^2},$$

или  $y^3 y'' = -r_0^2. \quad (1.39)$

Подставив выражение (1.39) в соотношение (1.34), получаем

$$r_m = \frac{r_s^3}{r_0^2}. \quad (1.40)$$

Подстановка этого соотношения в условие (1.30) приводит к выражению вида:  $r_0^2 = r_s^2 \cos^2 \varepsilon'.$

Отсюда следует, что

$$\sin \varepsilon' = \pm \frac{1}{r_s} \sqrt{r_s^2 - r_0^2}. \quad (1.41)$$

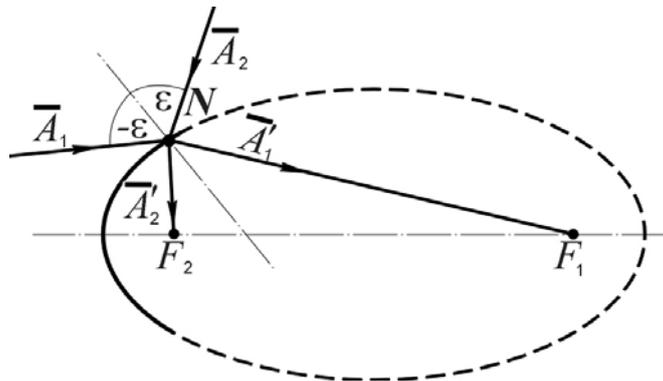


Рис.1.12. Положение анастигматических выходных зрачков эллипсоида вращения

Вполне очевидно, что этому условию соответствует случай, когда главный луч из точки падения на поверхность вращения второго порядка проходит через любой из двух геометрических фокусов поверхности, как показано на рис.1.12. Из аналитических соотношений, полученных М.М. Русиновым, следует, что расстояние между анастигматическими зрачками поверхности второго порядка

равно расстоянию между геометрическими фокусами этой поверхности, а осевые точки входных зрачков совпадают с этими фокусами. При этом, конечно, должно соблюдаться условие расположения предмета на бесконечно большом расстоянии от поверхности.

Важно отметить, что это свойство поверхностей второго порядка не зависит от величин показателей преломления, как с той, так и с другой стороны преломляющей поверхности. Так, например, в случае преломляющего параболоида вращения осевая точка одного из выходных зрачков расположена в геометрическом фокусе, совпадающем с оптическим фокусом отражающей поверхности параболоида, а осевая точка другого выходного зрачка расположена во втором геометрическом фокусе на бесконечно большом расстоянии от преломляющей поверхности, что соответствует так называемому телецентрическому ходу главных лучей в пространстве изображений. Это свойство параболоида вращения позволяет, сочетая его с плоской поверхностью, построить плоско-параболоидную линзу, свободную от астигматизма для предмета, расположенного на бесконечно большом расстоянии от линзы. Такая линза обладает телецентрическим ходом главных лучей в пространстве изображений, при этом её входной зрачок расположен в передней фокальной плоскости, как показано на рис.1.13.

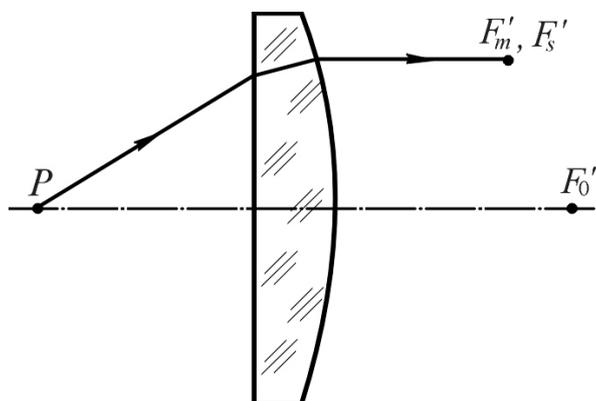


Рис.1.13. Плоскопараболоидная линза с анастигматическим изображением точки

Заметим, что это свойство плоско-параболоидной линзы сохраняется не только при плоской первой поверхности, но и при параболоидной, так как в этом случае при телецентрическом ходе лучей в пространстве изображений, как показано на рис.1.14, плоская поверхность астигматизма в изображение не вносит.

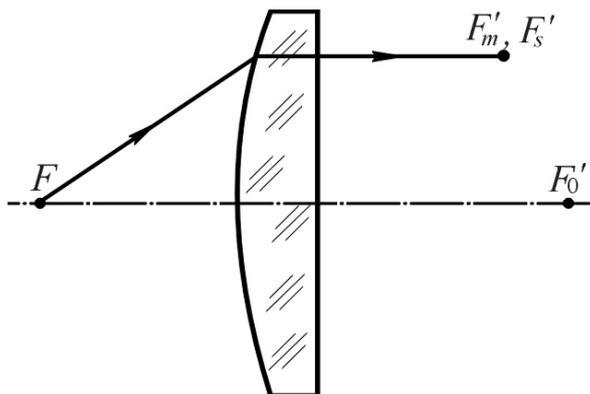


Рис.1.14. Плоскопараболоидная линза с анастигматическим изображением точки

Итак, для любой поверхности второго порядка существуют два положения анастигматических выходных зрачков. Однако, в случае поверхностей, образующих анаберрационные изображения осевой точки, устранение астигматизма в изображении внеосевых точек возможно лишь при одном положении входного зрачка.

Положение оптически сопряженных точек для бесконечно узких пучков лучей в меридиональной и в сагиттальной плоскостях в случае отступления от несферической поверхности вращения, т.е. при  $n' = -n$ , определяется, соответственно, формулами:

$$\frac{1}{s'_m} + \frac{1}{s_m} = \frac{2}{r_m \cos \varepsilon'}$$

$$\frac{1}{s'_s} + \frac{1}{s_s} = \frac{2 \cos \varepsilon'}{r_s}$$

Здесь  $\varepsilon' = -\varepsilon$  и, соответственно,  $\cos \varepsilon = \cos \varepsilon'$ .

Отсутствие астигматизма в изображении точки при  $s_m = s_s$  определяется равенством  $s'_m = s'_s$ , что равносильно условию  $r_s = r_m \cos^2 \varepsilon'$ , т.е. условию, определяемому выражением (1.30). Следовательно, и в этом случае осевые точки зрачков расположены в геометрических фокусах несферических отражающих поверхностей вращения второго порядка, однако, при этом расстояние от плоскости предмета до отражающей поверхности может быть произвольным.

### 1.5. Эквидистантные поверхности профессора Д.Т. Пуряева

Известно, что сочетание двух отражающих параболюидов вращения, составляющих афокальную оптическую систему, образует строго стигматичное изображение осевой точки. Профессор Д.Т. Пуряев показал, что та же задача решается, если одна из

отражающих поверхностей имеет сферическую форму, а другая поверхность эквидистантна параболоиду вращения. Покажем это.

На рис.1.15 показано сечение оптической системы из двух отражающих поверхностей вращения произвольной формы меридиональной плоскостью. На рисунке с вершиной сечения малого зеркала совмещено начало системы координат  $yOz$ , а с вершиной сечения большого зеркала – начало системы координат  $YOZ$ , при этом совмещенные оси  $Oz$  и  $OZ$  являются осями вращения поверхностей и, соответственно, оптической осью рассматриваемой оптической системы.

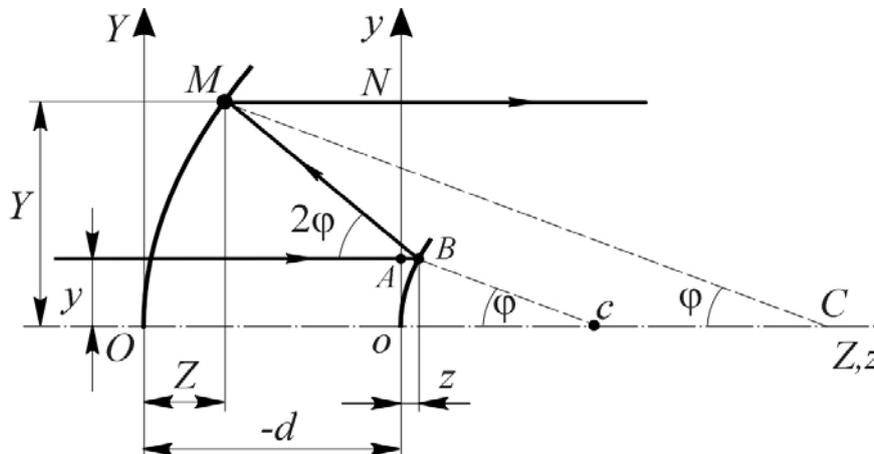


Рис.1.15. Двухзеркальная афокальная система со стигматической коррекцией аберраций

В соответствии с рисунком и принципом таутохронизма имеем

$$ABMN = z + BM - d - z = -2d, \quad (1.42)$$

где  $d$  – расстояние между отражающими поверхностями. Из рис.1.15 следует, что отрезок  $BM$  равен:

$$BM = \frac{-d + z - z}{\cos 2\varphi}. \quad (1.43)$$

Подставив соотношение (1.43) в равенство (1.42) и преобразовав его, получаем

$$Z - z = -d \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (1.44)$$

Из того же рисунка находим, что

$$Y - y = (-d + z - Z) \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (1.45)$$

Выполнив в этом выражении в соответствии с соотношением (1.28) замену величин и преобразовав его, получаем

$$Y - y = -2d \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.46)$$

Необходимый для последующего изложения выбор поверхности, форма которой предполагается сферической, совершенно не принципиален, поскольку вывод формул идентичен в обоих случаях.

Итак, пусть сферическую форму имеет большое зеркало, как показано на рис.1.15. Для большого зеркала

$$Y = R \sin \varphi, \quad Z = R - R \cos \varphi,$$

где  $R$  – радиус кривизны сферической поверхности зеркала. При этом

$$y = R \sin \varphi + 2d \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.47)$$

$$z = R - R \cos \varphi + d \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.48)$$

Пусть некоторая кривая задана уравнением  $y_0 = f_0(z_0)$ . Обозначим  $\varphi$  – угол между нормалью к кривой и осью  $z_0$ . Тогда для эквидистантной кривой  $y_3 = f(z_3)$ , каждая точка которой смещена по нормали к кривой  $y_0 = f_0(z_0)$  на расстояние  $L$  от неё, имеем

$$y_0 - y_3 = L \sin \varphi, \quad z_0 - z_3 = L - L \cos \varphi.$$

Пусть кривая  $y_0 = f_0(z_0)$  описывает параболу  $y_0^2 = 2r_p z_0$ , для которой справедливо соотношение  $y_0 = r_p \operatorname{tg} \varphi$ . При этом

$$z_0 = \frac{y_0^2}{2r_p} = \frac{1}{2} r_p \operatorname{tg}^2 \varphi. \text{ В этом случае имеем}$$

$$y_3 = y_0 - L \sin \varphi = r_p \operatorname{tg} \varphi - L \sin \varphi, \quad (1.49)$$

$$z_3 = z_0 - L + L \cos \varphi = \frac{1}{2} r_p \operatorname{tg}^2 \varphi - L + L \cos \varphi. \quad (1.50)$$

Положив  $r_p = 2d$ , а  $L = -R$ , получаем

$$y_3 = R \sin \varphi + 2d \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.51)$$

$$z_3 = R - R \cos \varphi + d \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (1.52)$$

Сопоставив выражения (1.47) и (1.48) и выражения (1.51) и (1.52), приходим к выводу, что кривая, определяемая формулами (1.47) и (1.48), представляет собой кривую, эквидистантную параболе с радиусом кривизны при вершине  $r_p = 2d$  и удалённую от последней на расстояние  $L = -R$ . При этом в выражениях (1.49) и (1.50) естественно принять  $y_3 = y$ ,  $z_3 = z$ .

Коррекционные возможности несферической поверхности, эквидистантной параболоиду вращения, впервые обнаружены Д.Т. Пуряевым. Поэтому поверхности, эквидистантные поверхностям вращения второго порядка, по праву можно называть несферическими поверхностями Пуряева.

Из выражений (1.49) и (1.50) соответственно находим, что

$$L \sin \varphi = r_p \operatorname{tg} \varphi - y, \quad L \cos \varphi = z + L - \frac{1}{2} r_p \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r_p \operatorname{tg}\varphi - y}{z + L - \frac{1}{2} r_p \operatorname{tg}^2\varphi}$$

или

$$y = (r_p - L - z) \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2} r_p \operatorname{tg}^3\varphi. \quad (1.53)$$

Из выражения (1.49) находим, что

$$(r_p \operatorname{tg}\varphi - y)^2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) - L^2 \operatorname{tg}^2\varphi = 0, \quad (1.54)$$

или в развернутом виде:

$$r_p^2 \operatorname{tg}^4\varphi - 2yr_p \operatorname{tg}^3\varphi + (r_p^2 + y^2 - L^2) \operatorname{tg}^2\varphi - 2yr_p \operatorname{tg}\varphi + y^2 = 0. \quad (1.55)$$

Заменив в этом выражении координату  $y$  координатой  $\rho\sqrt{x^2 + y^2}$ , в результате весьма громоздких преобразований профессор В.А. Зверев и Г.Э. Романова получили уравнение несферической поверхности, эквидистантной параболоиду вращения, в виде:

$$a_{11}\rho^2 + a_{12}\rho^4 + a_{13}\rho^6 + a_{21}\rho^2 z + a_{31}\rho^2 z^2 + a_{41}\rho^2 z^3 + a_{22}\rho^4 z + a_{32}\rho^4 z^2 + b_{11}z + b_{12}z^2 + b_{13}z^3 + b_{14}z^4 = 0, \quad (1.56)$$

где  $a_{11} = 4L(L - r_p)^3$ ,

$$a_{12} = (L - r_p)^2 - 9L(L + 2r_p),$$

$$a_{13} = 4,$$

$$a_{21} = 4(r_p - L)(4L^2 + 15Lr_p - r_p^2),$$

$$a_{31} = 8[(2r_p - L)^2 - 2L(L + r_p)],$$

$$a_{41} = -16r_p,$$

$$a_{22} = 4(2L - 5r_p),$$

$$a_{32} = 4,$$

$$b_{11} = 8L(L - r_p)^4,$$

$$b_{12} = (L - r_p)^2 - 9L(L + 2r_p),$$

$$b_{13} = 4(L - r_p)^2 [(L - r_p)^2 - 8Lr_p],$$

$$b_{14} = 16r_p [2Lr_p - (r_p - L)^2],$$

$$b_{14} = 16r_p^2.$$

Полученные выражения представляют собой точное уравнение несферической поверхности, эквидистантной параболоиду вращения, образующей в сочетании со сферическим зеркалом декартову афокальную систему, т.е., систему, преобразующую осевой параллельный пучок световых лучей в пространстве предметов в строго параллельный пучок лучей в пространстве изображений. При этом важно отметить, что полученное уравнение имеет вид степенного ряда в форме неявной функции. Этот результат в сочетании с опытом непосредственного применения подобного уравнения позволяет сделать вывод о том, что уравнение в форме

неявной функции по сравнению с традиционной является более общей формой описания несферических поверхностей, определяющей возможность достижения лучшей коррекции aberrаций в изображении, образованном соответствующей оптической системой.

### 1.6. Бинарные поверхности

Поверхность вращения второго порядка принято определять уравнением:

$$x^2 + y^2 = 2r_0z - (1 + \sigma_e)z^2, \quad (1.57)$$

где  $\sigma_e$  – коническая константа, равная отрицательной величине квадрата эксцентриситета кривой второго порядка, т.е.  $\sigma_e = -e^2$ . Радиус кривизны  $r_0$  в вершине поверхности второго порядка принимает значение в весьма широких пределах:  $0 < |r_0| \leq \infty$ . При больших значениях абсолютной величины радиуса  $r_0$  пользоваться уравнением (1.57) не удобно. Решив уравнение (1.57) относительно  $z$ , получаем

$$z = \frac{1}{r_0} \frac{x^2 + y^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} (1 + \sigma_e)}}. \quad (1.58)$$

Образующую кривую любой несферической поверхности вращения можно рассматривать как эвольвенту некоторой эволюты, при этом любая эволюта определяет семейство эвольвент, включая и исходные. В таком случае естественно предположить, что поверхности, определяемые уравнениями (1.57) и (1.58), не исчерпывают всех разновидностей несферических поверхностей и их свойств. М.М. Русинов впервые обнаружил весьма важные aberrационные свойства, присущие эвольвентным поверхностям.

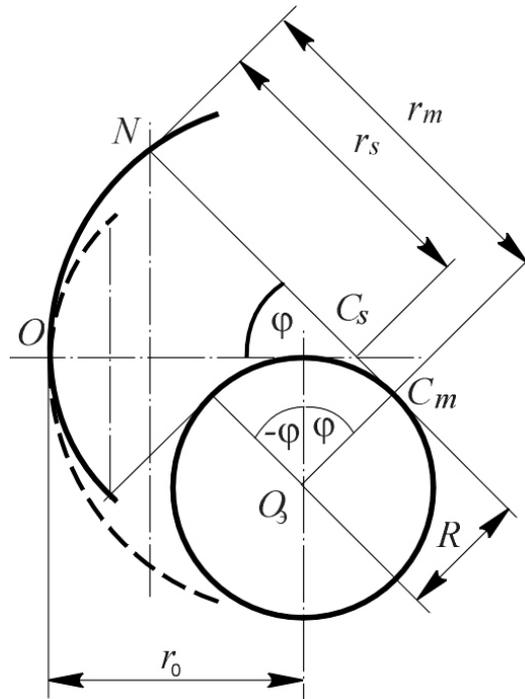


Рис.1.16. Эвольвента окружности – образующая бинарной эвольвентной поверхности вращения

На рис.1.16 показана эвольвента окружности, радиус которой равен  $R$ . При вращении верхней и нижней ветвей эвольвенты вокруг некоторой линии, принятой в качестве оси вращения (оптической оси), образуются две поверхности вращения, соприкасающиеся вершинами в осевой точке и имеющие одинаковый радиус кривизны в этой точке, равный  $r_0$ . Поскольку обе поверхности образуются вращением, по сути дела, одной и той же кривой, их можно назвать бинарной (от лат. *binaries* – двойной) поверхностью.

Пусть нормаль к верхней кривой эвольвенты в некоторой точке  $N$  образует с оптической осью угол  $\varphi$ . При этом в соответствии с рисунком меридиональный  $r_m$  и сагиттальный  $r_s$  радиусы кривизны поверхности вращения в точке  $N$  можно определить выражениями вида:

$$r_m = r_0 + R\varphi, \quad r_s = r_m - R \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Пусть осевая точка предмета расположена на бесконечно большом расстоянии от преломляющей поверхности, образованной вращением эвольвенты и разделяющей среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . При этом луч, выходящий из осевой точки предмета, падает на преломляющую поверхность в точку  $N$  параллельно оптической оси на расстоянии  $t$  от неё. Пусть нормаль к поверхности в точке  $N$  (в точке падения луча) образует угол  $\varphi$  с

оптической осью, как показано на рис.1.17, и пересекает её в точке  $C_s$ . Преломленный в точке  $N$  луч пересекает оптическую ось в точке  $F'$  под углом  $\sigma'$  к ней. Буквой  $O$  обозначена вершина преломляющей поверхности.

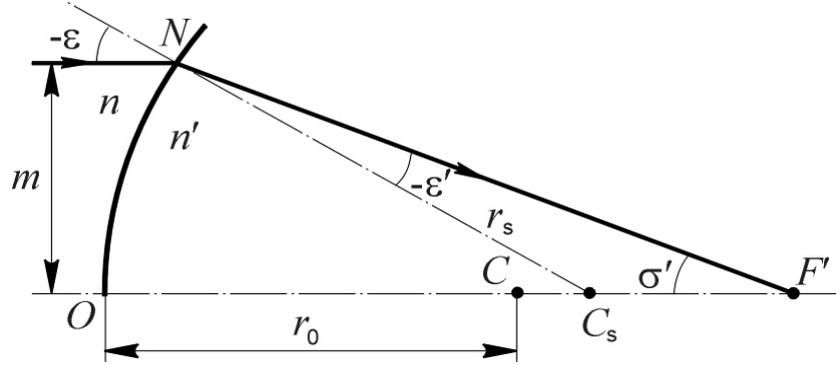


Рис.1.17. Аберрации осевого пучка

При этом в соответствии с рис.1.17 отрезки

$$OC_s = r_0 + R \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = r_0 + R \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \quad (1.59)$$

$$C_s F' = -r_s \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \sigma'} = -r_s \frac{\sin \varepsilon'}{\sin(\varphi + \varepsilon')},$$

где угол  $\varepsilon$  падения луча и угол преломления  $\varepsilon'$  взаимосвязаны законом преломления:  $n_1 \sin \varepsilon = n_2 \sin \varepsilon'$ . В рассматриваемом случае угол  $-\varepsilon = \varphi$ . При  $n_1 = 1$  и  $n_2 = n$  имеем

$$C_s F' = r_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (1.60)$$

В соответствии с рис.1.17 отрезок  $OF' = OC_s + C_s F'$ . Используя соотношения (1.59) и (1.60), получаем

$$OF' = r_0 + R \frac{\sin \varphi}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} + r_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (1.61)$$

Выражение, определяющее радиус кривизны в некоторой точке поверхности в сагиттальной плоскости, удобно представить в виде:

$$\begin{aligned} r_s &= r_0 + R \left( \varphi - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= r_0 + R \left[ \arcsin(\sin \varphi) - \frac{\sin \varphi}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из выражений (1.61) и (1.62) следует, что при  $\varphi = 0$  радиус  $r_s = r_0$ , а отрезок  $OF'_0 = \frac{n}{n-1}r_0$ . При этом продольная сферическая aberrация в изображении точки  $\Delta s' = OF' - OF'_0$ .

Применив полученные соотношения, находим, что продольная сферическая aberrация в изображении точки равна

$$\Delta s' = -\frac{r_0}{n-1} + \frac{R \sin \varphi}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} + r_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (1.63)$$

Естественно предположить, что  $|\sin \varphi| < 1$ . Тогда, используя выражения (1.63) и (1.62), функцию продольной сферической aberrации можно представить степенным рядом Маклорена в виде:

$$\begin{aligned} \Delta s' = & \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2n} \frac{r_0}{n-1} \sin^2 \varphi + \\ & + \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{1}{3n} \frac{n-6}{n-1} \right) R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{n^3+1}{n^3} \frac{r_0}{n^2-1} \sin^4 \varphi + \\ & + \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{15n} \frac{3n-5}{n-1} - \frac{1}{n^2-1} \frac{n^3+1}{n^3} \right) R \sin^5 \varphi - \dots \end{aligned} \quad (1.64)$$

В соответствии с рис.1.17 угол  $\varphi = -\varepsilon = -\varepsilon' + \sigma'$ .

При этом  $n \sin \varphi = \sin \varphi \cos \sigma' + \sin \sigma' \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$ . Отсюда находим, что

$$\frac{n^2 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{(n - \cos \sigma')^2}{\sin^2 \sigma'}.$$

Это выражение легко преобразовать к виду:

$$\sin \varphi = \frac{n \sin \sigma'}{\tilde{N}}, \quad (1.65)$$

где  $\tilde{N} = \sqrt{n^2 - 2n \cos \sigma' + 1}$ .

Поперечная сферическая aberrация  $\delta g' = \Delta s' \operatorname{tg} \sigma'$ . Заметим, что вносимая в изображение точки эвольвентной поверхностью вращения продольная сферическая aberrация не должна зависеть от знака угла  $\sigma'$ . Поэтому, используя соотношения (1.64) и (1.65), поперечную сферическую aberrацию в изображении точки, образованном эвольвентной поверхностью вращения, определим степенным рядом вида:

$$\begin{aligned}
\delta g' = & \frac{1}{2} \frac{n^2}{n-1} \frac{R \sin \sigma'}{\tilde{N} \cos \sigma'} \sqrt{\sin^2 \sigma'} - \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \frac{r_0}{\tilde{N}^2 \cos \sigma'} \sin^3 \sigma' + \\
& + \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{1}{3n} \frac{n-6}{n-1} \right) \frac{n^3 R \sqrt{\sin^2 \sigma'}}{\tilde{N}^3 \cos \sigma'} \sin^3 \sigma' - \\
& - \frac{1}{8} \frac{n^3 + 1}{n^2 - 1} \frac{nr_0}{\tilde{N}^4 \cos \sigma'} \sin^5 \sigma' + \\
& + \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{15n} \frac{3n-5}{n-1} - \frac{1}{n^2-1} \frac{n^3+1}{n^3} \right) \frac{n^5 R \sqrt{\sin^2 \sigma'}}{\tilde{N}^5 \cos \sigma'} \sin^5 \sigma' - \dots
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Поперечная сферическая aberrация в изображении точки, образованном традиционной несферической поверхностью вращения, определяется степенным рядом, содержащим нечётные степени функции  $\sin \sigma'$ . Вполне очевидно, что степенной ряд (1.66), определяющий сферическую aberrацию в изображении точки, образованном бинарной поверхностью вращения, включает члены, содержащие не только нечётные, но и чётные степени функции  $\sin \sigma'$ .

Будем приближённо считать, что  $\sin \varphi \approx \frac{n}{n-1} \sigma'$ . Пусть при этом сферическая aberrация определяется первыми двумя членами ряда (1.66) в виде:

$$\delta g' = \frac{1}{2} \frac{n^2 R \sqrt{\sigma'^2}}{(n-1)^2} \sigma' - \frac{1}{2} \frac{nr_0}{(n-1)^3} \sigma'^3. \tag{1.67}$$

Положив при некотором (выбранном) значении угла  $\sigma' = \sigma_k$  сферическую aberrацию  $\delta g'(\sigma'_k) = 0$ , получаем

$$R = \frac{r_0}{n-1} \frac{\sqrt{\sigma_k'^2}}{n}.$$

При  $\sigma'_k = k \sigma'_{кр}$ , где  $\sigma'_{кр}$  – наибольшее значение апертурного угла в пространстве изображений, выражение (1.67) можно представить в виде:

$$\delta g' = \frac{1}{2} \frac{nr_0 \sigma_{кр}'^3}{(n-1)^3} \delta \tilde{g}', \tag{1.68}$$

где  $\delta \tilde{g}' = k \sqrt{\tilde{\sigma}'^2} \tilde{\sigma}' - \tilde{\sigma}'^3$ ,  $\tilde{\sigma}' = \frac{\sigma'}{\sigma'_{кр}}$ .

Отсюда находим, что при  $\frac{d\delta\tilde{g}'}{d\tilde{\sigma}'} = 0$ :  $\tilde{\sigma}'_{\text{extr}} = \pm \frac{2}{3}k$ . При этом  $\delta\tilde{g}'_{\text{extr}} = \frac{4}{27}k^3$ . При  $\tilde{\sigma} = 1$ :  $\delta\tilde{g}'_{\text{кр}} = k - 1$ . Так, например, при  $k = \frac{3}{4}$ :  $\delta\tilde{g}'_{\text{extr}} = \frac{1}{16}$ ,  $\delta\tilde{g}'_{\text{кр}} = -\frac{1}{4}$ .

Возможный вид кривой сферической аберрации, определяемой выражением (1.67), а, соответственно, и выражением (1.68), показан на рис.1.18.

Заметим, что сферическая аберрация в изображении точки, образованном поверхностью, полученной вращением нижней ветви эвольвенты, т.е., при отрицательных значениях угла  $\varphi$ , определяется выражением (1.66), если при этом знаки перед членами, содержащими функцию  $\sin\sigma'$  в чётной степени, изменить на обратные.

Фокусное расстояние оптической системы (в том числе и преломляющей поверхности) определяется соотношением

$$f' = \frac{m}{\sin\sigma'}.$$

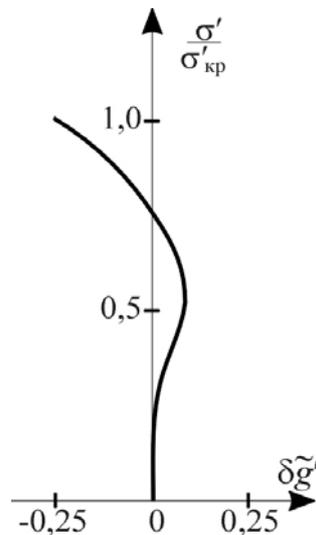


Рис.1.18. Сферическая аберрация в изображении точки, образованном эвольвентной поверхностью

На рис.1.17 фокусное расстояние преломляющей поверхности равно отрезку  $NF'$ , при этом в соответствии с теоремой синусов из треугольника  $NC_sF'$  находим, что

$$NF' = -\frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon'} C_s F' = n C_s F'.$$

Используя формулу (1.60), получаем

$$f' = nr_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (1.69)$$

При  $\varphi = 0$  имеем:  $f'_0 = \frac{nr_0}{n-1}$ . При этом отступление от условия синусов Аббе определяется соотношением

$$\delta = \frac{f' - f'_0}{f'_0} = \frac{r_s}{r_0} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n+1} - 1. \quad (1.70)$$

Выражение (1.70) можно представить степенным рядом Маклорена в виде:

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{1}{2} \frac{R}{r_0} \sin \varphi - \frac{1}{2n} \sin^2 \varphi + \frac{n-6}{24n} \frac{R}{r_0} \sin^3 \varphi - \frac{1}{n+1} \frac{n^3+1}{8n^3} \sin^4 \varphi + \\ & + \left( \frac{3n-5}{15n} - \frac{1}{n+1} \frac{n^3+1}{n^3} \right) \frac{R}{16r_0} \sin^5 \varphi - \frac{1}{n+1} \frac{n^5+1}{16n^5} \sin^6 \varphi + \\ & + \left[ \frac{25n-28}{140n} - \frac{1}{n+1} \left( \frac{n^3+1}{6n^3} + \frac{n^5+1}{n^5} \right) \right] \frac{R}{32r_0} \sin^7 \varphi - \dots \end{aligned} \quad (1.71)$$

При малой линейной величине  $y'$  изображения меридиональная кома определяется формулой Слюсарева в виде:

$$\delta g'_k = y' \frac{d}{d(\sin \sigma')} (\delta \sin \sigma') + \frac{\delta g'}{s'_p - s'_0}, \quad (1.72)$$

где  $\delta g'$  – поперечная сферическая аберрация;  $s'_0$  – расстояние от вершины поверхности до параксиального изображения осевой точки предмета;  $s'_p$  – расстояние от вершины поверхности до осевой точки выходного зрачка.

Заметим, что меридиональная кома, вносимая в изображение внеосевой точки эвольвентной поверхностью, не должна зависеть от знака угла  $\sigma'$ .

Пусть  $s'_p = \infty$ , как показано на рис.1.19. Полагая при этом  $\sin \sigma' \approx \sigma'$ , а  $\sin \varphi \approx \frac{n}{n-1} \sigma'$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta g'_k = & y' \left[ \frac{n}{n-1} \frac{R}{r_0} \sqrt{\sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \sigma'^2 + \right. \\ & \left. + \frac{n^2}{6} \frac{n-6}{(n-1)^3} \frac{R}{r_0} \sigma'^2 \sqrt{\sigma'^2} - \frac{5}{8} \frac{n}{n+1} \frac{n^3+1}{(n-1)^4} \sigma'^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.73)$$

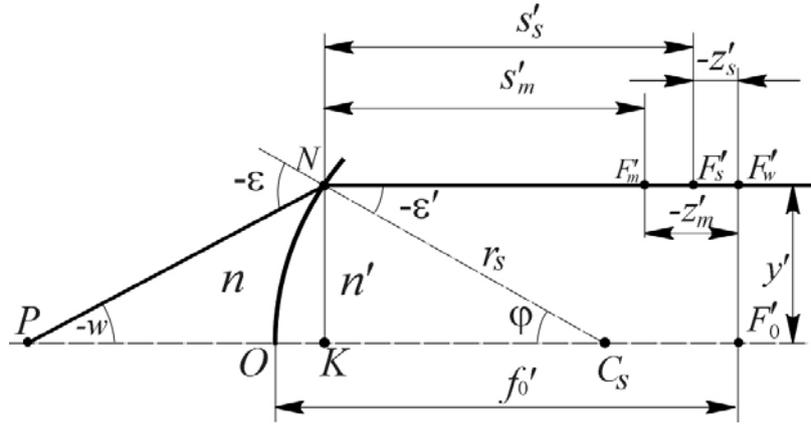


Рис.1.19. Астигматизм в изображении точки, образованном эвольвентной поверхностью

Меридиональная кома в изображении точки, образованном традиционной несферической поверхностью вращения, определяется степенным рядом, содержащим чётные степени функции  $\sin\sigma'$ . Степенной ряд (1.73), определяющий меридиональную кому в изображении точки, образованном бинарной поверхностью вращения, включает члены, содержащие не только чётные, но и нечётные степени функции  $\sin\sigma'$ .

Пусть меридиональная кома в изображении точки определяется первыми двумя членами ряда (1.73):

$$\delta g'_k = y' \left[ \frac{n}{n-1} \frac{R}{r_0} \sqrt{\sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \sigma'^2 \right]. \quad (1.74)$$

Положив при некотором значении  $\sigma' = \sigma'_k$  меридиональную кому  $\delta g'_k(\sigma'_k) = 0$ , получаем

$$R = \frac{3}{2} \frac{r_0}{n-1} \sqrt{\sigma_k'^2}.$$

При  $\sigma'_k = k\sigma'_{кр}$  выражение (1.74) можно представить в виде:

$$\delta g'_k = \frac{3}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \left( k \sqrt{\sigma_{кр}'^2} - \sqrt{\sigma'^2} \right) \sqrt{\sigma'^2} y'$$

или

$$\delta g'_k = \frac{3}{2} \frac{n\sigma_{кр}'^2}{(n-1)^2} y' \delta \tilde{g}'_k,$$

где  $\delta \tilde{g}'_k = \left( k - \sqrt{\tilde{\sigma}'^2} \right) \sqrt{\tilde{\sigma}'^2}$ ,  $\tilde{\sigma}' = \frac{\sigma'}{\sigma'_{кр}}$ .

Представим условие (1.30) в виде:

$r_m - r_s = r_m \sin^2 \varepsilon'$ . Для поверхности вращения с эвольвентным профилем  $r_m - r_s = R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ . При этом получаем, что

$$\sin \varepsilon' = \pm \sqrt{\frac{R}{r_m} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi} = \pm \sqrt{\frac{R}{r_0 + R\varphi} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}}. \quad (1.75)$$

Применив закон преломления  $n' \sin \varepsilon' = n \sin \varepsilon$ , можно определить угол  $\varepsilon$ , а, следовательно, и углы, образованные главным лучом с осью, т.е. углы  $w$  и  $w'$ :

$$w = \varphi + \varepsilon, \quad w' = \varphi + \varepsilon'. \quad (1.76)$$

По сути дела, выражения (1.75) и (1.76) принципиально определяют существование двух положений анастигматических зрачков в случае применения эвольвентной поверхности.

На рис.1.19 показан эвольвентный профиль преломляющей поверхности, разделяющей среды с показателем преломления  $n_1 = 1$  и  $n_2 = n$ . Осевая точка входного зрачка расположена в точке  $P$ , близкой к переднему фокусу поверхности, определяющей телецентрический ход главного луча в пространстве изображений.

Нормаль к поверхности в точке  $N$  падения луча на поверхность образует с оптической осью угол  $\varphi$ , равный углу преломления луча в этой точке, т.е.  $\varphi = -\varepsilon'$ . Главный луч пересекает гауссову плоскость изображения в точке  $F'_w$  на расстоянии  $y'$  от оптической оси. В рассматриваемом случае формулы (1.28) и (1.29) можно переписать в виде:

$$s'_m = \frac{n \cos \varepsilon' + \cos \varepsilon}{n^2 - 1} n \cos^2 \varepsilon' (r_0 + R\varphi), \quad (1.77)$$

$$s'_s = \frac{n \cos \varepsilon' + \cos \varepsilon}{n^2 - 1} n \left( r_0 + R\varphi - R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right). \quad (1.78)$$

Применив закон преломления в виде  $n \sin \varepsilon' = \sin \varepsilon$  и учитывая тот факт, что  $\sin \varphi = -\sin \varepsilon'$ , выражения (1.77) и (1.78) можно представить степенным рядом Маклорена

$$s'_m = \frac{n}{n-1} r_0 + \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{n-1} \right) n r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{6} \frac{3n+5}{n-1} n R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \left( n - \frac{3}{n-1} \right) n^2 r_0 \sin^4 \varphi + \dots, \quad (1.79)$$

$$s'_s = \frac{n}{n-1}r_0 + \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{n^2}{n-1} r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{24} \frac{6n-1}{n-1} n R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{n^3+1}{n^2-1} n^2 r_0 \sin^4 \varphi + \dots \quad (1.80)$$

В соответствии с рис.1.19 отрезок  $NF'_w = OF'_0 - OK = f'_0 - OC_s + KC_s$ , где  $f'_0 = \frac{nr_0}{n-1}$ ,  $KC_s = r_s \cos \varphi$ . Используя формулу (1.59), в результате преобразований получаем

$$NF'_w = \frac{r_0}{n-1} - R \sin \varphi + (r_0 + R \varphi) \cos \varphi.$$

Полученное выражение можно представить степенным рядом вида:

$$NF'_w = \frac{n}{n-1} r_0 - \frac{1}{2} r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} r_0 \sin^4 \varphi - \dots \quad (1.81)$$

При этом осевая составляющая искривления поверхности изображения, образованного узкими пучками лучей в меридиональной плоскости, равна

$$z'_m = s'_m - NF'_w = \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{n^2 + n + 1}{n-1} r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{6} \frac{3n^2 + 3n + 2}{n-1} R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{(n-1)(n^3-1) - 3n^2}{n-1} r_0 \sin^4 \varphi - \dots \quad (1.82)$$

Сагиттальная составляющая искривления поверхности изображения равна

$$z'_s = s'_s - NF'_w = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \left( \frac{n^2}{n-1} - 1 \right) r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{24} \left( \frac{5n^2}{n-1} + n - 8 \right) R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{n^5 + 1}{n^2 - 1} r_0 \sin^4 \varphi - \dots \quad (1.83)$$

Из рис.1.19 следует, что  $-\varepsilon' = \varphi = w - \varepsilon$ . Применяв закон преломления, находим, что  $\sin \varphi = \sin w \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} + n \cos w \sin \varphi$ . Это выражение легко преобразовать к виду:

$$\sin \varphi = \frac{\sin w}{\tilde{N}_w}, \quad (1.84)$$

где  $\tilde{N}_w = \sqrt{1 - 2n \cos w + n^2}$ . Меридиональная и сагиттальная составляющие искривления поверхности изображения не зависят от

знака угла  $w$ . Поэтому, подставив соотношение (1.84) в выражения (1.82) и (1.83), представим их в виде:

$$z'_m = \frac{n}{n-1} \frac{R}{\tilde{N}_w} \sqrt{\sin^2 w} - \frac{1}{2} \frac{n^3-1}{(n-1)^2} \frac{r_0}{\tilde{N}_w^2} \sin^2 w -$$

$$- \frac{1}{6} \frac{3(n^3-1)-n+1}{(n-1)^2} \frac{R\sqrt{\sin^2 w}}{\tilde{N}_w^3} \sin^2 w -$$

$$- \frac{1}{8} \frac{(n-1)(n^3-1)-3n^2}{n-1} \frac{r_0}{\tilde{N}_w^4} \sin^4 w - \dots, \quad (1.85)$$

$$z'_s = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \frac{R}{\tilde{N}_w} \sqrt{\sin^2 w} - \frac{1}{2} \frac{n^3+1}{n^2-1} \frac{r_0}{\tilde{N}_w^2} \sin^2 w -$$

$$- \frac{1}{24} \frac{6(n-1)^2+3n+2}{n-1} \frac{R\sqrt{\sin^2 w}}{\tilde{N}_w^3} \sin^2 w - \frac{1}{8} \frac{n^5+1}{n^2-1} \frac{r_0}{\tilde{N}_w^4} \sin^4 w - \dots. \quad (1.86)$$

В соответствии с выражением (1.84) можно принять, что

$$\sin \varphi \approx \frac{w}{1-n} = \frac{\sqrt{w^2}}{n-1}. \quad (1.87)$$

При этом будем считать, что меридиональная и сагиттальная составляющие кривизны поверхности изображения определяются первыми двумя членами соответствующих выражений (1.82) и (1.83) в виде:

$$z'_{mэ} = \frac{n}{(n-1)^2} R\sqrt{w^2} - \frac{1}{2} \frac{n^3-1}{(n-1)^4} r_0 w^2, \quad (1.88)$$

$$z'_{sэ} = \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R\sqrt{w^2} - \frac{1}{2} \frac{n^3+1}{(n^2-1)(n-1)^2} r_0 w^2. \quad (1.89)$$

При  $R = 0$  имеем:

$$z'_{mэ} = z'_m = -\frac{1}{2} \frac{n^3-1}{(n-1)^4} r_0 w^2,$$

$$z'_{sэ} = z'_s = -\frac{1}{2} \frac{n^3+1}{(n^2-1)(n-1)^2} r_0 w^2.$$

Эти соотношения позволяют выражения (1.88) и (1.89) представить в виде:

$$z'_{mэ} = \frac{n}{(n-1)^2} R\sqrt{w^2} + z'_m, \quad (1.90)$$

$$z'_{sэ} = \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} + z'_s. \quad (1.91)$$

В области aberrаций третьего порядка осевая составляющая пецвалевой кривизны  $z'_p$  поверхности изображения определяется соотношением:

$$z'_p = \frac{3z'_s - z'_m}{2}. \quad (1.92)$$

Выразив из соотношения (1.90) и (1.91) величины  $z'_m$  и  $z'_s$  и подставив их в выражение (1.92), получаем

$$z'_p = \frac{3z'_{sэ} - z'_{mэ}}{2} - \frac{1}{4} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2}.$$

При  $z'_{sэ} = z'_{mэ} = z'_{pэ}$  имеем

$$z'_{pэ} = z'_p + \frac{1}{4} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2}. \quad (1.93)$$

Отсюда следует, что замена сферической поверхности эвольвентной приводит к некоторой компенсации кривизны поверхности изображения без изменения её пецвалевой составляющей.

Астигматическая разность  $z'_{sэ} - z'_{mэ}$  определяет величину астигматизма, вносимого эвольвентной поверхностью в изображение точки. Используя выражения (1.91) и (1.90), получаем

$$\begin{aligned} z'_{sэ} - z'_{mэ} &= z'_s - z'_m - \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} = \\ &= \frac{nr_0 w^2}{(n-1)^3} - \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Отсюда следует возможность устранения астигматизма в изображении точки для некоторого (выбранного) значения полевого угла  $w$ . Положив в выражении (1.94) разность  $z'_{sэ} - z'_{mэ} = 0$ , получаем

$$R = 2 \frac{\sqrt{w^2}}{n-1} r_0.$$

Из рис.1.19 следует, что  $y' = r_s \sin \varphi$ . Это выражение, используя формулу (1.62) можно представить степенным рядом вида:

$$y' = r_0 \sin \varphi + \frac{1}{2} R \sin^2 \varphi + \frac{1}{24} R \sin^4 \varphi + \dots \quad (1.95)$$

Вполне очевидно, что величина изображения не изменится, если эвольвентную поверхность дополнить плоской, образовав таким

образом плосковыпуклую линзу. При этом номинальная величина изображения определится соотношением:

$$y'_0 = -f'_0 \operatorname{tg} w = -f'_0 \left( w + \frac{1}{3} w^3 + \dots \right),$$

где  $f'_0 = \frac{r_0}{n-1}$ . Применив приближённое соотношение (1.87), выражение (1.95) можно представить в виде:

$$y' = -\frac{r_0}{n-1} w + \frac{1}{2} \frac{R}{(n-1)^2} w^2 + \frac{1}{24} \frac{R}{(n-1)^4} w^4 + \dots$$

Тогда дисторсия  $\Delta y'$  изображения, образованного плосковыпуклой линзой с эвольвентным профилем выпуклой поверхности, равная разности  $y' - y'_0$ , определится выражением вида:

$$\begin{aligned} \Delta y' = & \frac{1}{2} \frac{R}{(n-1)^2} w \sqrt{w^2} + \frac{1}{3} \frac{r_0}{n-1} w^3 + \\ & + \frac{1}{24} \frac{R}{(n-1)^4} w^3 \sqrt{w^2} + \frac{2}{15} \frac{r_0}{n-1} w^5 + \frac{1}{80} \frac{R}{(n-1)^6} w^5 \sqrt{w^2} + \dots \end{aligned} \quad (1.96)$$

М.М. Русинов показал, что в изображении, образованном плосковыпуклой линзой с эвольвентным профилем выпуклой поверхности, обращенной к предмету, и при телецентрическом ходе главного луча в пространстве изображений можно получить нулевое значение дисторсии для некоторой (выбранной) величины полевого угла  $w$ . Однако, и в рассматриваемом случае возможно подобное решение этой задачи. Действительно, если предположить, что выпуклая поверхность линзы образована вращением нижней ветви эвольвенты окружности, то в выражении (1.96) перед членами, содержащими чётные степени полевого угла  $w$ , следует изменить знак на обратный (отрицательный). Полагая при этом, что дисперсия изображения определяется первыми двумя членами ряда (1.96), при  $\Delta y' = 0$  получаем

$$R = \frac{2}{3} (n-1) r_0 \sqrt{w^2}.$$

Из анализа полученных соотношений следует, что эффективность влияния эвольвентного профиля поверхности вращения на aberrации изображения определяется, прежде всего, величиной радиуса эвольвенты  $R$ . При  $R = 0$  эти соотношения определяют aberrации изображения, образованного сферической преломляющей поверхностью.

Профессор А.П. Грамматин показал, что поперечными aberrациями второго порядка обладает изображение, образованное оптическими поверхностями, которые получены вращением любой плоской кривой вокруг нормали в некоторой её точке, когда нормаль не является осью симметрии этой кривой. Образующую кривую такой поверхности можно определить, например, уравнением вида:

$$z = a_1 \rho^2 + a_2 \rho^3 + \dots + a_n \rho^{n+1}. \quad (1.97)$$

При  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  вращение этой кривой образует одну поверхность, а при  $\rho = -\sqrt{x^2 + y^2}$  – другую, как показано на рис.1.20. Следовательно, и в этом случае вращение кривой (1.97) образует бинарную поверхность. Таким образом, поверхность вращения с эвольвентным профилем можно считать частным случаем несферических поверхностей этого вида.

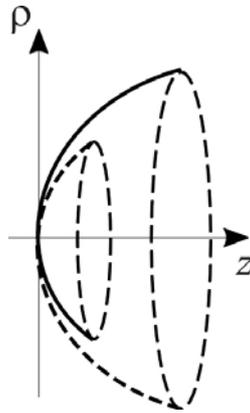


Рис.1.20. Бинарная поверхность

Следуя методу, предложенному А.П. Грамматиным, образуем несферическую поверхность путем вращения кривой, определяемой уравнением

$$\rho^2 = 2r_0 z - (1 + \sigma_e) z^2, \quad (1.98)$$

вокруг нормали к ней в некоторой внеосевой точке  $N(\rho_j, z_j)$ . При параллельном переносе системы координат  $\rho Oz$  в положение  $\rho' Nz'$  в соответствии с рис.1.21 имеем:  $\rho = \rho' + \rho_j$ ,  $z = z' + z_j$ .

В системе координат  $\rho' Nz'$  уравнение (1.98) принимает вид:

$$\rho'^2 + 2\rho_j \rho' = 2[r_0 - (1 + \sigma_e) z_j] z' - (1 + \sigma_e) z'^2. \quad (1.99)$$

Нормаль к кривой в произвольной точке образует с её осью угол  $\gamma$ , тангенс которого в соответствии с уравнением (1.98) равен:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{dz}{d\rho} = \frac{\rho}{r_0 - (1 + \sigma_e) z}.$$

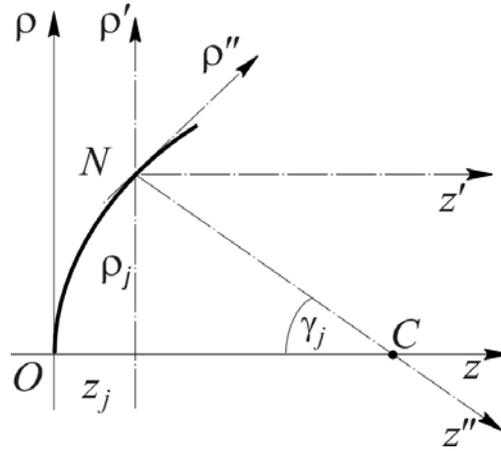


Рис.1.21. Образующая кривая второго порядка бинарной поверхности

При этом для точки  $N$  имеем:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\rho_j}{r_0 - (1 + \sigma_e) z_j},$$

$$\sin \gamma_j = \frac{\operatorname{tg} \gamma_j}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_j}}, \quad \cos \gamma_j = \frac{\sin \gamma_j}{\operatorname{tg} \gamma_j} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_j}}.$$

Повернем систему координат  $\rho' Nz'$  на угол  $\gamma_j$  в положение  $\rho'' Nz''$  до совмещения оси  $Nz''$  с нормалью к кривой в точке  $N$ . Координаты  $\rho'$  и  $z'$  произвольной точки в системе координат  $\rho'' Nz''$  можно определить выражением вида:

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (1.98) в системе координат  $\rho'' Nz''$  принимает вид:

$$a\rho''^2 + b\rho'' + c\rho''z'' + dz'' + ez''^2 = 0, \quad (1.100)$$

где  $a = 1 + \sigma_e \sin^2 \gamma_j$ ,

$$b = 2[(1 + \sigma_e)z_j \sin \gamma_j + \rho_j \cos \gamma_j - r_0 \sin \gamma_j],$$

$$c = 2\sigma_e \sin \gamma_j \cos \gamma_j,$$

$$d = 2[(1 + \sigma_e)z_j \cos \gamma_j - \rho_j \sin \gamma_j - r_0 \cos \gamma_j],$$

$$e = 1 + \sigma_e \cos^2 \gamma_j.$$

При  $\rho'' = \sqrt{x''^2 + y''^2}$  уравнение (1.100) в форме

$$a(x''^2 + y''^2) \pm b\sqrt{x''^2 + y''^2} \pm cz''\sqrt{x''^2 + y''^2} + dz'' + ez''^2 = 0 \quad (1.101)$$

определяет бинарную поверхность вращения. Заметим, что уравнение (1.100) представляет собой неявно заданную функцию. Может

оказаться удобным представить уравнение (1.101) в виде (штрихи при соответствующих величинах за ненадобностью опускаем):

$$z = -\frac{x^2 + y^2 \pm a_1 \sqrt{x^2 + y^2} + a_2 z^2}{b_0 \pm b_1 \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.102)$$

где  $a_1 = \frac{a}{b}$ ,  $a_2 = \frac{e}{a}$ ,  $b_0 = \frac{d}{a}$ ,  $b_1 = \frac{c}{a}$ .

Уравнение поверхности в форме (1.102) позволяет определить, например, координаты точки падения луча на поверхность методом итераций. Вполне очевидно, что при  $\gamma_j = 0$  коэффициенты  $a = 1$ ,  $b = \rho_j = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 2(1 + \sigma_e)z_j - 2r_0 = -2r_0$ ,  $e = 1 + \sigma_e$ . При этом уравнение (1.100) принимает вид уравнения (1.98). С другой стороны, при  $\gamma_j = \frac{\pi}{2}$  разность  $r_0 - (1 + \sigma_e)z_j = 0$ . При этом

$$z_j = \frac{r_0}{1 + \sigma_e},$$

$$\rho_j = \sqrt{2r_0 z_j - (1 + \sigma_e)z_j^2} = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \sigma_e}},$$

$$a = 1 + \sigma_e,$$

$$b = 2[(1 + \sigma_e)z_j - r_0] = 0,$$

$$c = 0,$$

$$d = -2\rho_j = -2\frac{r_0}{\sqrt{1 + \sigma_e}},$$

$$e = 1.$$

Подставив эти значения коэффициентов в выражение (1.100), получаем

$$\rho^2 = 2r_{0\perp} - (1 + \sigma_{e\perp})z^2, \quad (1.103)$$

где  $r_{0\perp} = \frac{\sqrt{1 + \sigma_e}}{(1 + \sigma_e)^2} r_0$ ,  $k_{\perp} = -\frac{\sigma_e}{1 + \sigma_e}$ .

Полученное уравнение имеет вещественные решения при  $\sigma_e > -1$ . При  $\rho^2 = x^2 + y^2$  уравнение (1.103) определяет эллипсоид вращения. Если при  $\gamma_j = 0$  эллипсоид был вытянутым, то при  $\gamma_j = \frac{\pi}{2}$  получаем сплюснутый эллипсоид, и наоборот. В общем случае вращение эллипса вокруг нормали к кривой в произвольной точке образует бинарную поверхность, как показано на рис.1.22.

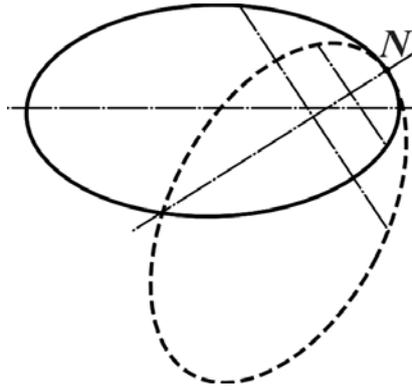


Рис.1.22. Образование бинарной поверхности вращением эллипса

Изложенное позволяет сделать вывод о том, что многообразие форм представления несферических поверхностей соответствует многообразию их свойств как элементов оптической системы. Изучение свойств несферических поверхностей вращения является важным этапом в развитии теории композиции оптических систем.

## 2. ПАРАМЕТРЫ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 2.1. Геометрические свойства несферических поверхностей

Рассмотрим только те свойства поверхностей, которые определяют условия их контроля и изготовления.

Пусть несферическая поверхность определяется уравнением вида:

$$x^2 + y^2 = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n. \quad (2.1)$$

Будем считать, что кривая сечения несферической поверхности меридиональной плоскостью определяется уравнением (2.1) при  $x=0$ . Радиус кривизны в произвольной точке кривой сечения поверхности определяется формулой

$$r_t = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \quad (2.2)$$

$$\text{Здесь } y'^2 = \frac{(a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1})^2}{4y^2},$$

$$y'' = \frac{4y^2 \left[ a_2 + 3a_3 z + \dots + \frac{1}{2} n(n-1) z^{n-2} \right] - (a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1})^2}{4y^3}.$$

Подставив эти соотношения в формулу (2.2), получаем

$$r_t = \frac{1}{2} \times \frac{\text{sign} a_1 \left[ 4y^2 + (a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1})^2 \right]^{3/2}}{\left| 4y^2 \left[ a_2 + 3a_3 z + \dots + \frac{1}{2} n(n-1) z^{n-2} \right] - (a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1})^2 \right|}. \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что при  $z=0$  ордината  $y=0$ . В этом случае  $r_t = \frac{1}{2} \frac{a_1^3}{a_1^2} = a_1$ , т.е.  $a_1 = 2r_0$ , где  $r_0$  – радиус кривизны несферической поверхности в её осевой точке, равный расстоянию от вершины поверхности  $O$  до центра кривизны  $C_0$  в осевой точке, как показано на рис.2.1.

В случае поверхности вращения второго порядка уравнение (2.1) принимает вид:

$$x^2 + y^2 = 2r_0 z + a_2 z^2. \quad (2.4)$$

При этом выражение (2.3) можно преобразовать к виду:

$$r_t = \text{sign}r_0 \frac{[r_0^2 + (1 + a_2)y^2]^{3/2}}{r_0^2}. \quad (2.5)$$

Но  $a_2 = e^2 - 1$ , где  $e$  – эксцентриситет кривой второго порядка. Тогда

$$r_t = \text{sign}r_0 \frac{[r_0^2 + e^2 y^2]^{3/2}}{r_0^2}. \quad (2.6)$$

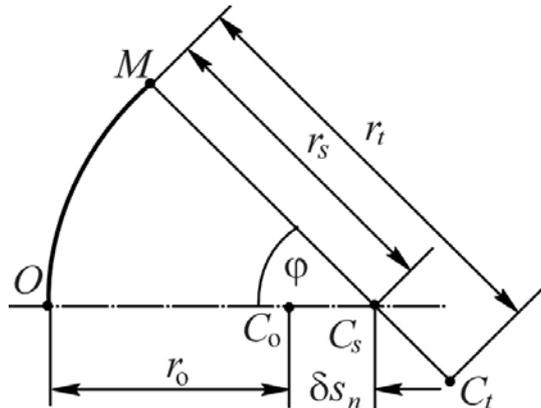


Рис.2.1. Геометрические параметры несферической поверхности вращения

Радиус кривизны в некоторой точке  $M$  кривой сечения поверхности определяется расстоянием  $MC_t = r_t$ , как показано на рис.2.1. При этом нормаль к поверхности в точке  $M$  пересекает ось вращения (оптическую ось) в точке  $C_s$ . Если кривую сечения поверхности повернуть (качнуть) вокруг оси вращения на бесконечно малый угол  $\pm d\delta$ , то траектория точки  $M$  определит след сагиттальной плоскости, радиус кривизны несферической поверхности в которой равен отрезку  $MC_s = r_s$ . Угол  $\varphi$ , образованный нормалью к поверхности в точке  $M$  с осью вращения определяется из очевидного соотношения:

$$\text{tg}\varphi = \frac{dz}{dy} = \frac{2y}{2r_0 + 2a_2z + \dots + na_n z^{n-1}}. \quad (2.7)$$

При этом, как следует из рис.2.1, радиус кривизны несферической поверхности в сагиттальной плоскости равен:

$$r_s = \frac{y}{\sin \varphi}. \quad (2.8)$$

Определим смещение центров кривизны несферической поверхности в сагиттальной плоскости относительно центра кривизны поверхности в её осевой точке, т.е., определим отрезок  $\delta s_n = OC_s - OC_0 = OC_s - r_0$ . Но  $OC_s = z + y \text{ctg}\varphi$ .

Тогда

$$\delta s_n = z + y \operatorname{ctg} \varphi - r_0. \quad (2.9)$$

Используя уравнение (2.1), получаем

$$\delta s_n = (1 + a_2)z + \frac{1}{2}(3a_3z^2 + 4a_4z^3 + \dots + na_nz^{n-1}). \quad (2.10)$$

В случае поверхности второго порядка, т.е. при  $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ , имеем

$$\delta s_n = (1 + a_2)z = e^2 z.$$

Из выражения (2.4) при  $x = 0$  имеем

$$z = \frac{r_0}{1 - \varepsilon} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1 - e^2}{r_0^2} y^2} \right).$$

При этом

$$\delta s_n = \frac{r_0 e^2}{1 - e^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1 - e^2}{r_0^2} y^2} \right). \quad (2.11)$$

С другой стороны, из выражения (2.7) следует, что для поверхности второго порядка

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2r_0 + a_2 z^2}}{r_0 + a_2 z}.$$

Отсюда находим, что 
$$z = \frac{r_0}{1 - e^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right).$$

При этом

$$\delta s_n = \frac{r_0 e^2}{1 - e^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right). \quad (2.12)$$

В том случае, когда величина  $(1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi$  достаточно мала, выражение, стоящее в квадратных скобках, можно представить рядом Маклорена в виде:

$$\delta s_n = \frac{1}{2} r_0 e^2 \left[ \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{3}{4} (e^2 - 1) \operatorname{tg}^4 \varphi + \frac{5}{8} (e^2 - 1) \operatorname{tg}^6 \varphi + \dots \right]. \quad (2.13)$$

Эксцентриситет параболы  $e = 1$ . Поэтому для параболоида выражение (2.13) упрощается, принимая вид точной формулы:

$$\delta s_n = \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \varphi = f'_0 \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad (2.14)$$

где  $f'_0$  – фокусное расстояние отражающей параболоидной поверхности. Учитывая, что  $0 \leq \operatorname{tg}^2 \varphi \leq 1$ , из выражения (2.12) следует,

что для всех поверхностей второго порядка при  $e^2 > 0$  величина  $\delta s_n > 0$ ; для сплюснутого эллипсоида, т.е. при  $e^2 < 0$  величина  $\delta s_n < 0$ .

## 2.2. Технологические параметры несферических поверхностей

Проблемы изготовления и контроля несферических поверхностей в большой степени определяются максимальной величиной угла  $\varphi_{\max}$  между нормалью к несферической поверхности и её осью вращения. Величину отступления несферической поверхности от вершинной сферы (сферы, радиус кривизны которой равен радиусу кривизны при вершине поверхности) можно назвать деформацией сферической поверхности и определить разностью абсцисс  $z$  несферической поверхности и вершинной сферы при одном и том же значении ординаты  $y$ . При этом важен и характер изменения деформации. При монотонном изменении деформации сферической поверхности угол  $\varphi_{\max}$  наклона нормали к оси достигает своего значения в крайних точках несферической поверхности. Величину  $2\varphi_{\max}$  можно назвать углом охвата, при этом угол  $\varphi_{\max}$  можно назвать угловой апертурой несферической поверхности. Пусть, например, относительное отверстие параболоидальной отражающей поверхности  $D: f' = 1:1$ . При этом  $\sin \sigma' = 0,5$  и, соответственно,  $\sigma' = 2\varphi_{\max} = 30^\circ$ . Поэтому несферические поверхности при  $\varphi_{\max} > 15^\circ$  принято считать высокоапертурными (или крутыми). Угол охвата  $2\varphi_{\max}$  является одной из важнейших характеристик несферической поверхности, так как он определяет практическую возможность применения различных методов контроля и их трудоёмкость.

Важнейшей характеристикой несферической поверхности является её несферичность, т.е. величина отступления поверхности от ближайшей сферы или плоской поверхности. Эта величина характеризует трудоёмкость изготовления несферической поверхности, поскольку определяет величину съёма стекла (или толщину напыляемого слоя).

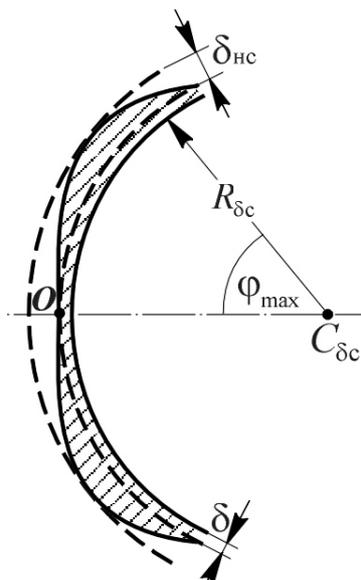


Рис.2.2. Несферичность поверхности

Процесс изготовления несферической поверхности состоит, как правило, из двух этапов. На первом этапе изготовления получают ближайшую сферическую поверхность, радиус кривизны которой равен  $R_{\delta c}$ , после чего снимается слой стекла (на рис.2.2 выделен штриховкой), толщина которого определяется несферичностью  $\delta_{nc}$  поверхности и припуском  $\delta$  на обработку всей поверхности, как показано на рис.2.2. Отсюда следует, что ближайшей должна быть сфера, при которой величина съема стекла для получения требуемой несферической поверхности должна быть минимальной.

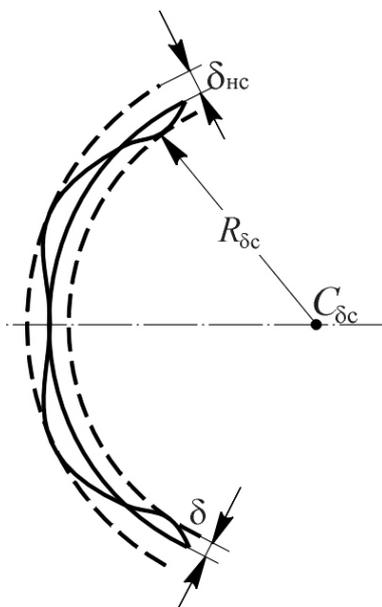


Рис.2.3. Ближайшая сфера

Вполне очевидно, что через вершину несферической поверхности и её наружный контур можно провести единственную сферу радиуса

$R$ , как показано на рис.2.3. Отклонение этой сферы от ближайшей, как правило, невелико, а потому именно эта сфера и принимается в качестве ближайшей. Определим радиус кривизны сферы, содержащей вершину и краевую зону несферической поверхности второго порядка, меридиональное сечение которой определяется уравнением:  $y^2 = 2r_0z + a_2z^2$ .

$$\text{При } y = \frac{1}{2}D: z_{\kappa} = -\frac{r_0}{a_2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2 \frac{a_2}{r_0^2}} \right). \quad (2.15)$$

Из уравнения сферы  $y^2 = 2Rz - z^2$  при  $y = \frac{1}{2}D$  следует, что

$$R = \frac{D^2 + 4z_{\kappa}^2}{8z_{\kappa}}. \quad (2.16)$$

Подставив выражение (2.15) в выражение (2.16), получаем

$$R = -\frac{r_0}{a_2} \left[ 1 - \frac{1+a_2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{D^2}{r_0^2} a_2} \right) \right]. \quad (2.17)$$

Если  $\frac{D^2}{r_0^2} a_2$  – величина достаточно малая, то

$$R \approx -\frac{r_0}{a_2} \left[ 1 - \frac{1+a_2}{2} \left( 1 + 1 + \frac{1}{8} \frac{D^2}{r_0^2} a_2 \right) \right] = r_0 \left( 1 + \frac{1+a_2}{16} \frac{D^2}{r_0^2} \right). \quad (2.18)$$

Если несферическая поверхность представляет собой параболоид вращения, то коэффициент  $a_2 = 0$ . При этом

$$R = \frac{16r_0^2 + D^2}{16r_0}. \quad (2.19)$$

Итак, ближайшая сфера определяется уравнением:

$$y_c^2 = 2R_{\text{бс}}z_c - z_c^2,$$

где в соответствии с выражением (2.17)

$$R_{\text{бс}} = -\frac{r_0}{1-e^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1-e^2}{4} \frac{D^2}{r_0^2}} \right) \right]. \quad (2.20)$$

Несферичность поверхности естественно определять в направлении нормали к сфере. Однако, угол  $\varphi_{\text{max}} \leq 15^\circ$ . При этом с достаточной точностью можно принять, что

$$\delta_{\text{нс}} = z - z_c, \quad (2.21)$$

где  $z = \frac{r_0}{1-e^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1-e^2}{r_0^2} y^2} \right),$

$$z_c = R_{\text{бс}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R_{\text{бс}}^2}} \right).$$

Поскольку  $z_c = z - \delta_{\text{нс}}$ , имеем

$$z - \delta_{\text{нс}} = R_{\text{бс}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R_{\text{бс}}^2}} \right). \quad (2.22)$$

Но если  $\frac{1-e^2}{r_0^2} y^2$  – величина малая, то  $z \approx \frac{y^2}{2r_0}$ . Для параболоида вращения  $z = \frac{y^2}{2r_0}$ . При этом выражение (2.22) можно преобразовать к

виду:

$$\delta_{\text{нс}} = R_{\text{бс}} - \sqrt{R_{\text{бс}}^2 - y^2} - \frac{y^2}{2r_0}. \quad (2.23)$$

Теперь важно определить максимальное значение несферичности. Для этого находим, что

$$\frac{d\delta_{\text{нс}}}{dy} = y \frac{r_0 - \sqrt{R_{\text{бс}}^2 - y^2}}{r_0 \sqrt{R_{\text{бс}}^2 - y^2}}.$$

Положив  $\frac{d\delta_{\text{нс}}}{dy} = 0$ , получаем  $y_{\text{extr1}} = 0$ ,  $y_{\text{extr2}} = \sqrt{R_{\text{бс}}^2 - r_0^2}$ .

Подставив формулу (2.19), получаем  $y_{\text{extr2}} = \frac{D}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{D^2}{32r_0^2}}$ .

Но  $\frac{D^2}{32r_0^2} \ll 1$ . Тогда  $y_{\text{extr2}} = \frac{D}{2\sqrt{2}}$ . При этом

$$\delta_{\text{нс}} = r_0 \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{256} \frac{D^4}{r_0^4}} \right) \text{ или } \delta_{\text{нс}} \approx \frac{D^4}{512r_0^3}.$$

В общем случае для определения несферичности поверхности относительно ближайшей сферы и характера её деформации относительно вершинной сферы удобно применить физико-математическое моделирование несферической поверхности волновым фронтом. При этом отклонение несферической

поверхности от вершинной сферы можно рассматривать как волновую aberrацию, а величину смещения точек пересечения нормалей к несферической поверхности с осью вращения (с оптической осью), определяемую выражением (2.12), можно рассматривать как соответствующую волновой продольную сферическую aberrацию.

Обратимся к рис.2.4, на котором показан волновой фронт  $L$ , совмещенный с несферической поверхностью, определяемой, например, уравнением (2.1). Здесь  $r_0$  – расстояние от вершины  $O$  волнового фронта (поверхности) до центра кривизны в его вершине, т.е. радиус кривизны вершинной сферы. Из точки  $\tilde{C}_0$  радиусом, равным  $r_0 + \Delta_0$ , проводим сферу сравнения (некоторый аналог ближайшей сферы для поверхности), касательную в вершине к волновому фронту, и две бесконечно близкие одна к другой нормали  $A\tilde{C}_0$  и  $B\tilde{C}_0$  к сфере сравнения, продолжения которых пересекают волновой фронт в бесконечно близких точках  $N$  и  $\tilde{N}$ . В свою очередь, нормали (лучи) к волновому фронту в точках  $N$  и  $\tilde{N}$  пересекают сферу сравнения в точках  $A_N$  и  $B_N$  соответственно. Отрезок  $NA_N = W$  определяет волновую aberrацию в направлении луча  $NC$ , образующего угол  $\varphi$  с оптической осью (осью  $Oz$ ). В соответствии с рис.2.4 отрезок  $NA = W \cos \omega$ . Через точку  $N$  радиусом, равным  $r_0 + \Delta_0 + NA$ , проведем элемент окружности, пересекающий отрезок  $\tilde{N}B_N$  в точке  $D$ . Тогда  $\tilde{N}D = dW$ , а  $\tilde{N}B = NA + dW \cos \omega$ .

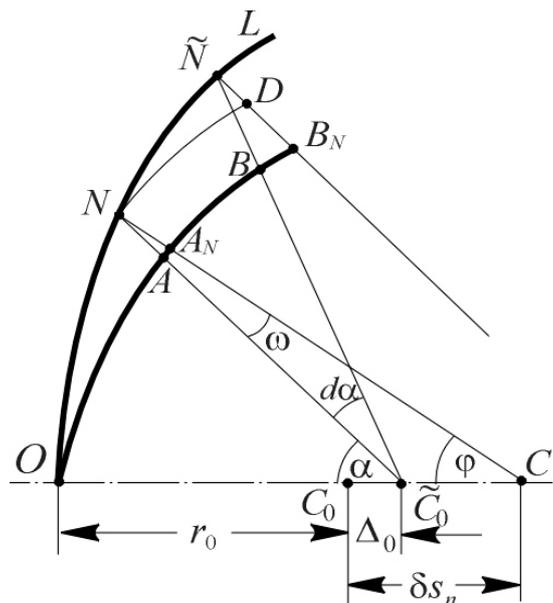


Рис.2.4. Определение волновой aberrации  $W$  при известной продольной  $\delta s_n$

С другой стороны, как следует из рисунка, имеем  
 $dW \cos \omega = (r_0 + \Delta_0 + NA) \operatorname{tg} \omega d\alpha$

или

$$dW = \left( W + \frac{r_0 + \Delta_0}{\cos \omega} \right) \operatorname{tg} \omega d\alpha. \quad (2.24)$$

Но, как правило,  $|W| \ll |r_0 + \Delta_0|$ . При этом соотношение (2.24) можно переписать в виде:

$$dW = \frac{r_0 + \Delta_0}{\cos^2 \omega} \sin \omega d\alpha. \quad (2.25)$$

В соответствии с рисунком угол  $\alpha = \omega + \varphi$ . Тогда

$$dW = \frac{r_0 + \Delta_0}{\cos^2 \omega} \sin \omega d\omega + \frac{r_0 + \Delta_0}{\cos^2 \omega} \sin \omega d\varphi. \quad (2.26)$$

Из треугольника  $\tilde{C}_0NK$  следует, что  $\sin \omega = \frac{\tilde{C}_0K}{r_0 + \Delta_0 + AN} \approx \frac{\tilde{C}_0K}{r_0 + \Delta_0}$ .

Из треугольника  $\tilde{C}_0CK$  имеем  $\tilde{C}_0K = (\delta s_n - \Delta_0) \sin \varphi$ .

$$\text{Тогда } \sin \omega = \frac{\delta s_n - \Delta_0}{r_0 + \Delta_0} \sin \varphi. \quad (2.27)$$

Но, как правило,  $|\delta s_n - \Delta_0| \ll |r_0 + \Delta_0|$ . При этом выражение (2.26) можно представить в виде:

$$dW = (r_0 + \Delta_0) \omega d\omega + (\delta s_n - \Delta_0) \sin \varphi d\varphi. \quad (2.28)$$

Интегрируя последнее выражение и переходя от переменной  $\omega$  к переменной  $\varphi$  в соответствии с выражением (2.27), получаем:

$$W = \frac{1}{2} \frac{(\delta s_n - \Delta_0)^2}{r_0 + \Delta_0} \sin^2 \varphi + \int_0^\varphi (\delta s_n - \Delta_0) \sin \varphi d\varphi.$$

В практически важных случаях первый член этой формулы пренебрежимо мал, а потому без ущерба для точности вычислений пользуются формулой

$$W = \int_0^\varphi (\delta s_n - \Delta_0) \sin \varphi d\varphi. \quad (2.29)$$

Для поверхностей второго порядка величина  $\delta s_n$  определяется формулой (2.12), которую удобно представить в виде:

$$\delta s_n = r_0 \frac{e^2}{1 - e^2} \left( 1 - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \right).$$

Подставив это соотношение в выражение (2.29), выполнив интегрирование и преобразовав, получаем

$$W = -(r_0 + \Delta_0)(1 - \cos \varphi) - r_0 \frac{\cos \varphi - \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{1 - e^2}. \quad (2.30)$$

Для исключения неопределённости при  $e^2 = 1$  (поверхность параболоида вращения) выражение (2.30) легко преобразовать к виду:

$$W = (1 - \cos \varphi) \left( r_0 \frac{1 - \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} - \Delta_0 \right). \quad (2.31)$$

При  $e^2 = 1$  выражение (2.31) принимает вид:

$$W = (1 - \cos \varphi) \left( r_0 \frac{1 - \cos \varphi}{2 \cos \varphi} - \Delta_0 \right). \quad (2.32)$$

Радиус сферы сравнения, равный  $R_{cc} = r_0 + \Delta'_0$ , при соблюдении условия  $W(\varphi_{\max}) = 0$  принято называть радиусом ближайшей сферы  $R_{bc}$ . Положив в выражении (2.31) угол  $\varphi = \varphi_{\max}$ , а величину  $W(\varphi_{\max}) = 0$ , получаем

$$R_{bc} = r_0 \frac{\cos \varphi + 1}{\cos \varphi + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.33)$$

Выражение (2.31) можно представить в виде:

$$W = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right) \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{1 + \sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \varphi}} r_0 - r_0 - \Delta_0 \right]. \quad (2.34)$$

При  $e = 1$  (параболоид вращения) имеем

$$W = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right) \left[ \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - 1}{2} r_0 - \Delta_0 \right]. \quad (2.35)$$

Но  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{r_0 - (1 - e^2)z}$ . При этом  $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{y^2}{r_0^2 - (1 - e^2)y^2}$ .

Подставив последнее соотношение в выражение (2.34), получаем

$$W = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^2 y^2}} \frac{y^2}{r_0 + \sqrt{r_0^2 - (1 - e^2)y^2}} - \left[ 1 - \frac{\sqrt{r_0^2 - (1 - e^2)y^2}}{\sqrt{r_0^2 + e^2 y^2}} \right] (r_0 + \Delta_0).$$

При  $e = 1$  это выражение принимает вид:

$$W = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} \right) (\sqrt{r_0^2 + y^2} - r_0 - 2\Delta_0). \quad (2.36)$$

Положив в этом выражении величину  $y = \frac{1}{2}D$  при  $W = 0$ , получаем

$$\Delta_0 = \frac{1}{4} \left( \sqrt{4r_0^2 + D^2} - 2r_0 \right). \quad (2.37)$$

Найдем экстремальное значение величины  $W$ . Используя выражение (2.36), находим, что

$$\frac{dW}{dy} = \frac{1}{2} \frac{y}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} (y^2 - 2r_0\Delta_0).$$

Из условия  $\frac{dW}{dy} = 0$  находим, что  $y_{1\text{extr}} = 0$ , а  $y_{2\text{extr}} = \sqrt{2r_0\Delta_0}$ . При

$y_{1\text{extr}} = 0$  величина  $W_{1\text{extr}} = 0$ , а при  $y_{2\text{extr}} = \sqrt{2r_0\Delta_0}$  имеем:

$$W_{2\text{extr}} = \sqrt{r_0^2 + 2r_0\Delta_0} - r_0 - \Delta_0.$$

Учитывая выражение (2.37), получаем

$$W_{2\text{extr}} = r_0 \left( 1 + \frac{D^2}{4r_0^2} \right)^{1/4} - \frac{1}{2}r_0 - \frac{1}{2}r_0 \left( 1 + \frac{D^2}{4r_0^2} \right)^{1/2}. \quad (2.38)$$

Заметим, что

$$f(x) = (1+x)^{1/4} \approx 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2, \quad f(x) = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

Учитывая это, выражение (2.38) можно привести к виду:

$$W_{2\text{extr}} = -\frac{D^4}{512r_0^3}.$$

Отражающая поверхность главного зеркала БТА (Большой Телескоп Азимутальный, Россия) имеет форму параболоида вращения. Диаметр зеркала  $D = 6,05$  м, а радиус кривизны в осевой точке поверхности  $r_0 = 48$  м. При этом

$$\delta_{\text{нс}} = W_{2\text{extr}} = -\frac{6,05^4}{512 \cdot 48^3} = -0,0237 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

что при  $\lambda = 0,6328$  мкм соответствует  $\delta_{\text{нс}} = 37,4\lambda$ .

Итак, зная уравнение поверхности, легко найти положение осевых точек, определяющих величину отрезков  $\delta s_n$ . Аппроксимируя закономерность  $\delta s_n = \delta s_n(\varphi)$ , например одной из разновидностей степенного ряда, с помощью формулы (2.29) определяем зависимость  $W = W(\varphi)$ , которая позволяет найти и  $\Delta_0$ , а, следовательно,  $R_{\text{бс}}$ , и  $\delta_{\text{нс}}$ . Последовательность выполнения вычислительных процедур рассмотрена на примере несферической поверхности вращения второго порядка.

### 2.3. Допустимые отклонения обрабатываемых поверхностей от номинальной формы

Пусть плоский волновой фронт падает под углом  $\varepsilon$  на плоскую поверхность раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , при этом плоская поверхность имеет местную неровность глубиной  $\delta$ , как показано на рис.2.5. Эта неровность приводит к деформации волнового фронта (волновой аберрации), равной

$$W = n_2 AC - n_1 AB = \frac{\delta}{\cos \varepsilon_i} [n_2 \cos(\varepsilon' - \varepsilon) - n_1].$$

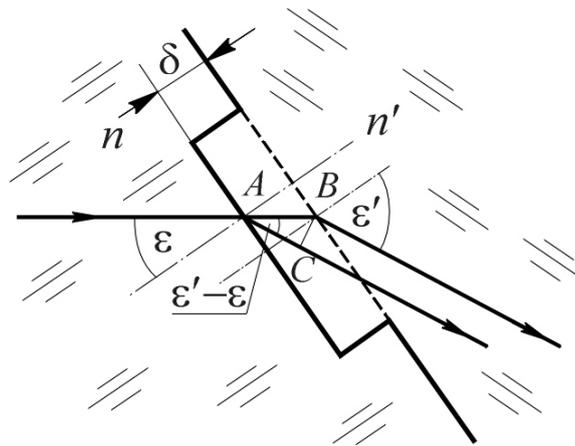


Рис.2.5. Взаимосвязь деформации волнового фронта с деформацией поверхности

В результате преобразований этого выражения получаем

$$W = \delta \left( n_2 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \varepsilon} - n_1 \cos \varepsilon \right). \quad (2.39)$$

При малой величине угла  $\varepsilon$  выражение (2.39) можно преобразовать к виду:

$$W = n_2 \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{n_1}{n_2} \varepsilon^2 \right) \delta. \quad (2.40)$$

Отсюда следует, что в случае преломляющей поверхности с увеличением угла  $\varepsilon$  влияние деформации поверхности на деформацию волнового фронта растет. В случае внутренней отражающей поверхности имеем  $n_1 = -n_2 = n$ . При этом формула принимает вид:

$$W = -2n\delta \cos \varepsilon. \quad (2.41)$$

В случае наружной отражающей поверхности, т.е., при  $n = 1$ , величина деформации волнового фронта равна

$$W = -2\delta \cos \varepsilon. \quad (2.42)$$

Из выражений (2.41) и (2.42) следует, что с увеличением угла  $\varepsilon$  влияние деформации отражающих поверхностей на деформацию волнового фронта уменьшается.

В общем случае угол падения лучей в пределах светового пучка на каждую из поверхностей оптической системы изменяется от нуля до некоторого значения  $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ . Следовательно, с формальной точки зрения контроль формы обрабатываемых поверхностей целесообразно выполнять в условиях их применения; в противном случае необходимо учитывать зависимость  $W = W(\varepsilon)$  при анализе результатов контроля. Однако, как правило, угол  $\varepsilon_{\max} < 15^\circ$ , а поэтому контроль обрабатываемых поверхностей в автоколлимационной схеме, формирующей волновой фронт, эквидистантный номинальной форме поверхности (с нормальным ходом лучей к контролируемой поверхности), которая наиболее широко применяется, можно считать вполне обоснованным. При этом деформацию волнового фронта  $W$  в зависимости от деформации обрабатываемой поверхности можно принять равной

$W = \delta(n_2 - n_1)$  – для преломляющих поверхностей;

$W = -2n\delta$  – для внутренних отражающих поверхностей;

$W = -2\delta$  – для наружных отражающих поверхностей.

Отклонение реальной поверхности крупногабаритных деталей от номинальной формы имеет, как правило, весьма сложный характер. Соответствующую деформацию волнового фронта (волновую абберацию) можно аппроксимировать степенным рядом вида:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_i \sum_j W_{ij} \rho^i \cos^j \varphi = W_{00} + W_{20} \rho^2 + W_{11} \rho \cos \varphi + \\ + W_{40} \rho^4 + W_{31} \rho^3 \cos \varphi + W_{22} \rho^2 \cos^2 \varphi + W_{60} \rho^6 + \\ + W_{51} \rho^5 \cos \varphi + W_{42} \rho^4 \cos^2 \varphi + W_{33} \rho^3 \cos^3 \varphi + \dots, \quad (2.43)$$

где  $W_{ij}$  – коэффициент волновой абберации, выраженный в длинах волн и равный волновой абберации на краю поверхности при  $\rho = 1$  и  $\varphi = 0$ ;  $i \geq j$ ;  $i + j$  – чётное число;  $W_{00}$  – постоянная составляющая, не влияющая на качество изображения (обычно в разложение не включается). Между волновой, меридиональной и сагиттальной составляющими поперечной абберации существует однозначная взаимосвязь, которая определяется соотношениями вида:

$$\left. \begin{aligned} \delta g' &= \frac{R'}{a'} \left( \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \\ \delta G' &= \frac{R'}{a'} \left( \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Отсюда следует, что чем сложнее форма волновой поверхности, т.е. чем больше производные от волновой aberrации  $W$  по  $\rho$  и  $\varphi$ , тем больше величина поперечных aberrаций. Подставив выражение (2.43) в соотношения (2.44), получим выражения, определяющие составляющие поперечной aberrации в виде степенных рядов, при этом порядок разложения определяется величиной  $\rho = i + j - 1$ .

Известно, что качество изображения предмета определяется величиной пятна рассеяния в изображении точки и распределением освещённости в нём. Распределение светового возмущения в плоскости изображения, возникающее из-за наличия точечного источника излучения в плоскости предмета, определяется двумерным преобразованием Фурье светового возмущения на сфере сравнения в пределах выходного зрачка  $S'$  в виде:

$$u(x', y') = \frac{ik}{2\pi R'^2} \iint_{S'} F(\mu', \nu') \exp\left(-ik \frac{\mu'x' + \nu'y'}{R'}\right) d\mu' d\nu'. \quad (2.45)$$

В этом выражении  $F'(\mu', \nu')$  – зрачковая функция, определяемая выражением

$$F'(\mu', \nu') = P(\mu', \nu') u(\mu', \nu') \exp[-ikW(\mu', \nu')],$$

где  $u(\mu', \nu')$  – амплитуда светового возмущения на выходной сфере;  $W(\mu', \nu')$  – функция волновой aberrации;  $P(\mu', \nu')$  – единично-нулевая функция, определяемая областью выходного зрачка, при этом

$$P(\mu', \nu') = \begin{cases} 1, & (\mu', \nu') \in S', \\ 0, & (\mu', \nu') \notin S'. \end{cases}$$

В полярной системе координат имеем

$$\mu' = a' \rho \cos \varphi, \quad \nu' = a' \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{\frac{\mu'^2 + \nu'^2}{a'^2}};$$

$$x' = r' \cos \theta, \quad y' = r' \sin \theta, \quad x'^2 + y'^2 = r'^2.$$

Подставив эти соотношения в выражение (2.45), получаем

$$u(r', \theta) = \frac{ika'^2}{2\pi R'^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \exp\left[-ik \frac{a'}{R'} r' \rho \cos(\varphi - \theta)\right] \rho d\rho d\varphi, \quad (2.46)$$

где  $F(\rho, \varphi) = U(\rho, \varphi) \exp[-ikW(\rho, \varphi)]$ . Будем считать, что  $u(\rho, \varphi) = U_0 = const$ . Тогда при  $W(\rho, \varphi) \equiv 0$  и  $r' = 0$  получим

$$u_0(r', \theta) = \frac{ika'^2}{2R'^2} U_0 = u_0(0). \text{ При этом}$$

$$u(r', \theta) = u_0(0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[-ikW(\rho, \varphi)] \times \times \exp\left[-ik \frac{a'}{R'} r' \rho \cos(\varphi - \theta)\right] \rho d\rho d\varphi. \quad (2.47)$$

Распределение освещённости в изображении точки определится квадратом модуля выражения (2.47) или, что то же самое, произведением комплексно сопряжённых выражений (2.47) в виде:

$$E(r', \theta) = u(r', \theta) \cdot u^*(r', \theta). \quad (2.48)$$

$$\text{Отношение } D(r', \theta) = \frac{E(r', \theta)}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} E(r', \theta) r' dr' d\theta},$$

определяющее относительное распределение потока в изображении точки, принято называть функцией рассеяния точки, при этом

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} D(r', \theta) r' dr' d\theta = 1.$$

Освещённость в осевой точке изображения, т.е. при  $r' = 0$ , в соответствии с выражением (2.47) равна

$$E(0) = u(0) \cdot u^*(0), \quad (2.49)$$

где  $u(0) = u_0(0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[-ikW(\rho, \varphi)] \rho d\rho d\varphi$ .

При  $W(\rho, \varphi) \equiv 0$  имеем  $u(0) = u_0(0)$ , а

$$E_0(0) = u_0(0) \cdot u_0^*(0) = \frac{1}{4} \left( \frac{ka'^2}{R'^2} u_0 \right)^2.$$

Отношение

$$St = \frac{E(0)}{E_0(0)} = \tilde{u}(0) \cdot u_0^*(0), \quad (2.50)$$

где  $\tilde{u}(0) = \frac{u(0)}{u_0(0)} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[-ikW(\rho, \varphi)] \rho d\rho d\varphi$ , (2.51)

принято называть определительной яркостью или числом Штреля.

В соответствии с формулой Эйлера имеем

$$\exp[-ikW(\rho, \varphi)] = \cos[kW(\rho, \varphi)] - i \sin[kW(\rho, \varphi)]. \quad (2.52)$$

Разложив тригонометрические функции в степенной ряд, выражение (2.52) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \exp[-ikW(\rho, \varphi)] = & 1 - \frac{1}{2!} k^2 W^2(\rho, \varphi) + \frac{1}{4!} k^4 W^4(\rho, \varphi) - \dots - \\ & - i \left[ kW(\rho, \varphi) - \frac{1}{3!} k^3 W^3(\rho, \varphi) + \frac{1}{5!} k^5 W^5(\rho, \varphi) - \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Подставив степенной ряд (2.53) в выражение (2.51) и ограничиваясь при этом членами разложения в степени не выше второй, получаем

$$\tilde{u}(0) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[ 1 - \frac{1}{2} k^2 W^2(\rho, \varphi) - ikW(\rho, \varphi) \right] \rho d\rho d\varphi. \quad (2.54)$$

Пусть  $\overline{W}_n$  – среднее значение  $n$ -й степени  $W$ , то есть

$$\overline{W}_n = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n \rho d\rho d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n \rho d\rho d\varphi. \quad (2.55)$$

При этом выражение (2.51) можно представить в виде:

$$\tilde{u}(0) \approx 1 - \frac{1}{2} k^2 \overline{W}^2 - ik\overline{W}.$$

Подставив это выражение в формулу (2.50), с учетом принятой точности величин получаем

$$\begin{aligned} St & \approx \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 \overline{W}^2 - ik\overline{W} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 \overline{W}^2 + ik\overline{W} \right) = \\ & = 1 - k^2 \left[ \overline{W}^2 - (\overline{W})^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Среднеквадратичная деформация волнового фронта определяется выражением

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} (W - \overline{W})^2 \rho d\rho d\varphi}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi} = \overline{W}^2 - (\overline{W})^2. \quad (2.57)$$

Полученное выражение позволяет представить формулу (2.56) в виде:

$$St = 1 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \omega^2. \quad (2.58)$$

При этом размах деформации волнового фронта (*peak to valley*) определяется разностью

$$W_p = |W - \bar{W}|_{\text{наиб}}. \quad (2.59)$$

В соответствии с критерием Марешаля, деформацию волнового фронта, вызванную отклонением формы обработанной поверхности от номинальной, можно считать вполне допустимой, если число Штреля  $St \geq 0,8$ ; при этом среднеквадратичная деформация волнового фронта должна удовлетворять условию  $\omega \leq 0,75\lambda$ .

Вполне очевидно, что при соблюдении этого условия форма деформации волнового фронта может быть произвольной, а, следовательно, в каждом конкретном случае представляет собой случайную величину. Таким образом, можно принять, что размах деформации волнового фронта можно менять в пределах  $3\omega \leq W_p < 4\omega$ . Если принять, что  $W_p \leq 4\omega$ , то при  $\omega \leq 0,75\lambda$  величина  $W_p \leq \frac{1}{4}\lambda$ .

Положив в формуле (2.58) величину  $St = 0$ , получаем, что  $W_p = 3\omega = \frac{3}{2\pi}\lambda$ . Следовательно, при  $W_p > \frac{3}{2\pi}\lambda$  величина  $St < 0$ , что физически получить невозможно. Этот результат лишний раз подтверждает тот факт, что формула (2.58) справедлива лишь при малых величинах  $\omega$ , а, соответственно, и  $W_p$ .

Формулу (2.58) можно представить в виде:

$$St = \exp(-k^2\omega^2), \quad (2.60)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Действительно, если величина  $\omega^2$  достаточно мала, то,

разложив правую часть выражения (2.60) в степенной ряд и ограничив ряд первыми двумя членами, получим выражение (2.58). Формула (2.60) так же, как и формула (2.58), справедлива при малых величинах деформации волнового фронта. И, тем не менее, даже при  $W_p = 0,75\lambda$  погрешность определения числа Штреля формулой (2.60) не превышает 10 %.

### 3. ПРИНЦИПАЛЬНЫЕ СХЕМЫ КОНТРОЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Схема контроля качества изображения, образованного объективом, в проходящем свете показана на рис.3.1, где  $A_{и}$  – точечный источник излучения,  $\varphi_{к}$  – объектив коллиматора,  $\varphi_{о}$  – объектив,  $A'_{и}$  – изображение точечного источника света, образованного объективом коллиматора и контролируемым объективом. Вполне очевидно, что aberrации объектива коллиматора должны быть в пределах допустимых величин при требуемом качестве изображения точки, образованного контролируемым объективом.

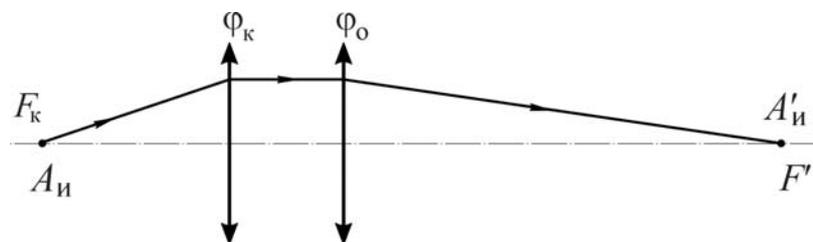


Рис.3.1. Схема контроля объектива по образованному им изображению точечного объекта

Данную схему контроля можно преобразовать к виду, показанному на рис.3.2. В схеме по рис.3.2 точечный источник света расположен в фокусе  $F$  объектива  $\varphi_{о}$ . Выходящий из объектива параллельный пучок световых лучей падает на плоское зеркало  $Z_{п}$ , отражается от него и в фокусе объектива  $F$  формирует изображение точечного источника света. Такой ход лучей в схеме контроля называется автоколлимационным ходом лучей, а сама схема контроля – автоколлимационной. Если развернуть схему контроля отно-

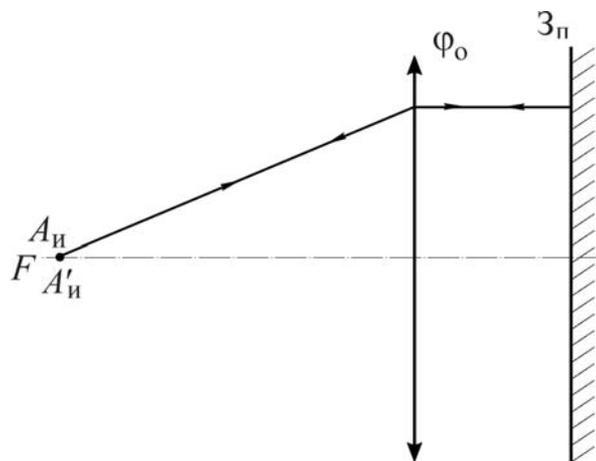


Рис.3.2. Автоколлимационная схема контроля объектива по образованному им изображению  $A'_{и}$  точечного объекта  $A_{и}$

сительно плоского зеркала, то получим симметричную оптическую систему, которая не вносит кому в образованное ею изображение точки. Поэтому для разнесения в пространстве точечного источника света и его изображения точечный источник смещают на малую величину в поперечном направлении относительно оптической оси.

Заметим, что в рассматриваемой схеме пучок световых лучей дважды проходит контролируруемую оптическую систему, что приводит к удвоению волновой аберрации, вносимой в изображение точки контролируемой системой, а, следовательно, при неизменной погрешности измерения приводит к повышению точности контроля в два раза. Однако в деформацию контролируемого волнового фронта входит удвоенная величина деформации плоского зеркала, что следует учитывать при определении требований к элементам контрольной схемы.

Подобные схемы применяют для контроля элементов (линз) с несферическими поверхностями второго порядка.

### 3.1. Схемы контроля линз, формирующих безабберационное изображение осевой точки предмета

Напомним, что поверхность Декарта (картезианский овал), изображающая без аберраций осевую точку предмета, определяется уравнением

$$\left[ \frac{n'^2 - n^2}{2} (\rho^2 + z^2) - (n'^2 s'_0 - n^2 s_0) z \right]^2 = \quad (3.1)$$

$$= nn'(n's'_0 - ns_0) \left[ (ns'_0 - n's_0)(\rho^2 + z^2) - 2(n' - n)s_0 s'_0 z \right],$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . Разделив левую и правую части уравнения (3.1) на  $n^4 s_0^2$ , получаем

$$\left[ \frac{n'^2 - n^2}{2n^2} \frac{\rho^2 + z^2}{s_0} + \left( 1 - \frac{n'^2 s'_0}{n'^2 s_0} \right) z \right]^2 = \quad (3.2)$$

$$= \frac{n'^2}{n^2} \left( 1 - \frac{n' s'_0}{n s_0} \right) \left[ \left( 1 - \frac{n s'_0}{n' s_0} \right) (\rho^2 + z^2) - 2 \frac{n' - n}{n'} s'_0 z \right].$$

При  $s_0 = \infty$  отрезок  $s'_0 = f'_0$ . При этом выражение (3.2) можно преобразовать к виду:

$$x^2 + y^2 = 2 \frac{n' - n}{n'} f'_0 z - \left( 1 - \frac{n^2}{n'^2} \right) z^2.$$

Полученное уравнение определяет несферическую поверхность вращения второго порядка

$$x^2 + y^2 = 2rz - (1 + \sigma_e)z^2, \quad (3.3)$$

где  $r = \frac{n' - n}{n'} f_0$ ,  $\sigma_e = -e^2 = -\frac{n^2}{n'^2}$ .

Вид поверхности определяется коэффициентом деформации  $\sigma_e$  в уравнении (3.3). При  $n' > n$  величина  $\sigma_e = -e^2 = -\frac{n^2}{n'^2} > -1$ . При этом уравнение (3.3) определяет поверхность эллипсоида вращения, которая в сочетании со сферической поверхностью, концентричной фокусу эллипсоидной поверхности (и всей линзы в целом), образует сферозэллипсоидную линзу. Возможная схема контроля качества изображения осевой точки предмета, образованного такой линзой, показана на рис.3.3.

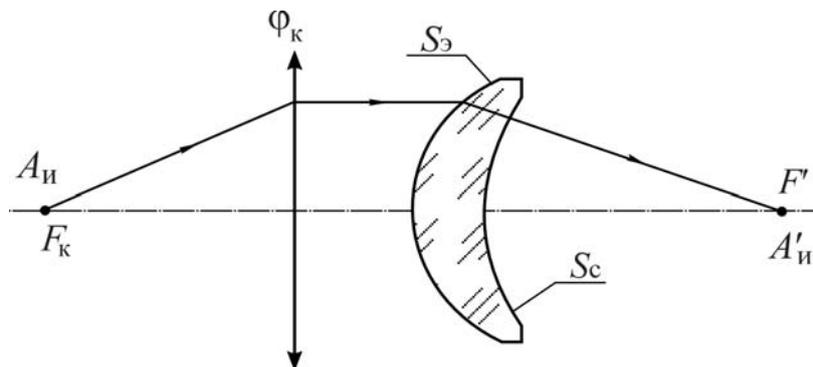


Рис.3.3. Схема контроля сферозэллипсоидной линзы

Если сферическую поверхность линзы использовать в качестве вспомогательной отражающей поверхности, то можно построить автоколлимационную схему контроля, показанную на рис.3.4.

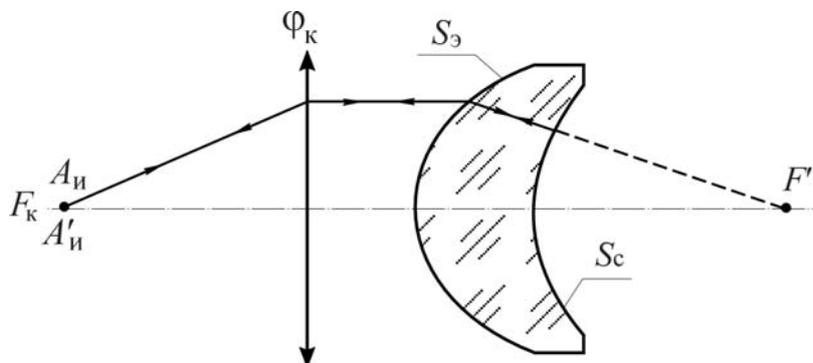


Рис.3.4. Автоколлимационная схема контроля сферозэллипсоидной линзы

Однако, в этом случае отклонения вспомогательной поверхности от идеальной сферы, умноженные на  $2n$ , где  $n$  – показатель преломления материала линзы, будут добавлены к контролируемой

деформации волнового фронта. Возможен и другой вариант автоколлимационной схемы контроля сфероэллипсоидной линзы, показанный на рис.3.5.

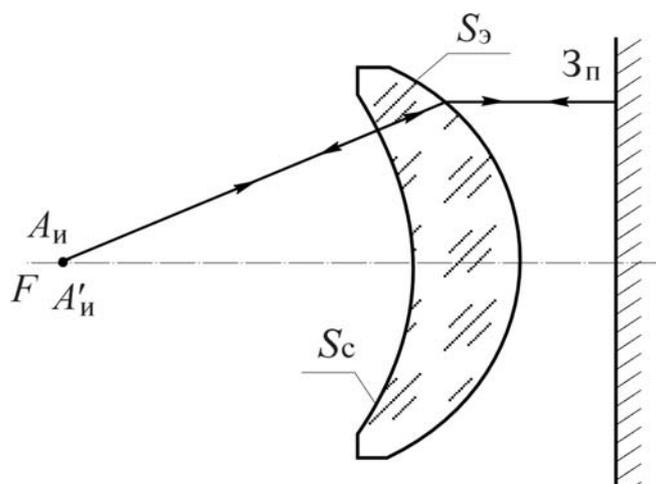


Рис.3.5. Автоколлимационная схема контроля сфероэллипсоидной линзы

Здесь точечный источник излучения  $A_{и}$  расположен в фокусе линзы, а в параллельных пучках лучей перпендикулярно оптической оси линзы расположено вспомогательное плоское зеркало. Следует иметь в виду, что в этой схеме на основное изображение  $A'_{и}$  источника накладывается изображение, образованное пучками световых лучей, отраженных от сферической поверхности.

Пусть  $\frac{n'}{n} < 1$ . Тогда  $\sigma_e = -\frac{n^2}{n'^2} < 1$ . При этом уравнение (3.3)

определяет поверхность гиперболоида вращения, которая в сочетании с плоской поверхностью образует плоскогиперболоидную линзу. Возможная схема контроля качества изображения осевой точки предмета, образованного такой линзой, показана на рис.3.6.

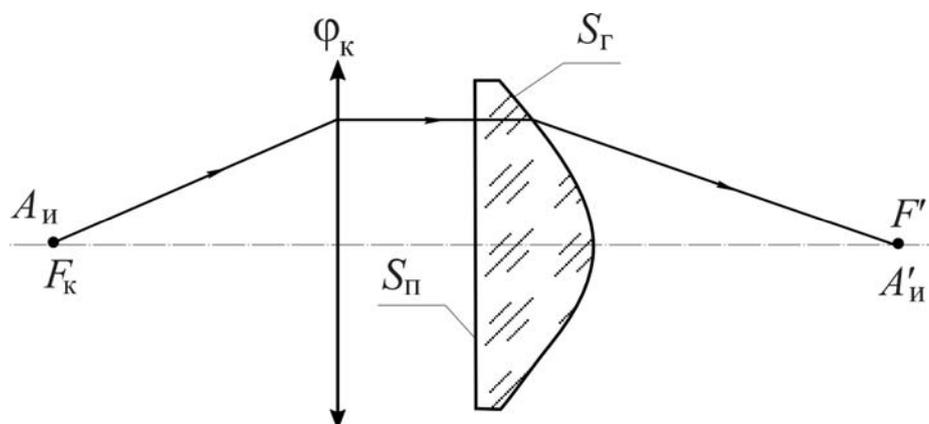


Рис.3.6. Схема контроля плоскогиперболоидной линзы

Эту схему легко превратить в автоколлимационную, применив вспомогательное выпуклое или вогнутое (изображено пунктиром) зеркало сферической формы, как показано на рис.3.7.

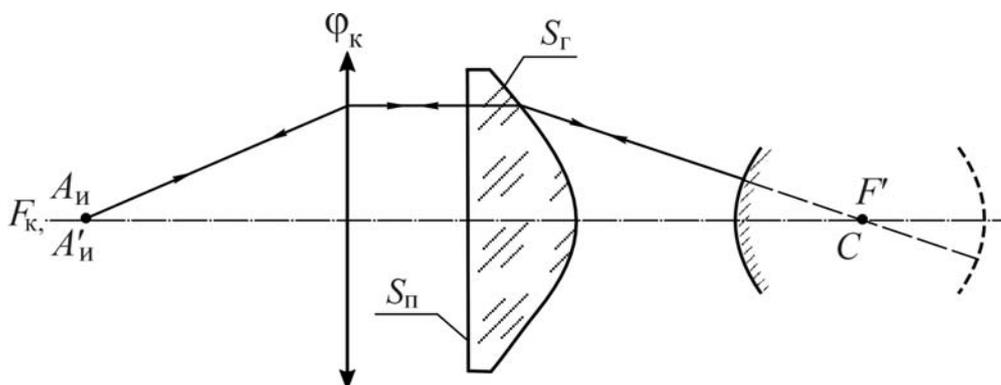


Рис.3.7. Автоколлимационная схема контроля плоскогиперболоидной линзы

Другой вариант автоколлимационной схемы контроля показан на рис.3.8.

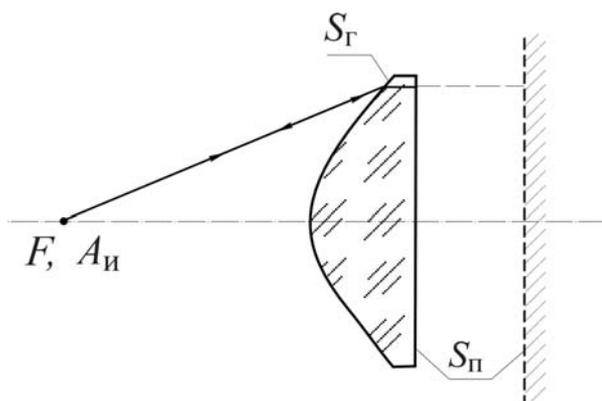


Рис.3.8. Автоколлимационная схема контроля плоскогиперболоидной линзы

Здесь точечный источник света расположен в фокусе линзы, при этом роль плоского вспомогательного зеркала играет плоская поверхность линзы. Отклонения этой поверхности от номинальной (плоской) формы, умноженные на  $2n$ , сложатся с контролируемой деформацией волнового фронта. Чтобы исключить влияние деформаций плоской поверхности линзы на результат контроля, в случае изготовления достаточно большого количества линз можно ввести в схему дополнительное (вспомогательное) плоское зеркало. Однако, следует иметь в виду, что в этом случае на основное изображение  $A'_{и}$  источника света накладывается изображение, образованное пучками световых лучей, отраженных от плоской поверхности линзы.

### 3.2. Схемы контроля, основанные на применении анаберрационных точек отражающих несферических поверхностей второго порядка

Положив в уравнении (3.1)  $n' = -n$  и преобразовав его, получаем

$$x^2 + y^2 = 4 \frac{s_0 s'_0}{s_0 + s'_0} z - 4 \frac{s_0 s'_0}{(s_0 + s'_0)^2} z^2.$$

Полученное выражение представляет собой уравнение поверхности вращения второго порядка

$$x^2 + y^2 = 2r_0 z - (1 - e^2) z^2, \quad (3.4)$$

где  $r = \frac{s_0 s'_0}{s_0 + s'_0}$ ,  $e^2 = \left( \frac{s'_0 - s_0}{s'_0 + s_0} \right)^2$ .

На оси  $z$  такой поверхности расположены её геометрические фокусы, которые, как было показано, представляют собой оптически сопряжённые анаберрационные точки, т.е. отражающие поверхности вращения второго порядка систематически (без аберраций) отображают их геометрические фокусы. Это замечательное свойство таких поверхностей используют не только при построении зеркальных оптических систем объективов классических телескопов, но и при построении схем контроля их формы.

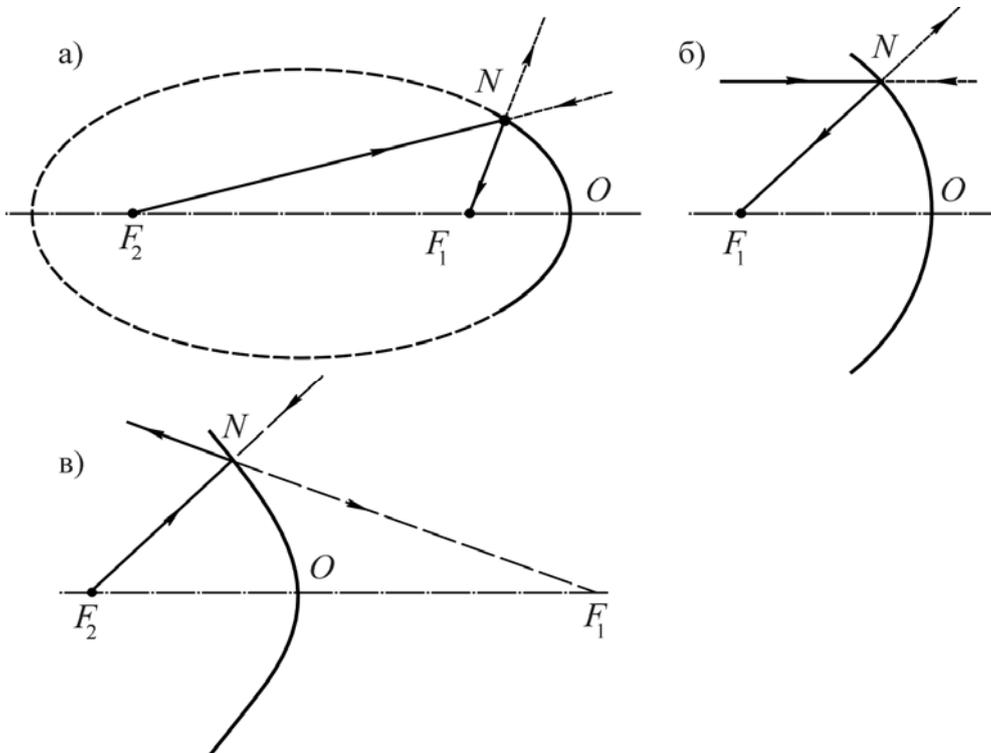


Рис.3.9. Отражающие поверхности вращения несферической формы: а) – эллипсоид; б) – параболоид; в) – гиперболоид

Геометрические параметры несферических поверхностей вращения второго порядка вполне определяются радиусом кривизны  $r_0$  при вершине поверхности и эксцентриситетом  $e$ . В частности, эти величины определяют положение геометрических фокусов  $F_1$  и  $F_2$  относительно вершины  $O$  поверхности, как показано на рис.3.9; лучи, отражённые наружной поверхностью, показаны на рисунке пунктирной линией. Соответствующие соотношения приведены в табл.3.1; знак радиуса кривизны  $r_0$ , входящего в эти соотношения, соответствует правилам знаков, принятых в оптике.

Таблица 3.1. Положение геометрических фокусов несферических поверхностей вращения второго порядка

Вид поверхности	Эксцентриситет $e$	$OF_2 = s_0$	$OF_1 = s'_0$	$F_2F_1$
Эллипсоид	$0 < e < 1$	$\frac{r_0}{1-e}$	$\frac{r_0}{1+e}$	$\frac{2r_0e}{e^2-1}$
Параболоид	$e = 1$	$\infty$	$\frac{1}{2}r_0$	$\infty$
Гиперболоид	$e > 1$	$\frac{r_0}{1+e}$	$\frac{r_0}{1-e}$	$\frac{2r_0e}{1-e^2}$

Практическое применение метода анаберрационных точек при построении схем контроля требует, как правило, применения автоколлимационной оптической системы, состоящей из контролируемой поверхности и вспомогательного сферического (плоского) зеркала. Принцип построения автоколлимационной системы заключается в том, что центр кривизны сферического зеркала совмещают с одним из геометрических фокусов контролируемой несферической поверхности, а точечный источник света или его изображение – с другим геометрическим фокусом. Благодаря этому обеспечивается автоколлимационный ход лучей в системе, причём лучи света дважды отражаются от контролируемой поверхности и один раз от вспомогательного зеркала. Таким образом, применение автоколлимационной системы позволяет резко увеличить чувствительность контроля, поскольку при этом контролируемая деформация волнового фронта определяется учетверенным отклонением формы контролируемой поверхности от номинальной и удвоенным отклонением формы вспомогательного зеркала. Проблемы контроля вогнутой отражающей поверхности сферического зеркала не существует, а потому может быть достигнуто весьма малое отклонение её формы от номинальной.

Рассмотрим возможные варианты автоколлимационной системы контроля несферических поверхностей вращения второго порядка. Введем обозначения:  $D_k$  – диаметр контролируемой поверхности,  $d_k$  – диаметр неконтролируемой (экранируемой) зоны несферической поверхности вспомогательного зеркала,  $D$  – его диаметр,  $d$  – диаметр отверстия в центральной зоне сферического зеркала.

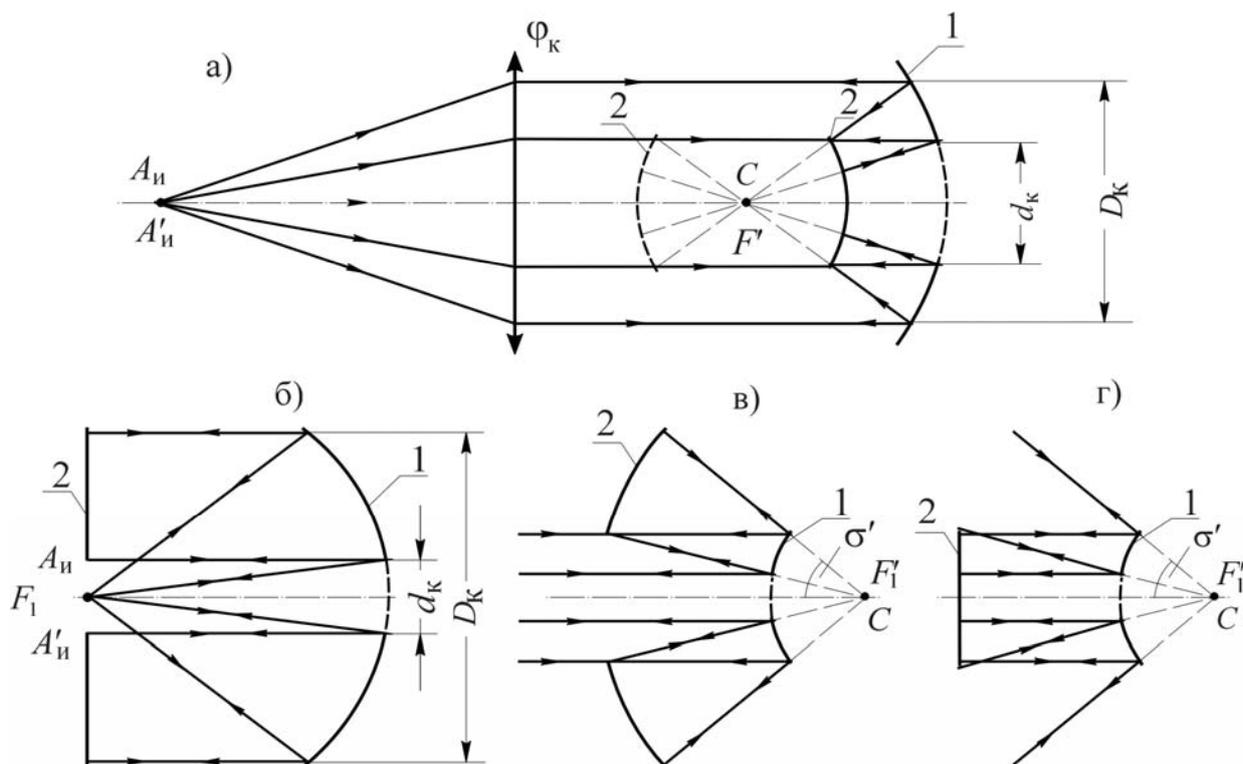


Рис.3.10. Автоколлимационные схемы контроля поверхностей параболоида вращения: 1 – контролируемая поверхность; 2 – вспомогательное или плоское зеркало;  $F_1$  – фокус параболоида;  $C$  – центр кривизны;  $A_{и}, A'_{и}$  – точечный источник света и его изображение

На рис.3.10 приведены схемы контроля поверхности параболоида вращения. Параллельный пучок лучей, образованный объективом коллиматора  $\Phi_k$ , падает на вогнутый параболоид 1, как показано на рис.3.10а. Сферическое зеркало 2 может быть как выпуклым, так и вогнутым, но диаметр его  $D$  определяет диаметр  $d_k$  неконтролируемой зоны поверхности. Если точечный источник света  $A_{и}$  расположить в геометрическом фокусе  $F_1$  вогнутого параболоида 1, а на пути параллельного пучка лучей поместить плоское зеркало 2, то получим контрольную схему Ричи, как показано на рис.3.10б. Диаметр  $D$  плоского зеркала 2 равен диаметру  $D_k$  выпуклого параболоида 1. Диаметр неконтролируемой зоны  $d_k \approx \frac{1}{2} D_k \frac{r_0}{R}$ , т.е. чем больше  $R$ , тем

меньше  $d_k$ . С другой стороны, диаметр сферического зеркала  $D = 2R \sin \sigma'_k$ , при этом  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sigma'_k = \frac{D_k}{2r_0}$ .

Для контроля поверхности выпуклого параболоида принципиально можно применить схему Ричи, как показано на рис.3.10г. И здесь диаметр плоского зеркала  $D = D_k$ . Диаметр неконтролируемой зоны  $d_k \approx r \operatorname{tg} \sigma' = \frac{1}{2} \frac{r_0}{s'_k} D_k$ , где  $s'_k$  – задний отрезок (рабочее расстояние) объектива коллиматора  $\varphi_k$ .

Автоколлимационные схемы контроля поверхности эллипсоида вращения приведены на рис.3.11.

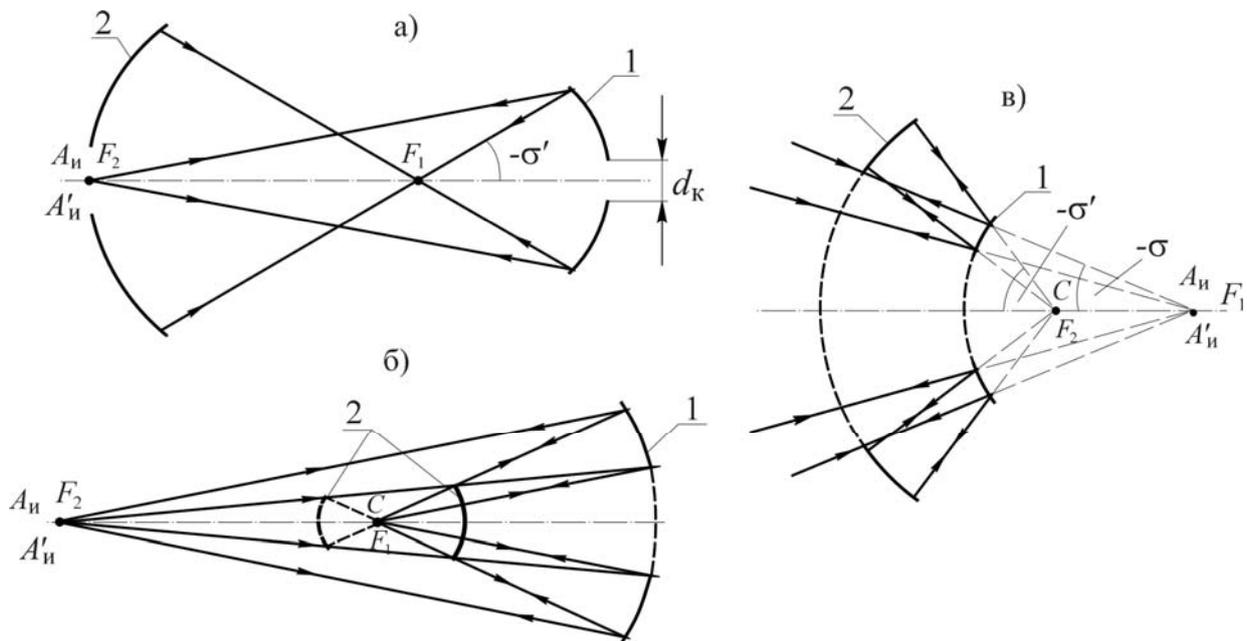


Рис.3.11. Автоколлимационные схемы контроля поверхностей эллипсоида вращения

Совместив точечный источник света с геометрическим фокусом  $F_2$  вогнутого эллипсоида 1, а центр  $C$  сферического зеркала 2 с геометрическим фокусом  $F_1$  эллипсоида, получаем схему, показанную на рис.3.11а. Здесь  $D > D_k$ , при этом  $D = 2R \sin \sigma'$ , а  $d_k = \left( \frac{1-e}{1+e} \right) d$ . При  $D < D_k$  та же схема принимает вид, показанный на рис.3.11б, где сферическое зеркало может быть выпуклым или вогнутым.

$$\text{В этом случае } D = \pm 2R \sin \sigma', \quad d_k = \frac{OF_2 \cdot D}{F_1 F_2 + R} = r_0 D \frac{1+e}{R(1-e) - 2r_0 e}.$$

Для контроля поверхности выпуклого эллипсоида принципиально можно применить схему, показанную на рис.3.11в.

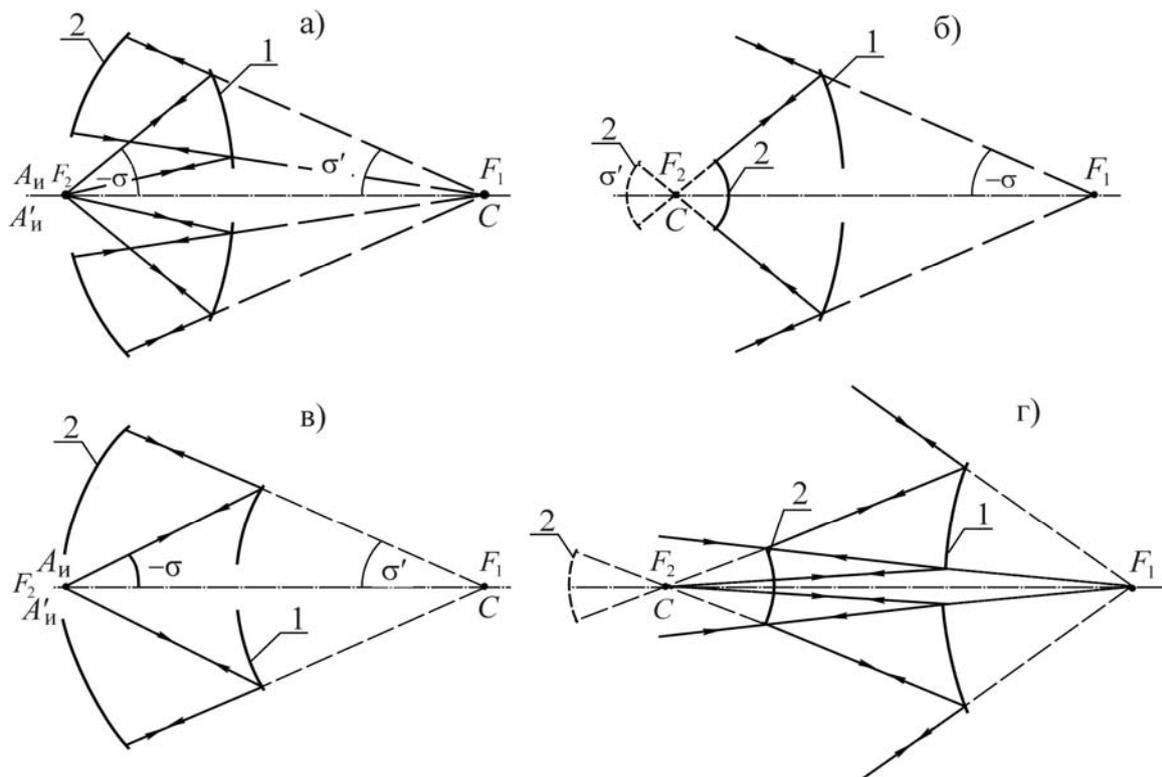


Рис.3.12. Автоколлимационные схемы контроля поверхности гиперboloида вращения

Рассмотрим автоколлимационные схемы контроля поверхности гиперboloида вращения. Совместив точечный источник света с геометрическим фокусом  $F_2$  вогнутой поверхности гиперboloида 1, а центр кривизны  $C$  сферического зеркала 2 с фокусом  $F_1$ , получаем схему контроля, показанную на рис.3.12а. Здесь  $D > D_k$ , при этом

$$D \leq 2R \sin \sigma', \quad d_k \approx \frac{OF_2}{F_1 F_2} d = d \frac{1-e}{2e}. \quad \text{Для контроля вогнутой}$$

поверхности гиперboloида принципиально возможна схема, показанная на рис.3.12б. В этой схеме  $D \ll D_k$ , при этом

$$d_k \approx \frac{OF_1}{F_2 F_1 + R} d = r_0 d \frac{1+e}{2r_0 e + (1-e^2)R} \approx d \frac{1+e}{2e}.$$

Совместив точечный источник света с геометрическим фокусом  $F_2$  гиперboloида вращения 1, а центр  $C$  сферического зеркала 2 с геометрическим фокусом  $F_1$ , получим удобную схему контроля выпуклой поверхности гиперboloида, показанную на рис.3.12в.

В этой схеме  $D > D_k$ , при этом  $D = 2R \sin \sigma'$ ,  
 $d_k \approx \frac{OF_1 \cdot d}{F_1 F_2 \pm R} = \frac{1+e}{2e} d$ . Для контроля выпуклой поверхности гиперboloида принципиально возможно применение схемы,

показанной на рис.3.12г. Здесь  $D \ll D_k$ , при этом

$$d_k \approx \frac{OF_1 \cdot d}{F_2F_1 + R} \approx \frac{1+e}{2e} d.$$

Наиболее удобны для практического применения автоколлимационные схемы, представленные на рис.3.10а,б для контроля вогнутых поверхностей параболоида, на рис.3.11а для контроля вогнутых поверхностей эллипсоида, на рис.3.12а,в для контроля погнутых и выпуклых поверхностей гиперboloида вращения соответственно.

Особое положение занимают поверхности, образованные вращением эллипса вокруг малой оси, – так называемые сплюснутые эллипсоиды. Сплюснутые эллипсоиды не имеют анаберрационных точек, так как при вращении эллипса вокруг малой оси точки  $F_1$  и  $F_2$  образуют кольцо, в плоскости которого лежит большая ось эллипса, как показано на рис.3.13.

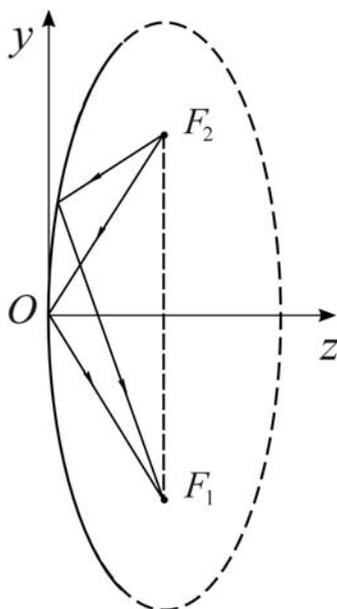


Рис.3.13. Сечение меридиональной плоскостью отражающей поверхности сплюснутого эллипсоида вращения

Напомним, что кривые второго порядка определяются уравнением

$$y^2 = 2r_0z - (1 - e^2)z^2. \quad (3.5)$$

Сместим систему координат в направлении оси  $z$  на расстояние  $a$ . При этом, положив  $z = a + \tilde{z}$ , получаем

$$y^2 = a[2r_0 - (1 - e^2)a] + 2[r_0 - (1 - e^2)a]\tilde{z} - (1 - e^2)\tilde{z}^2. \quad (3.6)$$

Положив  $r_0 - (1 - e^2)a = 0$ , получаем  $a = \frac{r_0}{1 - e^2}$ . При этом уравнение (3.6) принимает вид:

$$y^2 = \frac{r_0^2}{1 - e^2} - (1 - e^2)\tilde{z}^2. \quad (3.7)$$

Снова сместим систему координат, но теперь в направлении оси  $y$ , на расстояние  $b$ , положив  $y = \tilde{y} - b$ . При этом выражение (3.7) принимает вид:

$$\tilde{z}^2 = \frac{2r_0}{(1 - e^2)^{3/2}}\tilde{y} - \frac{1}{1 - e^2}\tilde{y}^2. \quad (3.8)$$

Эллипс, описываемый уравнением (3.8) в системе координат  $y, z$  (волна над координатами опущена), показана на рис.3.14.

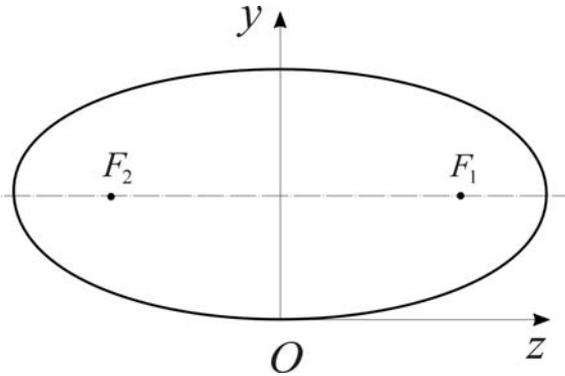


Рис.3.14. Эллипс, эллипсоид вращения и сплюснутый эллипсоид

В результате получаем, что поверхность, образованная вращением кривой второго порядка вокруг оси, перпендикулярной прямой, проходящей через геометрические фокусы кривых, определяется уравнением

$$x^2 + z^2 = 2\tilde{r}_0 y - (1 - \tilde{e}^2)y^2, \quad (3.9)$$

где  $\tilde{r}_0 = \frac{r_0}{(1 - e^2)^{3/2}}$ ,  $\tilde{e}^2 = \frac{e^2}{e^2 - 1}$ .

При изменении эксцентриситета  $e$  в диапазоне  $0 < e < 1$  уравнение (3.9) определяет сплюснутый эллипсоид, при этом  $\tilde{e}^2 < 0$ .

Поверхности, определяемые уравнением (3.9), могут найти применение, например, при конструировании различных осветительных устройств. Они не имеют анаберрационных точек, а поэтому рассмотренный метод построения схем для их контроля не применим.

### 3.3. Компенсационная схема контроля несферических поверхностей

Вполне очевидно, что проблемы практического осуществления схем, основанных на применении метода анаберрационных точек, растут по мере увеличения диаметров контролируемых вогнутых поверхностей параболоида и гиперболоида вращения и при контроле всех видов выпуклых поверхностей вращения второго порядка. Применение этих методов для контроля крупногабаритной астрономической оптики становится практически невозможным. Этим вызвано появление компенсационных схем контроля отражающих поверхностей вращения несферической формы.

Идея контроля вогнутой отражающей поверхности параболоида вращения впервые в 1921 году была высказана и практически осуществлена академиком АН СССР В.П. Линником. В 1924 году член-корреспондент АН СССР Д.Д. Максудов предложил компенсационную схему контроля вогнутой поверхности параболоида с помощью значительно меньших по размеру вогнутых отражающих поверхностей сферической формы. В дальнейшем идея контроля компенсационным методом была развита в работах А. Кудэ, Х.Е. Дела, Ф.Е. Росса, А. Оффнера, профессора Д.Т. Пуряева и других авторов.

Сущность компенсационного метода контроля заключается в том, что с помощью дополнительного оптического элемента (компенсатора) сферический (в частном случае плоский) волновой фронт преобразуется в несферический, эквидистантный номинальной форме контролируемой несферической поверхности и, в конечном счёте, совпадающий с ней.

На рис.3.15 показано взаимное положение компенсатора 1 и контролируемой несферической поверхности 2; центр кривизны  $C_0$  при вершине несферической поверхности совмещен с параксиальным изображением  $A'_{и0}$  точечного источника света  $A_{и}$ , образованного компенсатором. Точки  $A_{и}$  и  $A'_{и0}$  расположены на оптической оси компенсатора, которая совпадает с осью симметрии несферической поверхности. Расходящийся пучок световых лучей, излучаемый точечным источником  $A_{и}$ , преобразуется компенсатором в пучок лучей, направленных по нормальям к несферической поверхности. Отразившись от последней, лучи света повторяют свой путь в обратном направлении и по выходе из компенсатора в идеальном случае образуют дифракционное изображение точки  $A''_{и0}$ . Вполне очевидно, что для обеспечения указанного хода лучей волновой фронт,

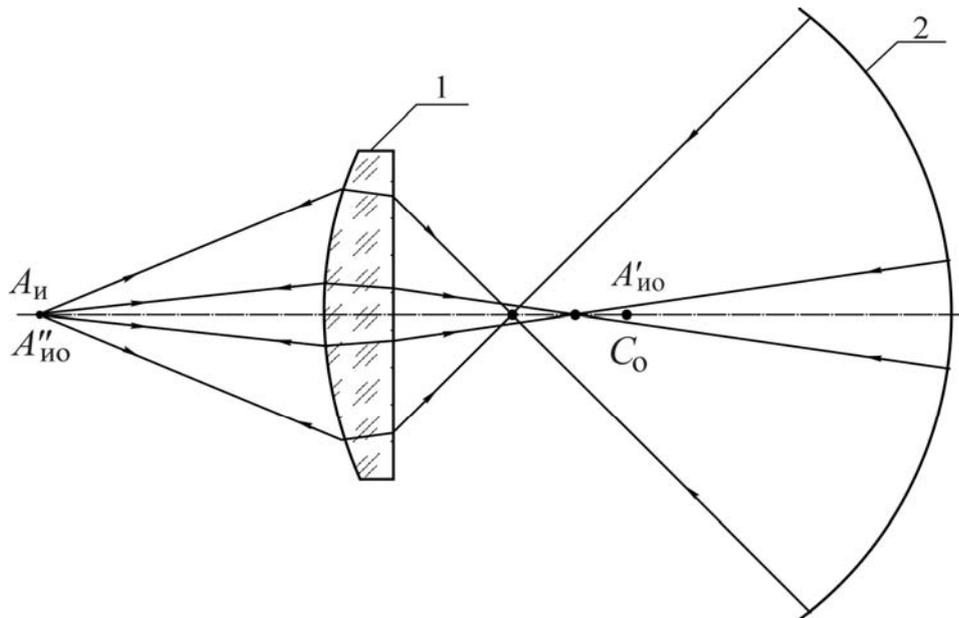


Рис.3.15. Сущность компенсационного метода контроля несферических поверхностей

сформированный компенсатором, должен быть с требуемой точностью эквидистантным контролируемой поверхности. Отсюда следует, что один и тот же компенсатор пригоден для контроля любой несферической поверхности, профиль которой является эквидистантным по отношению к исходной поверхности. Эквидистантные несферические поверхности имеют совершенно одинаковые aberrации нормалей, но отличаются одна от другой радиусом кривизны при вершине и видом описывающих их уравнений. Примером эквидистантных поверхностей в физической оптике служит волновой фронт, перемещающийся в однородной среде: его последовательные положения – суть эквидистантные волновые поверхности. Таким образом, если контролируемая поверхность окажется эквидистантной по отношению к номинальной форме, то такая поверхность может быть принята годной, хотя параметры её могут не соответствовать расчётным. Если компенсатор имеет требуемое качество и правильно установлен относительно контролируемой несферической поверхности, то искажение волнового фронта возникает только за счёт погрешностей несферической поверхности, которые переносятся на выходящий из компенсатора волновой фронт в удвоенном масштабе.

Волновой фронт, сформированный компенсатором, служит как бы своеобразным пробным стеклом, накладываемым на контролируемую несферическую поверхность. Действительно, отклонения последней от эталонного волнового фронта,

сформированного компенсатором, в удвоенном масштабе переносятся на волновой фронт, выходящий из компенсатора, – точно так же, как в случае применения пробных стёкол. Такова принципиальная сущность компенсационного метода контроля несферических поверхностей.

## 4. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ КОМПЕНСАТОРОВ ДЛЯ КОНТРОЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Отклонение волнового фронта, сформированного компенсатором, от сферы можно определить, используя формулу (2.29), если известна точная формула продольной сферической аберрации в изображении точки, образованном компенсатором, т.е., если известна функция  $\delta s' = f(\sigma')$ . Если функция  $\delta s' = f(\sigma')$  подобна функции  $\delta s_n = f(\varphi)$  для несферической поверхности, то такие компенсаторы естественно назвать идеальными, так как сформированный ими волновой фронт точно соответствует поверхности, эквидистантной контролируемой несферической поверхности, а, в конечном счёте, и самой поверхности.

### 4.1. Идеальные компенсаторы

Рассмотрим вид основной функции  $\delta s' = f(\sigma')$  в некоторых частных, но важных случаях, соблюдая принятое в геометрической оптике правило знаков.

**Плоская граница раздела двух сред.** Пусть точка  $C$  – вершина гомоцентрического пучка лучей, а  $NC$  – произвольный луч этого пучка, образующий с оптической осью угол  $\sigma$ , как показано на рис.4.1. Точка  $N$  расположена на границе раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . После преломления в точке  $N$  луч пересекает оптическую ось в точке  $C'$  под углом  $\sigma'$  к ней.

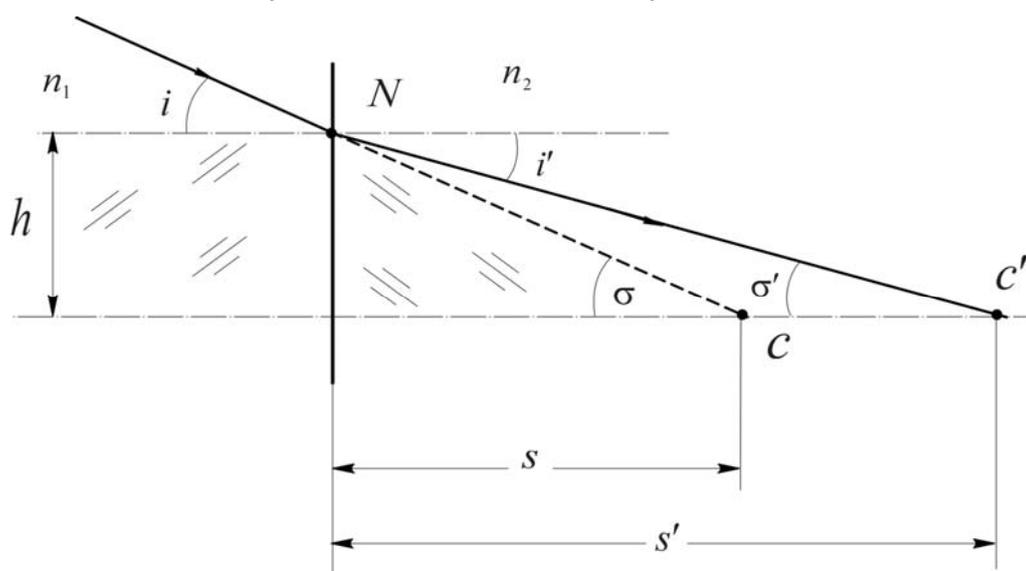


Рис.4.1. Преломление луча на плоской границе раздела двух сред

В соответствии с рисунком имеем

$$h = s \operatorname{tg} \sigma = s' \operatorname{tg} \sigma' .$$

Но  $\sigma = i$  а  $\sigma' = i'$ . Тогда, используя закон преломления луча на границе раздела сред, получаем

$$s' = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \sigma'} s = \tilde{n} s \frac{\cos \sigma'}{\sqrt{1 - \tilde{n}^2 \sin^2 \sigma'}} = \frac{\tilde{n} s}{\sqrt{1 - (\tilde{n}^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \sigma'}}, \quad (4.1)$$

где  $\tilde{n} = \frac{n_2}{n_1}$ .

В параксиальной области, т.е. при  $\sigma' \rightarrow 0$ , формула (4.1) принимает вид:

$$s'_0 = \tilde{n} s.$$

В результате получаем точную формулу, определяющую продольную сферическую aberrацию луча, образующего после преломления на плоской поверхности угол  $\sigma'$  с осью:

$$\delta s' = s' - s'_0 = \tilde{n} s \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (\tilde{n}^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \sigma'}} - 1 \right]. \quad (4.2)$$

Из сопоставления формул (2.12) и (4.2) следует, что плоская поверхность раздела двух сред преобразует сферический волновой фронт в эквидистантный несферической поверхности вращения второго порядка.

Положив в формуле (2.12) величину  $e^2 = \tilde{n}^2$ , а угол  $\varphi = \sigma'$ , из условия  $\delta s' = \delta s_n$  получаем

$$s = \frac{\tilde{n} r_0}{\tilde{n}^2 - 1}. \quad (4.3)$$

**Компенсатор для контроля вогнутых поверхностей эллипсоида вращения.** Если несферическая поверхность образована вращением эллипса, то  $0 < e < 1$ ; при этом  $\tilde{n} < 1$ , т.е.  $n_2 < n_1$ . Пусть  $n_1 = n$ , а  $n_2 = 1$ . Тогда

$$s = \frac{e r_0}{e^2 - 1}, \quad (4.4)$$

где  $e = \frac{1}{n}$ .

Отсюда следует, что при  $s > 0$  величина  $r_0 < 0$ . Это свойство позволяет построить схему контроля вогнутых поверхностей эллипсоида с помощью двухкомпонентного идеального компенсатора, как показано на рис.4.2.

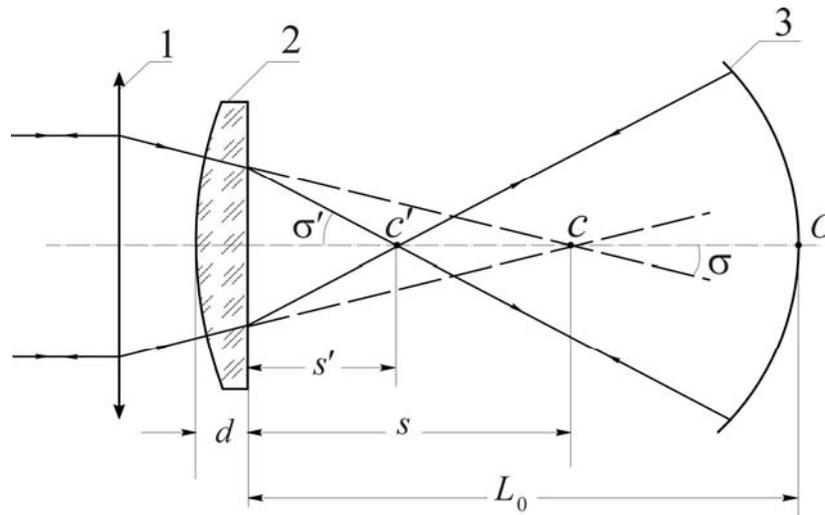


Рис.4.2. Компенсатор для контроля вогнутых поверхностей эллипсоида вращения

Сферический волновой фронт, образованный первым компонентом 1, вторым компонентом 2 преобразуется в эквидистантный поверхности эллипсоида волновой фронт. Второй компонент представляет собой плосковыпуклую линзу, показатель преломления которой равен величине, обратной эксцентриситету эллипса, при этом сферическая поверхность концентрична осевой точке  $C$  гомоцентрического пучка. Таким образом, гомоцентрический пучок лучей, выходящий из компонента 1, преломляется только на плоской поверхности линзы 2. Параксиальное изображение  $C'_0$  точки  $C$ , образованное плосковыпуклой линзой, совмещено с центром кривизны в вершине поверхности эллипсоида. Тогда

$$L_0 = s'_0 - r_0 = ns - r_0 = \frac{n^2 r_0}{1 - n^2} = \frac{r_0}{e^2 - 1}. \quad (4.5)$$

Сопоставив формулу (4.5) с формулой (4.4), находим, что

$$s = eL_0 = \frac{L_0}{n}. \quad (4.6)$$

Заметим, что точка  $C$  может быть не только центром сферической поверхности плосковыпуклой линзы, но и её апланатической точкой, что позволяет уменьшить в  $n$  раз заднюю числовую апертуру первого компонента.

Рассмотренный компенсатор позволяет контролировать вогнутые поверхности эллипсоида вращения, диапазон возможных эксцентриситетов которого определяется диапазоном изменения показателей преломления существующих марок стекла.

**Компенсатор для контроля вогнутых поверхностей гиперboloида вращения.** Если несферическая поверхность образована вращением гиперболы, то  $e > 1$ . При этом  $\tilde{n} > 1$ , т.е.  $n_2 > n_1$ . Пусть  $n_1 = 1$ , а  $n_2 = n$ . Тогда

$$s = \frac{er_0}{e^2 - 1}, \quad (4.7)$$

где  $e = n$ . Отсюда следует, что при  $s > 0$  величина  $r_0 > 0$ . Это свойство позволяет построить схему контроля вогнутых поверхностей гиперboloида с помощью двухкомпонентного идеального компенсатора, как показано на рис.4.3.

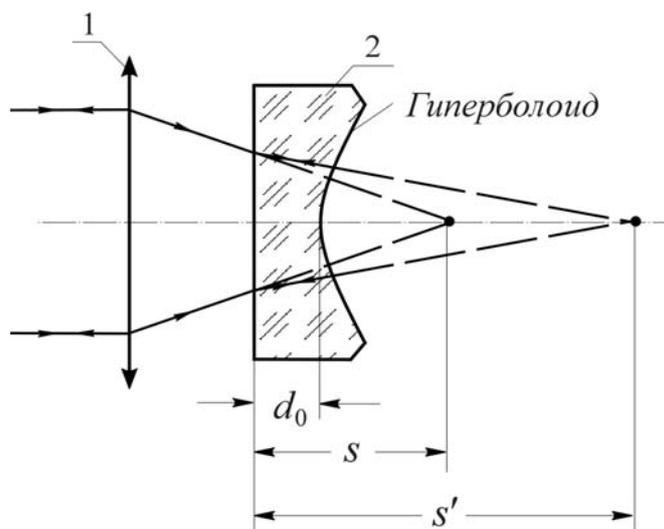


Рис.4.3. Компенсатор для контроля вогнутой поверхности (гиперboloида) плосковогнутой линзы

Сферический волновой фронт, сформированный первым компонентом 1, плоской поверхностью плосковыпуклой линзы 2 преобразуется в волновой фронт, эквидистантный выпуклой поверхности гиперboloида (вогнутой поверхности линзы). В рассматриваемом случае  $s'_0 = ns$ . При этом толщина линзы

$$d_0 = s'_0 - r_0 = ns - r_0 = \frac{n^2 r_0}{n^2 - 1} - r_0 = \frac{r_0}{n^2 - 1} \quad (4.8)$$

$$\text{или } d_0 = \frac{r_0}{e^2 - 1}. \quad (4.9)$$

Сопоставив формулы (4.9) и (4.7), получаем

$$s = nd_0, \text{ а } s'_0 = n^2 d_0.$$

**Плоскопараллельная пластинка.** Пусть вершина гомоцентрического пучка лучей расположена в точке  $C_1$  на оптической оси. Пусть луч этого пучка пересекает первую поверхность

плоскопараллельной пластинки толщиной  $d$  в точке  $N$ , как показано на рис.4.4.

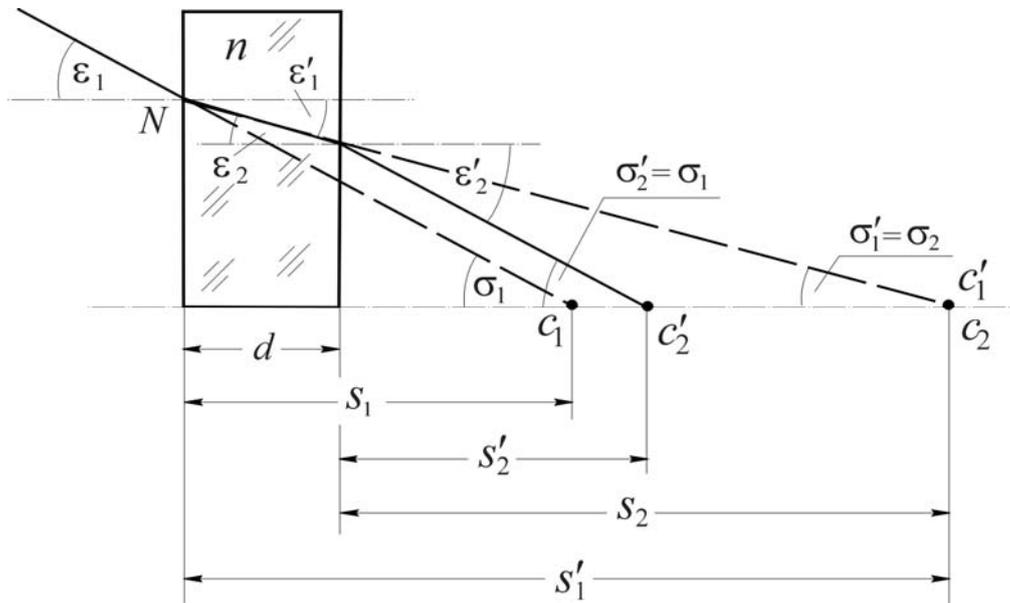


Рис.4.4. Структура пучка лучей в изображении осевой точки предмета, образованном плоскопараллельной пластинкой

Угол падения луча  $\varepsilon_1$  на первую поверхность равен углу преломления  $\varepsilon'_2$  на второй поверхности, а угол преломления  $\varepsilon'_1$  луча на первой поверхности равен углу падения луча на вторую поверхность плоскопараллельной пластинки; при этом в соответствии с законом преломления имеем

$$\sin \varepsilon_1 = n \sin' \varepsilon_1 = n \sin \varepsilon_2 = \sin \varepsilon'_2,$$

где  $n$  – показатель преломления материала пластинки. С оптической осью луч образует углы  $\sigma$  и  $\sigma'$ , в соответствии с рисунком равные:

$$\sigma = \varepsilon_1 = \varepsilon'_2, \quad \sigma' = \varepsilon'_1 = \varepsilon_2.$$

Из рисунка следует, что  $s'_2 = h_2 \operatorname{ctg} \sigma$ .

$$\text{Но } h_2 = h_1 - d \operatorname{tg} \sigma' = s_1 \operatorname{tg} \sigma - d \operatorname{tg} \sigma'. \text{ Тогда } s'_2 = s_1 - d \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \sigma'}.$$

Используя закон преломления, получаем

$$\begin{aligned} s'_2 &= s_1 - \frac{d \cos \sigma}{n \cos \sigma'} = s_1 - \frac{d}{n} \frac{\cos \sigma}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \sigma}} = \\ &= s_1 - \frac{d}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) \operatorname{tg}^2 \sigma}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При  $\sigma \rightarrow 0$  имеем:  $s'_{20} = s_1 - \frac{d}{n}$ . При этом

$$\delta s' = s'_2 - s'_{20} = \frac{d}{n} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) \text{tg}^2 \sigma}} \right]. \quad (4.11)$$

**Компенсатор для контроля выпуклых поверхностей эллипсоидов вращения.** Положив в формуле (2.12) величину  $e = \frac{1}{n}$ , а угол  $\varphi = \sigma$ , получаем

$$\delta s_n = \frac{r_0}{n^2 - 1} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) \text{tg}^2 \sigma}} \right]. \quad (4.12)$$

Из сопоставления формул (4.11) и (4.12) следует, что при  $\delta s' = \delta s_n$ :

$$d = \frac{nr_0}{n^2 - 1}.$$

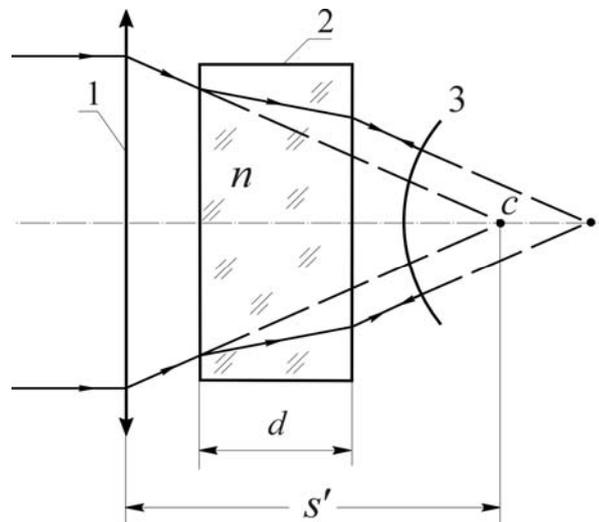


Рис.4.5. Компенсатор для контроля выпуклых поверхностей эллипсоида вращения

Отсюда следует, что  $r_0 > 0$ . При  $e = \frac{1}{n}$  кривая, образующая поверхность вращения, представляет собой эллипс. В результате изложенного можем построить схему контроля выпуклой

поверхности эллипсоида вращения, показанного на рис.4.5. Следует обратить внимание на то, что смещения плоскопараллельной пластинки 2 вдоль оптической оси в промежутке между компонентом 1, образующим гомоцентрический пучок лучей, и контролируемой поверхностью 3 не изменяет структуры проходящего через неё пучка лучей.

Для практического осуществления схемы необходимо соблюдение очевидного условия:  $s' > r_0 + \frac{d}{n}$ .

Заметим, что если на плоскую поверхность линзы на рис.4.3 или на первую поверхность плоскопараллельной пластинки на рис.4.5 нанести полупрозрачное покрытие, то в качестве компонента 1 идеального компенсатора можно использовать сферическое зеркало, как показано на рис.4.6.

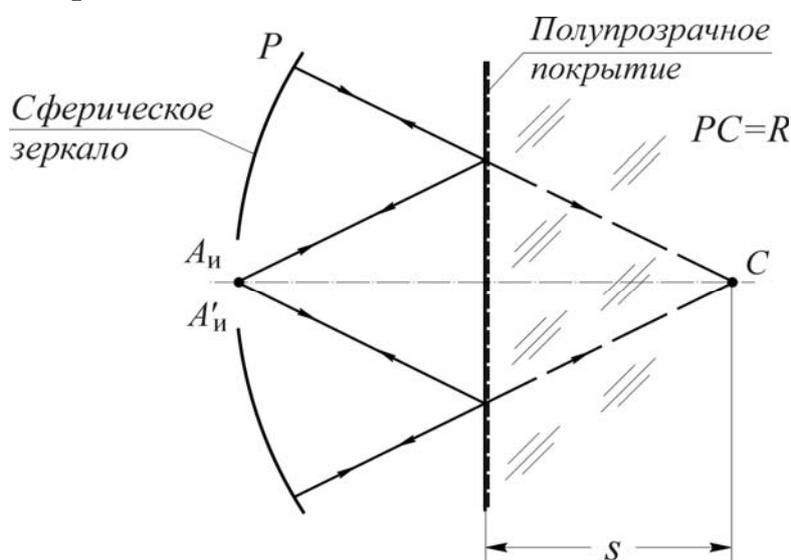


Рис.4.6. Формирование гомоцентрического пучка лучей с помощью сферического зеркала

**Квазиидеальный компенсатор для контроля вогнутой поверхности параболоида вращения.** Рассмотрим возможность применения схемы контроля вогнутой поверхности параболоида вращения, показанной на рис.4.7.

На этой схеме луч света, исходящий из осевой точки  $A_n$  под углом  $-\sigma$  к оптической оси, отражается от сферической поверхности в точке  $P$  и пересекает оптическую ось в точке  $A'_n$  под углом  $-\sigma'$  к ней; углы падения  $\varepsilon$  и отражения  $\varepsilon'$  взаимосвязаны соотношением  $\varepsilon' = -\varepsilon$ ; радиус кривизны сферической поверхности  $OC = -R$ ; центр кривизны

контролируемого параболоида совмещен с параксиальным изображением  $A'_{и0}$  точки  $A_{и}$ .

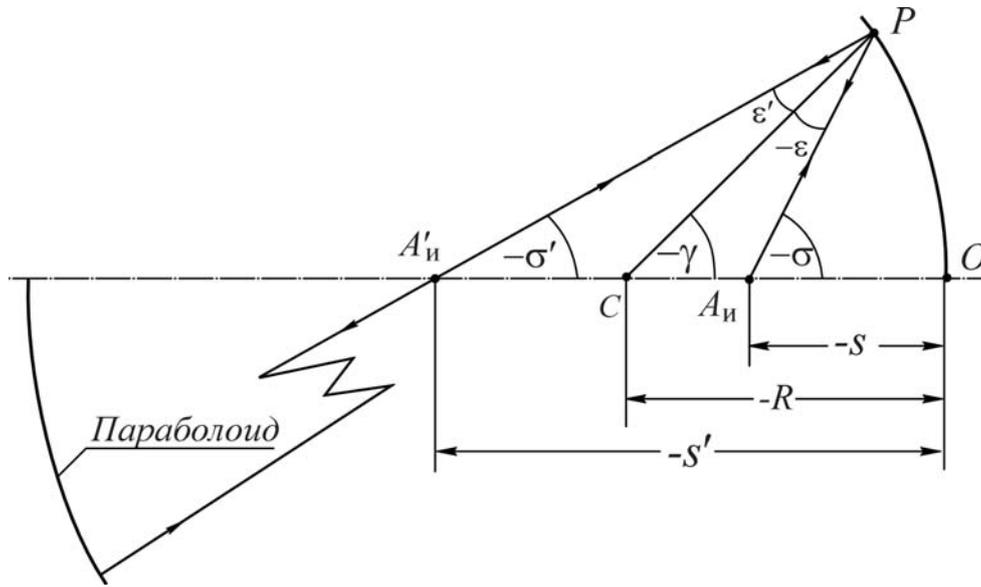


Рис.4.7. Компенсационная схема контроля вогнутой поверхности параболоида вращения

Из треугольников  $A_{и}PC$  и  $A'_{и}PC$  в соответствии с теоремой синусов имеем

$$\sin \varepsilon = \frac{R-s}{R} \sin \sigma, \quad \sin \varepsilon' = \frac{R-s'}{R} \sin \sigma. \quad (4.13)$$

Но  $\varepsilon' = -\varepsilon$ . При этом

$$s' = R + (R-s) \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'}. \quad (4.14)$$

В параксиальной области имеем

$$\frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{R}.$$

Но  $n' = -n$ . Тогда  $s'_0 = \frac{Rs}{2s-R}$ . (4.15)

Из двух последних выражений находим, что

$$\delta s' = s' - s'_0 = (s-R) \left( \frac{R}{2s-R} - \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'} \right). \quad (4.16)$$

Из треугольника  $A_{и}PA'_{и}$  следует, что угол

$$\sigma = \sigma' - 2\varepsilon'. \quad (4.17)$$

Вторую из формул (4.13) можно записать в виду

$$\sin \varepsilon' = -\frac{R-s'_0 - \delta s'}{R} \sin \sigma'.$$

Положив  $s'_0 = 2R$ , получаем

$$\sin \varepsilon' = -\left(1 + \frac{\delta s'}{R}\right) \sin \sigma'.$$

Полагая  $\frac{\delta s'}{R} \ll 1$ , приближённо принимаем, что угол  $\varepsilon' \approx -\sigma'$ .

Тогда в соответствии с соотношением (4.17) имеем:  $\sigma \approx 3\sigma'$ . Кроме того, из формулы (4.15) следует, что при  $s'_0 = 2R$  отрезок  $s = \frac{2}{3}R$ .

Подставив эти соотношения в формулу (4.16), получаем:

$$\delta s' \approx -R \left(1 - \frac{1 \sin 3\sigma'}{3 \sin \sigma'}\right). \quad (4.18)$$

Полученное выражение легко преобразовать к виду:

$$\delta s' \approx -2R \sin^2 \sigma'. \quad (4.19)$$

Заметим, что угол  $\varepsilon' > -\sigma'$ . Следовательно, угол  $|\sigma| > |3\sigma'|$ , а, соответственно, и  $\delta s' > -2R \sin^2 \sigma'$ . При достаточно малых значениях угла  $|\sigma'|$  формулу (4.19) можно представить в виде

$$\delta s' \approx -2R \operatorname{tg}^2 \sigma'.$$

Положив в формуле (2.14) угол  $\varphi = \sigma'$  и сопоставив её с полученной, находим, что рассматриваемая схема вполне может быть применена для контроля вогнутой поверхности параболоида вращения. Из условия  $\delta s' = \delta s_n$  следует, что

$$R \cong -\frac{1}{4}r_0. \quad (4.20)$$

## 4.2. Схемы контроля выпуклой поверхности гиперboloида вращения

Хорошо известна схема контроля выпуклой поверхности гиперboloида, предложенная в 1931 году Ж.Х. Хиндлом, которая приведена на рис.3.12в. Для удобства анализа схемы представим её в виде, показанном на рис.4.8.

Как и раньше, будем считать, что  $D_k$  – диаметр контролируемого гиперboloида,  $D$  – диаметр вспомогательного зеркала,  $D_{кз} = 2O_1A$  – диаметр неконтролируемой зоны поверхности гиперboloида,  $D_3 = 2O_1B$  – диаметр отверстия в сферическом зеркале. В соответствии с рисунком, пренебрегая величинами стрелок поверхностей, т.е., заменяя поверхности плоскостями, имеем следующие приближённые геометрические соотношения:

$$\frac{D}{D_{\text{к}}} = \frac{\Delta - s_0 + s'_0}{s'_0},$$

$$\frac{D_{\text{э}}}{D_{\text{кэ}}} = \frac{\Delta - s_0 + s'_0}{s'_0}, \quad \frac{D_{\text{к}}}{D_{\text{э}}} = \frac{s_0}{\Delta}.$$

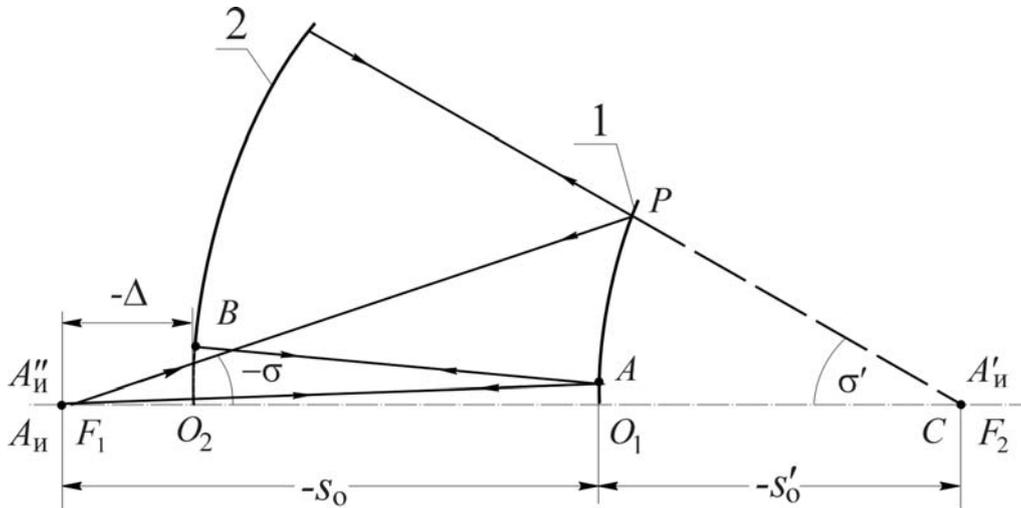


Рис.4.8. Автоколлимационная схема контроля выпуклой поверхности гиперboloида вращения

Отношение  $\frac{d_{\text{к}}}{D_{\text{к}}} = \eta$  определяет "экранирование" контролируемой поверхности отверстием во вспомогательном (контрольном) зеркале. Последовательно исключая из этих соотношений величины  $D_{\text{э}}$ ,  $D_{\text{кэ}}$  и  $\Delta$ , получаем

$$D = \frac{1 + V_0}{\eta + V_0} D_{\text{к}}, \quad (4.21)$$

где  $V_0$  – поперечное увеличение изображения, образованного отражательной поверхностью гиперboloида, причём  $V_0 = \frac{ns'_0}{ns_0} = -\frac{s'_0}{s_0}$ .

Для гиперboloида имеем:  $s_0 = \frac{r_0}{1-e}$ ,  $s'_0 = \frac{r_0}{1+e}$ .

При этом соотношение (4.21) принимает вид:

$$D = \frac{2eD_{\text{к}}}{(1+\eta)(1+e)-2}. \quad (4.22)$$

Для гиперболы  $e > 1$ . В общем случае  $1 < e < \infty$ . При этом в соответствии с формулой (4.22) имеем

$$\frac{2}{1+\eta} D_{\text{к}} < D < \frac{1}{\eta} D_{\text{к}}.$$

Так, например, при  $e = 1,5$ , а  $\eta = 0,2$  диаметр контрольного зеркала  $D = 3 D_k$ . Поэтому поиск путей уменьшения  $D$  представляется вполне естественным.

Оригинальную схему контроля выпуклой поверхности гиперboloида вращения, представленную на рис.4.9, предложили Ф.А. Симпсон, В.Х. Оланд и Ж. Меккель. Схема представляет собой своеобразную модификацию схемы Хиндла. На этой схеме в качестве компенсатора применен мениск 2, вогнутая поверхность которого, расположенная непосредственно вблизи поверхности гиперboloида, играет роль вспомогательной сферы, концентричной геометрическому фокусу  $F_2$  контролируемого гиперboloида 1, а радиус кривизны выпуклой поверхности мениска служит коррекционным параметром для исправления сферической aberrации в изображении геометрического фокуса  $F_1$ , образованного вогнутой поверхностью мениска.

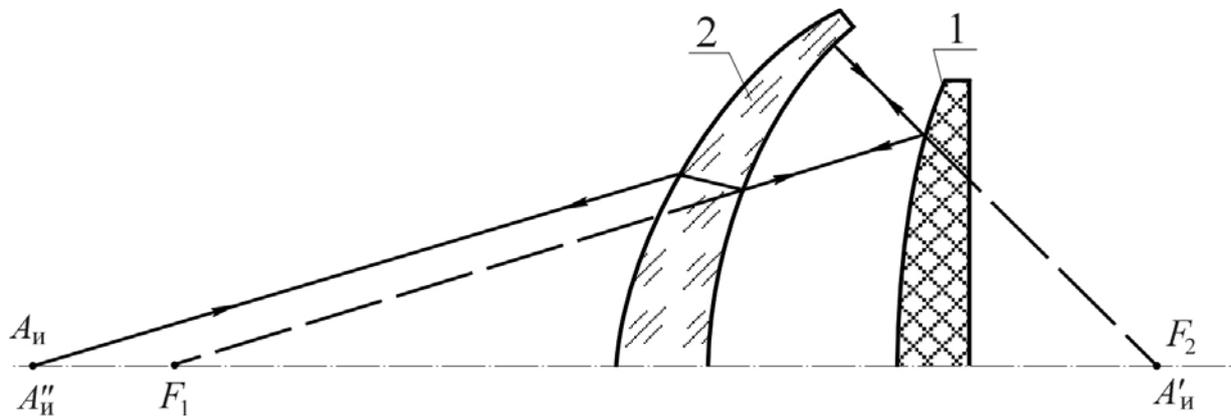


Рис.4.9. Автоколлимационная схема контроля выпуклой поверхности гиперboloида вращения с мениском (компенсатором)

Радиус кривизны контрольной сферы  $R$  принимаем равным отрезку  $s'_0$ , то есть

$$R = \frac{r_0}{1+e}.$$

Рассмотрим условия коррекции aberrаций. Для этого обратимся к рис.4.10, на котором показан мениск в обратном ходе лучей, при этом

$$r_1 = -R = -\frac{r_0}{1+e}, \text{ а } s_1 = \frac{r_0}{e-1}.$$

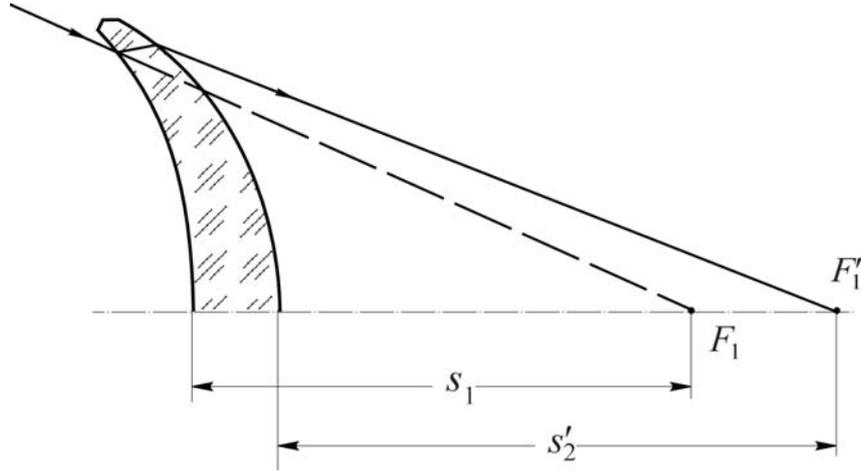


Рис.4.10. Анаберрационный мениск для контроля выпуклой поверхности гипербооида

В рассматриваемом случае мениск удобно представить с помощью углов в виде:

$$\alpha_1 = 0 \quad n_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \alpha \quad d = 0 \quad n_2 = n$$

$$\alpha_3 = \alpha' \quad n_3 = 1.$$

Принимаем угол  $\alpha_1 = 1$ . Тогда, используя формулу  $n_2 \alpha_2 - n_1 \alpha_1 = h_1 \frac{n_2 - n_1}{r_1}$ , при  $h_1 = s_1 \alpha_1 = \frac{r_0}{e-1}$  получаем

$$\alpha_2 = \alpha = 1 - 2 \frac{n-1}{n} \frac{e}{e-1}. \quad (4.23)$$

Коэффициент, определяющий сферическую aberrацию третьего порядка, вносимую в изображение геометрического фокуса  $F_1$  мениском, равен

$$S_1 = \sum_{i=1}^{i=2} h_i P_i = h_1 (P_1 + P_2),$$

$$\text{где } P_i = \left( \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} \right)^2 (v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i), \quad v_i = \frac{1}{n_i}.$$

Положив  $S_1 = 0$ , при принятой нормировке и обозначении углов  $\alpha_i$  получаем уравнение относительно неизвестной величины угла  $\alpha'$  в виде:

$$\alpha'^3 - (2 + v) \alpha \alpha'^2 + (1 + 2v) \alpha^2 \alpha' - 1 + (2 + v) \alpha - (1 + 2v) \alpha^2 = 0. \quad (4.24)$$

Положив в этом уравнении угол  $\alpha = 0$ , получаем уравнение:  $\alpha'^3 - 1 = 0$ . Отсюда находим, что при  $\alpha = 0$  угол  $\alpha' = 1$ , т.е., при этом геометрический фокус  $F_1$  расположен в заднем фокусе первой

преломляющей поверхности мениска, а изображение фокуса  $F_1$  – в заднем фокусе его второй поверхности. При  $\alpha = 0$  из формулы (4.23) находим, что эксцентриситет контролируемой поверхности равен

$$e = \frac{n}{2-n}.$$

Следовательно, решение  $\alpha' = 1$  определяет возможность применения рассматриваемой схемы для контроля выпуклой поверхности гиперboloида при  $n < 2$ . При  $n \geq 1,5$  получаем, что эксцентриситет  $e$  контролируемых поверхностей может лежать в диапазоне  $3 \leq e \leq \infty$ . Уравнение (4.24) можно записать в виде:

$$\alpha'^3 - 1 - (2+v)\alpha(\alpha'^2 - 1) + (1+2v)\alpha^2(\alpha' - 1) = 0.$$

Полагая в общем случае угол  $\alpha' \neq 1$ , получаем

$$\alpha'^2 + a\alpha' + b = 0, \quad (4.25)$$

$$a = 1 - (2+v)\alpha, \quad b = a + (1+2v)\alpha^2.$$

Используя формулу (4.23), при выбранном материале мениска (показателя преломления материала мениска) и требуемом значении эксцентриситета  $e$  определяем величину угла  $\alpha$ , после чего вычисляем коэффициенты  $a$  и  $b$  уравнения (4.25). Решив это уравнение, находим величину угла  $\alpha'$ , которая позволяет определить отрезок  $s'_2 = \frac{h_1}{\alpha'} = \frac{r_0}{(e-1)\alpha'}$ . Это расстояние равно расстоянию  $s_1$  на схеме контроля (рис.4.9) с обратным знаком. Введя минимально необходимый промежуток между вспомогательной сферой и контролируемой поверхностью и требуемую толщину мениска, уточняем радиус сферы  $R$  и непосредственным расчётом лучей радиус выпуклой поверхности мениска.

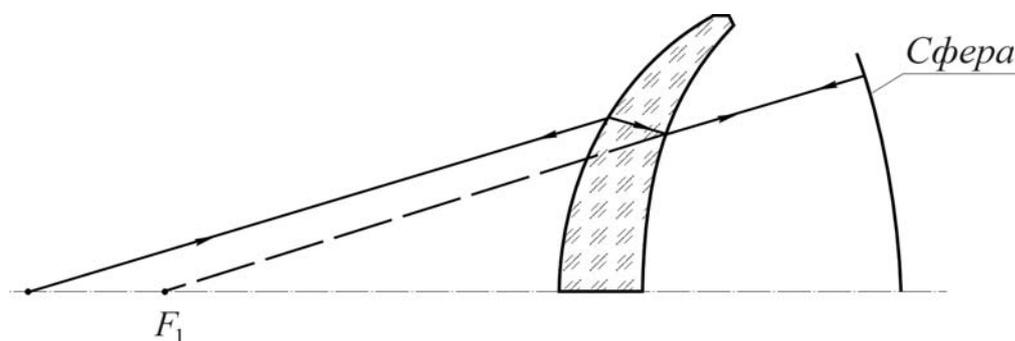


Рис.4.11. Автоколлимационная схема аттестации компенсатора Симпсона-Оланда-Меккеля

Проблема применения любого компенсатора в схеме контроля определяется возможностью его аттестации. В рассматриваемом случае для аттестации компенсатора (мениска) контролируемый

гиперболоид заменяют вогнутым сферическим зеркалом с центром кривизны в точке расположения фокуса  $F_1$  гиперboloида, как показано на рис.4.11.

Еще одна оригинальная модификация схемы Хиндла для контроля выпуклых гиперboloидов без экранирования была предложена в 1972 году профессором Д.Т. Пуряевым. Схема контроля показана на рис.4.12.

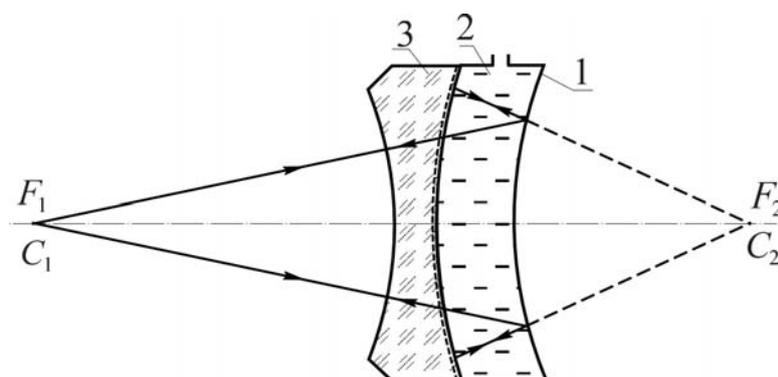


Рис.4.12. Автоколлимационная иммерсионная схема контроля выпуклой поверхности гиперboloида вращения

Схема реализована в виде устройства, образованного контролируемой поверхностью 1, иммерсионной жидкостью 2 и линзой 3. Центры кривизны  $C_1$  и  $C_2$  сферических поверхностей линзы 3 совмещены с геометрическими фокусами  $F_1$  и  $F_2$  контролируемой поверхности 1 соответственно. На внутреннюю поверхность линзы 3 нанесено полупрозрачное покрытие, а пространство между контролируемой поверхностью и линзой 3 заполнено иммерсионной жидкостью 2, показатель преломления которой равен показателю преломления материала линзы. Поэтому все лучи, идущие из точки  $F_1$ , падают нормально на первую поверхность линзы и достигают контролируемой поверхности, не преломляясь на полупрозрачной поверхности линзы 3. Благодаря введению иммерсионной жидкости, эта поверхность работает как бесконечно тонкое сферической зеркало; лучи, отражённые от него, повторяют свой путь в обратном направлении.

Подобные устройства, предложенные Д.Т. Пуряевым для контроля других видов несферических поверхностей второго порядка, показаны на рис.4.13.

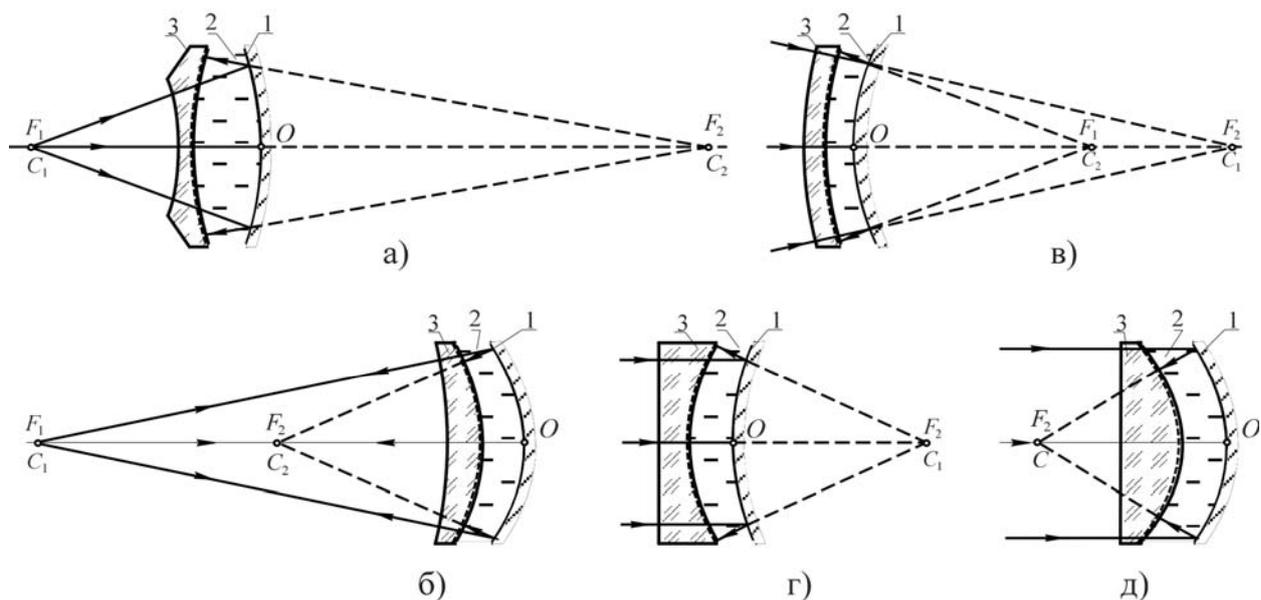


Рис.4.13. Автоколлимационная иммерсионная схема контроля несферических поверхностей второго порядка: а) – вогнутой поверхности гиперboloида; б), в) – вогнутой и выпуклой поверхности эллипсоида; г), д) – выпуклой и вогнутой поверхности параболоида

Схемы, приведенные на рис.4.9 и на рис.4.12, не позволяют контролировать выпуклые поверхности гиперboloида большого диаметра, так как диаметр линзового компенсатора должен быть хотя бы не на много, но больше диаметра контролируемой поверхности.

Важно отметить, что при формировании пучка лучей, падающих по нормали на контролируемую поверхность, диаметр вспомогательной отражающей сферической поверхности существенно меньше, чем в схеме Хиндла. В схеме, предложенной Ж.М. Сасианом, преобразование сферического волнового фронта в эквидистантный выпуклой поверхности 1 гиперboloида осуществляется с помощью вогнутого сферического зеркала 2 и катадиоптрического корректора 3 сферической аберрации в виде линзы с поверхностью внутреннего отражения (линзы Манжена), как показано на рис.4.14. Однако аттестовать такую схему весьма сложно, а поэтому достоверность результатов контроля, полученных с её помощью, не очевидна.

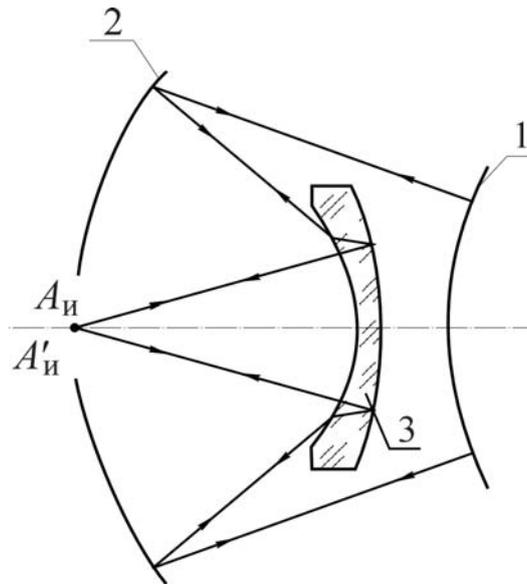


Рис.4.14. Схема формирования волнового фронта, эквидистантного контролируемой выпуклой поверхности гиперboloида

Можно построить контрольную схему со вспомогательным вогнутым сферическим зеркалом 2 в сочетании с линзовым корректором 3 остаточной сферической аберрации, как показано на рис.4.15.

Формально корректор можно представить себе состоящим из двух компонентов: один компонент компенсирует сферическую аберрацию третьего порядка, а второй – сферическую аберрацию высших порядков. Если точечный источник света расположить в переднем фокусе первой поверхности линзы, то его изображение, образованное линзой, будет расположено в заднем фокусе второй поверхности линзы.

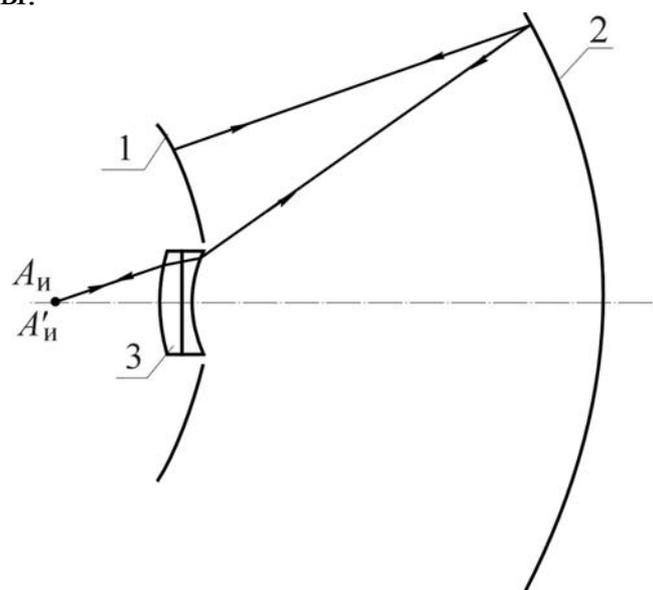


Рис.4.15. Схема контроля выпуклой поверхности гиперboloида с линзовым корректором

Если радиусы кривизны поверхностей линз равны друг другу, то такая линза, имеющая вид толстого мениска, не вносит в изображение точки сферической аберрации третьего порядка. Этот мениск, расположенный вблизи заднего фокуса (в сходящемся пучке лучей) объектива телескопа в виде вогнутой отражающей поверхности параболоида, впервые предложил профессор В.Н. Чуриловский для компенсации комы, вносимой параболоидом в образованное им изображение. Такой мениск можно представить себе состоящим из двух линз, склеенных плоскими поверхностями, как показано на рис.4.16.

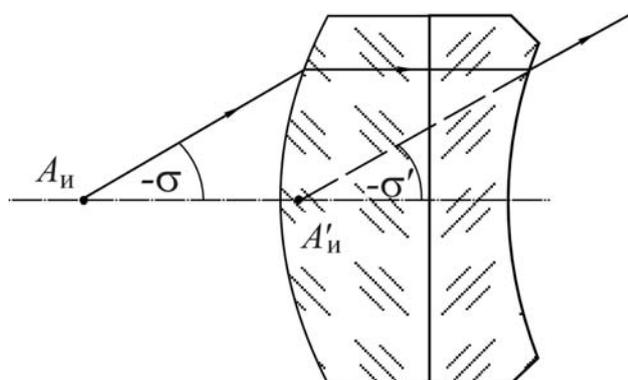


Рис.4.16. Мениск, склеенный из двух линз (в общем случае  $\sigma \neq \sigma'$ )

Профессор Д.Т. Пуряев показал, что в этом случае, изменяя показатели преломления материала линз и радиусы кривизны их наружных поверхностей, при параллельном ходе лучей между последними и при исправленной сферической аберрации третьего порядка можно получить сферическую аберрацию высшего порядка разной величины и разного знака. Вполне очевидно, что если при различных величинах показателей преломления линз и при равных радиусах кривизны поверхностей такого компонента сохранить параллельный ход между наружными поверхностями линз, то можно получить сферическую аберрацию в изображении точки, образованном таким компонентом, произвольной в известных пределах величины любого знака. Компонент такой конструкции Г.И. Цуканова предложила применить в качестве корректора в рассматриваемой схеме со вспомогательным вогнутым сферическим зеркалом. При такой конструкции оптической системы схемы контроля для осевого нулевого луча имеем:

$\alpha_1 = \alpha_{10}, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_8 = \alpha_9 = 0, \alpha_4 = \alpha_7, \alpha_5 = \alpha_6;$   
 $h_1 = h_2 = h_3 = h_7 = h_8 = h_9 = h_k, h_4 = h_6 = h_3, h_5 = h_r.$  При этом коэффициент, определяющий сферическую аберрацию третьего порядка, равен:

$$S_I = h_k(P_1 + P_2 + P_3 + P_7 + P_8 + P_9) + h_3(P_4 + P_6) + h_r Q_5. \quad (4.26)$$

Но  $P_2 = P_8 = 0$ ,  $P_1 = P_9$ , а  $P_3 = P_7$ ;  $P_4 = P_6$ ;  $Q_5 = P_5 + T_5 \sigma_{e5}$ ,  $P_5 = 0$ .

Тогда выражение (4.26) можно переписать в виде:

$$S_I = 2h_k(P_1 + P_3) + 2h_3P_4 + h_r T_5 \sigma_{e5}. \quad (4.27)$$

Напомним, что

$$P_i = \left( \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} \right)^2 (v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i),$$

$$T_i = \frac{(n_{i+1} \alpha_{i+1} - n_i \alpha_i)^3}{(n_{i+1} - n_i)^2}.$$

При этом получаем

$$P_1 + P_3 = \frac{\alpha_4^3}{(1 - v_3)^2} - \frac{\alpha_1^3}{(1 - v_2)^2}; \quad P_4 = -\frac{1}{4}(\alpha_5^2 - \alpha_4^2)(\alpha_5 - \alpha_4); \quad T_5 = 2\alpha_5^3.$$

Используя формулу  $n_{i+1} \alpha_{i+1} - n_i \alpha_i = h_i \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i}$ , для первой и

второй поверхностей корректора, соответственно, имеем:

$$-\alpha_1 = h_k \frac{n_2 - 1}{r_1}, \quad \alpha_4 = h_k \frac{1 - n_3}{r_3}. \quad \text{Но } r_1 = r_3. \quad \text{Тогда}$$

$$\alpha_1 = \frac{n_2 - 1}{n_3 - 1} \alpha_4. \quad (4.28)$$

В соответствии со схемой контроля угол  $\alpha_5 = \frac{h_5}{r_0} = \frac{h_r}{r_0}$ . Положив

$h_r = r_0$ , получаем, что  $\alpha_5 = 1$ . Подставив соотношение (4.28) и угол  $\alpha_5 = 1$  в предыдущие выражения, имеем

$$P_1 + P_3 = \frac{n_3^2(n_3 - 1) - n_2^2(n_2 - 1)}{(n_3 - 1)^3} \alpha_4^3,$$

$$P_4 = -\frac{1}{4}(1 - \alpha_4^2)(1 - \alpha_4), \quad T_5 = 2.$$

Подставив эти соотношения в выражение (4.27), получаем

$$S_I = 2h_k \frac{n_3^2(n_3 - 1) - n_2^2(n_2 - 1)}{(n_3 - 1)^3} \alpha_4^3 - \frac{1}{2} h_3 (1 - \alpha_4)(1 - \alpha_4^2) + \quad (4.29)$$

$$+ 2h_r \sigma_{e5}.$$

Будем считать, что  $\frac{h_k}{h_r} = \eta$ , где  $\eta$  – коэффициент центрального экранирования по диаметру контролируемой детали. Кроме того,

будем считать, что  $d_4 = -d_3$ . Используя формулу  $h_{i+1} = h_i - \alpha_{i+1}d_i$ , получаем

$$h_5 = h_r = h_4 - \alpha_5 d_4 = h_3 + d_3, \text{ откуда } d_3 = h_r - h_3.$$

С другой стороны,  $h_4 = h_3 = h_3 - \alpha_4 d_3 = h_k - \alpha_4 d_3$ , откуда

$$d_3 = \frac{h_k - h_3}{\alpha_4}. \quad (4.30)$$

Приравняв правые части полученных соотношений, находим, что

$$h_3 = \frac{h_k - h_r \alpha_4}{1 - \alpha_4}. \text{ Но } h_k = \eta h_r, \text{ а } h_r = r_0.$$

$$\text{Тогда } h_3 = r_0 \frac{\eta - \alpha_4}{1 - \alpha_4}. \quad (4.31)$$

При этом выражению (4.29) можно придать следующий вид:

$$S_I = 2\mathbf{P}r_0\eta\alpha_4^3 - r_0 \frac{\eta - \alpha_4}{2} (1 - \alpha_4^2) + 2r_0\sigma_{e5},$$

$$\text{где } \mathbf{P} = \frac{n_3^2(n_3 - 1) - n_2^2(n_2 - 1)}{(n_3 - 1)^3}. \quad (4.32)$$

Здесь  $\sigma_{e5} = -e^2$ , где  $e$  – эксцентриситет гиперболы, образующей гиперболоид вращения. При  $S_I = 0$  получаем

$$\mathbf{P} = \frac{1 - \alpha_4^2}{\eta\alpha_4^3} \left( \frac{e^2}{1 - \alpha_4^2} + \frac{\eta - \alpha_4}{4} \right). \quad (4.33)$$

В этом выражении величины  $e$  и  $\eta$  являются заданными, а угол  $\alpha_4$  можно считать свободным параметром. Полученные соотношения позволяют определить параметры схемы.

Из выражения (4.32) следует, что при  $n_2 = n_3$  величина  $\mathbf{P} = 0$ . При этом при  $\alpha_4 \neq 0$  выражение (4.33) принимает вид:

$$e^2 = -\frac{(\eta - \alpha_4)(1 - \alpha_4^2)}{4}. \quad (4.34)$$

Отсюда следует, что при  $\alpha_4 = 1$  эксцентриситет кривой  $e = 0$ , при  $\alpha_4 > 1$  имеем  $e^2 < 0$ , т.е. в схеме только со вспомогательным вогнутым сферическим зеркалом (без корректора) возможен контроль сплющенного эллипсоида. Вполне очевидно, что при  $\eta < \alpha_4 < 1$  имеем:  $0 < e^2 < 1$ , т.е., в этом случае возможен контроль выпуклого эллипсоида без применения корректора.

Из приведенного анализа формулы (4.34) следует, что контроль выпуклого гиперболоида возможен лишь при  $\mathbf{P} \neq 0$ . При этом

выражение (4.33) удобно представить уравнением относительно угла  $\alpha_4$  в виде:

$$(1 - \mathbf{P}\eta)\alpha_4^3 - \eta\alpha_4^2 - \alpha_4 + \eta + 4e^2 = 0. \quad (4.35)$$

Выбрав пару марок стекол линз корректора, находим с помощью формулы (4.32) величину  $\mathbf{P}$ . Решив уравнение (4.35), находим величину угла  $\alpha_4$ . Заметим, что для вспомогательного зеркала отрезок  $s'_3 = \frac{h_3}{\alpha_5} = h_3$ , а отрезок  $s_3 = \frac{h_3}{\alpha_4}$ . При этом в соответствии с

формулой  $\frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s_0} = \frac{n' - n}{r}$  находим, что радиус  $R$  кривизны

поверхности вспомогательного зеркала равен

$$R = 2 \frac{h_3}{1 + \alpha_4}.$$

Заменив высоту  $h_3$  её выражение (4.31), получаем:

$$R = 2r_0 \frac{\eta - \alpha_4}{1 - \alpha_4^2}. \quad (4.36)$$

Используя выражения (4.30) и (4.31), находим, что

$$d_3 = -d_4 = r_0 \frac{1 - \eta}{1 - \alpha_4}. \quad (4.37)$$

Толщину корректора можно использовать в качестве коррекционного параметра для компенсации сферической аберрации высшего порядка. Если толщина корректора получается большой, то можно разделить его на две линзы с воздушным промежутком между ними.

Профессорами А.П. Грамматиным и В.А. Зверевым показано, что в схеме, приведенной на рис.4.15, в общем случае в качестве корректора аберраций можно применить киноформный элемент, т.е., по сути дела, дифракционный элемент, который принято считать одной из разновидностей синтезированных голограмм. Рассмотрим предложенную ими последовательность расчёта параметров схемы, показанной на рис.4.17.

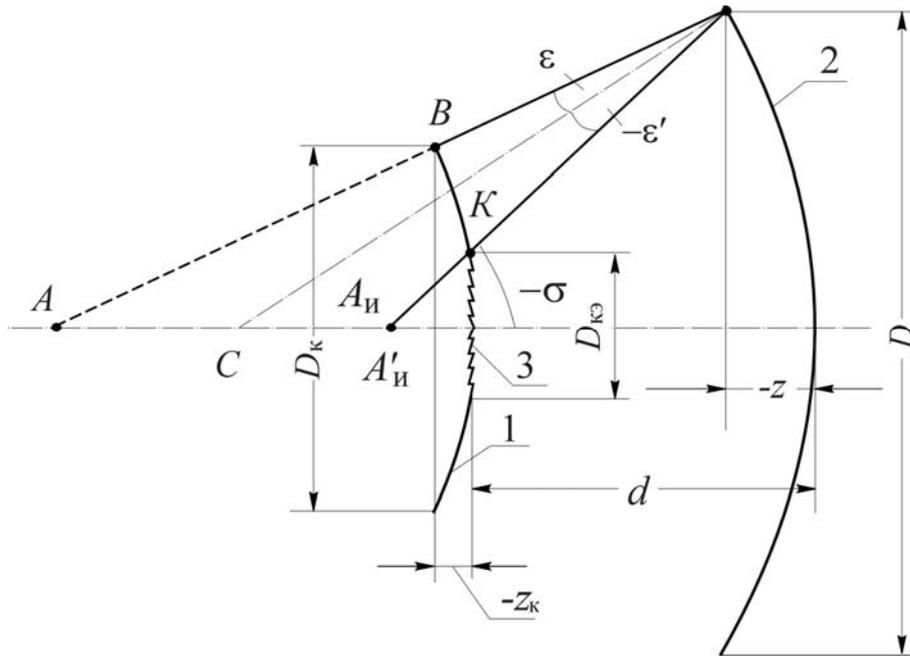


Рис.4.17.Схема контроля выпуклой поверхности гиперboloида с рельефно-фазовым дифракционным оптическим элементом

Световые диаметры сферического зеркала  $D$  и корректора  $D_{кз}$  будем считать известными (заданными или выбранными). По конструктивным соображениям корректор желательно разместить в отверстии контролируемой поверхности, при этом световой диаметр корректора  $3$  должен быть максимальным, что облегчает коррекцию сферической аберрации, вносимой сферическим и гиперboloидальным зеркалами. Прежде всего, необходимо определить расстояние между отражающими поверхностями  $d$  и радиус кривизны сферической поверхности  $R$ . Поскольку лучи пучка, сформированного корректором и сферическим зеркалом, падают на поверхность гиперboloида вращения по нормали к ней, то точка пересечения крайнего луча с поверхностью сферического зеркала лежит на нормали к крайней точке гиперboloида. Координата  $z_k$  точки  $B$  определяется уравнением (1.9) в виде:

$$z_k = \frac{y_k^2}{r_0 - \sqrt{r_0^2 - (1 - e^2)y_k^2}}, \quad (4.38)$$

где  $y_k = \frac{1}{2}D_k$ . Тангенс угла наклона нормали к оси может быть вычислен по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz_k}{dy_k} = -\frac{y_k}{\sqrt{r_0^2 - (1 - e^2)y_k^2}}. \quad (4.39)$$

Отражённый от сферического зеркала крайний луч на пути в точку  $A'_и$  должен пройти точку  $K$ , расположенную на наружном контуре корректора, рельефно-фазовую структуру (киноформный элемент) которого будем считать нанесенной на плоскости, проходящей через вершину контролируемой поверхности. Тогда, если пренебречь абсциссой  $z$  при ординате  $y$ , равной  $\frac{1}{2}D_{кор}$ , угол этого луча с осью определится соотношением вида:

$$\operatorname{tg}\sigma = -\frac{\frac{1}{2}(D - D_{кор})}{-\frac{D}{2\operatorname{tg}\varphi} + \frac{D_k}{2\operatorname{tg}\varphi} + z_k} = \frac{D - D_{кор}}{D - D_k - 2z_k \operatorname{tg}\varphi} \operatorname{tg}\varphi. \quad (4.40)$$

В соответствии с рис.4.17 имеем:

$$\gamma = \sigma - \varepsilon' = \sigma - \frac{1}{2}(\sigma - \varphi) = \frac{1}{2}(\sigma + \varphi). \text{ Тогда}$$

$$R = \frac{D}{2\sin\gamma} = \frac{D}{2\sin\frac{\sigma + \varphi}{2}}. \quad (4.41)$$

Из рис.4.17 следует, что расстояние между корректором и вершиной сферического зеркала равно

$$d = -\frac{D - D_k}{2\operatorname{tg}\varphi} + z_k - z, \quad (4.42)$$

где  $z = R + \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}D^2}$ .

Применим полученные формулы для расчёта параметров рассматриваемой контрольной схемы, если диаметр контролируемого гиперболического зеркала  $D_k = 500$  мм, радиус при вершине  $r_0 = -1500$  мм, а эксцентриситет образующей поверхность гиперболы  $e = 1,2$ . При центральном экранировании  $\eta = 0,3$  диаметр отверстия в зеркале  $D_{кэ} = \eta D_k = 150$  мм. Примем диаметр корректора  $D_{кор} = 120$  мм. При этих данных, используя формулы (4.38) и (4.39), при

$y_k = \frac{1}{2}D_k = 250$  мм находим, что

$$z_k = -20,77 \text{ мм}, \operatorname{tg}\varphi = -0,16566.$$

Пусть диаметр вспомогательного сферического зеркала  $D = 700$  мм. Применив формулу (4.40), получаем, что  $\operatorname{tg}\varphi = -0,49753$ . И, наконец, используя формулы (4.41) и (4.42), находим, что

$R = -1136,96$  мм,  $d = 638,09$  мм. Таким образом, оптическая система контрольной схемы имеет вполне приемлемые размеры.

Определив параметры оптической системы схемы контроля, с помощью программного комплекса расчёта оптических систем можно выполнить расчёт хода лучей в контрольной схеме и определить продольную сферическую aberrацию  $\Delta s'$ , вносимую в изображение точечного источника света контролируемой поверхностью и вспомогательным сферическим зеркалом, и соответствующую ей функцию волновой aberrации (отклонение формы волнового фронта от сферы) в зависимости от координаты на дифракционном элементе в виде:

$$W(\rho) = a_1(x^2 + y^2) + a_2(x^2 + y^2)^2 + \dots + a_n(x^2 + y^2)^n, \quad (4.43)$$

где  $x^2 + y^2 = \rho^2$ . Зависимость, определяемая уравнением (4.43), называется характеристическим уравнением. Задача расчёта радиусов зон рельефно-фазового дифракционного элемента сводится к определению действительных корней уравнения

$$W(\rho) = k\lambda, \quad (4.44)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2$ ;  $\lambda$  – расчётная длина волны, т.е., длина волны излучения точечного источника. Возможный вариант зависимости (4.43) и графическое определение корней уравнения (4.44) представлены на рис.4.18.

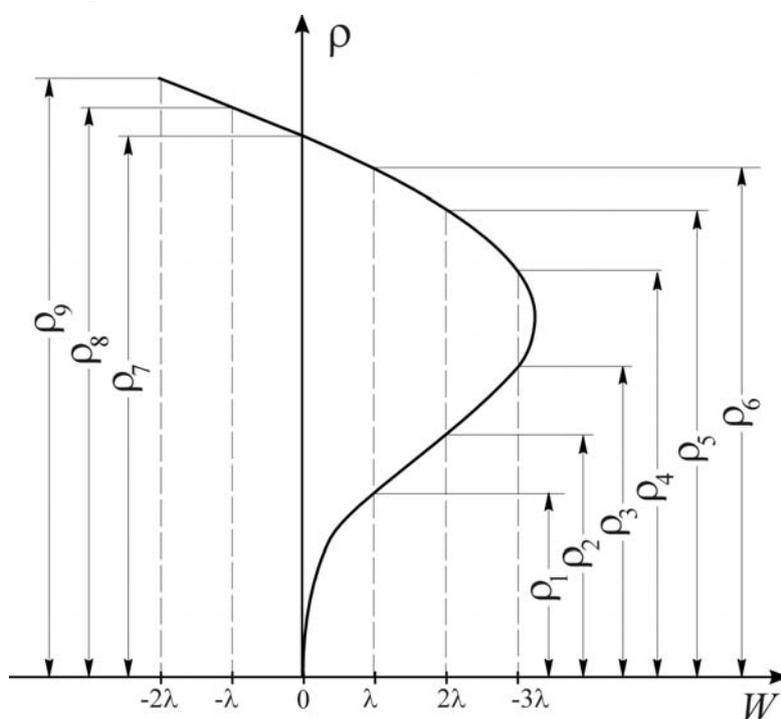


Рис.4.18. Графическое решение уравнения  $W(\rho) = k\lambda$

Возможность технологической реализации рельефно-фазовой структуры, представляющей собой кольцевую фазовую дифракционную решётку, ограничивается её предельной пространственной частотой. Рассмотрим последовательность её определения.

Заменяем кривую отклонения волнового фронта от сферы в пределах одной зоны прямой линией. Вполне очевидно, что при этом, отбросив часть деформации волнового фронта, кратную длине волны  $\lambda$ , оставшуюся часть деформации можно компенсировать преобразованием плоской поверхности пластинки в систему усеченных конусов, в сечении меридиональной плоскостью представляющих собой систему клиньев.

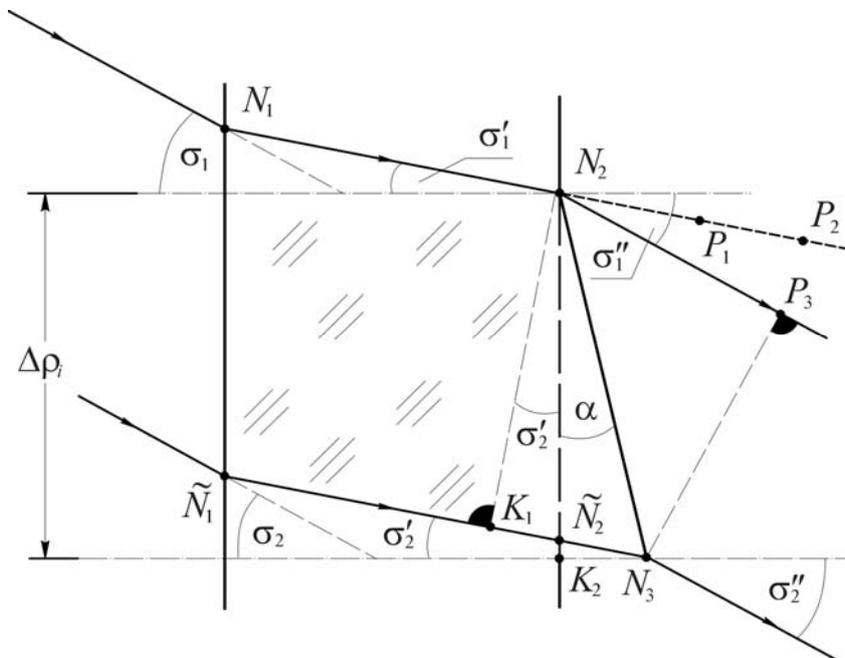


Рис.4.19. Меридиональное сечение  $i$ -й кольцевой зоны дифракционного корректора

На рис.4.19 показано меридиональное сечение  $i$ -ой кольцевой зоны дифракционного корректора. Здесь  $N_2$  – верхняя точка, а  $N_3$  – нижняя точка  $i$ -ой зоны. На плоскую поверхность в точку  $N_1$  под углом  $\sigma_1$  к оптической оси падает луч, который проходит через верхнюю точку  $N_2$  рассматриваемой зоны корректора, а луч, падающий на плоскую поверхность в точку  $\tilde{N}_1$  под углом  $\sigma_1$  к оптической оси, проходит через нижнюю точку  $N_3$  этой зоны корректора. Луч  $\tilde{N}_1 N_3$  пересекает след плоской поверхности корректора в точке. Оба падающих луча пересекают оптическую ось в одной и той же точке. Однако, если ширина  $i$ -ой зоны много меньше

расстояния до осевой точки, то вполне можно принять, что углы  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'$ ,  $\sigma''_1 = \sigma''_2 = \sigma''$ . При этом можно считать, что отрезок  $N^2K$  определяет плоский волновой фронт. При перемещении света вдоль луча  $\tilde{N}_1N_3$  из точки  $K_1$  в точку  $\tilde{N}_2$  световое возмущение при неизменном направлении распространения из точки  $N_2$  перемещается в воздухе в точку  $P_1$ , причём в соответствии с принципом таутохронизма отрезок  $N_2P_1 = nK_1\tilde{N}_2$ . В рассматриваемом случае элемент рельефно-фазовой структуры в сечении меридиональной плоскостью представляет собой треугольник  $K_2N_2N_3$ . При перемещении света из точки  $\tilde{N}_2$  в точку  $N_3$  световое возмущение из точки  $P_1$  сместится в точку  $P_2$ , причём  $P_1P_2 = n\tilde{N}_2N_3$ . При этом максимальная величина компенсирующего фазового сдвига равна

$$\Delta W_m = P_1P_2 - \tilde{N}_2N_3 = (n-1)\tilde{N}_2N_3.$$

Но  $\tilde{N}_2N_3 = \Delta\rho_i \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\sigma'}$ . Тогда

$$\Delta W_m = \Delta\rho_i \operatorname{tg}\alpha \frac{n-1}{\cos\sigma'}. \quad (4.45)$$

С другой стороны, на плоской поверхности  $N_2N_3$  лучи преломляются, образуя с оптической осью угол  $\sigma''$ . При этом в соответствии с принципом таутохронизма справедливо равенство:  $nK_1N_3 = N_2P_3$ .

Из рис.4.19 следует, что

$$K_1N_3 = N_2N_3 \sin(\alpha + \sigma') = \Delta\rho_i \frac{\sin(\alpha + \sigma')}{\cos\alpha},$$

$$\begin{aligned} N_2P_3 &= N_2N_3 \cos(90^\circ - \sigma'' - \alpha) = N_2N_3 \sin(\alpha + \sigma'') = \\ &= \Delta\rho_{i1} \frac{\sin(\alpha + \sigma'')}{\cos\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{При этом } \Delta\rho_i \frac{n \sin(\alpha + \sigma')}{\cos\alpha} = \Delta\rho_i \frac{\sin(\alpha + \sigma'')}{\cos\alpha}$$

или

$$\Delta\rho_i \operatorname{tg}\alpha n \cos\sigma' + \Delta\rho_i n \sin\sigma' = \Delta\rho_i \operatorname{tg}\alpha \cos\sigma'' + \Delta\rho_i \sin\sigma''.$$

Учитывая, что  $n \sin\sigma' = \sin\sigma$ , получаем

$$\Delta\rho_i \operatorname{tg}\alpha \cos\sigma' \left( n - \frac{\cos\sigma''}{\cos\sigma'} \right) = \Delta\rho_i (\sin\sigma'' - \sin\sigma).$$

Соотношение (4.45) позволяет полученное выражение представить в виде:

$$\Delta W_m \frac{\cos^2 \sigma'}{n-1} \left( n - \frac{\cos \sigma''}{\cos \sigma'} \right) = \Delta \rho_i (\sin \sigma'' - \sin \sigma).$$

Заметим, что  $n - \frac{\cos \sigma''}{\cos \sigma'} > n - 1$ , а  $\cos^2 \sigma' < 1$ .

Полагая углы  $\sigma'$  и  $\sigma''$  достаточно малыми, принимаем  $\frac{\cos^2 \sigma'}{n-1} \left( n - \frac{\cos \sigma''}{\cos \sigma'} \right) \approx 1$ . Тогда

$$\Delta W_m \approx \Delta \rho_i (\sin \sigma'' - \sin \sigma). \quad (4.46)$$

При этом пространственная частота рельефно-фазовой структуры равна:

$$N = \frac{1}{\Delta \rho_i} = \frac{\sin \sigma'' - \sin \sigma}{\lambda}, \quad (4.47)$$

где  $\lambda$  – длина волны света.

Совместим осевую точку  $A$  с точкой пересечения с оптической осью нормали к контролируемой поверхности гиперboloида в крайней точке  $B$ , как показано на рис.4.20.

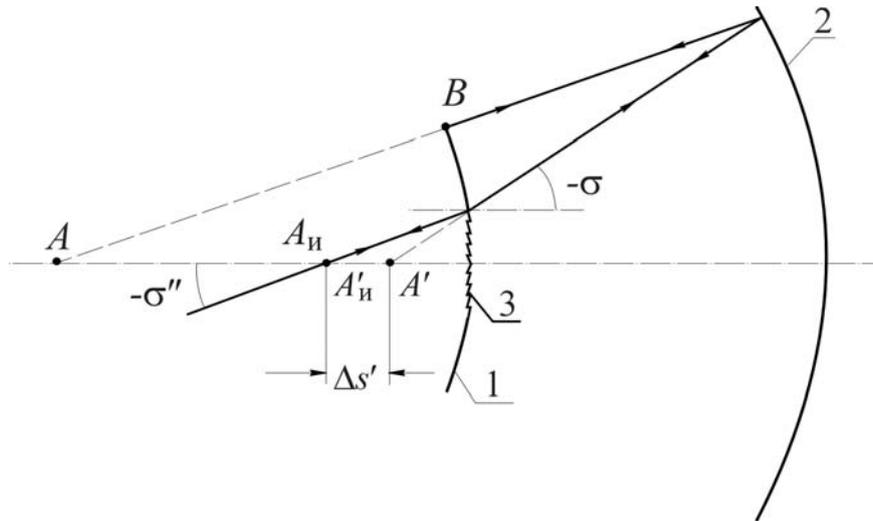


Рис.4.20. Определение предельной пространственной частоты рельефно-фазовой структуры дифракционного оптического элемента

Рассчитаем ход луча  $AB$  в направлении нормали к отражающей поверхности 1 через сферическое зеркало 2. Продольная сферическая aberrация  $\Delta s'$ , возникающая при этом должна быть скомпенсирована дифракционным элементом путем поворота луча на угол  $\Delta \sigma$ . В соответствии с рисунком, при толщине дифракционного элемента, равной нулю, значение угла падения луча на элемент получаем из соотношения:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{1}{2} \frac{D_{\text{кор}}}{s'_0 + \Delta s'}, \quad (4.48)$$

а угол отклоненного дифракционным элементом луча с осью  $\sigma''$  – из соотношения:

$$\operatorname{tg}\sigma'' = \frac{1}{2} \frac{D_{\text{кор}}}{s'_0}. \quad (4.49)$$

Обратимся вновь к оптической системе схемы контроля, параметры которой были определены. В результате расчёта хода луча, нормального к контролируемой поверхности гиперболоида, через сферическое зеркало были получены следующие результаты:  $s'_0 = -140,13$  мм,  $\Delta s' = 19,5$  мм. При этом

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{60}{-140,13 + 19,5} = -0,4974, \quad \sin\sigma = -0,4454;$$

$$\operatorname{tg}\sigma'' = \frac{60}{-140,13} = -0,4282, \quad \sin\sigma'' = -0,3936.$$

Подставив значения углов  $\sigma$  и  $\sigma''$  в формулу (4.47), при  $\lambda = 0,6328$  мкм получаем  $N = 81,86$  мм<sup>-1</sup>. Пусть  $n = 1,62137$  ( $\lambda = 0,6328$  мкм; стекло марки Ф8). Тогда  $\sin\sigma' = 0,2747$ . Заметим, что при этом

$$\frac{\cos^2 \sigma'}{n-1} \left( n - \frac{\cos \sigma''}{\cos \sigma'} \right) = 0,99.$$

Итак, в соответствии с формулой (4.45) для получения 100 % -ой дифракционной эффективности необходимо, чтобы глубина рельефа  $t = \Delta \rho_i \operatorname{tg}\alpha$  в пределах каждой зоны плавно изменялась от нуля до  $\frac{\lambda \cos \sigma'}{n-1}$ . Однако, даже при  $\sin\sigma = 0,5 \cos\sigma' \approx 0,95$ . Поэтому вполне можно принять, что в пределах каждой зоны глубина рельефа должна плавно изменяться от нуля до одной и той же величины, равной  $\frac{\lambda}{n-1}$ .

В настоящее время отсутствует приемлемая технология получения такого пилообразного рельефа, поэтому вместо пилообразного принято создавать ступенчатый рельеф, показанный на рис.4.21.

Элементы с такой рельефно-фазовой структурой изготавливают методом фотолитографии, используемым в электронной промышленности. Суть метода заключается в том, что на стеклянную плоскопараллельную пластину наносят слой светочувствительного

материала – фоторезиста, который экспонируют контактным или проекционным способом через заранее изготовленную бинарную

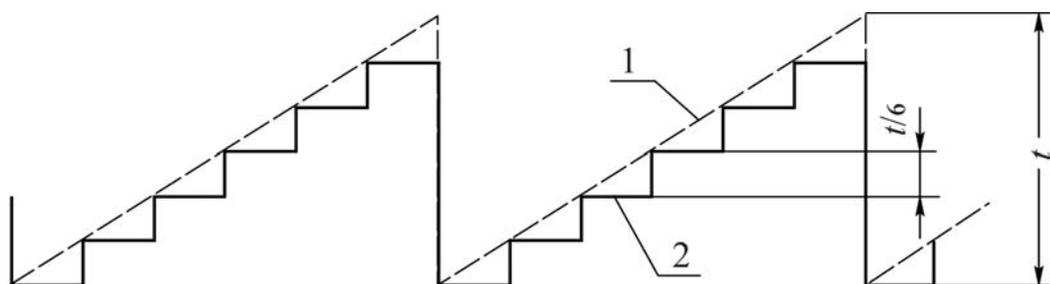


Рис.4.21. Приближение пилообразного профиля штриха (1) ступенчатым (2) при числе ступеней  $k=6$

амплитудную маску, называемую фотошаблоном. Фоторезист представляет собой полимерную композицию, в которой под действием света протекают физико-химические процессы, приводящие к изменению её растворимости. После соответствующей химической обработки проэкспонированного фоторезистивного слоя на поверхности подложки образуется высококачественное маскирующее покрытие, через окна в котором осуществляют ту или иную технологическую операцию (травление, напыление и т.д.). В отличие от фотоэмульсий, имеющих зернистую структуру, разрешающая способность слоя фоторезиста чрезвычайно высока и, достигая 8000–9000 лин/мм, значительно превосходит разрешающую способность оптических систем. После удаления фоторезиста на поверхности подложки остаётся рельефная структура фазовой зонной пластинки с прямоугольным профилем штриха, как показано на рис.4.22.

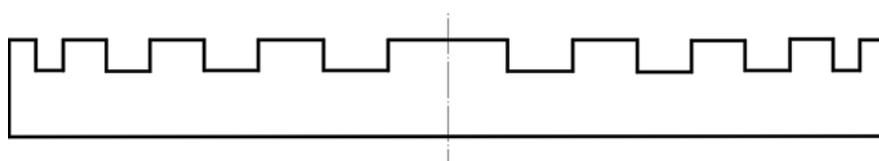


Рис.4.22. Рельефная структура фазовой зонной пластинки с прямоугольным профилем штриха

Если глубина рельефа  $t$  связана с длиной волны  $\lambda$  и показателем преломления подложки  $n$  соотношением

$$t = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{n-1}, \quad (4.50)$$

а ширина самой узкой зоны структуры больше глубины рельефа, что всегда выполняется для элементов с кольцевой зонной структурой, то дифракционная эффективность элемента  $\eta = 40,5\%$ . Дифракционная эффективность элемента  $\eta$  растёт с увеличением числа ступеней  $k$  в

профиле штриха и, в частности, при  $k = 3\eta = 68,4 \%$ , при  $k = 4\eta = 81,1 \%$  и т.д.

Ступенчатый профиль штриха получают путем многократного травления подложки. При этом необходимые фоторезистивные маски создают с помощью комплекта фотошаблонов. Контроль протравленного дифракционного оптического элемента выполняется путем непосредственного измерения радиусов зон и глубины травления, которая обеспечивает требуемую разность фаз световых колебаний.

Заметим, что для определения характеристического уравнения осесимметричного дифракционного оптического элемента удобно рельефно-фазовую структуру заменить тонким слоем виртуального материала с большим значением показателя преломления, например,  $n = 1001$ . Для компенсации сферической аберрации, вносимой контролируемой поверхностью и вспомогательным сферическим зеркалом, наружную плоскую поверхность этого слоя заменяют несферической поверхностью, и в результате последующей её оптимизации по критерию компенсации деформации волнового фронта, т.е., в результате расчёта с помощью соответствующего комплекса, например, САРО, ОПАЛ или ZEMAX, получают уравнение поверхности в виде:

$$z = a_1(x^2 + y^2) + a_2(x^2 + y^2)^2 + \dots + a_n(x^2 + y^2)^n. \quad (4.51)$$

При этом характеристическое уравнение дифракционного элемента определяется очевидным выражением вида:

$$W(\rho) = (n - 1)z,$$

где  $z$  – координата, определяемая уравнением (4.51).

Приведенный пример даёт наглядное представление об эффективности применения рассмотренной схемы и метода расчёта её параметров для контроля выпуклых поверхностей гиперboloида и других выпуклых поверхностей второго порядка.

### **4.3. Компенсаторы для контроля вогнутых отражающих поверхностей объективов астрономических телескопов**

#### **4.3.1. Основные компенсационные схемы контроля несферических поверхностей**

Компенсационные схемы, в которых компенсатор формирует волновой фронт, эквидистантный контролируемой вогнутой несферической поверхности, являются единственно возможными для

контроля отражающих поверхностей объективов крупногабаритных астрономических телескопов. В схеме контроля вогнутых поверхностей параболоида вращения, предложенной В.П. Линником, компенсатор представляет собой двухлинзовый ахроматический компонент, установленный перед центром кривизны  $C_0$  параболоида вращения 1 в его вершине на расстоянии от центра, равном удвоенному фокусному расстоянию линзы, как показано на рис.4.23.

Изображение  $A_u''$  светящейся точки  $A_u$ , построенное отражёнными от параболоида лучами, располагается на малом расстоянии от оси вблизи центра кривизны зеркала  $C_0$ . Важно отметить, что лучи света проходят через линзу один раз, что существенно снижает её влияние на деформацию контролируемого волнового фронта.

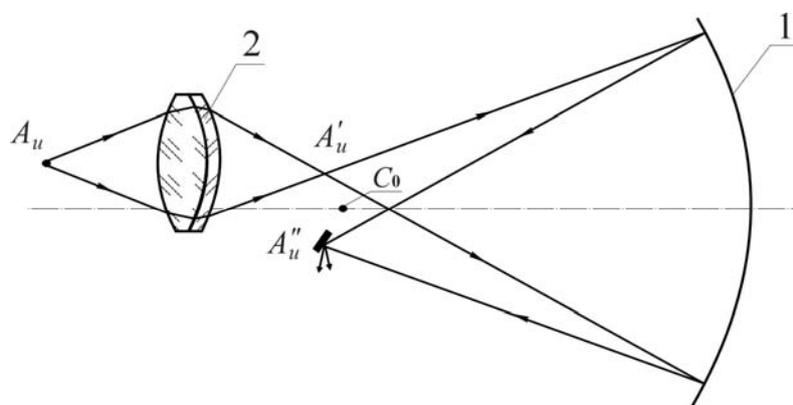


Рис.4.23. Компенсационная схема В.П. Линника

В схеме Д.Д. Максудова для контроля вогнутой поверхности параболоида вращения 1 в качестве компенсатора применяется сферическое вогнутое зеркало 2, как показано на рис.4.24.

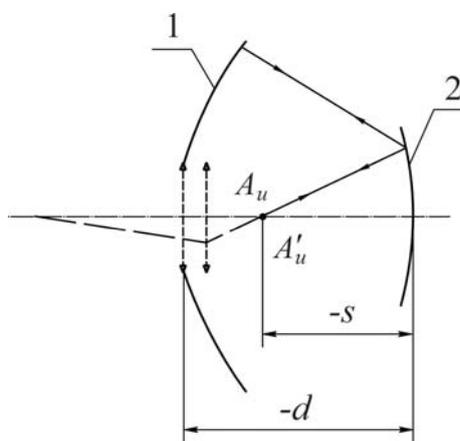


Рис.4.24. Компенсационная схема Д.Д. Максудова контроля формы отражающей поверхности вогнутого параболоида с помощью сферического зеркала

Эту схему с помощью углов, образованных осевым нулевым лучом с оптической осью, можно записать в виде:

$$\alpha_1 = \alpha_4 \quad n_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \alpha \quad d_1 = d \quad n_2 = -1$$

$$\alpha_3 = \alpha \quad d_2 = -d \quad n_3 = 1$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 \quad n_4 = -1.$$

При этом, используя обозначения величины на рисунке, имеем:

$$h_1 = s\alpha_1 = h_3, \quad h_2 = h_1 - \alpha_2 d_1 = s\alpha_1 - \alpha d.$$

Высота луча в отверстии контролируемой поверхности  $h_0 = \alpha(s - d)$ . Тогда коэффициент линейного экранирования

$$\text{контролируемой поверхности } \eta = \frac{h_0}{h_2} = \alpha_1 \frac{s - d}{s\alpha_1 - \alpha d}.$$

$$\text{Отсюда следует, что } d = s\alpha_1 \frac{1 - \eta}{\alpha_1 - \eta\alpha}.$$

Положив  $\alpha_1 = -1$ , получаем

$$d = s \frac{1 - \eta}{1 + \eta\alpha}. \quad (4.52)$$

$$h_1 = -s \quad (4.53)$$

$$h_2 = -s \frac{1 + \alpha}{1 + \eta\alpha}. \quad (4.54)$$

Коэффициент  $q$ , характеризующий габаритные соотношения в схеме, определим отношением:

$$q = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1 + \alpha}{1 + \eta\alpha}. \quad (4.55)$$

Коэффициент  $S_1$ , определяющий сферическую aberrацию, в рассматриваемом случае равен

$$S_1 = h_1 P_1 + h_2 Q_2 + h_3 P_3 = h_1(P_1 + P_3) + h_2 T_2 \sigma_{e2}.$$

$$\text{Здесь } P_1 = P_3 = \frac{1 - \alpha^2}{4}(1 + \alpha); \quad T_2 = 2\alpha^3.$$

При этом, учитывая выражения (4.53) и (4.54), получаем

$$S_I = -s \frac{1-\alpha^2}{2} (1+\alpha) - 2s \frac{1+\alpha}{1+\eta\alpha} \alpha^3 \sigma_{e2} =$$

$$= -s \frac{1+\alpha}{2} \left( 1-\alpha^2 + 4 \frac{\alpha^3 \sigma_{e2}}{1+\eta\alpha} \right).$$

Естественно предположить, что  $s \neq 0$ , а  $\alpha \neq -1$ . Тогда, положив  $S_I = 0$ , получаем уравнение относительно угла  $\alpha$  в виде:

$$(4\varepsilon^2 + \eta)\alpha^3 + \alpha^2 - \eta\alpha - 1 = 0, \quad (4.56)$$

где  $e^2 = -\sigma_{e2}$ . Для параболы  $e^2 = 1$ . В этом случае уравнение (4.56) принимает вид:

$$(4 + \eta)\alpha^3 + \alpha^2 - \eta\alpha - 1 = 0. \quad (4.57)$$

Вполне очевидно, что  $1 + \eta\alpha \neq \infty$ . Но при  $1 + \eta\alpha = 0$  уравнение (4.57) решения не имеет. Положив в уравнении (4.57) коэффициент  $\eta = 0$ , получаем:

$$4\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, находим, что  $\alpha \approx 0,557$ . При этом  $q = 1,557$ . Положив  $\eta = -0,5$ , получаем  $\alpha = 0,422$ ,  $q = 3,87$ .

Таким образом, для компенсации разброса точек пересечения нормалей к отражающему вогнутому параболоиду с оптической осью можно применить вогнутое сферическое зеркало существенно меньшего диаметра. Для выноса автоколлимационного изображения точки  $A_n'$  из пространства между зеркалами можно применить дополнительную оптическую систему, показанную пунктиром на рис.4.24.

Заметим, что эксцентриситет кривой второго порядка может быть и не равен единице, т.е., схему Д.Д. Максудова можно применить не только для контроля поверхности параболоида, но и поверхностей второго порядка другого вида.

Применив к рассматриваемому случаю формулу  $n_{i+1}\alpha_{i+1} = h_i \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i}$ , находим, что радиус кривизны сферического зеркала

$$R = -2 \frac{h_1}{1-\alpha} = \frac{2s}{1-\alpha}, \quad (4.58)$$

а радиус кривизны в вершине контролируемой поверхности зеркала

$$r_0 = \frac{h^2}{\alpha} = -\frac{s}{\alpha} \frac{1+\alpha}{1+\eta\alpha}. \quad (4.59)$$

Итак, при известных значениях эксцентриситета  $e$  и коэффициента экранирования  $\eta$ , используя формулу (4.56), находим значение угла  $\alpha$ . При заданной величине  $r_0$ , используя формулу (4.59), находим, что отрезок

$$s = -r_0 \alpha \frac{1 + \eta \alpha}{1 + \alpha}. \quad (4.60)$$

Подставив вычисленное значение отрезка  $s$  в формулу (4.58), находим величину  $R$ . И, наконец, формула (4.52) позволяет определить отрезок  $d$ .

Очевидным недостатком схемы является то, что свет дважды отражается от сферы и лишь один раз от контролируемой поверхности, т.е., погрешности формы сферического зеркала накладываются на контролируемую форму волнового фронта.

В 1927 году А. Кудэ применил двухлинзовый компенсатор для контроля отражающей поверхности параболоида диаметром 300 мм с относительным отверстием 1:5. Компенсатор располагался вне оси параболоида, т.е., схема была нецентрированной, что и явилось её основным недостатком.

В 1943 году Ф.Е. Росе выполнил сравнительный анализ зеркального компенсатора в схеме, представленной на рис.4.7, и линзового компенсатора, расположенного между центром кривизны при вершине контролируемой поверхности и вершиной поверхности, в схеме, приведенной на рис.4.25.

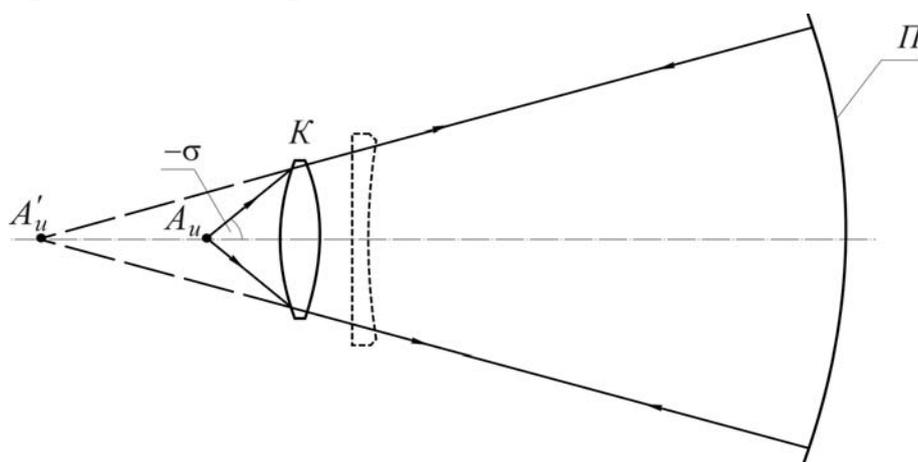


Рис.4.25. Линзовый компенсатор Росса для контроля отражающей поверхности параболоида диаметром 5 м

Было показано, что при одном и том же угле охвата угловая апертура пучка лучей, исходящего из точечного источника света, при зеркальном компенсаторе значительно больше, чем при линзовом. Кроме того, зеркальный компенсатор менее удобен в применении,

чем линзовый, так как необходимо устройство для вывода изображения точки из светового пучка лучей в сторону от оптической оси. Поэтому для контроля отражающей поверхности параболоида диаметром 5 м Паломарской обсерватории (США) предпочтение было отдано схеме с линзовым компенсатором. Для достижения требуемой точности контроля однолинзовый компенсатор был дополнен пластиной с несферической поверхностью сложного профиля.

В 1947 году в качестве линзового компенсатора Х.Е. Дэлл предложил использовать плосковыпуклую линзу 2 для контроля параболоида 1 в схеме, показанной на рис.4.26.

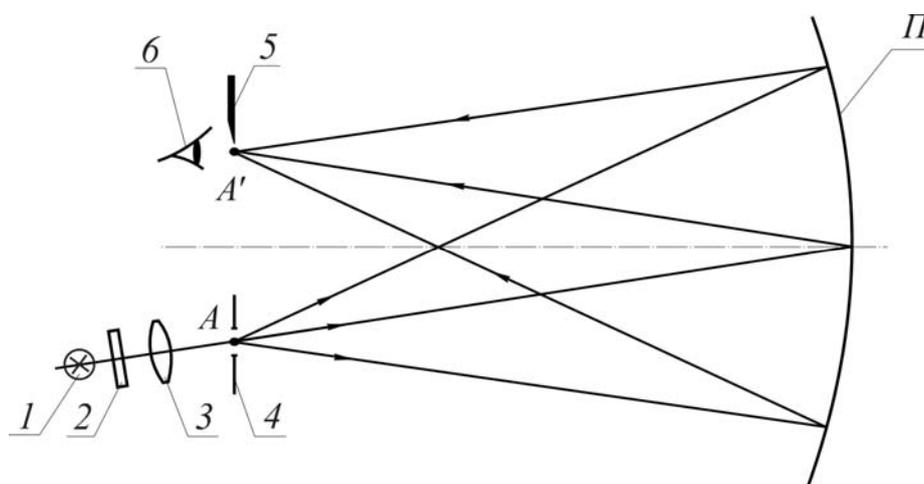


Рис.4.26. Компенсационная схема Дэлла: 1 – источник света; 2 – светофильтр; 3 – конденсор; 4 – диафрагма с центром в точке  $A$ ; 5 – нож; 6 – глаза наблюдателя;  $A'$  – изображение центра диафрагмы 4

Линза установлена вне оси параболоида вблизи от центра кривизны при его вершине. Применение этой схемы позволяет получить удовлетворительную точность контроля отражающей поверхности параболоида с малым относительным отверстием.

Для контроля отражающего параболоида диаметром 2,6 м под руководством профессора Г.Г. Слюсарева были рассчитаны компенсаторы сравнительного небольшого диаметра. Один компенсатор, рассчитанный В.И. Линьковой, представляет собой ахроматическую линзовую систему, состоящую из двух двухлинзовых компонентов диаметром 200 мм, один из которых – афокальный. Второй компенсатор, рассчитанный И.В. Пейсахсоном, состоит из вогнутого сферического зеркала диаметром 180 мм и почти афокального мениска диаметром 75 мм.

В 1970 году Р.С. Хильберт и М.П. Риммер для контроля несферических поверхностей не только второго, но и более высокого порядка, предложили использовать вариокомпенсатор, который

состоит из двух или трёх planoидных несферических пластин, как показано на рис.4.27.

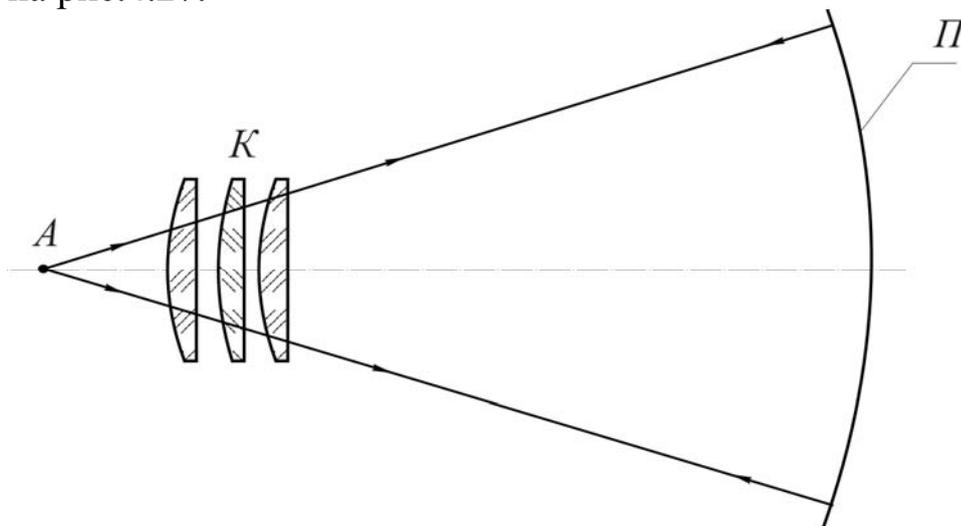


Рис.4.27. Схема контроля вогнутой поверхности параболоида с помощью трёхлинзового вариокомпенсатора

Измеряя расстояние между пластинами и их положение относительно источника света (точки  $A_n$ ), удаётся получить требуемую форму волнового фронта. Однако проблемы контроля planoидных пластин, их аттестация и аттестация компенсатора в целом определяют очевидные его недостатки.

#### 4.3.2. Компенсационная схема контроля с линзовым компенсатором

Проблемы изготовления и аттестации компенсатора определяют требование предельной простоты его конструкции. В простейшем случае компенсатор представляет собой отдельную линзу в воздухе. Будем считать эту линзу тонкой. Тогда оптическую систему в соответствии со схемой, показанной на рис.4.28, можно записать в виде:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_1 = -1 & & n_1 = 1 \\
 \alpha_2 = \alpha_k & d_1 = 0 & n_2 = n_k \\
 \alpha_3 = \alpha_0 & d_2 = a'_k - r_0 & n_3 = 1 \\
 \alpha_4 = \alpha_0 & d_3 = -d_2 & n_4 = -1 \\
 \alpha_5 = \alpha_k & d_4 = 0 & n_5 = -n_k \\
 \alpha_6 = \alpha_1 = -1 & & n_6 = -1.
 \end{array}$$

При этом  $h_1 = h_2 = h_4 = h_5 = h_k = a_k \alpha_1 = -a_k$ ,  $h_3 = h_0 = r_0 \alpha_0$ .

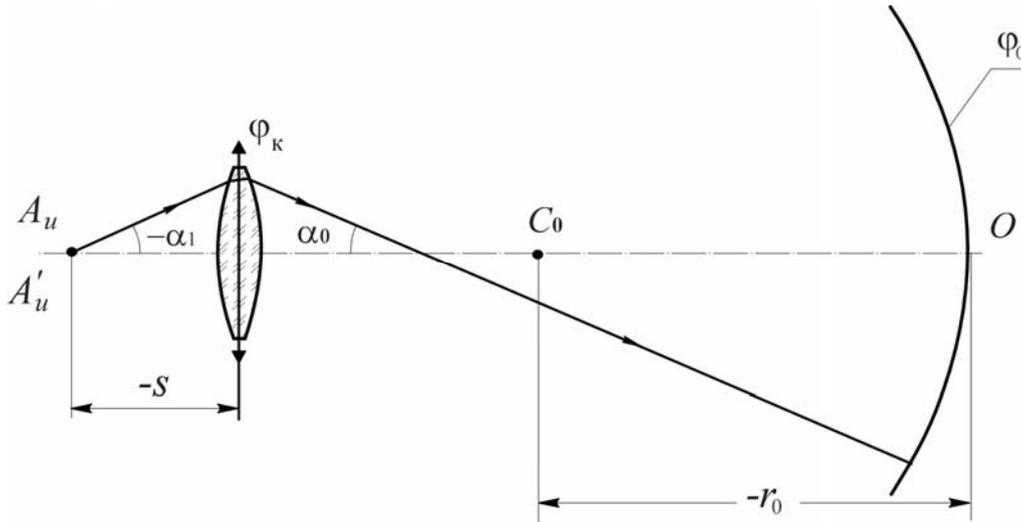


Рис.4.28. Компенсационная схема контроля несферической вогнутой поверхности с линзовым компенсатором

Сферическая aberrация и кома в изображении точки зависят, соответственно, от коэффициентов  $S_I$  и  $S_{II}$ , которые определим выражениями вида:

$$S_I = B_0 = \sum_{i=1}^{i=k} h_i Q_i,$$

$$S_{II} = J(K_0 + qB_0),$$

где  $K_0 = -\sum_{i=1}^{i+k} W_i + \sum_{i=1}^{i=k} h_i S_i Q_i,$

$$W_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} (v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i), \quad v_i = \frac{1}{n_i};$$

$$S_i = \sum_{s=2}^{s=i} \frac{d_{s-1}}{h_{s-1} h_s n_s}, \quad Q_i = T_i \sigma_{ei} + P_i, \quad P_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} W_i,$$

$$T_i = \frac{(n_{i+1} \alpha_{i+1} - n_i \alpha_i)^3}{(n_{i+1} - n_i)^2}.$$

При принятых значениях величин имеем:

$$W_1 = -W_5 = -\frac{1 + \alpha_k}{1 - v_k} (1 + v_k \alpha_k),$$

$$W_2 = -W_4 = \frac{\alpha_0 - \alpha_k}{1 - v_k} (\alpha_0 - v_k \alpha_k),$$

$$W_3 = 0;$$

$$P_1 = P_5 = -\left(\frac{1 + \alpha_k}{1 - \nu_k}\right)^2 (1 + \nu_k \alpha_k),$$

$$P_2 = P_4 = \left(\frac{\alpha_0 - \alpha_k}{1 - \nu_k}\right)^2 (\alpha_0 - \nu_k \alpha_k),$$

$$P_3 = 0;$$

$$S_1 = S_2 = 0,$$

$$S_3 = S_2 + \frac{d_2}{h_2 h_3 n_3} = \frac{a'_k - r_0}{h_k h_0} = \frac{a_k + r_0 \alpha_0}{a_k r_0 \alpha_0^2}, \text{ так как } \frac{a'_k}{a_k} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = -\frac{1}{\alpha_0},$$

$$S_4 = S_3 + \frac{d_3}{h_3 h_4 n_4} = S_3 + \frac{a'_k - r_0}{h_0 h_k} = 2S_3,$$

$$S_5 = S_4 + \frac{d_3}{h_4 h_5 n_5} = S_4 = 2S_3.$$

В рассматриваемом случае коэффициенты деформации поверхностей  $\sigma_{e1} = \sigma_{e2} = \sigma_{e4} = \sigma_{e5} = 0$ ,  $\sigma_{e3} \neq 0$ . При этом  $Q_1 = P_1 = P_5 = Q_5$ ,  $Q_2 = P_2 = P_4 = Q_4$ ,  $Q_3 = T_3 \sigma_{e3}$ . Параметр

$$T_3 = \frac{(-\alpha_0 - \alpha_0)^3}{4} = -2\alpha_0^3. \text{ Обозначив } \sigma_{e3} = \sigma_{e0}, \text{ имеем } Q_3 = -\sigma_{e0} \alpha_0^3.$$

Итак,

$$S_1 = B_0 = 2h_k(P_1 + P_2) + h_0 Q_3.$$

Легко убедиться, что  $\sum_{i=1}^{i=5} W_i = 0$ . При этом  $K_0 = h_3 S_3 Q_3 + h_4 S_4 P_4 + h_5 S_5 P_5 = S_3 [2h_k(P_1 + P_2) + h_0 Q_3] = S_3 B_0$ . Следовательно,  $S_{II} = JB_0(S_3 + q)$ .

Коэффициент

$$q = \frac{\nu_1}{h_1^2 \left( \frac{1}{a'} - \frac{1}{a_{p1}} \right)} = \frac{1}{h_k^2 \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{pk}} \right)},$$

где  $a_{pk}$  – расстояние от первой поверхности компенсатора до осевой точки входного зрачка. По смыслу решаемой задачи апертурной диафрагмой в рассматриваемой схеме является наружный контур контролируемой поверхности. Тогда

$$a'_{pk} = a'_k - r_0 = -\frac{a_k + r_0 \alpha_0}{\alpha_0}.$$

Используя формулу отрезков, находим, что

$$a_{pк} = \frac{a'_{pк}}{1 - \varphi_{к} a'_{pк}} = \frac{a'_{pк}}{1 - \frac{1 + \alpha_0}{h_{к}} a'_{pк}} = a_{к} \frac{a_{к} + r_0 \alpha_0}{a_{к} + (1 + \alpha_0) r_0 \alpha_0}.$$

При этом

$$q = \frac{a_{pк}}{a_p (a_{pк} - a_{к})} = - \frac{a_{к} + r_0 \alpha_0}{a_{к} r_0 \alpha_0^2}.$$

Следовательно,

$$S_{II} = JB_0 \left( \frac{a_{к} + r_0 \alpha_0}{a_{к} r_0 \alpha_0^2} - \frac{a_{к} + r_0 \alpha_0}{a_{к} r_0 \alpha_0^2} \right) = 0,$$

что и следовало ожидать при симметричном ходе луча в симметричной системе. Этот результат позволяет для удобства применения рассматриваемой автоколлимационной схемы разнести точечный источник излучения и его изображение в направлении, перпендикулярном к оптической оси, без ухудшения качества изображения.

Полученные соотношения позволяют выражение, определяющее коэффициент  $S_I$  первичной аберрации, преобразовать к виду:

$$S_I = 2 \frac{n_{к} h_{к}}{(n_{к} - 1)} \left[ (2 + n_{к})(1 + \alpha_0) \alpha_{к}^2 + (1 + 2n_{к})(1 - \alpha_0^2) \alpha_{к} + n_{к} (1 + \alpha_0^2) - \frac{(n_{к} - 1)^2}{n_{к}} \frac{h_0}{h_{к}} \sigma_0 \alpha_0^3 \right]. \quad (4.61)$$

Заметим, что при  $\alpha_0 = -1$  коэффициент  $S_I = 2h_0 \sigma_{e0}$ . При этом  $S_I = 0$  при  $\sigma_{e0} = 0$ , т.е. для сферической поверхности. И в общем случае (при  $\sigma_{e0} \neq 0$ ) оптическая система компенсатора с контролируемой поверхностью должна удовлетворять условию:  $S_I = 0$ .

При  $\alpha_0 = 1$  условие  $S_I = 0$  выполняется при вещественном решении уравнения:

$$\alpha_{к} = \sqrt{\frac{n_{к}}{2 + n_{к}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n_{к} - 1}{n_{к}} \right)^2 \frac{h_0}{h_{к}} \sigma_{e0} - 1 \right]}.$$

Отсюда следует, что при  $\alpha_0 = 1$  угол  $\alpha_{к} = 0$  при  $\frac{h_0}{h_{к}} \sigma_{e0} = 2 \left( \frac{n_{к}}{n_{к} - 1} \right)^2$ . Легко убедиться, что при  $n_{к} = 1,5 \div 1,8$

соотношение  $\frac{h_0}{h_k} \sigma_{e0} = 18 \div 10$ . В общем случае выполнение условия

$S_I = 0$  определяется уравнением

$$\alpha_k + \frac{1+2n_k}{2+n_k}(1-\alpha_0)\alpha_k + \frac{n_k}{2+n_k} \frac{1+\alpha_0^3}{1+\alpha_0} \left[ 1 - \left( \frac{n_k-1}{n_k} \right) \frac{h_0}{h_k} \frac{\alpha_0^3}{1+\alpha_0^3} \sigma_{e0} \right] = 0. \quad (4.62)$$

Решение этого уравнения можно представить в виде:

$$\alpha_k = -\frac{1+2n_k}{2+n_k} \frac{(1-\alpha_0)}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{1+2n_k}{2+n_k} \right)^2 \frac{(1-\alpha_0)^2}{4} - \frac{n_k}{2+n_k} \frac{1+\alpha_0^3}{1+\alpha_0} \left[ 1 - \left( \frac{n_k-1}{n_k} \right)^2 \frac{h_0}{h_k} \frac{\alpha_0^3}{1+\alpha_0^3} \sigma_{e0} \right]}. \quad (4.63)$$

Полученное выражение определяет функциональную зависимость угла  $\alpha_k$  от конструктивных параметров оптической системы контроля формы несферической поверхности: от показателя преломления  $n_k$  материала линзы компенсатора, от величины угла  $\alpha_0$ , от величины отношения высот  $m = \frac{h_0}{h_k}$  и от величины коэффициента

деформации сферической поверхности  $\sigma_{e0}$ . По сути дела выражение (4.63) определяет семейство возможных вариантов однолинзовых компонентов.

Важно обратить внимание на то, что в уравнении поверхности второго порядка (за исключением сплющенного эллипсоида) величина коэффициента  $\sigma_{e0} < 0$ . Кроме того, вполне очевидно, что при  $\frac{h_0}{h_k} > 0$  величина угла  $\alpha_0 < 0$ , а при  $\frac{h_0}{h_k} < 0$  величина угла  $\alpha_0 > 0$ . Таким образом, под корнем выражения (4.63) имеем:

$$\left( \frac{1+2n_k}{2+n_k} \right)^2 \frac{(1-\alpha_0)^2}{4} > 0, \quad \frac{n_k}{2+n_k} \frac{1+\alpha_0^3}{1+\alpha_0} > 0, \quad \left( \frac{n_k-1}{n_k} \right)^2 \frac{h_0}{h_k} \frac{\alpha_0^3}{1+\alpha_0^3} \sigma_{e0} > 0.$$

Чтобы иметь представление о возможных числовых величинах углов  $\alpha_0$  и  $\alpha_k$ , рассмотрим случай контроля поверхности отражающего параболоида, т.е. случай, когда  $\sigma_{e0} = -1$ . Вполне очевидно, что уравнение (4.62) имеет вещественные корни, если подкоренное выражение в решении (4.63) уравнения (4.62) больше нуля или равно нулю. Рассмотрим предельный случай, когда

подкоренное выражение равно нулю. При этом относительно угла  $\alpha_0$  получаем уравнение третьей степени вида:

$$a\alpha_0^3 + b\alpha_0^2 + c\alpha_0 + d = 0, \quad (4.64)$$

где 
$$a = \frac{A}{(1+2n_k)^2} \left( \frac{4n_k-1}{A} + m \right), \quad b = c = 1, \quad d = \frac{4n_k-1}{(1+2n_k)^2},$$

$$A = 4(n_k-1)^2 \frac{2+n_k}{n_k}, \quad m = \frac{h_0}{h_k}.$$

Как следует из выражения (4.63), угол  $\alpha_k$  в этом случае определяется формулой

$$\alpha_k = -\frac{1+2n_k}{2+n_k} \frac{1-\alpha_0}{2}. \quad (4.65)$$

Пусть показатель преломления материала компенсатора  $n_k = 1,5$ . В общем случае величина  $m \leq 1$ . Пусть  $m = 1$ . При этих значениях  $n_k$  и  $m$  уравнение (4.64) принимает вид:

$$0,4583\alpha_0^3 + \alpha_0^2 + \alpha_0 + 0,3125 = 0.$$

Решение этого уравнения даёт значение угла  $\alpha_0 = -0,5154$ . Подставив его в формулу (4.65), получаем  $\alpha_k = -0,8659$ . Вполне очевидно, что при  $\alpha_0 > -0,5154$  выражение (4.63) определяет вещественные значения угла  $\alpha_k$ .

При  $m = 10$  аналогично находим, что  $\alpha_0 = -0,3595$ ,  $\alpha_k = -0,7768$ . Из выражения, определяющего коэффициент  $a$  в уравнении (4.64), следует, что при  $m = -\frac{4n_k-1}{A}$  коэффициент  $a = 0$ . При этом уравнение (4.64) вырождается в квадратное уравнение, которое не имеет вещественных корней. Следовательно, при отрицательных значениях отношения высот величина  $m$  должна удовлетворять условию:

$$m < -\frac{4n_k-1}{A} = -\frac{1}{4} \frac{n_k}{2+n_k} \frac{4n_k-1}{(n_k-1)^2}.$$

При  $n_k = 1,5$  это условие принимает вид:  $m < -2,1429$ .

Пусть  $m = -5$ . При этом находим, что  $\alpha_0 = 3,2182$ , а  $\alpha_k = -1,2675$ . Однако, в этом случае, если угловой размер контролируемой из центра кривизны поверхности равен  $2\omega$ , то угловая величина наблюдаемого из точки  $A'_и$  изображения этой поверхности равна:

$$2\omega' = \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right| 2\omega = \frac{2\omega}{3,2182}.$$

Таким образом, при  $2\omega \approx 1:8$  угловая величина изображения  $2\omega' \approx 1:26$ , а это означает, что на расстоянии, равном, например, 250 мм, эта угловая величина наблюдаемого изображения контролируемой поверхности эквивалентна линейной величине, приближённо равной 10 мм. Эту величину изображения можно увеличить, если совместить изображение  $A'_n$  точечного источника излучения с осевой точкой поверхности изображения, образованного микрообъективом, а наблюдать полученное изображение из осевой точки в плоскости предмета, т.е. если применить микрообъектив в обратном ходе лучей. В рассматриваемом случае можно применить, например, ахроматический микрообъектив  $6,3 \times 0,17$  (ОХ-27), имеющий рабочее расстояние около 10 мм. Величина наблюдаемого при этом изображения будет равна  $\sim 60$  мм.

Положив  $m = -10$ , получаем  $\alpha_0 = 1,5495$ , а  $\alpha_k = 0,628$ . Заметим, что увеличение показателя преломления материала компенсатора приводит к более благоприятным параметрам. Так, например, при  $n_k = 1,75$  и  $m = -10$  получаем  $\alpha_0 = 1,0746$ ,  $\alpha_k = 0,0448$ .

Из габаритных соображений и из соображений возможности изготовления компенсатора абсолютная величина отношения высот  $m$  достаточно велика. При этом достаточно велики и апертурные углы в пространстве предметов и изображений компенсатора, что приводит к появлению aberrаций более высокого порядка. Поэтому далеко не всегда с помощью отдельной линзы в воздухе, преломляющие поверхности которой имеют сферическую форму, можно построить безабберационную оптическую систему контроля формы требуемой несферической поверхности. Это приводит к необходимости усложнения конструкции компенсатора. И в этом случае в первом приближении задача расчёта параметров компенсатора сводится к устранению первичной aberrации в схеме контроля, определяемой коэффициентом, равным

$$S_I = S_{Ik} + h_0 Q_0 = S_{Ik} - 2h_0 \sigma_{e0} \alpha_0^3,$$

где  $S_{Ik}$  – коэффициент первичной aberrации, вносимой оптической системой компенсатора в изображение точки, причём

$$S_{Ik} = \sum_{i=1}^{i=q} h_i Q_i,$$

где  $q$  – количество поверхностей компенсатора по ходу осевого луча.

При  $S_I = 0$  получаем:  $S_{Ik} = 2h_0 \sigma_{e0} \alpha_0^3$ . При достаточно "тонкой" оптической системе компенсатора последнее выражение можно представить в виде:

$$Q_k = 2 \frac{h_0}{h_k} \sigma_{e0} \alpha_0^3, \text{ где } Q = \sum_{i=1}^{i=q} (T_i \sigma_{ei} + P_i).$$

При этом "лишние" параметры можно использовать для лучшей компенсации остаточной аберрации различных порядков.

Оригинальную схему линзового компенсатора для контроля отклонений обрабатываемой поверхности отражающего параболоида от номинальной формы предложил в 1963 году А. Оффнер. Компенсационная схема контроля с компенсатором Оффнера показана на рис.4.29.

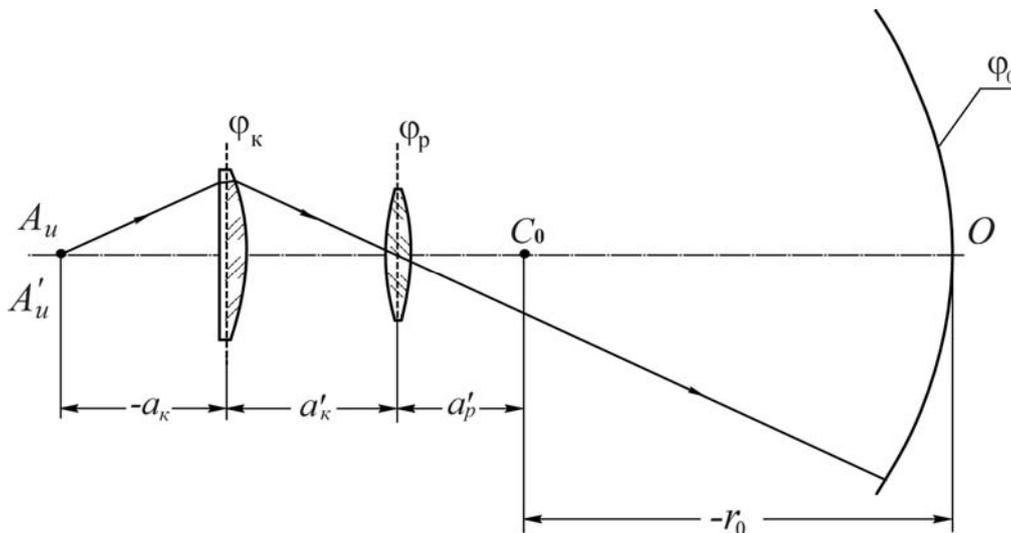


Рис.4.29. Компенсатор Оффнера с полевой линзой  $\phi_p$

Здесь компенсатор  $\phi_k$  в виде отдельной линзы изображает точечный источник  $A_u$  в центре кривизны  $C_0$  в осевой точке контролируемой поверхности  $\phi_0$ . Принципиальным отличием компенсатора Оффнера от других компенсаторов является необходимость промежуточного изображения точечного источника между компенсатором  $\phi_k$  и контролируемой поверхностью  $\phi_0$ , при этом компенсатор  $\phi_k$  может быть линзовым, зеркально-линзовым или зеркальным. Вблизи центра кривизны  $C_0$  в вершине параболоида расположена дополнительная полевая линза  $\phi_p$ .

При разработке линзового компенсатора Ф. Росс обнаружил, что чем ближе к отражающей поверхности параболоида и дальше от центра кривизны в его вершине располагал он линзу, тем меньше была остаточная аберрация при точной компенсации её в центре и на краю поверхности. Если бы компенсатор поместить в непосредственной близости к параболоиду, то сферическая аберрация в изображении точки, образованном компенсатором, вполне

соответствовала бы сферической аберрации нормалей к контролируемой поверхности; однако, при этом компенсатор должен быть таким же большим, как и контролируемая поверхность. А. Оффнер отмечал, что небольшая линза, образующая действительное изображение точечного источника излучения в центре кривизны параболоида, в сочетании с полевой линзой, изображающей её на поверхности параболоида, с оптической точки зрения эквивалентна большой линзе вблизи контролируемой поверхности. Вполне очевидно, что речь здесь может идти лишь о совмещении поверхности преобразованного компенсатором волнового фронта с контролируемой поверхностью, при этом при равенстве первичных аберраций аберрации более высокого порядка в изображении точки, образованном линзой вблизи поверхности и рассматриваемой линзой, могут весьма заметно различаться. Таким образом, замена большой линзы вблизи поверхности малой линзой, как показано на рис.4.29, определяется соотношениями технологичности (меньшей трудоёмкости) её изготовления. Как справедливо отмечал А. Оффнер, при наличии в его схеме полевой линзы нужно лишь, чтобы изображение точки, образованное линзой компенсатора  $\varphi_k$ , обладало первичной сферической аберрацией, достаточной для компенсации разброса точек пересечения с оптической осью нормалей к контролируемой несферической поверхности. Тогда изменением оптической силы полевой линзы  $\varphi_p$  и, соответственно, положения изображения линзы  $\varphi_k$  можно добиться сведения аберраций высшего порядка к минимуму. Последнее замечание А. Оффнера следует рассмотреть более обстоятельно.

В общем случае сечение несферической поверхности вращения плоскостью  $yOz$  можно определить уравнением вида:

$$y^2 = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n, \quad (4.66)$$

где  $a_1 = 2r_0$ ,  $r_0$  – радиус кривизны в вершине поверхности. Пусть  $NC_N$  – нормаль к поверхности в точке  $N = N(y, z)$ , пересекающая ось  $Oz$  в точке  $C_N = C_N(O, z_N)$ , как показано на рис.4.30.

В соответствии с рисунком

$$z_N = z + \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi}. \quad (4.67)$$

Но  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dz}{dy} = \frac{2y}{a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}}$ . Тогда

$$z_N = \frac{1}{2}a_1 + (1+a_2)z + \frac{3}{2}a_3z^2 + \dots + \frac{1}{2}na_Nz^{n-1}. \quad (4.68)$$

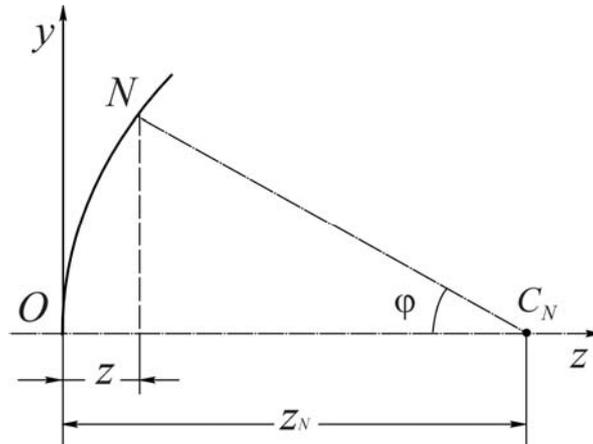


Рис.4.30. Сечение несферической поверхности вращения меридиональной плоскостью

В рассматриваемом случае сечение поверхности меридиональной плоскостью удобно представить степенным рядом в функции от ординаты  $y$ , т.е. определить уравнением вида:

$$z = \frac{1}{r_0} \frac{y^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2}} + a_1 y^2 + a_2 y^4 + \dots + a_n y^{2n}. \quad (4.69)$$

При этом

$$z_N = \frac{1}{r_0} \frac{y^2}{1 + \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2}} + a_1 y^2 + a_2 y^4 + \dots + a_n y^{2n} + \frac{r_0 \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2}}{1 + 2r_0(a_1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^{2(n-1)}) \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2}}. \quad (4.70)$$

В случае несферической поверхности второго порядка, т.е. при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , выражение (4.70) принимает вид:

$$z_N = \frac{r_0}{1 - e^2} \left( 1 - e^2 \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2} \right). \quad (4.71)$$

При  $y=0$  абсцисса  $z_{0N} = r_0$ . При этом разброс точек пересечения нормалей к поверхности с оптической осью (сферическая aberrация нормалей к поверхности) равен

$$\delta z_N = z_N - z_{0N} = \frac{e^2 r_0}{1 - e^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2} \right). \quad (4.72)$$

Предположим, что тонкий компонент  $\varphi_p$  расположен на расстоянии  $z_p = r_0 + \Delta$  от вершины несферической поверхности. При этом отклонение точек пересечения с оптической осью нормалей к поверхности относительно компонента  $\varphi_p$  определится очевидным соотношением вида:

$$\delta z_p = \delta z_N - \Delta = \frac{e^2 r_0}{1 - e^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2} \right) - \Delta. \quad (4.73)$$

В первом приближении будем считать, что тонкий компонент  $\varphi_p$  не вносит aberrаций в образованные им изображения точек. Тогда, полагая отрезок  $\delta z_p$  равным переднему отрезку  $a_p$  компонента  $\varphi_p$ , в соответствии с формулой отрезков получаем  $a'_p = \frac{a_p}{1 + \varphi_p a_p}$ .

Подставив в это соотношение выражение (4.73) и преобразовав его, получаем:

$$a'_p = f'_p \frac{A}{A + (e^2 - 1)f'_p},$$

где  $A = e^2 r_0 \left( \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2} - \frac{r_0 + \Delta}{r_0} \right) + \Delta.$  (4.74)

$$\text{При } y = 0: a'_p = \frac{\Delta}{\varphi_p \Delta - 1}.$$

При этом положение изображений точек пересечения нормалей к поверхности с оптической осью, образованных компонентом  $\varphi_p$ , определится разностью отрезков  $a'_p$  и  $a'_{0p}$  в виде:

$$\delta z'_p = a'_p - a'_{0p} = \frac{A + (e^2 - 1)\Delta}{(A\varphi_p + e^2 - 1)(1 - \varphi_p \Delta)} \quad (4.75)$$

$$\text{или } \delta z'_p = f'_p \frac{\tilde{A} + (e^2 - 1)\tilde{\Delta}}{(\tilde{A} + e^2 - 1)(1 - \tilde{\Delta})}, \text{ где } \tilde{A} = A\varphi_p, \tilde{\Delta} = \varphi_p \Delta.$$

Легко убедиться, что при  $f'_p = \infty$  ( $\varphi_p = 0$ ) выражение (4.75) принимает вид выражения (4.73). Заметим, что при  $\Delta = 0$  выражение (4.75) преобразуется к виду:

$$\delta z'_{0p} = \frac{A}{A\varphi_p + e^2 - 1}, \quad (4.76)$$

где  $A = e^2 r_0 \left( \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2} - 1 \right)$ . Полагая величину  $\frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2$  достаточно малой, можно принять, что  $A \approx e^2 \frac{e^2 - 1}{2r_0} y^2$ . При этом

$$\delta z'_{0p} \approx \frac{e^2}{2r_0} \left( 1 - \varphi_p \frac{e^2}{2r_0} y^2 \right) y^2.$$

Анализ полученных соотношений, определяющих влияние полевой линзы  $\varphi_p$  на aberrации компенсатора в целом, позволяет сделать следующие выводы:

1. Полевая линза, расположенная в плоскости, проходящей через центр кривизны в осевой точке несферической поверхности, т.е. при  $\Delta = 0$ , влияет только на aberrации высшего порядка, причём влияние тем больше, чем больше её оптическая сила.

2. Смещение полевой линзы из плоскости, проходящей через центр кривизны в осевой точке несферической поверхности, вдоль оптической оси на расстояние  $\Delta$  влияет как на aberrации высшего, так и на aberrации третьего порядка, причём влияет не само смещение линзы, а отношение смещения полевой линзы к её фокусному расстоянию.

Вполне естественно предположить, что при достаточно больших величинах разброса точек пересечения нормалей к несферической поверхности с оптической осью оказывает влияние на aberrации и прогиб полевой линзы.

Оригинальную конструкцию трёхлинзового компенсатора диаметром 160 мм для контроля формы отражающего параболоида диаметром 6 м предложил профессор Д.Т. Пуряев. Компенсатор обладает рядом полезных свойств, из числа которых отметим следующие: диаметры линз компенсатора достаточно малы, что позволяет использовать высококачественное оптическое стекло, не требующее специальной варки; в качестве материала линз компенсатора использовано стекло одной марки ТФ5; все поверхности линз имеют сферическую форму, причём радиусы кривизны трёх поверхностей из шести одинаковы по абсолютной величине; в конструкции компенсатора предусмотрена возможность надёжной юстировки его в контрольной схеме при использовании

автоколлимационного отражения лучей в нерабочей зоне компенсатора. Совокупность этих свойств обеспечивает максимальную надежность компенсатора не только для технологического контроля, но и для окончательной аттестации отражающей поверхности параболоида.

Компенсатор состоит из трёх положительных линз: менисковой 1, апланатической 2 и двояковыпуклой 3, как показано на рис.4.31.

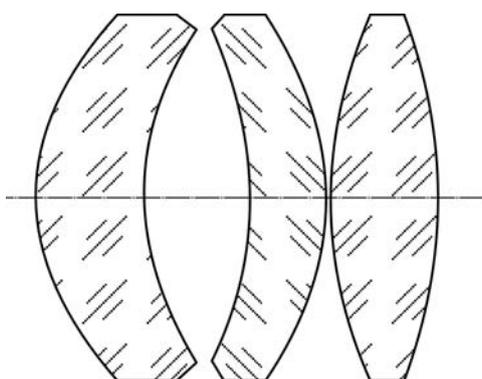


Рис.4.31. Трёхлинзовый компенсатор

Положение компенсатора в контрольной схеме представлено на рис.4.32. Идея конструкции рассматриваемого компенсатора заключается в следующем. Положив в формуле (4.76) величину  $\varphi_p = 0$ , преобразуем её к виду:

$$\delta z'_{0p} = \delta z_{0p} = \frac{e^2 y^2}{r_0 \left( \sqrt{1 + \frac{e^2 - 1}{r_0^2} y^2} + 1 \right)}.$$

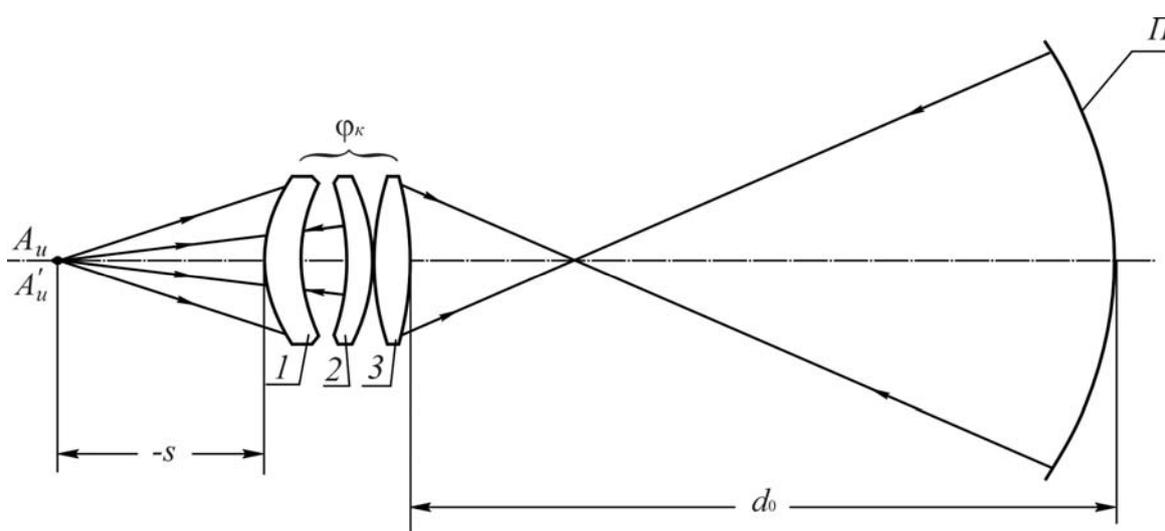


Рис.4.32. Схема применения трёхлинзового компенсатора для контроля формы поверхности параболоида

В случае параболоида, определяемого уравнением:  $x^2 + y^2 = 2r_0z$ , величина  $e^2 = 1$ . При этом

$$\delta z_{0p} = \frac{1}{2r_0} y^2.$$

Отсюда следует, что величина  $\delta z_{0p}$  в рассматриваемом случае эквивалентна первичной продольной сферической aberrации. Сферическая aberrация третьего порядка, вносимая в изображение точки линзой 3, компенсирует величину  $\delta z_{0p}$ . Однако, при этом линза 3 вносит и сферическую aberrацию более, чем третьего порядка. Апланатическая линза 2, расположенная перед линзой 3, уменьшает поперечную сферическую aberrацию в  $n$  раз, где  $n$  – показатель преломления линзы, и во столько же раз увеличивают числовую апертуру входящего пучка лучей, не внося в него сферическую aberrацию третьего порядка. Окончательная коррекция остаточной сферической aberrации высшего порядка (выше третьего) выполняется с помощью линзы 1, которая также не вносит сферической aberrации третьего порядка, поскольку имеет равные радиусы кривизны поверхностей при параллельном ходе лучей между ними. В рассматриваемой конструкции компенсатора радиусы кривизны поверхностей  $r_1 = r_2 = -r_4$ . Поэтому вторая и четвертая поверхности образуют пару пробных стекол, и могут взаимно контролироваться в процессе изготовления.

Конструктивные параметры компенсатора, рассчитанного на длину волны  $\lambda = 632,8$  нм гелий-неонового лазера для контроля отражающей поверхности параболоида, определяющей поверхности параболоида, определяемой уравнением:  $x^2 + y^2 = 96000z$ , имеют следующие значения:

			$D_{CB}$ (мм)
$r_1 = 232,8$		$n_1 = 1$	140
	$d_1 = 38,83$	$n_2 = 1,74997$ (ТФ5)	139
$r_2 = 232,8$		$n_3 = 1$	144
	$d_2 = 29,986$	$n_4 = 1,74997$ (ТФ5)	152,5
$r_3 = -340,4$		$n_5 = 1$	156,3
	$d_3 = 25,431$		
$r_4 = -232,8$			
	$d_4 = 0$		

$$r_5 = 1061,7 \quad d_5 = 30,84 \quad n_6 = 1,74997 \text{ (ТФ5)} \quad 158$$

$$r_6 = -466,7 \quad n_7 = 1$$

$$s = -310,414, \quad d_0 = 49308,875, \quad \sin\sigma = 0,22.$$

Остаточная волновая aberrация в изображении точки, образованном этим компенсатором, в плоскости наилучшей установки при двойном ходе лучей не превышает  $\frac{\lambda}{15}$ .

Следует отметить, что показатели преломления стекла ТФ5 указаны для конкретной плавки и измерены с точностью  $\pm 1 \cdot 10^{-5}$ . Световые диаметры линз рассчитаны в предположении, что диаметр контролируемой поверхности параболоида равен 6200 мм.

#### 4.3.3. Универсальные компенсаторы

Сферическая aberrация в изображении осевой точки предмета определяется коэффициентом  $S_1 = \sum h_i Q_i$ , где  $Q_i = P_i + T_i \sigma_{ei}$ ,  $\sigma_{ei} = e_i^2$ . В случае тонкого компонента коэффициент  $S_1 = h \sum Q_i$ . Если линзы тонкого компонента образованы преломляющими поверхностями сферической формы, то  $S_1 = h \sum P_i = hP$ . При  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha' = 1$  параметр  $P = \mathbf{P}$  называется основным параметром тонкого компонента, причём для тонкой линзы

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + q (\alpha - \alpha_0)^2,$$

где  $\alpha_0$  – то значение угла  $\alpha = \alpha_2$ , при котором величина  $\mathbf{P}$  принимает минимальное значение  $\mathbf{P}_0$ . При этом

$$P_0 = \frac{n(4n-1)}{4(2+n)(n-1)^2}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{1+2n}{2+n}, \quad q = \frac{n(2+n)}{(n-1)^2}.$$

При  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha' = 1$  для тонкой линзы имеем:

$$P = (1 - \alpha_1)^3 \mathbf{P} + 4\alpha_1(1 - \alpha_1)^2 W + \alpha_1(1 - \alpha_1)[2\alpha_1(2 + \pi) - 1],$$

$$\text{где } W = \frac{n}{n-1} \left( 1 - \frac{n+1}{n} \alpha \right), \quad \pi = \frac{1}{n}.$$

При постоянных значениях радиусов кривизны поверхностей линзы углы  $\alpha$  определяются соотношением  $n_{i+1} \alpha_{i+1} - n_i \alpha_i = h \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i}$ ,

а для внешних углов в случае тонкого компонента имеем

$$\alpha' - \alpha = h\varphi.$$

Кроме того, в общем случае поверхности линз компенсатора могут быть образованы несферическими поверхностями второго порядка вида:

$$x^2 + y^2 = 2r_0z - (1 - e^2)z^2.$$

Таким образом, при продольном смещении любого компенсатора изменяется величина внутренних и внешних углов  $\alpha$ , высота точек пересечения нулевых лучей с тонкими компонентами, а, следовательно, изменяется и величина сферической аберрации в изображении точки. Это позволяет сделать вывод о том, что любой компенсатор обладает принципиальной возможностью применения для контроля несферических поверхностей в некотором диапазоне изменения их параметров. Однако, стоимость изготовления компенсатора, как правило, "тонет" в стоимости обработки несферической поверхности, например, главного зеркала астрономического телескопа. Поэтому универсальность компенсатора следует усматривать не только в применении одного и того же компенсатора для контроля различных поверхностей несферической формы, но и в том, чтобы при одной и той же конструкции компенсатора путем изменения его конструктивных параметров можно было бы решить задачу контроля несферических поверхностей в широком диапазоне изменения их формы. В этом смысле компенсатор А. Оффнера вполне можно отнести к универсальным компенсаторам.

Большой вклад в создание и исследование конструкций универсального компенсатора внес профессор Д.Т. Пуряев. Рассмотрим предложенные им две конструкции универсального компенсатора.

**Менисковый афокальный компенсатор.** Поперечное увеличение изображения предмета, образованного афокальным мениском, равно

$$v = \frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Предположим, что осевая точка предмета расположена на расстоянии  $s$  от первой поверхности мениска. Тогда, положив угол  $\alpha_1 = v$ , а угол  $\alpha' = 1$ , получаем:

$$h_1 = sv, \quad h_2 = h_1 - \alpha d = sv - \alpha d.$$

Для первой поверхности мениска имеем

$n\alpha - v = sv \frac{n-1}{r_1}$ . Отсюда находим, что

$$\alpha = \frac{v}{n} \left( 1 + s \frac{n-1}{r_1} \right). \quad (4.77)$$

$$\text{Тогда } h_2 = vs \left[ 1 - \frac{d}{ns} \left( 1 + s \frac{n-1}{r_1} \right) \right]. \quad (4.78)$$

При этом коэффициент  $S_I$ , определяющий сферическую абберацию, вносимую в изображение точки афокальным мениском, равен

$$S_I = nsv \frac{(2+n)(1-v)\alpha^2 - (1+2n)(1-v^2)\alpha + n(1-v^3)}{(n-1)^2} - v\alpha(n-\alpha) \left( \frac{1-\alpha}{n-1} \right)^2 d. \quad (4.79)$$

Как следует из выражения (4.78), если отношение  $\left| \frac{d}{s} \right| \ll 1$ , то можно принять, что  $v \approx 1$ . Тогда выражение (4.79) примет вид:

$$S_I \approx -\alpha(n-1) \left( \frac{1-\alpha}{n-1} \right)^2 d. \quad (4.80)$$

Если угол  $\alpha$  мало отличается от единицы, то вполне очевидно, что величина коэффициента  $S_I$  достаточно мала для компенсатора. Заменим первую сферическую поверхность компенсатора несферической. При этом

$$S_I = nsv \frac{(2+n)(1-v)\alpha^2 - (1+2n)(1-v^2)\alpha + n(1-v^3)}{(n-1)^2} - v\alpha(n-\alpha) \left( \frac{1-\alpha}{n-1} \right)^2 d - sv \frac{(n\alpha - v)^3}{(n-1)^2} \varepsilon_k^2.$$

Как следует из выражения (4.77),  $n\alpha - v = sv \frac{n-1}{r_1}$ . Тогда при  $v \approx 1$  получаем

$$S_I \approx -\alpha(n-\alpha)\left(\frac{1-\alpha}{n-1}\right)^2 d - s^4 \frac{n-1}{r_1^3} e_k^2 =$$

$$= -s^4 \left[ \frac{n-1}{r_1^3} e_k^2 + \alpha(n-\alpha)\left(\frac{1-\alpha}{n-1}\right)^2 \frac{d}{s^4} \right].$$

Можно предположить, что величина разности  $1-\alpha$  достаточно мала. Тогда в первом приближении

$$S_I \approx -s^4 \frac{n-1}{r_1^3} e_k^2. \quad (4.81)$$

При этом величина продольной сферической аберрации равна

$$\Delta s'_k = -\frac{n-1}{2r_1^3} s^4 e_k^2 \sigma'^2. \quad (4.82)$$

Из формулы (4.72) следует, что  $\delta z_N \approx -\frac{e_0^2}{2r_0} y^2$ . Но  $\frac{y}{r_0} \approx \varphi$ . Тогда

$$\delta z_N \approx -\frac{1}{2} e^2 r_0 \varphi^2. \quad (4.83)$$

Положив в формулах (4.82) и (4.83) углы  $\varphi$  и  $\sigma'$  равными друг другу, т.е., положив  $\varphi = \sigma'$ , при  $\Delta s'_k = \delta z_N$  получаем

$$s \approx c \sqrt[4]{-e_0^2 r_0}, \quad (4.84)$$

где  $c = \frac{r_1}{\sqrt[4]{(1-n)e_k^2 r_1}}$ .

Отсюда следует, что при неизменной конструкции компенсатора, изменяя лишь отрезок  $s$ , можно контролировать форму несферических поверхностей при изменении параметров  $e_0$  и  $r_0$  в некотором диапазоне изменения аберраций в изображении точки. Величина  $s$ , определяемая в первом приближении формулой (4.84), требует уточнения путем непосредственного расчёта в схеме, показанной на рис.4.33.

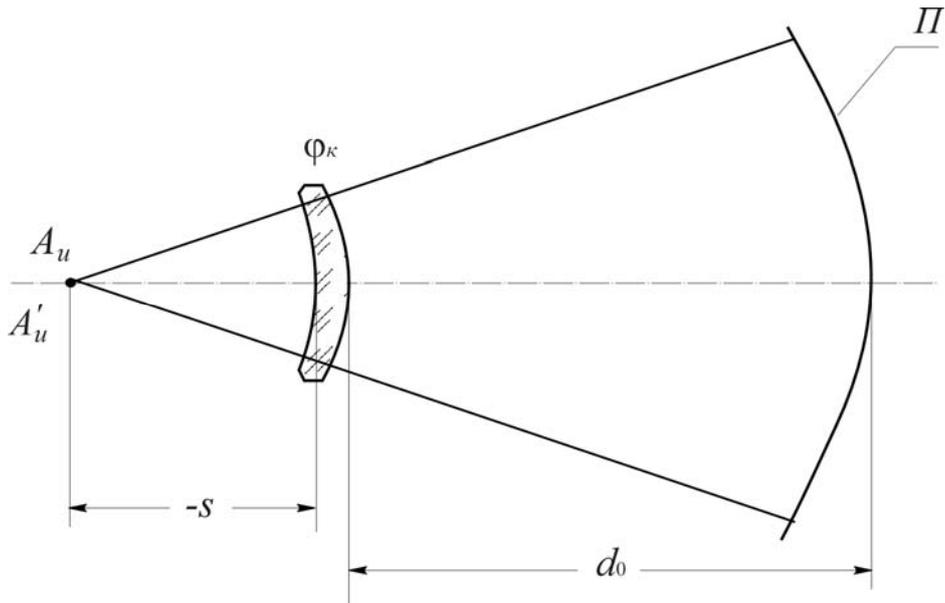


Рис.4.33. Схема применения менискового афокального компенсатора Пуряева

Вычислив значение отрезка  $s$ , можно определить расстояние  $s'_0$  от второй поверхности (выпуклой поверхности сферической формы) компенсатора до параксиального изображения осевой точки предмета (источника света).

Из условия  $\varphi = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} = 0$  при  $v = \frac{r_2}{r_1}$  находим, что  $r_1 = -\frac{n-1}{v-1} \frac{d}{n}$ . При этом, используя формулу  $\frac{n_{i+1}}{s'_i} - \frac{n_i}{s_i} = \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i}$ , при  $v = \frac{s'_1 s'_0}{s s_2}$  получаем, что

$$s'_0 = v^2 s - v \frac{d}{n}. \quad (4.85)$$

В соответствии с рис.4.33 расстояние

$$d_0 = s'_0 - r_0. \quad (4.86)$$

Для контроля отражающей поверхности параболоида телескопа БТА диаметром  $D_0 = 6$  м Д.Т. Пуряев предложил компенсатор рассматриваемой конструкции в виде одиночной менисковой линзы с вогнутой поверхностью, имеющей форму гиперболоида. Оптическая сила компенсатора равна нулю, а световой диаметр  $D_k = 166$  мм. Радиус кривизны в вершине вогнутой поверхности  $r_1 = -1200$  мм, а эксцентриситет образующей кривой  $\varepsilon = 8,637$ . Вторая (выпуклая) поверхность компенсатора имеет сферическую форму, радиус кривизны поверхности  $r_2 = -1207,8$  мм; толщина мениска  $d = 22,85$  мм; показатель преломления материала компенсатора при

длине волны излучения гелий-неонового лазера  $\lambda = 632,8$  нм равен  $n = 1,52278$  (стекло БФ1). Точечный источник света расположен на расстоянии  $s = -1200$  мм от вершины первой поверхности. Перемещая вдоль оптической оси источник света и компенсатор как единое целое относительно вершины контролируемого параболоида, совмещаем автоколлимационное изображение источника с самим источником; при этом получаем требуемое значение расстояния  $d_0 = 46769,132$  мм.

Компенсатор с указанными значениями конструктивных параметров можно применить для контроля поверхностей, имеющих форму эллипсоида, параболоида и гиперболоида, параметры которых приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Параметры схемы контроля поверхностей, имеющих форму эллипсоида, параболоида и гиперболоида, с помощью однолинзового компенсатора

$D_0$ мм	$r_0$ мм	$2A$	$e_0$	$-s$ мм	$d_0$ мм	$D_k$ мм	$W_{\text{ост}}$
270	579,19	1:1,07	0,409732	254,52	306,2	132	$\pm 0,02$
400	1600,0	1:2	0,843001	478,12	1100,5	127	$\pm 0,2$
800	3200,0	1:2	0,6	479,22	2699,4	127	$\pm 0,15$
600	3600,0	1:3	0,7	529,55	3049,4	93	$\pm 0,025$
6000	48000,0	1:4	1,0	1200	46769,1	166	$< 0,13$
400	2793,34	1:3,49	1,574802	747,82	2020,6	113	$\pm 0,06$

Здесь  $W_{\text{ост}}$  – остаточная величина волновой аберрации в изображении точечного источника света,  $2A$  – относительное отверстие контролируемой поверхности:  $2A = 2 \frac{D_0}{r_0}$ . Из приведенных

в таблице данных следует, что однолинзовый компенсатор имеет весьма широкий диапазон применения.

**Двухлинзовый компенсатор.** В случае применения стекол различных марок (с различающимися показателями преломления) в качестве материала линз компенсатора оказалось возможным исключить апланатический мениск из конструкции трёхлинзового компенсатора. В результате получен компенсатор из двух положительных линз 1 и 2, как показано на рис.4.34, с воздушным промежутком между ними.

Линза 1 – мениск, радиусы которого одинаковы. Линза 2 – двояковыпуклая. Данный вариант конструкции компенсатора разработан для контроля формы отражающей поверхности

параболоида, определяемого уравнением  $x^2 + y^2 = 96000z$  и имеющего диаметр  $D_0 = 6200$  мм. В качестве материала мениска было выбрано стекло ЛК1, а в качестве материала линзы 2 – стекло ТФ10, при этом линза 2 была рассчитана на минимальную сферическую aberrацию при поперечном увеличении  $V = -2,3^{\times}$ .

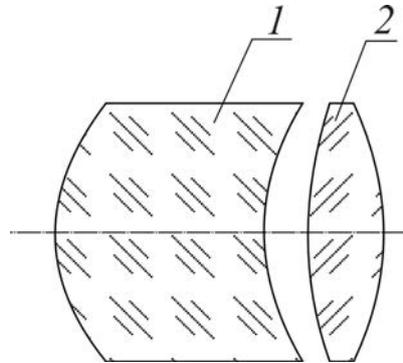


Рис.4.34. Оптическая схема универсального двухлинзового компенсатора Пуряева

Параметры компенсатора, рассчитанного для длины волны  $\lambda = 632,8$  нм, имеют следующие значения:

$$\begin{array}{lll}
 n_1 = 1 & & \\
 r_1 = 192,31 & & \\
 d_1 = 141,85 & n_2 = 1,43850 \text{ (ЛК5)} & \\
 r_2 = 192,31 & & \\
 d_2 = 22,04 & n_3 = 1 & \\
 r_3 = 968,3 & & \\
 d_3 = 20 & n_4 = 1,79992 \text{ (ТФ10)} & \\
 r_4 = -354,8 & & \\
 n_5 = 1 & & 
 \end{array}$$

Компенсатор относится к типу зафокальных, т.е., расположенных слева от центра кривизны  $C_0$  в вершине отражающего параболоида  $\Pi$ , как показано на рис.4.35.

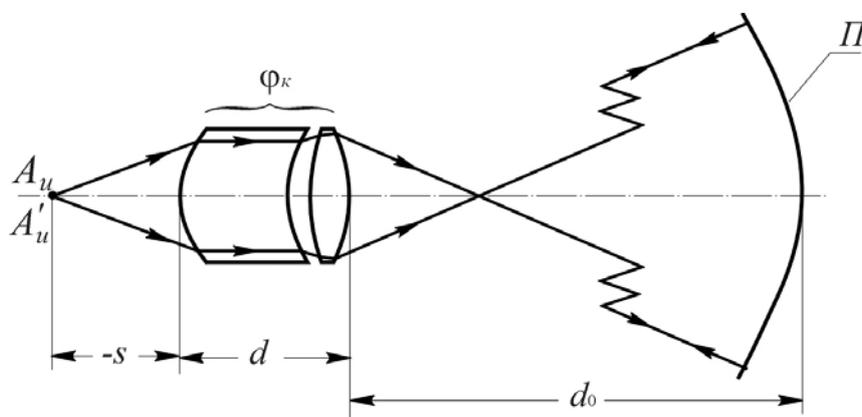


Рис.4.35. Схема применения универсального компенсатора Пуряева

Расстояние от первой поверхности компенсатора до источника света  $A_n$  равно  $s = -483,56$  мм; расстояние от последней поверхности компенсатора до вершины контролируемой поверхности параболоида  $d_0 = 49075,98$  мм. Диаметр обеих линз компенсатора не превышает 128 мм. Входная апертура компенсатора  $\sin\sigma = 0,136$ . Остаточные волновые aberrации компенсатора не превышают 0,14 мкм при двойном ходе лучей через компенсатор.

Двухлинзовый компенсатор рассматриваемой конструкции может быть применен не только при длине волны излучения гелий-неонового лазера ( $\lambda = 632,8$  нм), но и с такими источниками света, как натриевая и ртутная лампы, излучающие квазимонохроматический свет со средними длинами волн 589,3 нм и 546,1 нм соответственно. Это достигается изменением только одного параметра – воздушного промежутка между линзами.

Важной особенностью компенсатора рассматриваемой конструкции является то, что он применим на различных стадиях полировки контролируемой поверхности от сферической формы до идеального параболоида. Возможность такого применения достигается одновременным продольным перемещением источника света  $A_n$  относительно компенсатора и изменением воздушного промежутка между компенсатором и обрабатываемой поверхностью.

## 5. МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Развитие методов испытания оптических систем исторически шло параллельно с развитием оптических инструментов. Очковые линзы контролировались вполне естественным способом – через них просто глядели. Однако глаз человека, обладающий удивительной чувствительностью и рядом других замечательных свойств, мало пригоден для непосредственного контроля качества линз именно благодаря своим удивительным свойствам. Действительно, оконные стекла, отклонения поверхностей которых от плоскостей в оптическом смысле недопустимы, дают такие искажения в изображении предмета, которые трудно даже оценить. И, тем не менее, предметы через оконные стекла видны отчетливо и без заметных искажений. Это определяется не только малой апертурой зрачка глаза, но и тем, что физиологическая реакция зрения часто дополняется и изменяется некоторыми психологическими факторами. Оптическую систему нормального (здорового) глаза нельзя считать совершенной. Однако этого никто не замечает. Изображения предметов составлены из изображений множества светящихся точек, прилегающих друг к другу и образующих предмет. И если изображения точек оптически несовершенны, то всё же для зрения преимущественное значение имеют освещённости их центральных точек, заметно не изменяемые наложением добавочного света от соседних точек.

Столь простые испытания очковых линз были достаточны для той цели, которой они служили. Поэтому не было необходимости улучшать методы обработки и исследования линз вплоть до начала XVII века.

В ночь на 7 января 1610 года Г. Галилей впервые направил созданный им телескоп на звездное небо. Эта дата считается в науке началом эпохи телескопических наблюдений. Именно в этот момент, сам того не сознавая, Галилей впервые подверг оптическую систему более чувствительному испытанию, чем то, которое производилось путем простого рассматривания пейзажа. И он, конечно, сразу же обнаружил низкое качество изготовления очковых линз, из которых и был построен первый телескоп. Таким образом, по праву можно считать, что Галилей практически первым применил метод испытания линз по звезде. Этот метод очень чувствителен. Несмотря на многовековую давность, он часто применяется и в настоящее время.

Заметим, что изображение светящейся точки, образованное безаберрационной оптической системой, имеет вид маленького диска, окаймлённого рядом колец, причём тёмные кольца имеют радиус, определяемый формулой:

$$r' = \frac{k_d \lambda}{2A'}, \quad (5.1)$$

где  $\lambda$  – длина волны света;  $A' = n' \sin \sigma'$  – задняя числовая апертура светового пучка лучей, формирующего изображение;  $k_d$  – числовая постоянная, значения которой приведены в табл.5.1.

Таблица 5.1. Значения постоянной  $k_d$  при круглой форме светового пучка лучей

Номер кольца по порядку	$k_d$	Относительная величина светового потока вне тёмного кольца
1	1,220	0,161
2	2,233	0,090
3	3,238	0,062
4	4,241	0,048
5	5,243	0,039
6	6,244	0,032

Радиусы светлых колец определяются той же формулой (5.1) при  $k = k_e$ , где  $k_e$  – числовая постоянная, значения которой приведены в табл.5.2.

Таблица 5.2. Значения постоянной  $k_e$  при круглой форме светового пучка лучей

Номер кольца по порядку	$k_e$	Относительная величина максимальной освещённости	Относительная величина распространения светового потока
1	0	1	0,839
2	1,638	0,01745	0,071
3	2,692	0,00415	0,028
4	3,716	0,00165	0,015
5	4,724	0,00078	0,009
6	5,724	0,00043	0,006

Относительное распределение освещённости в дифракционном изображении точки при круглой форме светового пучка лучей определяется формулой:  $\tilde{E}_0 = \left[ \frac{2J_1(kA'\rho r')}{kA'\rho r'} \right]$ , где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $0 \leq \rho \leq 1$ . При

этом вид распределения освещённости в дифракционном пятне рассеяния показан на рис.5.1.

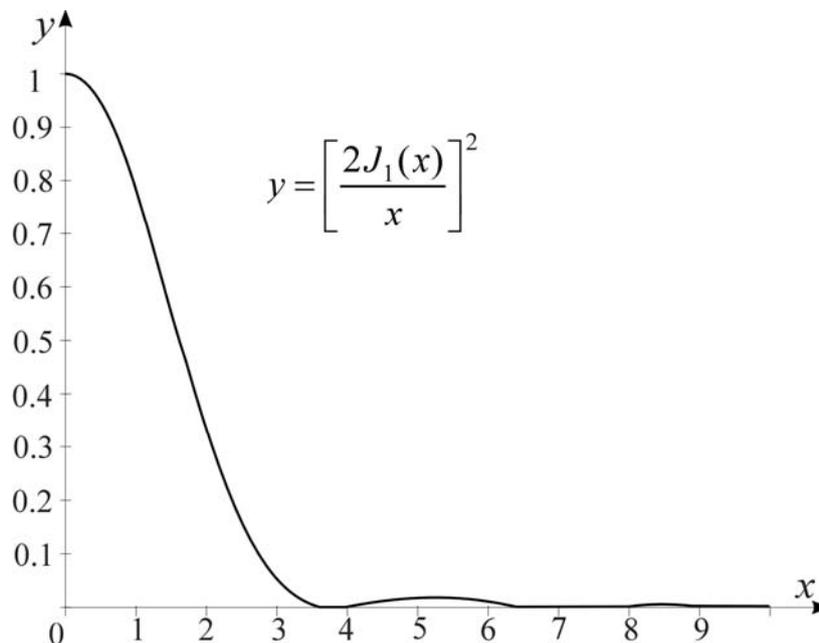


Рис.5.1. Дифракционное изображение осевой точки при круглом отверстии

Не останавливаясь на том, что сделал Г. Галилей для усовершенствования способов обработки стекол, отметим тот несомненный факт, что в короткий срок практическая оптика достигла удивительных успехов, и уже в 1646 году, т.е. спустя всего 36 лет после изобретения телескопа, Э. Торричелли изготовил линзу, хранящуюся в настоящее время во Флоренции в музее древних инструментов, поверхности которой сравнимы по качеству с лучшими поверхностями современных линз.

Метод контроля по звезде (по изображению точки), который будем называть методом Галилея, предельно прост и может служить для аттестации оптической системы телескопа. Однако этот метод, как правило, не позволяет определить местоположение дефектов обработки и оценить их величину, что является самым важным при исследовании и изготовлении оптических систем. Прошло два с половиной столетия, прежде чем были найдены другие необходимые для этого методы. Принципиально новые соображения об испытании оптических систем появились в классических мемуарах Л. Фуко в 1859 году. В них он излагает три метода исследования оптических систем.

Первый из описываемых методов сводится к наблюдению изображения точки. Вполне очевидно, что лучи, отражённые сферической поверхностью по нормали к нему, формируют идеальное

изображение центра кривизны поверхности, в котором естественно расположить точечный излучатель. Вблизи этой точки расположено множество оптически сопряжённых точек, которые практически обладают тем же свойством.

Предположим, что светящаяся точка расположена около центра кривизны сферической поверхности. Её изображение, расположенное с другой стороны от центра кривизны, будем рассматривать с помощью сильной лупы или слабого микроскопа. Если форма поверхности совершенна, то изображение точки будет иметь вид яркого центрального диска, окружённого дифракционными кольцами, из которых практически видно лишь первое. При малых осесимметричных отклонениях формы поверхности от идеальной становятся видимыми и последующие кольца. Заметим, что такое изменение дифракционной картины в изображении точки весьма чувствительно к изменению формы поверхности. При перемещении плоскости наблюдения идеального изображения точки (при расфокусировке изображения точки) вдоль осевой нормали к исследуемой поверхности в любом направлении относительно её центра кривизны будет наблюдаться одинаковое превращение дифракционного изображения точки в равномерно освещённый круг.

Если изображение точки оказывается размытым, но при перемещении плоскости наблюдения светлое пятно остаётся круглым, то можно сделать вывод о том, что поверхность зеркала, не будучи сферической, всё же остаётся поверхностью вращения, при этом деформации формы поверхности имеют завальный характер. Концентрации света в виде колец на светлом фоне круга свидетельствуют об изменениях радиуса кривизны в соответствующих зонах отражающей поверхности, причём нетрудно разобраться в знаке изменения радиусов.

Заметим, что характер изменения распределения освещённости в световом пятне при смещении плоскости наблюдения изображения точки может много рассказать специалисту о реальной форме поверхности. Однако, если требуется устранить обнаруженные отклонения формы поверхности от сферической, для этого необходимо получить более точные, количественные сведения о них.

В области, близкой к центру кривизны поверхности зеркала, расположим точечный источник света, формирующий световой пучок лучей, покрывающий сферическое зеркало. Между зеркалом и точечным источником света вблизи последнего расположим две прямые, например, две тонкие нити, изображения которых,

образованные зеркалом, из изображения точечного источника света будут видны на фоне светлого круга зеркала. Если наблюдаемые при этом линии будут искривлены, то величина искривления будет определяться двойным углом отклонения нормали к поверхности зеркала от номинального положения в той зоне поверхности, на фоне которой видны линии. Вполне очевидно, что, перемещая линии в направлении к зеркалу и от него, можем проконтролировать поверхность (за исключением центральной части, где деформация поверхности, как правило, отсутствует). "Если желательно наблюдать сразу всё зеркало, – пишет Л. Фуко в своих мемуарах, – то в качестве предмета, который служил бы для обнаружения дефектов, лучше всего взять правильную решётку с квадратными ячейками, потому что изображение такой решётки чувствительнейшим образом отражает деформацию каждой области поверхности. Предположим, как это чаще всего бывает, что зеркало, которое является сферически точным в центральной своей части, распрямляется к краям. Подвергнутое второму методу испытания, такое зеркало даёт изображение, в котором все линии искривлены выпуклостью внутрь, как показано на рис.5.2а. Отсюда следует, что клетки становятся всё более широкими в направлении к краю изображения в зависимости от изменения радиуса кривизны соответствующих элементов поверхности.

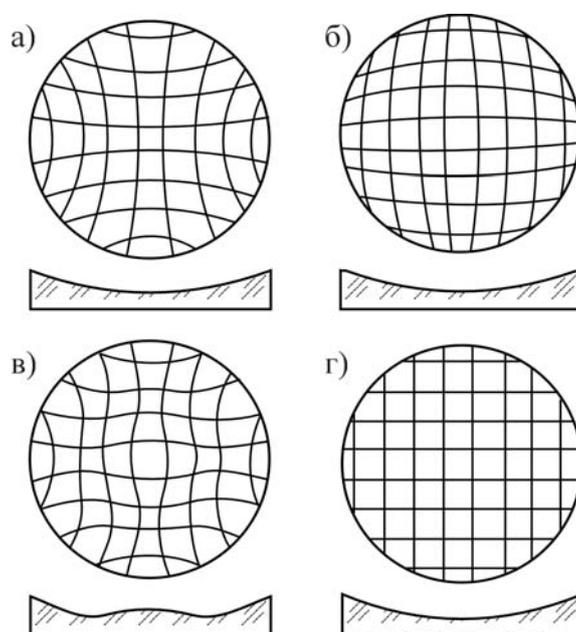


Рис.5.2. Искажения изображений решётки Фуко при контроле отражающей сферической поверхности в автоколлимационной схеме

Обратная деформация зеркала, заключающаяся в загибе краёв, ведет к кривизне линий, направленной в другую сторону (рис.5.2б). В

этом случае размеры ячеек уменьшаются по мере приближения к периферии. Наконец, очень часто случается, что средняя часть зеркала несколько поднята в пределах некоторого круга, а края зеркала загнуты. Тогда радиус кривизны меняется последовательно двумя способами, начиная от центра; эта особенность очень отчетливо проявляется синусообразным искажением рассматриваемых линий (рис.5.2в), расположение которых обуславливает соответственное изменение размеров ячеек, образованных пересечениями линий. На рис.5.2 представлены наблюдаемые изображения и соответствующие им преувеличенно искаженные профили деформированных поверхностей.

Этот второй способ изучения оптических систем даёт очень надежные указания и допускает наиболее легкую интерпретацию; его недостатком является малая чувствительность; даже в том случае, когда линии решётки кажутся достаточно прямолинейными (рис.5.2г), нельзя быть уверенным в том, что мы имеем дело с совершенно точной поверхностью, способной удовлетворить третьему и последнему испытанию".

Третий метод контроля деформации поверхности (деформации волнового фронта), представляющий собой своеобразный метод последовательной визуализации структуры светового пучка лучей, сохранился до наших дней под названием "метод Фуко", "теневого метод" или "метод ножа", и достаточно широко применяется при обработке точных оптических поверхностей.

### **5.1. Теневой метод Фуко**

Успех выполнения операции полирования оптических поверхностей и, прежде всего, таких как астрономические зеркала, определяется возможностью оперативного контроля формы обрабатываемой поверхности. Наиболее известным и распространенным методом контроля является теневой метод Фуко. Суть метода состоит в следующем.

Пусть некоторая оптическая система  $\phi$  (такой системой может быть и отражающая поверхность сферического зеркала) образует дифракционное (безаберрационное) изображение  $A'$  осевой точки предмета, как показано на рис.5.3а. Будем считать, что в плоскости, проходящей через точку  $A'$  перпендикулярно к оптической оси, расположен плоский экран с прямолинейной границей. Таким экраном может быть лезвие ножа, называемое ножом Фуко. Будем перемещать нож Фуко в плоскости в направлении оптической оси.

Заметим, что световое возмущение в каждой точке дифракционного пятна рассеяния (дифракционного изображения точки) определяется сложением световых возмущений из всех точек волнового фронта, приходящих со своей фазой колебания. Наблюдатель, глаз которого расположен за плоскостью перемещения ножа вблизи изображения точки, видит светлый круг исследуемой оптической системы. При введении ножа в дифракционное изображение точки последовательно перекрывается пятно рассеяния, при этом наблюдается постепенное и равномерное гашение света в пределах всего светового пучка лучей одновременно. Из-за физиологической особенности восприятия света глазом в зависимости от освещённости наблюдатель не ощущает начала и конца гашения света в световом пучке лучей и воспринимает его практически "мгновенным".

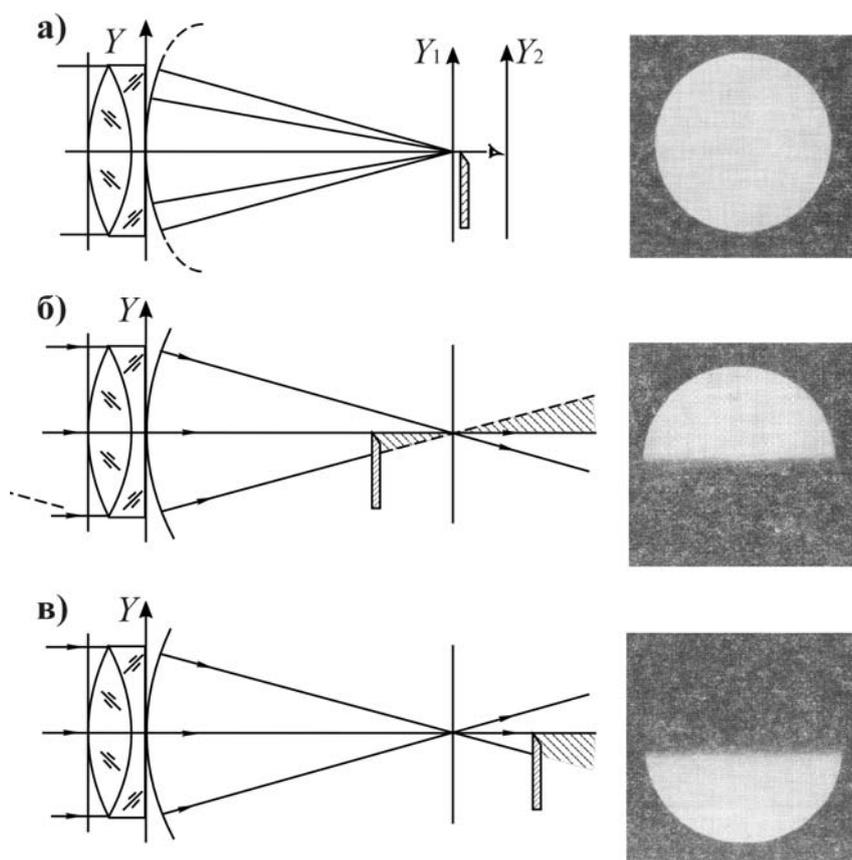


Рис.5.3. Контроль высококачественных линз методом ножа Фуко

Если перемещать нож в плоскости, расположенной между оптической системой  $\phi$  и дифракционным изображением точки, то будет наблюдаться достаточно резкая тень, наползающая на светлый круг снизу и, в конечном счёте, перекрывающая его. В этом случае наблюдаем предфокальную теневую картину (рис.5.3б). Если перемещать нож в плоскости, расположенной за плоскостью дифракционного изображения точки, то будем наблюдать достаточно

резкую тень, наползающую на светлый круг сверху вниз, – зафокальную теневую картину (рис.5.3в).

В общем случае световой пучок лучей, образующий изображение точки, негомоцентричен, т.е., точки пересечения лучей с плоскостью изображения образуют некоторое множество (образуют абберационное пятно рассеяния). В этом случае при перемещении ножа Фуко в направлении к оптической оси нарушается последовательность пересечения ножом лучей, характерная для гомоцентрического пучка, и на фоне светлого поля наблюдаются тёмные пятна, а на тёмном фоне – светлые, как показано на рис.5.4.

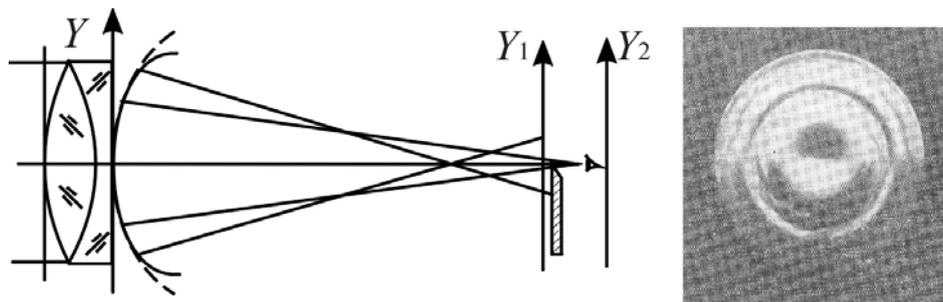


Рис.5.4. Контроль линзы методом ножа Фуко

Схема контроля вогнутой поверхности сферического зеркала с помощью теневого метода Фуко показана на рис.5.5.

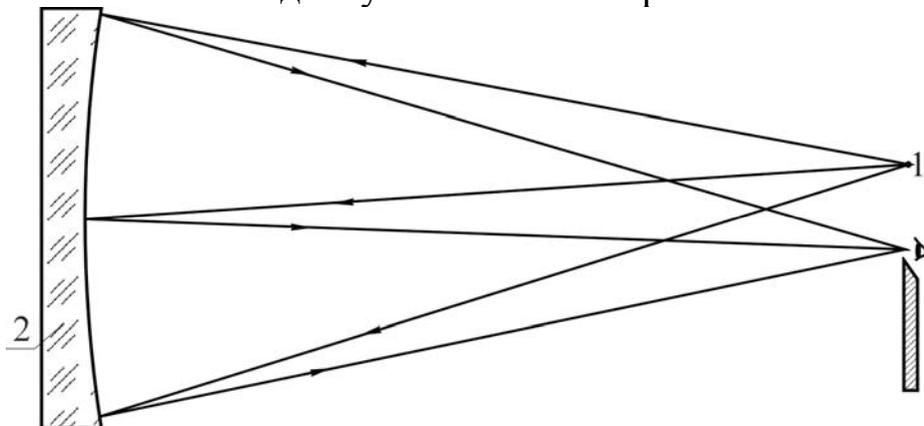


Рис.5.5. Установка для контроля вогнутого зеркала: 1 – источник света; 2 – зеркало

Вполне очевидно, что контроль формы несферических поверхностей с помощью теневого метода можно осуществить в схеме с компенсатором. В теновом методе Фуко вместо точечного источника света можно использовать освещённую щель, как показано на рис.5.6а,б,в, что позволяет существенно повысить освещённость наблюдаемой картины. Однако в этом случае необходимо, чтобы щель и нож были ориентированы строго параллельно друг другу. Необходимость такой достаточно сложной в осуществлении

процедуры отпадает, если воспользоваться устройством, изображённым на рис.5.6г.

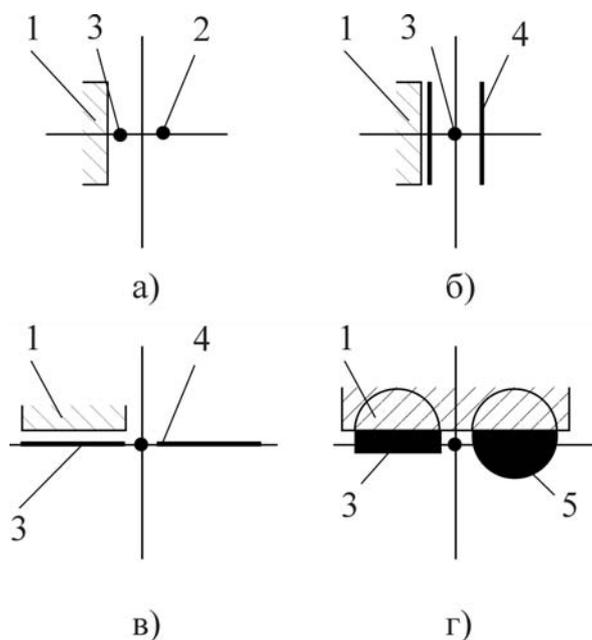


Рис.5.6. Различные устройства источника света и ножа: 1 – нож; 2 – точечный источник; 3 – изображение источника; 4 – светящаяся щель; 5 – протяжённый источник, покрытый ножом

На рис.5.7 и на рис.5.8 показан прибор для контроля отклонения формы волнового фронта от сферы теневым методом Фуко, смонтированный на каретке, которая может перемещаться параллельно оптической оси и перпендикулярно к ней в горизонтальном направлении в любую сторону, вверх и вниз.

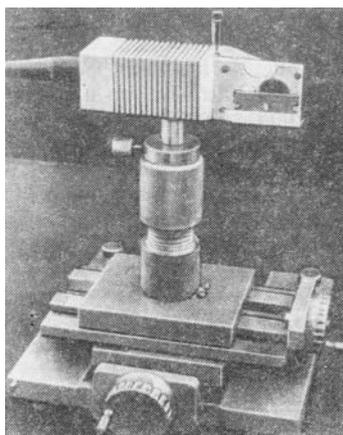


Рис.5.7. Общий вид прибора для контроля по методу ножа Фуко

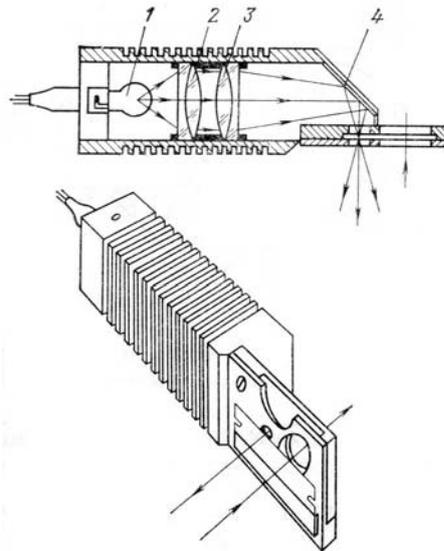


Рис.5.8. Схема устройства для контроля по методу ножа Фуко: 1 – лампа; 2 – линза 1; 3 – линза 2; 4 – зеркало

Итак, в результате контроля теневым методом Фуко удаётся установить сам факт нарушения гомоцентричности пучка световых лучей (отклонения формы волнового фронта от сферы) и определить место положения этого отклонения. Однако, для определения величины отклонения формы волнового фронта от сферы этот метод мало пригоден, поэтому время от времени предпринимались попытки его усовершенствовать, в результате чего появлялись различные его модификации.

## 5.2. Метод нити

На рис.5.9 показаны следы некоторых лучей в сечении светового пучка меридиональной плоскостью.

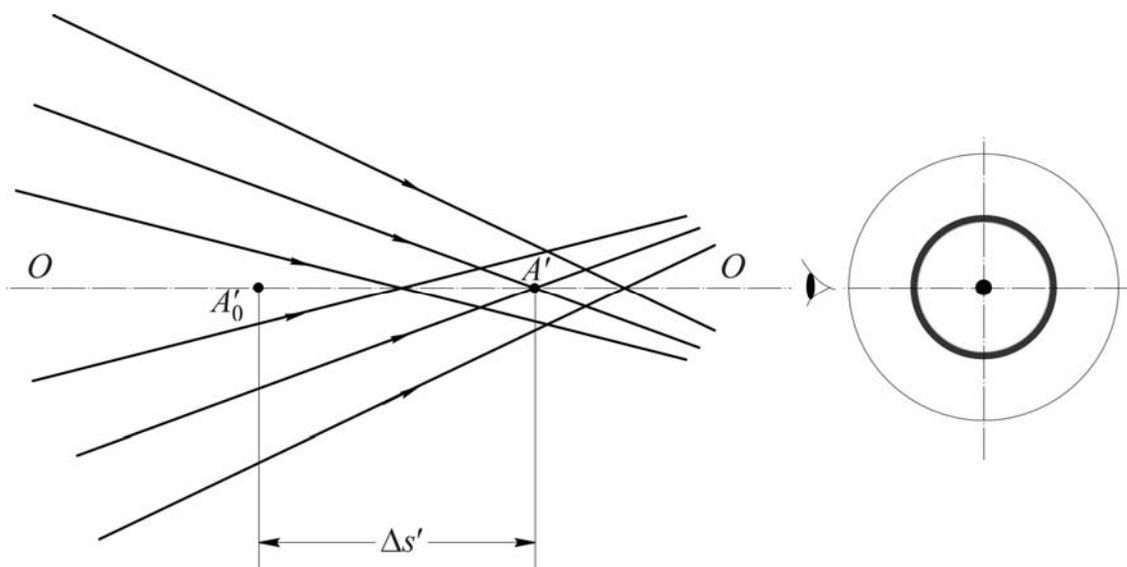


Рис.5.9. Схема контроля при экранировании лучей малым экраном

Из рисунка следует, что если в параксиальном изображении  $A'_0$  осевой точки поместить маленький экран, который назовем точечным, то наблюдатель увидит тень от него малой величины в центральной зоне светового пучка лучей. Если переместить его вдоль оптической оси в точку  $A'$ , то вполне очевидно, что малой величины тень в центральной зоне останется, но при этом будет перекрыта зональная часть пучка. Заметим, что расстояние  $A'_0A'$  определяет продольную величину смещения точки пересечения с оптической осью лучей зональной части пучка относительно параксиального изображения точки, находим угол  $\sigma'$ , образованный рассматриваемым лучом с оптической осью. Обозначим  $A'_0A' = \Delta s'$ . Тогда отклонение волнового фронта от сферы (волновая аберрация) определяется выражением:

$$W = \int_0^{\sigma'_0} \Delta s' \sin \sigma' d\sigma'. \quad (5.2)$$

При контроле отражающих поверхностей отклонение волнового фронта от номинальной формы равно удвоенной величине отклонения формы поверхности.

В реальной схеме контроля вместо точечного экрана применяют нить, которая видна наблюдателю в виде линии вдоль диаметра светового круга, пересекающей зональную тень от перекрытых лучей, как показано на рис.5.10.

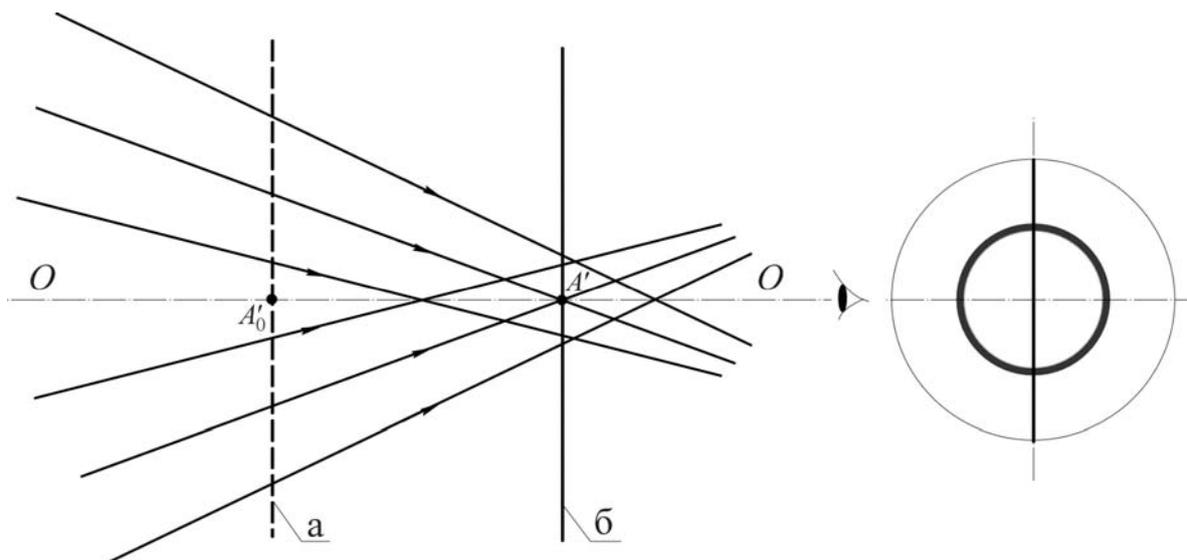


Рис.5.10. Схема контроля методом нити: а – положение нити в плоскости параксиального изображения; б – положение нити в плоскости, пересекающей оптическую ось в точке  $A'$

Из изложенных соображений следует, что метод нити достаточно удобен и информативен при осесимметричной структуре светового пучка лучей. Однако, как правило, довольно часто приходится иметь дело с контролем поверхностей, когда далеко не все лучи пересекают оптическую ось. В этом случае легко внести погрешность в результаты контроля.

### 5.3. Метод Гартмана

И. Гартман в 1904 году опубликовал описание разработанного им количественного метода исследования объективов по звезде. Суть метода заключается в применении экрана с рядом отверстий, симметрично расположенных по зонам объектива. Такой экран называется диафрагмой Гартмана. Диафрагму располагают перед объективом (при исследовании качества изображения, образованного объективом телескопа, – на верхнем конце трубы) и делают два снимка яркой звезды: один при положении П фотопластинки перед фокальной плоскостью объектива (предфокальный снимок), а второй – в положении З за нею (зафокальный снимок), как показано на рис.5.11. Расстояние от произвольно выбранного на оптической оси

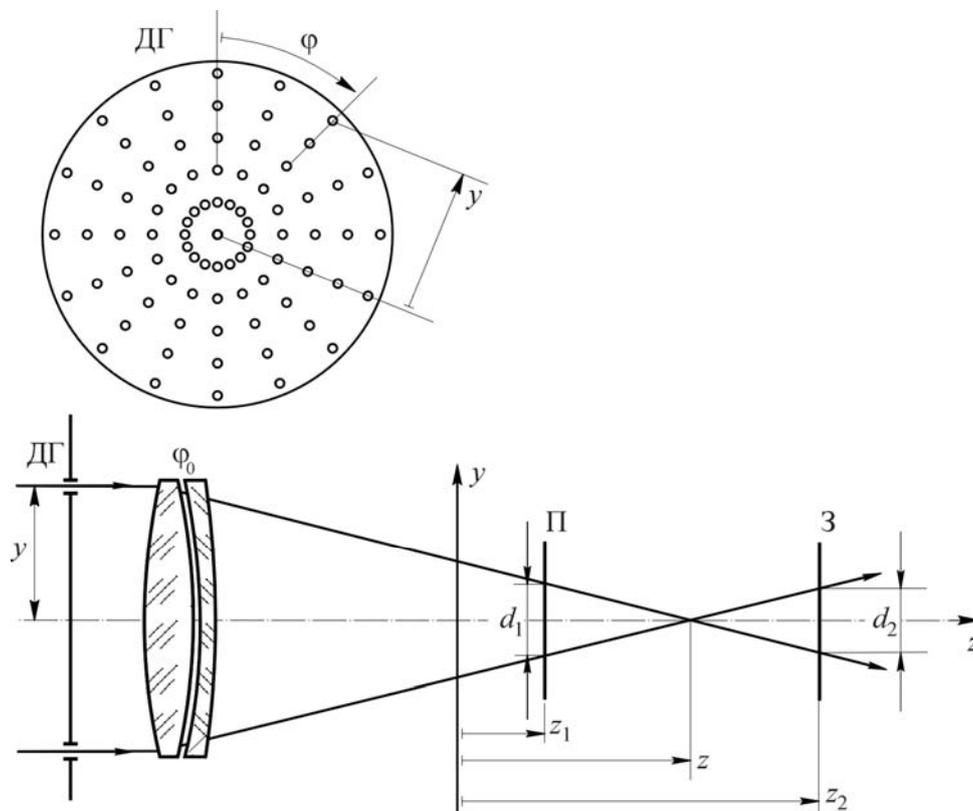


Рис.5.11. Схема метода Гартмана: ДГ – диафрагма Гартмана,  $\phi_0$  – испытуемый объектив; П – предфокальное и зафокальное положения фотопластинки

объектива начала системы координат  $x, y, z$  до плоскости П обозначим через  $z_1$ , а до плоскости З – через  $z_2$ . Расстояние  $z_2 - z_1$  должно быть точно измерено.

Световые лучи от звезды пройдут через отверстия диафрагмы и узкие пучки лучей при фотографировании оставят на фотоснимке следы от диафрагмы Гартмана в виде пятен (светлых на позитиве), как показано на рис.5.12.

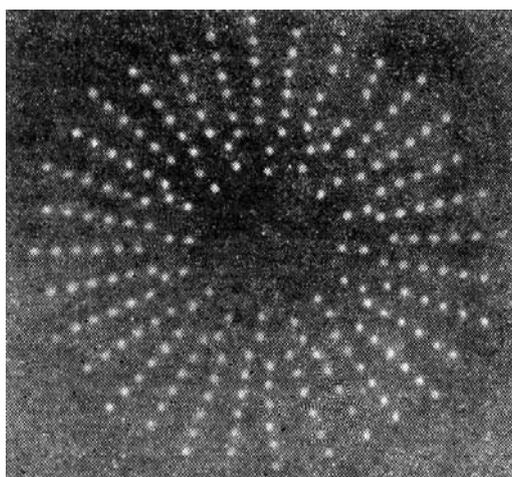


Рис.5.12. Вид гартманограммы

Измерив расстояния  $d_1$  и  $d_2$  между следами, соответствующими симметричным отверстиям диафрагмы, расположенным на расстоянии  $y$  от оптической оси объектива, находим, что положение фокальной плоскости для этой зоны равно:

$$z(y) = z_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} (z_2 - z_1). \quad (5.3)$$

Значения координаты  $z$  для ряда зон  $y$  объектива определяют зависимость  $z(y)$ , описывающую сферическую aberrацию объектива. Для отверстий, расположенных вдоль разных диаметров диафрагмы Гартмана, эта зависимость может быть различной, что указывает на наличие осевого астигматизма. Среднее положение фокуса для всего объектива определится выражением:

$$z_{\text{cp}} = \frac{\sum y z(y)}{\sum y}. \quad (5.4)$$

При этом величина поперечной расфокусировки изображения бесконечно удалённой точки (звезды) относительно среднего положения фокальной плоскости равна

$$\delta g'(y) = \frac{y}{f'} [z(y) - z_{\text{cp}}]. \quad (5.5)$$

Тогда средняя величина радиуса пятна рассеяния в изображении точки определится выражением

$$\delta q'_{\text{cp}} = \frac{1}{f'} \frac{\sum y^2 [z(y) - z_{\text{cp}}]}{\sum y}. \quad (5.6)$$

Полагая в радианной мере  $1'' \approx 0,000005$ , получаем, что угловая величина среднего радиуса пятна рассеяния в изображении точки равна

$$T = \frac{200000}{f'^2} \frac{\sum y^2 [z(y) - z_{\text{cp}}]}{\sum y}. \quad (5.7)$$

Величина  $T$ , введенная Г. Леманом, называется технической постоянной или постоянной Гартмана объектива. При этом диаметр изображения звезды, взвешенный по зонам и выраженный в секундах дуги, в средней плоскости равен

$$2\rho = 2T.$$

Было принято считать объектив первоклассным, если  $T < 0,5$ , хорошим, если  $T < 1,5$ , и удовлетворительным, если  $T < 2,5$ . В настоящее время к качеству изображения, образованному объективом астрономического телескопа, предъявляются гораздо более жёсткие требования.

Диаметр отверстия диафрагмы Гартмана и положение фотопластинок относительно фокальной плоскости должны быть выбраны такими, чтобы, с одной стороны, световые пятна на фотопластинках не сливались, а с другой, – чтобы размер их, определяемый расфокусировкой изображения точки и дифракцией, был бы не слишком велик. М.Ф. Романова (Труды ГОИ, вып.35, с.1, 1927) рекомендует применять отверстия диаметром  $d = 0,002f'$ , располагая их на расстояниях  $l \geq 0,005f'$  друг от друга, а предфокальный и зафокальный снимки выполнять на удалениях от фокальной плоскости, соответственно, равных

$$z - z_1 = \frac{L}{\frac{2\pi l}{15 \cdot 10^3 \lambda} \frac{f'}{L} + 1}, \quad z - z_2 = \frac{L}{\frac{2\pi l}{15 \cdot 10^3 \lambda} \frac{f'}{L} - 1},$$

где  $L$  – расстояние от диафрагмы до фокуса.

В основу определения положения плоскости фотосъемки в схеме контроля методом Гартмана могут быть положены следующие соображения. Пусть расстояние от диафрагмы Гартмана до плоскости изображения, образованного исследуемой системой, равно  $L$ . Тогда при смещении плоскости фотосъемки относительно плоскости

изображения на расстояние  $\Delta$  расфокусировка изображения точки в волновой мере равна

$$\frac{W}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\lambda} \sigma'^2 = \frac{1}{8} \frac{\Delta}{\lambda} \frac{D_k^2}{L^2}. \quad (5.8)$$

Пусть  $\frac{W}{\lambda} = k$ . При этом

$$\Delta = 8k\lambda \frac{L^2}{D_k^2}. \quad (5.9)$$

Из геометрических соотношений имеем

$$\frac{l}{L} = \frac{\tilde{l}}{\Delta},$$

где  $\tilde{l}$  – расстояние между центрами пятен на гартманограмме (фотоснимке следов лучей от диаграммы Гартмана).

Учитывая соотношение (5.9), находим, что

$$\tilde{l} = \frac{l}{L} \Delta = \frac{8k\lambda l L}{D_k^2}. \quad (5.10)$$

Диаметр первого тёмного кольца в дифракционном изображении точки на гартманограмме определяется выражением

$$d_g = \frac{2,44\lambda}{D_k} (L \pm \Delta) \approx \frac{2,44\lambda}{D_k} L. \quad (5.11)$$

Используя соотношения (5.10) и (5.11), имеем

$$\frac{\tilde{l}}{d_g} = \frac{8kl}{2,44D_k}. \quad (5.12)$$

При  $k = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ :  $\frac{l}{D_k} \geq (0,61 \div 1,22) \frac{\tilde{l}}{d_g}$ , при этом должны соблюдаться очевидные условия:  $\frac{l}{D_k} > 1$  и  $\frac{\tilde{l}}{d_g} > 1$ .

В соответствии с выражением (5.9) при  $k = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$  имеем

$$\Delta = \frac{D_{ГГ}}{D_{Г}} L \leq (2 \div 4) \frac{L^2}{D_k^2} \lambda, \quad (5.13)$$

где  $D_{ГГ}$  – диаметр гартманограммы;  $D_{Г}$  – диаметр диафрагмы Гартмана.

Атмосферные волнения приводят к тому, что внефокальные изображения точки (пятна на гартманограмме) непрерывно и по-

разному смещаются. Если время экспозиции будет коротким, то положение каждого пятна на негативе будет определяться случайным влиянием атмосферы. Чтобы устранить (осреднить) её влияние, время экспозиции не должно быть менее 20 секунд.

Вполне очевидно, что метод Гартмана применим не только для исследования aberrаций объективов, но и формы обрабатываемых (полируемых) поверхностей оптических деталей. Однако в изложенном виде этот метод применим лишь в тех случаях, когда отклонения формы волнового фронта симметричны относительно оптической оси, чего, как правило, не бывает. Всегда имеются местные деформации волнового фронта, нарушающие симметрию пучка световых лучей. Рассмотрим возможный вариант последовательности выполнения измерений и обработки результатов измерений.

Пусть  $A_{i1}$  и  $A_{j1}$  – следы диаметрально противоположных отверстий диафрагмы Гартмана на первом (предфокусном) снимке, а  $A_{i2}$  и  $A_{j2}$  – следы тех же отверстий на втором (зафокальном) снимке, как показано на рис.5.13.

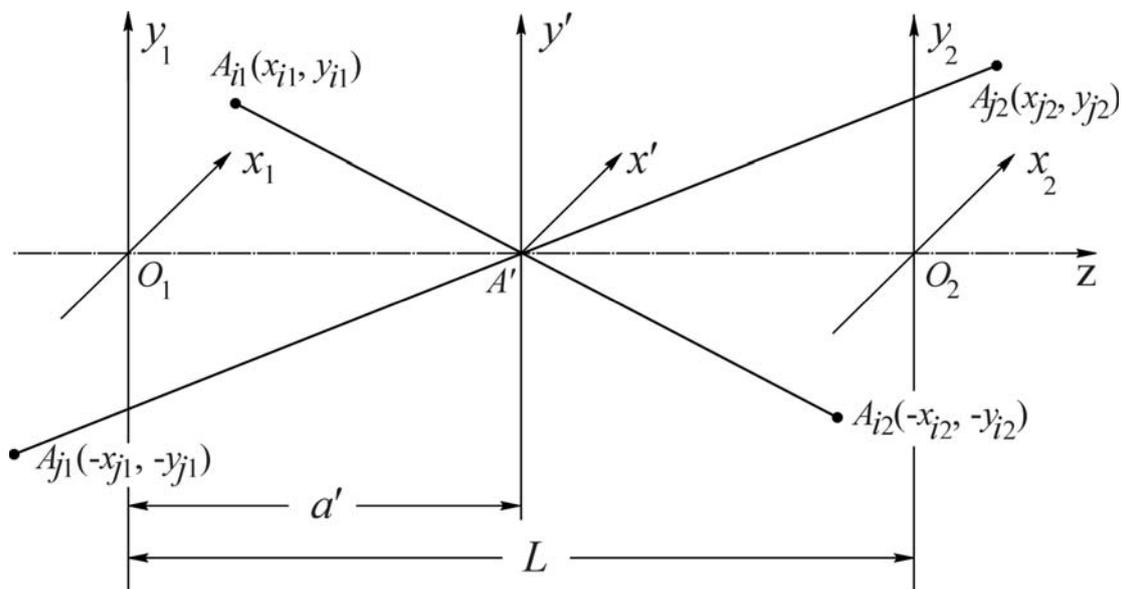


Рис.5.13. Координаты лучей на предфокальном и зафокальном снимках

Будем считать, что в системе координат  $x_1O_1y_1$  координаты точки  $A_{i1}$  равны:

$$x_{iO_1} = \frac{x_{i1} - x_{j1}}{2}, \quad y_{iO_1} = \frac{y_{i1} - y_{j1}}{2},$$

при этом  $d_1 = A_{i1}A_{j1} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (y_{i1} - y_{j1})^2}$ .

Для точки  $A_{j2}$  в системе координат  $x_2O_2y_2$ , соответственно, имеем

$$x_{jO_2} = \frac{x_{j2} - x_{i2}}{2}, \quad y_{jO_2} = \frac{y_{j2} - y_{i2}}{2},$$

при этом  $d_1 = A_{j2}A_{i2} = \sqrt{(x_{j2} - x_{i2})^2 + (y_{j2} - y_{i2})^2}$ .

Естественно принять, например, что  $x_i = x_j = 0$ . Тогда

$$y_{iO_1} = \frac{y_{i1} - y_{j1}}{2}, \quad (5.14)$$

где  $y_{iO_1} - y_{jO_1} = d_1$ , при этом  $y_{jO_1} = y_{iO_1} - d_1$ ;

$$y_{jO_2} = \frac{y_{j2} - y_{i2}}{2}, \quad (5.15)$$

где  $y_{iO_2} - y_{jO_2} = d_2$ , при этом  $y_{jO_2} = y_{iO_2} - d_2$ .

Кроме того, в соответствии с рисунком расстояние от предфокального положения фотопластинки до плоскости изображения  $\Phi$  (фокальной плоскости), определяемого точкой  $A'_{ij}(0, 0)$ , равно

$$a'_{ij} = a'_0 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} L, \quad (5.16)$$

где  $L$  – расстояние между снимками.

Итак, измерив расстояния между точками  $A_{i1}A_{j1}$  и  $A_{i2}A_{j2}$  и подставив их значения в формулы (5.14) и (5.15), в первом приближении определяем координаты точек  $A_{i1}$  и  $A_{j1}$  в системе координат  $x_1O_1y_1$  и точек  $A_{i2}$  и  $A_{j2}$  в системе координат  $x_2O_2y_2$ . Относительно этих точек измеряем координаты центров следов всех остальных отверстий на первом и втором снимках. Координаты точек пересечения лучей с плоскостью изображения  $\Phi$  (поперечные aberrации) определяем из очевидных геометрических соотношений:

$$x'_k = \Delta x'_k = x_{k1} - \frac{x_{k1} - x_{k2}}{L} a'_0, \quad (5.17)$$

$$y'_k = \Delta y'_k = y_{k1} - \frac{y_{k1} - y_{k2}}{L} a'_0. \quad (5.18)$$

Заметим, что найденные приближенно начала  $O_1$  и  $O_2$  систем координат  $x_1O_1y_1$  и  $x_2O_2y_2$  могут не совпадать с оптической осью объектива, с одной стороны, а с другой, – определяют приближённое положение плоскости изображения. Кроме того, фотопластинки при фотосъемке могут располагаться не перпендикулярно оптической оси объектива. Отсюда следует, что выражения (5.17) и (5.18) определяют приближённые значения aberrаций.

Количество  $k$  измеренных значений aberrаций существенно превышает количество названных параметров  $t$  ( $k > t$ ). Поэтому для уточнения значений параметров можно использовать известный математический метод, получивший название метода наименьших квадратов, при этом решение задачи определяется условием

$$\sum_{j=1}^{j=k} (\Delta x_j'^2 + \Delta y_j'^2) = \min.$$

$$\text{Итак, пусть } F = \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^2, \quad (5.19)$$

где  $\Phi_j^2 = \Delta x_j'^2 + \Delta y_j'^2$ . Для решения задачи необходимо, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial p_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial p_i} = \dots = \frac{\partial F}{\partial p_t} = 0, \quad (5.20)$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_t$ , — значения параметров. Пусть при исходном значении параметров  $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_i^{(0)}, \dots, p_t^{(0)}$  aberrационные функции равны  $\Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}, \dots, \Phi_j^{(0)}, \dots, \Phi_k^{(0)}$ . Представим приращения функции в виде разложений в ряды Тейлора по степеням приращений  $p_i$ , ограничиваясь в каждом ряду первым членом разложения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_1^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i, \\ \Phi_2 - \Phi_2^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i, \\ \dots \\ \Phi_j - \Phi_j^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i, \\ \dots \\ \Phi_k - \Phi_k^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} \Delta p_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Из выражения (5.19) находим, что

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}. \quad (5.22)$$

Подставив в это выражение значение  $\Phi_j$ , определяемое рядом (5.21), и учитывая условие (5.20), получаем

$$\sum_{j=1}^{j=k} \left( \Phi_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} = 0 \quad (5.23)$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \left( \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i \right) = - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}. \quad (5.24)$$

При этом условия (5.20) сводятся к системе  $t$  линейных уравнений с  $t$  неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \right)^2 + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} + \dots + \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} &= - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \\ \Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \right)^2 + \dots + \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} &= - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \\ \dots & \\ \Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \dots + \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \right)^2 &= - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \end{aligned} \right\} (5.25)$$

В результате получили систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных приращений параметров. По смыслу решаемой задачи система уравнений должна быть совместной, т.е. определитель системы  $D \neq 0$ , и определённой. В рассматриваемом случае определитель системы уравнений равен:

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{j=k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \right)^2 & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} & \dots & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \sum_{j=1}^{j=k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \right)^2 & \dots & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \dots & \sum_{j=1}^{j=k} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \right)^2 \end{vmatrix}.$$

Заменив столбец, составленный из коэффициентов при неизвестной разности  $\Delta p_i$ , столбцом, составленным из свободных членов, получаем определитель  $D_i$ , при этом в соответствии с формулой Крамера искомые разности равны:

$$\Delta p_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \Delta p_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad \Delta p_i = \frac{D_i}{D}, \quad \dots, \quad \Delta p_t = \frac{D_t}{D}.$$

Новые значения параметров определяются соотношением  $p_i^{(1)} = p_i^{(0)} + \Delta p_i$ . Вычислив значения aberrаций при новых значениях параметров, продолжаем итерационный процесс уточнения параметров до тех пор, пока не будут соблюдаться с требуемой точностью условия (5.20).

Введем обозначения:

$C_{x1}, C_{y1}$  – смещения начала системы координат  $x_1, y_1$ ;

$C_{x2}, C_{y2}$  – смещения начала системы координат  $x_2, y_2$ ;

$C'_x, C'_y$  – смещения начала системы координат  $x', y'$ .

При этом

$$\left. \begin{aligned} x_{k1}^{(1)} &= x_{k1}^{(0)} + C_{x1}, \\ y_{k1}^{(1)} &= y_{k1}^{(0)} + C_{y1}; \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

$$dx_{k1}^{(1)} = dC_{x1}, \quad dy_{k1}^{(1)} = dC_{y1};$$

$$x_{k2}^{(0)} = -x_{k1}^{(0)}, \quad y_{k2}^{(0)} = -y_{k1}^{(0)};$$

$$\left. \begin{aligned} x_{k2}^{(1)} &= -x_{k1}^{(0)} + C_{x2}, \\ y_{k2}^{(1)} &= -y_{k1}^{(0)} + C_{y2}; \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

$$dx_{k2}^{(1)} = dC_{x2}, \quad dy_{k2}^{(1)} = dC_{y2}.$$

Из формулы (5.17) следует:

$$\frac{\partial x'_k}{\partial C_{x1}} = 1 - \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)}, \quad \frac{\partial x'_k}{\partial C_{x2}} = \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)},$$

$$\frac{\partial x'_k}{\partial a'_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d_1 + d_2}{L} \right)^{(0)}, \quad \frac{\partial x'_k}{\partial L} = \frac{1}{2} \left( \frac{d_1}{L} \right)^{(0)}, \quad \frac{\partial x'_k}{\partial C'_x} = 1.$$

В выражения в скобках, помеченных значком (0), входят исходные значения величин. Из формулы (5.18) находим аналогичные соотношения вида:

$$\frac{\partial y'_k}{\partial C_{y1}} = 1 - \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)}, \quad \frac{\partial y'_k}{\partial C_{y2}} = \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)},$$

$$\frac{\partial y'_k}{\partial a'_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d_1 + d_2}{L} \right)^{(0)}, \quad \frac{\partial y'_k}{\partial L} = \frac{1}{2} \left( \frac{d_1}{L} \right)^{(0)}, \quad \frac{\partial y'_k}{\partial C'_y} = 1.$$

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_t} \end{pmatrix} = q, \quad \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \dots \\ \Delta p_i \\ \dots \\ \Delta p_t \end{pmatrix} = P, \quad \begin{pmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_2^{(0)} \\ \dots \\ \Phi_j^{(0)} \\ \dots \\ \Phi_k^{(0)} \end{pmatrix} = R.$$

Тогда в матричной форме систему уравнений (5.25) можно записать в виде:

$$q^T q P = -q^T R. \quad (5.28)$$

Отсюда следует, что матрица приращений параметров равна:

$$P = -(q^T q)^{-1} q^T R$$

или  $p^{(k+1)} = p^{(k)} - (q^T q)^{-1} q^T R^{(k)}$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$

При найденных значениях параметров вычисляем значения поперечных aberrаций, используя которые можно восстановить волновой фронт излучения, формирующего изображение точки.

Пусть  $m', M'$  – координаты точки на опорной сфере Гаусса (сфере сравнения) радиуса  $R'$  в меридиональной и сагиттальной плоскостях соответственно. При этом волновую aberrацию  $W$  можно представить в виде функции:  $W = W(m', M')$ . Тогда

$$dW = \frac{\partial W}{\partial m'} dm' + \frac{\partial W}{\partial M'} dM'.$$

Поперечные aberrации, образованные лучами в меридиональной и сагиттальной плоскостях, соответственно, определяются соотношениями:

$$\delta g' = \frac{R'}{n'} \frac{\partial W}{\partial m'}, \quad \delta G' = \frac{R'}{n'} \frac{\partial W}{\partial M'}.$$

Следовательно,

$$W = \frac{n'}{R'} \int (\delta g' dm' + \delta G' dM'). \quad (5.29)$$

В полярной системе координат  $m' = a' \rho \cos \theta$ ,  $M' = a' \rho \sin \theta$ . При этом

$$\delta g' = \frac{R'}{n' a'} \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \right), \quad (5.30)$$

$$\delta G' = \frac{R'}{n'a'} \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \right). \quad (5.31)$$

Функцию волновой aberrации  $W(\rho, \theta)$  можно представить в виде разложения по некоторому базису:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^n b_i P_i(\rho, \theta). \quad (5.32)$$

Задача аппроксимации волнового фронта aberrационной функцией (5.32) заключается в определении коэффициентов разложения  $b_i$ . Будем считать, что область определения функции  $W(\rho, \theta)$  в координатах  $\rho, \theta$  представляет собой круг. При этом в качестве базиса разложения естественно взять ортогональные полиномы Цернике и представить функцию  $W(\rho, \theta)$  в виде:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left[ R_n^m(\rho) (C_{nm} \cos m\theta + S_{nm} \sin m\theta) \right], \quad (5.33)$$

где  $C_{nm}, S_{nm}$  – косинусный и синусный коэффициенты разложения функции волновой aberrации.

Полиномы Цернике образуют полную систему полиномов, ортогональных внутри единичного круга. В общем случае радиальные полиномы Цернике определяются формулой вида:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left( \frac{n+m}{2} - s \right)! \left( \frac{n-m}{2} - s \right)!} \rho^{n-2s}. \quad (5.34)$$

При всех  $n$  и  $m$  справедливо соотношение  $R_n^{\pm m}(1) = 1$ . Так, например,  $R_6^2(\rho) = 15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2$ . При  $\rho = 1$ :  $R_6^2(1) = 1$ .

Для перехода от поперечных aberrаций к волновым удобно предварительно перейти от aberrаций  $\delta g'$  и  $\delta G'$  к радиальным  $\delta r'_\rho$  и тангенциальным  $\delta r'_\theta$  путем поворота координатных осей, используя соотношения:

$$r'_\rho = \delta g' \cos \theta + \delta G' \sin \theta, \quad (5.35)$$

$$r'_\theta = -\delta g' \sin \theta + \delta G' \cos \theta. \quad (5.36)$$

Используя формулы (5.30) и (5.31), получаем

$$r'_\rho = \frac{R'}{n'a'} \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad (5.37)$$

$$r'_\theta = \frac{R'}{n'a'} \frac{\partial W}{\rho \partial \theta}. \quad (5.38)$$

Учитывая формулу (5.33), соотношения (5.37) и (5.38) можно представить в виде:

$$r'_\rho = \frac{R'}{n'a'} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\partial R_n^m(\rho)}{\partial \rho} (C_{nm} \cos m\theta + S_{nm} \sin m\theta), \quad (5.39)$$

$$r'_\theta = \frac{R'}{n'a'\rho} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n m R_n^m(\rho) (S_{nm} \cos m\theta - C_{nm} \sin m\theta). \quad (5.40)$$

В этих выражениях расстояние  $R'$  можно принять равным расстоянию от диафрагмы Гартмана до плоскости изображения, а величину  $a'$  считать равной половине диаметра диафрагмы Гартмана.

Итак, подставив измеренные величины поперечных аберраций в формулы (5.35) и (5.36), а вычисленные значения аберраций  $r'_\rho$  и  $r'_\theta$  в выражениях (5.39) и (5.40), получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$ . Поскольку количество отверстий в диафрагме Гартмана, как правило, не равно количеству коэффициентов применяемых полиномов Цернике, систему линейных уравнений можно решить методом наименьших квадратов в рассмотренной последовательности его применения.

Если координаты отверстий измерены с достаточной (требуемой) точностью, то собственно диафрагма Гартмана может играть роль первого фотоснимка; при этом для исследования аберраций оптической системы или отдельной поверхности вполне можно ограничиться лишь одним, например, зафокальным фотоснимком. Если диафрагма Гартмана расположена перед объективом, то расстояние  $R' = a'_0 = f'$ , где  $f'$  – фокусное расстояние объектива.

Поскольку исследование формы поверхности методом Гартмана сводится к измерению следов "лучей" на фотоснимке, то при контроле из центра кривизны в вершине поверхности можно получить зафокальный снимок, и поперечными аберрациями приближённо считать отклонения измеренных координат пятен на гартманограмме от расчётных.

Компенсационная схема контроля вогнутой несферической отражающей поверхности методом Гартмана показана на рис.5.14. В этом случае диафрагмой Гартмана служит её изображение, образованное компенсатором. При этом следует учитывать влияние дисторсии, вносимой в изображение компенсатором, на положение изображений центров отверстий.

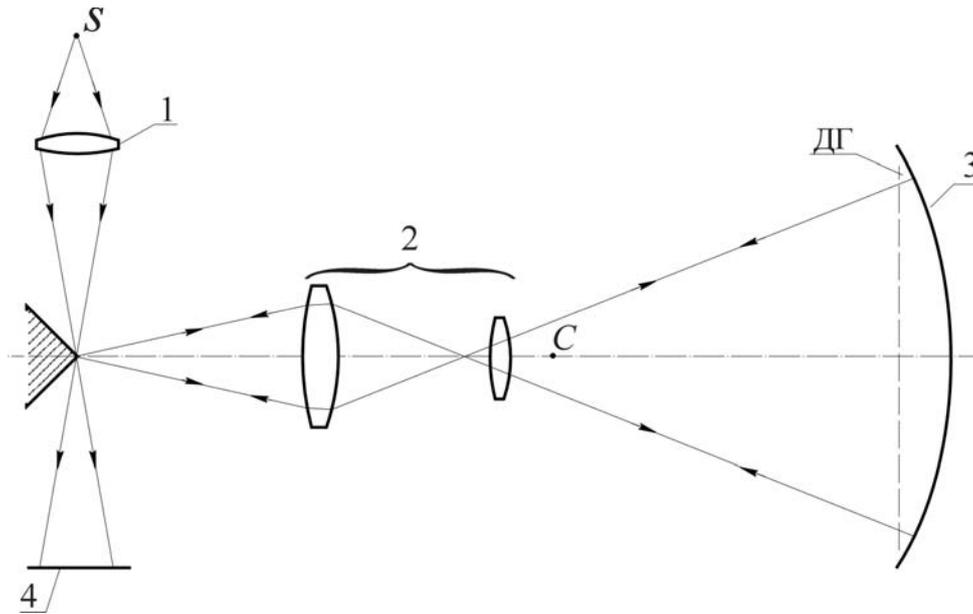


Рис.5.14. Компенсационная схема контроля несферической поверхности методом Гартмана: 1 – оптическая система осветителя; 2 – компенсатор; 3 – контролируемая поверхность; 4 – плоскость зафокального снимка

Несмотря на сравнительно высокую трудоёмкость получения конечной информации о форме волнового фронта при контроле aberrаций оптических систем или формы отдельных, как правило, большого диаметра, поверхностей, метод Гартмана достаточно широко применяется в практике оптического производства. При контроле отражающих поверхностей метод Гартмана применяется, как правило, на ранней стадии их полировки; при этом при контроле из центра кривизны деформация формы обрабатываемой поверхности определяется деформацией волнового фронта и равна:

$$f(\rho, \theta) = \frac{W(\rho, \theta)}{n' - n} = -\frac{1}{2}W(\rho, \theta).$$

Итак, применение метода Гартмана требует выполнения весьма трудоёмких процедур, связанных как со сборкой и юстировкой контрольной схемы, так и с выполнением высокоточных измерений координат следов лучей на фотоснимках. Поэтому для изучения изменяющихся во времени фазовых искажений волнового фронта, например, из-за атмосферной турбулентности, возможность применения собственно метода Гартмана не очевидна. Для решения этой задачи весьма удобным оказался модифицированный метод Гартмана. Предложенный в конце прошлого столетия, этот метод, названный методом Гартмана-Шека, достаточно широко применяется для изучения оптических свойств атмосферной турбулентности и рассматривается в качестве датчика волнового фронта в адаптивных

оптических системах. Принцип определения формы волнового фронта с помощью этого метода состоит в следующем.

Пусть параллельный пучок лучей (плоский волновой фронт) падает на линзу, образующую изображение точечного предмета в её задней фокальной плоскости, с которой совмещена чувствительная поверхность квадрантного приёмника П, как показано на рис.5.15а.

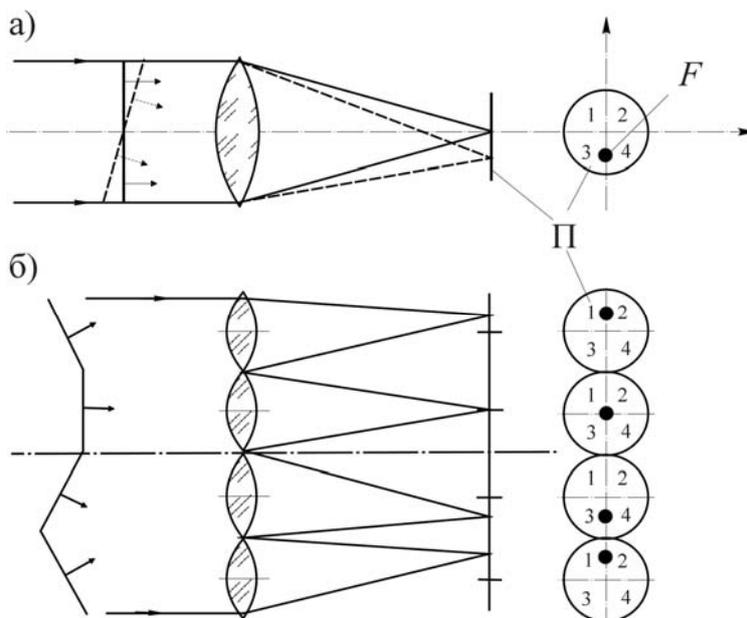


Рис.5.15. Схема датчика Гартмана: а) – измерение общего наклона волнового фронта; б) – измерение формы волнового фронта

Квадрантным называется координатно-чувствительный приёмник, чувствительная поверхность которого разделена на квадранты – четыре отдельных чувствительных площадки 1, 2, 3, 4. Если пятно рассеяния в изображении точки расположено в центре приёмника, равномерно освещая все квадранты, то на выходе приёмника наблюдается дифференциальный нулевой сигнал. При смещении светового пятна возникает разностный сигнал. По разности сигналов от отдельных квадрантов определяются величина и направление смещения. Зная фокусное расстояние линзы, легко определить наклон волнового фронта.

Пусть волновой фронт сложной формы падает на линзовый растр, при этом в задней фокальной плоскости каждой линзы расположен свой квадрантный приёмник, как показано на рис.5.15б. Количество линз растра должно быть таково, чтобы волновой фронт в пределах каждой субапертуры можно было бы считать плоским. Вполне очевидно, что величина смещения световых пятен равна величине поперечных aberrаций для лучей, совпадающих с оптической осью линзы соответствующей субапертуры. Определив значения

поперечных aberrаций для соответствующих точек апертуры (зрачка), можно восстановить деформацию волнового фронта, аппроксимировав её, например, с помощью ортогональных полиномов Цернике.

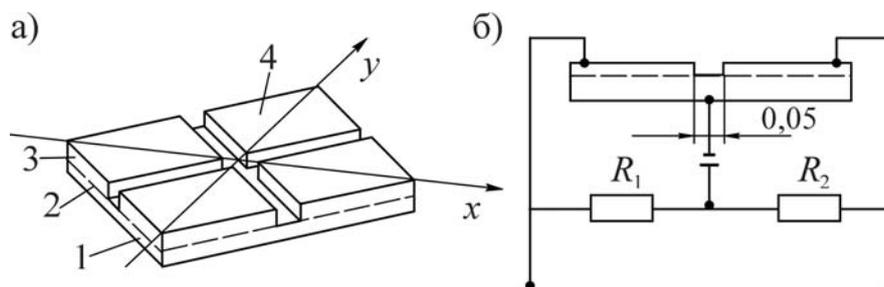


Рис.5.16. Устройство а) и схема включения б) квадрантного фотодиода  
1 – кристаллодержатель; 2 – материал *p*-типа; 3 – *p*-область; 4 – прозрачные для излучения контакты

На рис.5.16 показано устройство простейшего фотодиодного квадрантного приёмника. Пластина из полупроводника с *p-n*-переходом разделена на четыре части, расстояние между которыми при необходимости может составлять не более 10 мкм. Изготавливаются приёмники с площадками от  $1 \times 1 \text{ мм}^2$  до  $10 \times 10 \text{ мм}^2$  с вольт-ваттной чувствительностью  $0,1 \dots 0,5 \text{ В}/(\text{Вт} \cdot \text{мм})$  и постоянной времени  $10^{-4} \dots 10^{-6} \text{ с}$ .

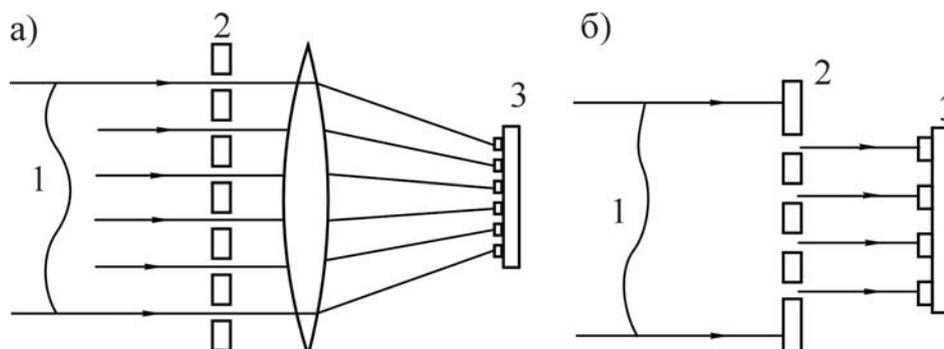


Рис.5.17. Варианты исполнения оптической части датчиков гартмановского типа: 1 – излучение; 2 – система разделения излучения на парциальные волновые фронты; 3 – приёмники излучения

При достаточно большом световом потоке линзовый растр (матрицу линз) можно заменить тонкой непрозрачной пластиной с малыми отверстиями, как показано на рис.5.17а, или прозрачной пластиной с малыми отражателями, как показано на рис.5.17б. В этом случае на соответствующих квадрантных приёмниках формируется дифракционное изображение точки.

Вариант принципиальной оптической схемы применения датчика Гартмана-Шека представлен на рис.5.18. Объектив  $\varphi_0$  (например,

объектив телескопа) образует изображение бесконечно удалённой точки предмета в осевой точке  $F'_0$  задней фокальной плоскости, за которой расположен датчик Гартмана-Шека, как показано на рис.5.18а. Передний фокус  $F_k$  объектива  $\varphi_k$  коллиматора совмещён с задним фокусом  $F'_0$  объектива  $\varphi_0$ . Таким образом, при безабберационном изображении осевой точки объектив  $\varphi_k$  расходящийся пучок лучей преобразует в параллельный, падающий на линзовый растр ЛР, как показано на рис.5.18б. При оптической неоднородности среды в пространстве предметов волновой фронт, падающий на объектив  $\varphi_0$ , деформируется, что приводит к поперечным aberrациям в изображении точки, а, следовательно, к соответствующему смещению световых пятен на квадрантных приёмниках.

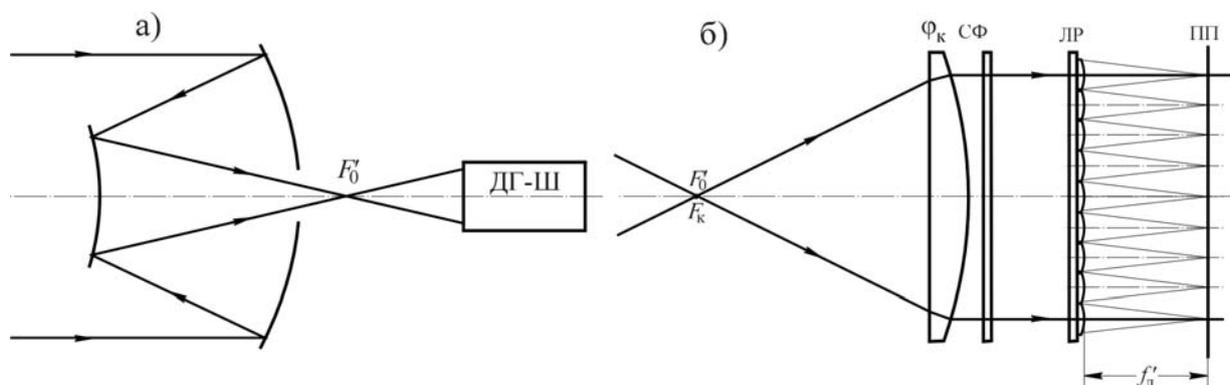


Рис.5.18. Принципиальная оптическая схема применения датчика Гартмана-Шека

Если собственно метод Гартмана позволяет определить поперечные aberrации в изображении точки, образованном объективом  $\varphi_0$  или отражающей поверхностью зеркала при контроле её формы, то при применении датчика Гартмана-Шека определяется величина смещений световых пятен относительно центров квадрантных приёмников. Пусть участок волнового фронта, сопряжённый с некоторой линзой  $\varphi_{ли}$  растра, имеет деформацию, определяемую отклонением нормали к волновому фронту от идеального положения на угол  $\alpha$ , что приводит к поперечной aberrации в фокальной плоскости объектива  $\varphi_0$ , равной

$$\delta g' = -\alpha f'_0,$$

где  $f'_0$  – фокусное расстояние объектива  $\varphi_0$ . Вполне очевидно, что эта aberrация приведет к смещению светового пятна в плоскости чувствительной поверхности квадрантного приёмника на величину, равную

$$\delta g'' = -\frac{f'_{ли}}{f'_к} \delta g' = \alpha \frac{f'_{ли}}{f'_к} f'_0,$$

где  $f'_к$  – фокусное расстояние объектива коллиматора;  $f'_{ли}$  – фокусное расстояние линзы раstra. Отсюда следует, что при  $f'_{ли} = f'_к$  величина смещения  $\delta g'' = -\delta g'$ .

Заметим, что для точной идентификации места деформации волнового фронта он должен быть оптически сопряжён с линзовым растром. Для этого в фокальную плоскость объектива  $\phi_0$  можно поместить коллективную линзу  $\phi_{кл}$ .

#### 5.4. Интерференционный метод контроля

Интерферометрами называют измерительные приборы, основанные на использовании интерференции света. Рассмотрим кратко основные понятия интерференции света.

В соответствии с волновой теорией световое возмущение  $u$  в некоторой точке пространства на расстоянии  $r$  от источника света описывается уравнением

$$u = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) = a \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r}{V} \right), \quad (5.41)$$

где  $a$  – амплитуда;  $T$  – период колебания;  $t$  – время;  $\lambda$  – длина волны света, а  $V$  – скорость его распространения.

Величину  $\nu = \frac{1}{T}$  называют частотой колебаний, а величину  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  называют круговой, или циклической, частотой.

Произведение расстояния  $r$ , проходимого лучом в данной среде, на показатель преломления  $n$  этой среды называют оптической длиной пути  $l$ , т.е.  $l = rn$ . Если луч проходит  $k$  сред с показателями преломления  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , то суммарная оптическая длина пути

$$L = \sum_{i=1}^{i=k} r_i n_i. \quad (5.42)$$

При этом уравнение (5.41) можно написать в виде

$$u = a \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

Под разностью хода двух лучей понимают разность оптических длин  $L_1$  и  $L_2$ , проходимых этими лучами, т.е.

$$\Delta = L_2 - L_1. \quad (5.43)$$

Отношение разности хода  $\Delta$  к длине волны  $\lambda$  называют порядком интерференции  $m$ :

$$m = \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (5.44)$$

Число  $m$  может быть как целым, так и дробным. При этом разность фаз двух колебаний равна

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi m. \quad (5.45)$$

При сложении двух одинаково направленных колебаний равного периода  $u_1 = a_1 \sin \omega t$  и  $u_2 = a_2 \sin(\omega t + \delta)$ , имеющих амплитуды  $a_1$  и  $a_2$  и разность фаз  $\delta$ , возникает колебание того же периода  $u = a \sin(\omega t + \psi)$ , при этом

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \delta \quad (5.46)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_2 \sin \delta}{a_1 + a_2 \cos \delta}. \quad (5.47)$$

Под интенсивностью колебания  $I$  понимают величину, равную квадрату амплитуды:  $I = a^2$ . В соответствии с выражением (5.46) интенсивность результирующего колебания  $I$  связана с интенсивностями  $I_1$  и  $I_2$  формулой

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (5.48)$$

Эта формула является основной для теории двухлучевых интерферометров. Из этой формулы следует, что величина  $I$  принимает максимальное значение, равное  $I_{\max}$  при  $\delta = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$  или при  $\Delta = 0; \pm \lambda; \pm 2\lambda; \dots$ , а минимальное значение  $I_{\min}$  – при  $\delta = \pm \pi; \pm 3\pi; \dots$  или при  $\Delta = \frac{\lambda}{2}; \frac{3}{2}\lambda; \dots$ . При этом

$$\left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (a_1 + a_2)^2 \\ I_{\min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (a_1 - a_2)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (5.49)$$

При равенстве интенсивностей складываемых колебаний, т.е. при  $I_1 = I_2 = I_0$ , имеем

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_0 \cos^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (5.50)$$

Из выражения (5.50) следует, что при изменении  $\delta$  интенсивность  $I$  изменяется по синусоидальному закону, при этом  $I_{\max} = 4I_0$ , а  $I_{\min} = 0$ . Обычно в разных точках поля интерференции,

т.е. в плоскости, в которой наблюдают интерференционную картину, разности фаз  $\delta$  имеют различные значения. Геометрическое место точек поля, лежащих на одной линии, в которых величины  $\delta$  одинаковы, называют интерференционной полосой, а расстояние  $b$  между серединами двух соседних полос – шириной полосы. Переходу от одной полосы к соседней полосе соответствует изменение  $\delta$ , равное  $2\pi$  (или изменение  $\Delta$ , равное  $\lambda$ ) независимо от ширины полос. При изменении разности хода  $\Delta$  интерференционные полосы перемещаются в направлении, обратном направлению увеличения разности хода перпендикулярно к их длине. Изменение  $\Delta$  на длину волны  $\lambda$  вызывает перемещение полос на расстояние, равное ширине полосы. Практически нетрудно измерить смещение полос с точностью до 0,05–0,1 ширины полосы, т.е. измерить изменение  $\Delta$  с погрешностью 0,05 – 0,1 $\lambda$ .

Для характеристики чёткости интерференционных полос Майкельсон ввёл функцию видности, называемую контрастностью интерференционной картины, которая определяется отношением

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (5.51)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – максимальное и минимальное значения интенсивности света в светлой и тёмной полосах соответственно. В идеальном случае, т.е. при  $I_1 = I_2$ , величина  $I_{\min} = 0$ , при этом контрастность  $K = 1$ . В общем случае  $I_1 \neq I_2$ . Пусть  $I_2 = qI_1$ . Тогда формула (5.48), определяющая интенсивность результирующего колебания, принимает вид

$$I = (1 + 2\sqrt{q} \cos \delta + q)I_1. \quad (5.52)$$

При этом из выражения (5.51) находим, что

$$K = \frac{2\sqrt{q}}{1+q}. \quad (5.53)$$

Заметим, что контрастность интерференционной картины одна и та же при  $q_2 = \frac{1}{q_1}$ . Легко убедиться, что даже при  $q = 5$  контрастность интерференционной картины остаётся хорошей ( $K = 0,75$ ).

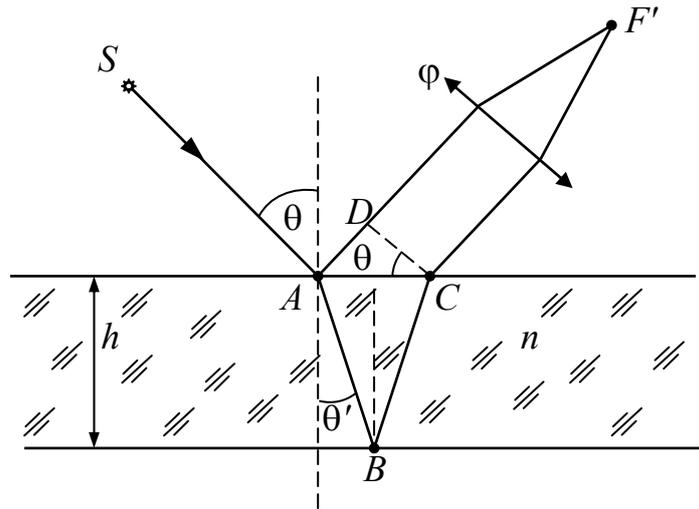


Рис.5.19. Интерференция света, отражённого от поверхностей плоскопараллельной пластинки

Среди множества других особенно важен частный случай интерференции света, отражённого от двух поверхностей плоскопараллельной пластинки, как показано на рис.5.19. На этом рисунке луч света от источника  $S$  падает на первую (переднюю) поверхность пластинки в точке  $A$ . Частично отражаясь от этой поверхности, луч после преломления в точке  $A$  проходит в точку  $B$  на второй (задней) поверхности. Частично отражаясь от этой поверхности в точке  $B$ , луч приходит в точку  $C$  на первой поверхности, преломляясь в которой, выходит из плоскопараллельной пластинки параллельно лучу, отражённому в точке  $A$ . Разность оптических путей этих лучей на линии  $DC$ , перпендикулярной лучам, как показано на рисунке, равна

$$\Delta = n(|AB| + |BC|) - |AD|.$$

Здесь  $n$  – показатель преломления материала пластинки, при этом предполагается, что источник  $S$  расположен в воздухе ( $n_1 \approx 1$ ). Обозначив угол падения луча буквой  $\theta$ , а толщину пластинки – буквой  $h$ , получаем

$$\Delta = 2nh \cos \theta', \tag{5.54}$$

при этом  $\sin \theta' = \frac{1}{n} \sin \theta$ . Поскольку при отражении волны от первой поверхности пластинки в соответствии с формулами Френеля её фаза изменяется на  $\pi$ , то разность фаз  $\delta$  рассматриваемых волн равна

$$\delta = 4\pi n \frac{h}{\lambda_0} \cos \theta' \pm \pi = 4\pi \frac{h}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta'} \pm \pi, \tag{5.55}$$

где  $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме. Результат сложения двух колебаний можно наблюдать либо глазом, аккомодированным на бесконечность, либо в точке  $F'$  на экране, расположенном в фокальной плоскости объектива  $\varphi$ . Из формулы (5.55) следует, что разность фаз  $\delta$  определяется углом  $\theta$  падения луча на поверхность пластинки и не зависит от положения источника света  $S$ . Отсюда вытекает, что при использовании протяжённого источника интерференционные полосы будут столь же отчётливыми, как и с точечным источником: каждый элемент протяжённого источника создаёт в фокальной плоскости объектива  $\varphi$  свою интерференционную картину, причём положение полос во всех этих картинах совершенно одинаково. Так как это справедливо для одной вполне определённой плоскости наблюдения, то про такие полосы говорят, что они локализованы. В данном случае они локализованы в бесконечности (или в фокальной плоскости объектива). В соответствии с формулой (5.54) светлые полосы расположены под углами  $\theta$ , для которых  $2nh \cos \theta' \pm \frac{1}{2} \lambda_0 = m \lambda_0$ , где  $m$  – целое число, называемое порядком интерференции. Полоса, соответствующая некоторому порядку интерференции, обусловлена светом, падающим на пластинку под вполне определённым углом  $\theta$ . Поэтому такие полосы называют интерференционными полосами равного наклона. Если ось объектива расположена перпендикулярно пластинке, полосы имеют вид концентрических колец с центром в фокусе. В центре картины порядок интерференции максимален.

#### 5.4.1. Интерферометр Майкельсона

Для наблюдения полос равного наклона вместо плоскопараллельной пластинки удобно использовать интерферометр Майкельсона. Его упрощённая схема показана на рис.5.20. Свет от протяжённого источника  $S$  падает на пластинку  $P_1$ , задняя сторона которой покрыта тонким полупрозрачным отражающим слоем серебра или алюминия. Здесь световой пучок лучей разделяется на два взаимно перпендикулярных пучка. Отражённый пластинкой  $P_1$  пучок падает на зеркало  $M_1$ , отражается от него, вновь падает на пластинку  $P_1$ , где снова разделяется на два пучка. Один из них идёт к источнику  $S$  и интереса не представляет, а другой попадает в зрительную трубу, установленную на бесконечность, или на объектив  $\varphi$ , в фокальной плоскости которого расположен экран для наблюдения

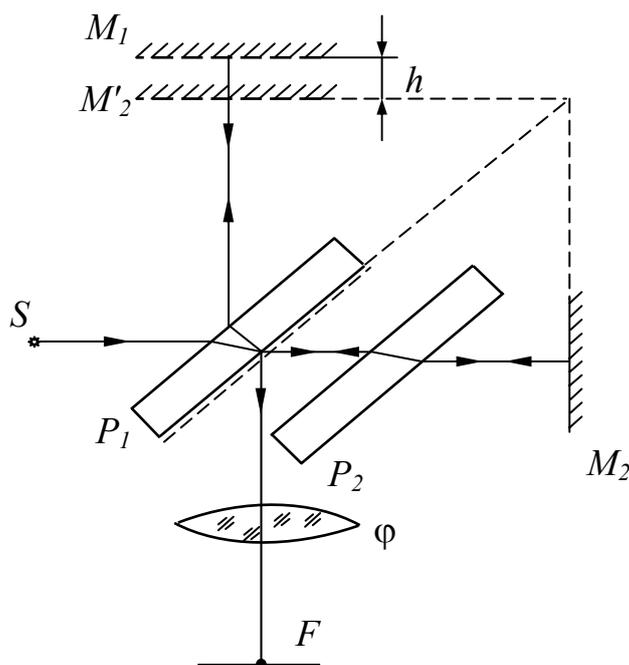


Рис.5.20. Интерферометр Майкельсона

интерференции. Прошедший сквозь пластинку  $P_1$  световой пучок лучей падает на зеркало  $M_2$ , отражаясь от него, возвращается на пластинку  $P_1$ , на задней поверхности которой вновь делится на два пучка, при этом отражённый пучок направляется в объектив  $\phi$ . Таким образом, от одного источника  $S$  получаются два пучка примерно одинаковой интенсивности, которые распространяются после разделения пластинкой  $P_1$  в разных "плечах" интерферометра, затем снова встречаются и создают интерференционную картину в фокальной плоскости объектива  $\phi$ . Зеркало  $M_2$  неподвижно, а зеркало  $M_1$  можно передвигать с помощью микрометрического винта в направлении к пластинке  $P_1$  и от неё. Световой пучок, отражённый от зеркала  $M_1$ , на пути к объективу  $\phi$  трижды проходит сквозь пластинку  $P_1$ , а пучок, отражённый зеркалом  $M_2$  проходит сквозь пластинку  $P_1$  только один раз. Чтобы устранить это различие в оптическом пути, не позволяющее работать с полосами в белом свете, между пластинкой  $P_1$  и зеркалом  $M_2$  помещена компенсирующая пластинка  $P_2$  из такого же материала и такой же толщины, как у пластинки  $P_1$ , и параллельная ей. На рис.5.20 показано изображение  $M'_2$  зеркала  $M_2$ , образованное отражающей поверхностью пластинки  $P_1$ . Оптическая длина пути от источника до точки наблюдения для луча, отразившегося от зеркала  $M_2$ , будет такой же, как и для

воображаемого луча, отразившегося от мнимой отражающей поверхности  $M'_2$ . Поэтому можно считать, что интерференционная картина, наблюдаемая в фокальной плоскости объектива  $\varphi$ , возникает из-за воздушного слоя между отражающей поверхностью  $M_1$  и мнимой отражающей поверхностью  $M'_2$ . При параллельных поверхностях  $M_1$  и  $M'_2$  полосы имеют вид концентрических окружностей с центром в фокусе  $F'$  объектива.

Если после разделительной пластинки  $P_1$  пучки имеют одинаковую интенсивность, то распределение интенсивности в фокальной плоскости объектива описывается формулой (5.50), где разность хода волновых фронтов  $\Delta$ , как и в случае плоскопараллельной пластинки, в соответствии с формулой (5.54) равна

$$\Delta = 2h \cos \theta.$$

Разность хода при заданном расстоянии  $h$  между зеркалом  $M_1$  и изображением  $M'_2$  зеркала  $M_2$ , т.е. при фиксированном положении подвижного зеркала, зависит только от угла  $\theta$  наклона лучей по отношению к оптической оси. Конкретному значению угла  $\theta$  соответствует кольцо в фокальной плоскости объектива, радиус которого равен  $f'tg\theta$ , где  $f'$  – фокусное расстояние объектива. Поэтому положение и размер светлых и тёмных колец не зависит от положения источника  $S$ , т.е. можно использовать протяжённый источник. При этом интерференционная картина (интерференционные кольца или полосы) локализована в фокальной плоскости объектива  $\varphi$ . Центру интерференционной картины ( $\theta = 0$ ) соответствует максимальная разность хода  $\Delta_{\max} = 2h$ , равная удвоенному расстоянию между зеркалом  $M_1$  и изображением  $M'_2$  зеркала  $M_2$ .

До сих пор предполагалось, что источник  $S$  излучает монохроматический свет. Определим требование, которому должен удовлетворять источник излучения в интерференционном устройстве. Предположим, что источник излучает две очень узкие, близкие друг к другу спектральные линии с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При этом можно считать, что вместо одного имеется два расположенных в одном месте источника, независимо друг от друга излучающих волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В интерферометре с таким источником каждая из волн создаёт свою интерференционную картину, и эти картины просто накладываются одна на другую. Полная интенсивность при

наложении двух интерференционных картин определится равенством вида

$$I(\Delta) = I_1(\Delta) + I_2(\Delta) = 2I_{10}(1 + \cos k_1\Delta) + 2I_{20}(1 + \cos k_2\Delta), \quad (5.56)$$

где  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число, а  $I_0$  – равномерная интенсивность волны.

При  $I_{10} = I_{20} = I_0$  равенство (5.56) принимает вид:

$$I(\Delta) = 4I_0 \left[ 1 + \cos \frac{\delta k}{2} \Delta \cos k\Delta \right], \quad (5.57)$$

где  $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ ;  $\delta k = k_2 - k_1$ .

Из формулы (5.57) следует, что при разности хода волнового фронта, равной  $\Delta$ , ближайший максимум определяется условием  $\cos k\Delta = \pm 1$  при  $\cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \cos k\Delta > 0$ , а ближайший минимум

определяется тем же условием при  $\cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \cos k\Delta < 0$ , т.е. в

соответствии с формулой (5.57)  $I_{\max} = 4I_0 \left[ 1 + \left| \cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \right| \right]$ , а

$I_{\min} = 4I_0 \left[ 1 - \left| \cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \right| \right]$ . При этом в соответствии с формулой (5.51)

получаем

$$K = \left| \cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \right|.$$

Контрастность интерференционной картины принимает своё максимальное значение, равное единице, при  $\Delta = 0$ , т.е. вблизи полосы нулевого порядка, где освещённость в минимумах приближается к нулю. С увеличением разности хода контрастность

уменьшается и обращается в нуль при  $\frac{1}{2} \delta k \Delta = \frac{\pi}{2}$ . При этом при малой

разности частот  $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = c\delta k$  получаем, что светлые полосы интерференционной картины излучения одной спектральной линии совпадают с тёмными полосами излучения другой линии при

$\Delta = \frac{\lambda^2}{2\delta\lambda}$ . Введение разности хода между волновыми фронтами

эквивалентно задержке одного из них во времени. Поэтому способность световых колебаний в одной точке исходного волнового

фронта к интерференции после его разделения на два фронта и последующего их соединения с некоторой разностью хода называется временной когерентностью. Максимальная разность хода, при которой возможна интерференция, называется длиной когерентности излучения  $l_{\text{ког}}$ , а соответствующее ей запаздывание – временем когерентности  $\tau_{\text{ког}} = \frac{l_{\text{ког}}}{c}$ . Уменьшение когерентности световых колебаний с увеличением временной задержки, т.е. уменьшение видности интерференционных полос при возрастании разности хода, связано с конечной шириной спектральной линии источника квазимонохроматического света. Такое излучение можно рассматривать как совокупность не скоррелированных между собой отдельных монохроматических волн, частоты которых сплошь заполняют некоторый интервал  $\delta\omega$ , малый по сравнению со средней частотой  $\omega$ . Каждая монохроматическая волна из этой совокупности создаёт в интерферометре свою картину полос, при этом полное распределение освещённости определяется простым наложением этих картин.

Будем считать, что отдельные монохроматические компоненты равномерно заполняют спектральный интервал шириной  $\delta\omega$  ("прямоугольный" контур линии). Разделим мысленно этот интервал на две равные части. При этом вполне очевидно, что любой из монохроматических компонент первой части найдётся монохроматическая компонента из второй части с разностью частот, равной  $\frac{1}{2}\delta\omega$ . Распределение освещённости в интерференционной картине от каждой пары определяется формулой (5.57) при  $\delta k = \frac{1}{2c}\delta\omega \cong \pi \frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$ . Контрастность полос полной интерференционной картины в этом случае становится равной нулю при такой разности хода  $\Delta_{\text{max}} = l_{\text{ког}}$ , когда  $\frac{1}{2}\delta k \Delta_{\text{max}} = \frac{\pi}{2}$ . В результате получаем

$$l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}. \quad (5.58)$$

Длине когерентности  $l_{\text{ког}}$  соответствует максимально возможный порядок интерференции

$$m_{\text{max}} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

Для белого света (солнце, лампа накаливания, дуга с угольными электродами) и визуального наблюдения эффективный диапазон длин волн  $\delta\lambda$  простирается приблизительно от 400 до 700 нм, т.е.  $\delta\lambda = 300$  нм при  $\lambda \approx 600$  нм. Однако, учитывая селективную чувствительность глаза, можно считать, что возможный порядок интерференции

$$m > \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 2.$$

Используя излучение узких спектральных линий газоразрядных источников низкого давления, можно наблюдать интерференцию при оптической разности хода, достигающей нескольких десятков сантиметров. Основная причина, ограничивающая в этом случае длину когерентности, – хаотическое тепловое движение излучающих атомов, приводящее к доплеровскому уширению спектральных линий. Так, например, для излучения оранжевой линии  $\lambda = 605,78$  нм стандартной криптоновой лампы, используемой в современном эталоне длины (по определению, 1 м равен 1650763,73 длин волн этой линии), длина когерентности достигает 0,8 м. Исключительно высокая монохроматичность излучения стабилизированных по частоте газовых лазеров позволяет получить интерференцию при разности хода в несколько километров.

Условие временной когерентности световых колебаний можно записать в виде  $\Delta < l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$ .

#### 5.4.2. Интерферометр Тваймана-Грина

Заменим в схеме, представленной на рис.5.20, протяжённый источник излучения  $S$  точечным, расположенным в переднем фокусе объектива  $\varphi_k$ , как показано на рис.5.21. Интерферометр, типовая схема которого представлена на рис.5.21, предложен и запатентован Твайманом и Грином в 1916 году. Коллимированный пучок лучей образует плоский волновой фронт, соответствующий осевому на рис.5.20, при этом угол  $\theta = 0$ . Поэтому кольцевые полосы в интерференционной картине будут отсутствовать, и всё интерференционное поле будет иметь равномерную освещённость. Возникающие при перемещении зеркала  $M_1$  изменения интенсивности измеряются с помощью показанного на рисунке объектива  $\varphi_{\text{п}}$  и расположенного в его заднем фокусе  $F'_{\text{п}}$  приёмника излучения  $P$ . При равных амплитудах колебаний складываемых после

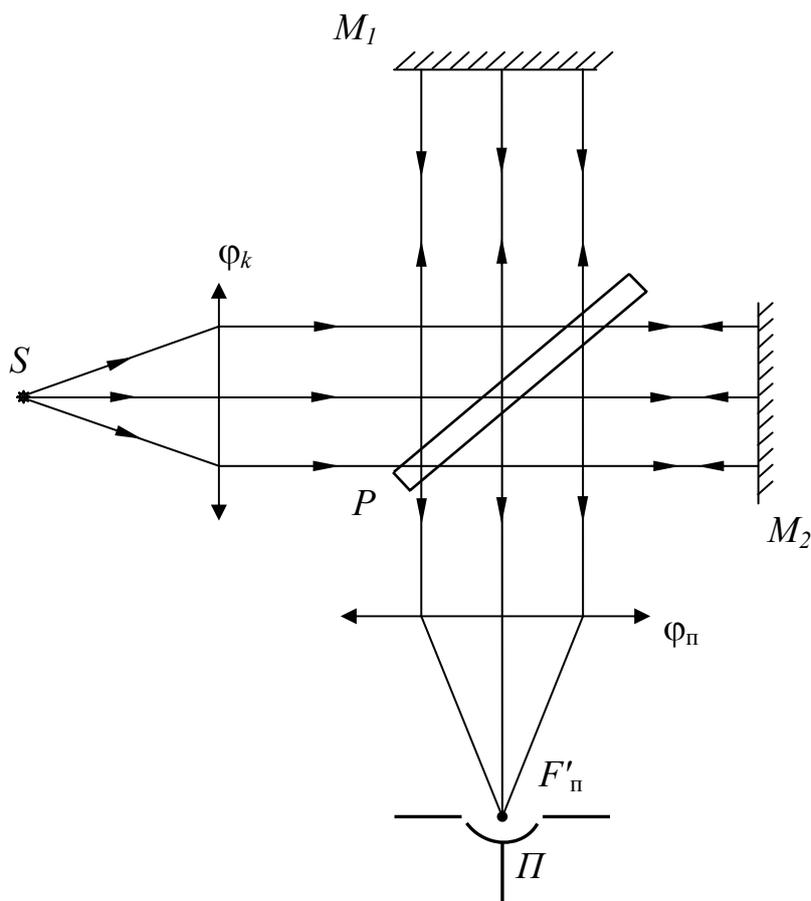


Рис.5.21. Интерферометр Тваймана-Грина

светоделителя  $P$  монохроматических волновых фронтов интенсивность света определится формулой (5.50) в виде

$$I_{\sigma}(\Delta) = 2I_{0\sigma}(1 + \cos 2\pi\sigma\Delta), \quad (5.59)$$

где  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ ; в спектроскопии величину  $\sigma$  принято называть волновым

числом. Как было показано, характер изменения контрастности интерференционных полос при изменении разности хода (например, путём перемещения зеркала  $M_1$  на рис.5.21 в направлении оптической оси) определяется спектральным составом света. Следовательно, при спектральной плотности лучистого потока  $P(\sigma)$  в параллельном пучке лучей за объективом  $\varphi_k$  интенсивность света, падающего на объектив  $\varphi_{\Pi}$  приёмного устройства, без учёта потерь в оптической системе интерферометра определяется очевидным выражением

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} P(\sigma)(1 + \cos 2\pi\sigma\Delta) d\sigma. \quad (5.60)$$

Этот интеграл можно записать в виде

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} P(\sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} P(\sigma) \cos(2\pi\sigma\Delta) d\sigma. \quad (5.61)$$

Когда два зеркала расположены на равном оптическом расстоянии от разделителя пучка, то  $\Delta = 0$  и  $I(\Delta) = I(0) = 2 \int_0^{\infty} P(\sigma) d\sigma$ .

При этом имеем

$$I(\Delta) - \frac{1}{2} I(0) = \int_0^{\infty} P(\sigma) \cos(2\pi\sigma\Delta) d\sigma. \quad (5.62)$$

Левая часть выражения (5.62) определена при  $\sigma > 0$ , а при  $\sigma < 0$  можно считать её равной нулю. При этих условиях выражение (5.62) представляет собой обратное косинус-преобразование Фурье для зависимости  $I(\Delta) - \frac{1}{2} I(0)$ . Тогда косинус-преобразование Фурье этой зависимости принимает вид

$$P(\sigma) = \int_0^{\infty} \left[ I(\Delta) - \frac{1}{2} I(0) \right] \cos(2\pi\sigma\Delta) d\Delta. \quad (5.63)$$

Уравнение (5.63) часто называют основным уравнением Фурье-спектроскопии. Оно даёт возможность вычислить для каждого конкретного значения  $\sigma$ , а, следовательно, для каждого конкретного значения длины волны  $\lambda$ , спектральную плотность  $P(\sigma)$  светового потока, излучаемого источником  $S$ , путём интегрирования выражения в правой части.

Изменение  $\Delta$  достигается при перемещении зеркала. Точность, с которой можно контролировать величину перемещения, ставит предел точности прибора в целом. В результате рассматриваемый метод измерения спектральной плотности излучения применим, главным образом, для работы на длинных волнах и широко использовался на протяжении многих лет в инфракрасной области спектра. Однако в настоящее время, благодаря всестороннему техническому совершенствованию, область длин волн расширена в видимый и даже ультрафиолетовый диапазоны.

### 5.4.3. Интерферометр Физо

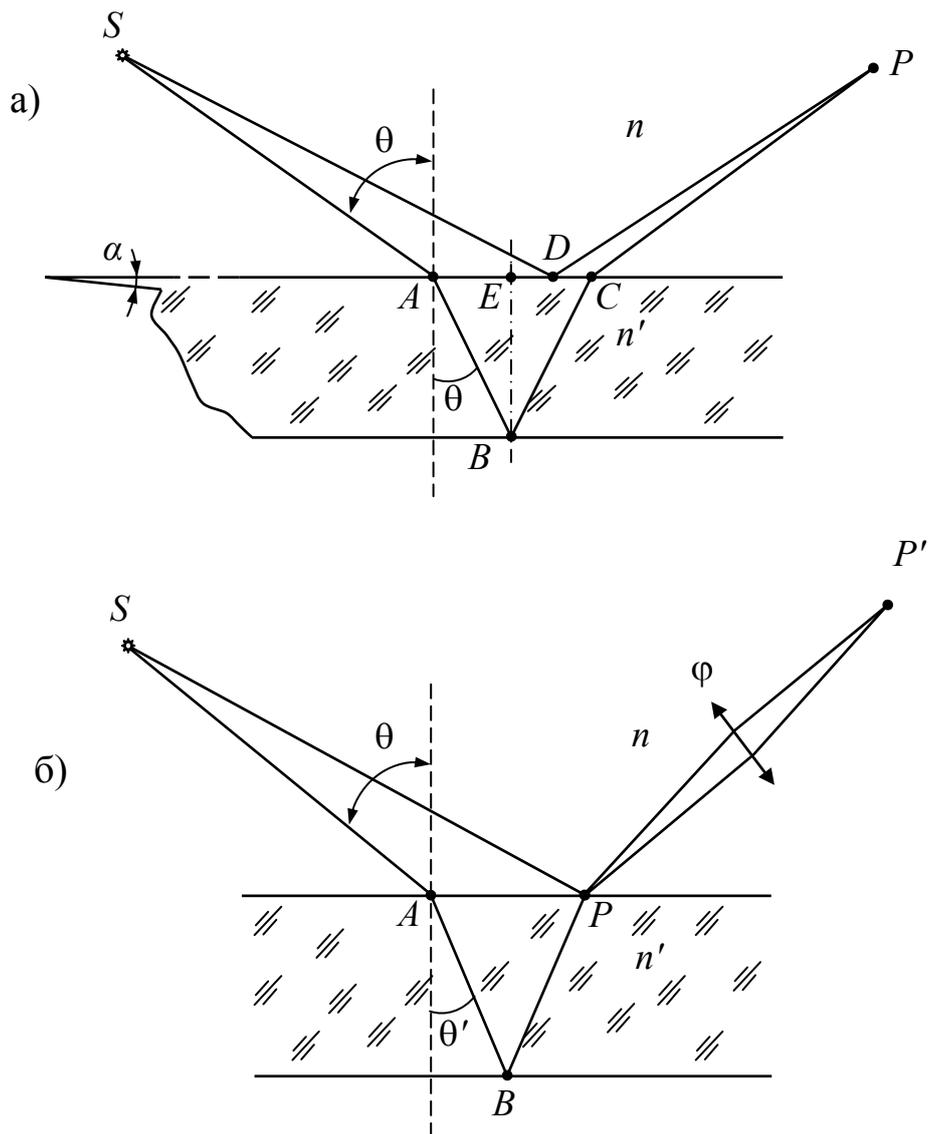


Рис.5.22. Тонкая плёнка, освещённая точечным источником света

Обратимся к рис.5.22, где представлено главное сечение прозрачной плёнки с плоскими поверхностями, образующими клин, угол которого достаточно мал и равен  $\alpha$ . Из точечного источника  $S$  световой луч падает на первую поверхность плёнки в точку  $A$  под углом  $\theta$  к нормали к поверхности. Преломлённый в точке  $A$  луч в результате френелева отражения от второй поверхности в точке  $B$  выходит из плёнки в точке  $C$  на первой поверхности. Вторым луч, исходящий из точки  $S$ , падает на поверхность плёнки в некоторую точку  $D$ . Отражённый в результате френелева отражения в этой точке луч встречается с первым лучом в некоторой точке  $P$ . При этом разность оптических путей этих лучей между точками  $S$  и  $P$  равна:

$$\Delta = nSA + n'(AB + BC) + nCP - n(SD + DP).$$

Представляет интерес частный случай, когда точка  $D$  совпадает с точкой  $C$ , т.е. когда второй луч падает в точку  $C$ . При этом вполне очевидно, что точка  $P$  также будет совпадать с точкой  $C$ , как показано на рис.5.22. В этом случае разность оптических путей для рассматриваемых лучей равна:

$$\Delta = nSA + n'(AB + BP) - nSP. \quad (5.64)$$

Полагая угол  $\alpha$  и толщину плёнки  $h = BE$  вблизи точки  $B$  измеренную по нормали к первой поверхности в точке  $B$ , достаточно малыми, равенство (5.63) заменим приближённым равенством вида:

$$\begin{aligned} \Delta &\approx nSA + n'(AB + BP) - n(SP + AP \sin \theta) = \\ &= n'(AB + BP) - n AP \sin \theta \end{aligned}$$

или

$$\Delta = n'(AB + BP - AP \sin \theta'). \quad (5.65)$$

Но

$$AB + BP \approx \frac{2h}{\cos \theta'}, \text{ а } AP \approx 2htg \theta'.$$

Полученные приближённые равенства позволяют преобразовать равенство (5.64) к виду

$$\Delta \approx 2n'h \left( \frac{1}{\cos \theta'} - \frac{\sin^2 \theta'}{\cos \theta'} \right) = 2n'h \cos \theta'. \quad (5.66)$$

При этом разность фаз световых колебаний в точке  $P$  равна

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n'h \cos \theta'. \quad (5.67)$$

При малой клиновидности (малом изменении толщины) плёнки величина  $h$  практически одинакова для всех пар лучей от протяжённого источника, приходящих в точку  $P'$ , сопряжённую с  $P$ , и различие величин  $\delta$  в точке  $P'$  определяется главным образом различием значений  $\cos \theta'$ . Если интервал изменений  $\cos \theta'$  достаточно мал, то интервал изменения величины  $\delta$  в точке  $P'$  много меньше  $\pi$  даже с источником значительных размеров и полосы отчётливо видны. Очевидно, что они локализованы на первой поверхности плёнки. Практически условие малости интервала изменений  $\cos \theta'$  можно выполнить при наблюдении в направлении, близком к нормальному, или при ограничении входного зрачка. Последнее условие вполне выполняется при наблюдении интерференционной картины невооружённым глазом, поскольку зрачок глаза и сам по себе может быть достаточно мал.

Учитывая изменение фазы на  $\pi$  при отражении на одной из поверхностей плёнки, из выражений (5.49) и (5.67) находим, что максимумы интенсивности в  $P'$  (и, очевидно, в  $P$ ) определяются из условия

$$2n'\overline{\cos\theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (m-1)\lambda_0, \quad (5.68a)$$

а минимумы интенсивности – из условия

$$2n'\overline{\cos\theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2m-1}{2}\lambda_0, \quad (5.68b)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\overline{\cos\theta'}$  – среднее значение  $\cos\theta'$  для точек источника, из которых свет приходит в точку  $P'$ . Из соотношений (5.68) следует, что если  $\overline{\cos\theta'}$  достаточно постоянен, то интерференционные полосы соответствуют совокупности мест плёнки, где оптические толщины одинаковы. По этой причине такие полосы часто называют полосами равной толщины. Их можно наблюдать в тонкой воздушной прослойке между отражающими поверхностями двух прозрачных пластинок. Вблизи нормального падения лучей условия (5.68) для тёмной полосы при  $\overline{\cos\theta'} = 1$  и длине волны в воздухе  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n'}$  имеют вид

$$h = \frac{m\lambda}{2}, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.69)$$

Таким образом, интерференционные полосы определяют контуры слоёв равной толщины, причём расстояние между полосами соответствует изменению толщины на  $\frac{\lambda}{2}$ .

Итак, необходимым условием требуемого контраста (чёткости) интерференционных полос служит ограниченность диапазона изменения величины  $\overline{\cos\theta'}$ , соответствующего каждой точке плёнки, при этом при  $\overline{\cos\theta'} \approx 1$  полосы определяют контуры слоёв равной оптической толщины. Оба эти условия одновременно выполняются на большой площади плёнки в интерферометре Физо, схема которого представлена на рис.5.23. Расходящийся пучок света из квазимонохроматического источника  $S$  после отражения от диагонального зеркала  $M$  преобразуется объективом  $\phi$  в параллельный пучок, который падает по нормали на плёнку  $P$ . Свет, отражённый поверхностями плёнки, снова проходит через объектив  $\phi$  и собирается в отверстии  $S'$  в фокальной плоскости объектива  $\phi$ .

Глаз, помещённый сразу за  $S'$  и аккомодированный на плёнку, видит полосы, определяющие контуры слоёв оптической толщины на всей поверхности плёнки, освещённой объективом  $\Phi$ . Эти полосы часто называют полосами Физо. Полосы Физо можно получить и в толстых плёнках при условии, что источник света достаточно мал.

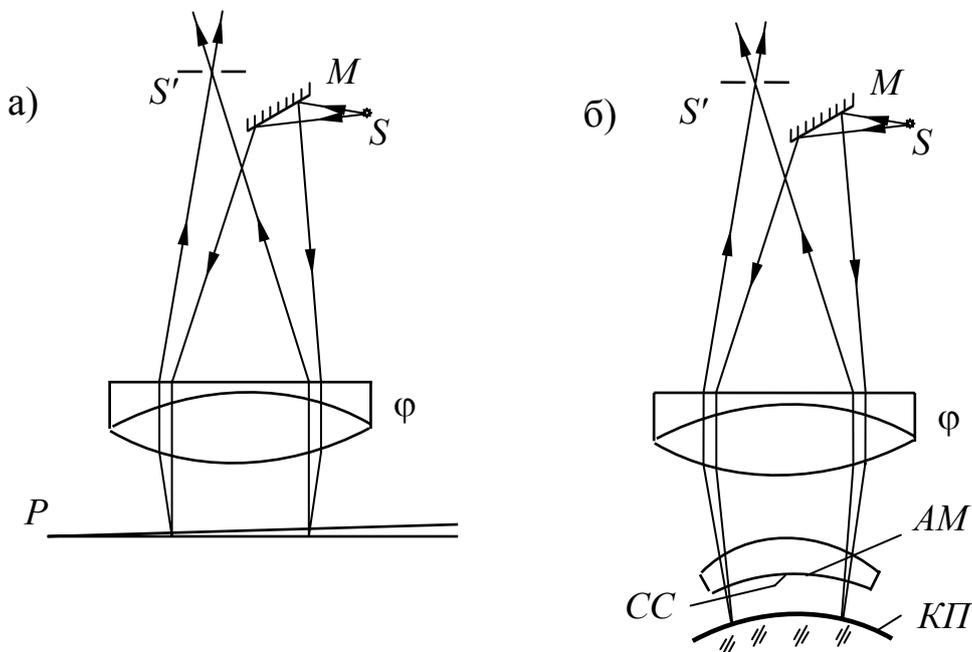


Рис.5.23. Схема интерферометра Физо

Такие интерферометры находят применение в оптическом производстве для проверки постоянства оптических толщин плоскопараллельных прозрачных пластинок. Интерферометр Физо, варианты модифицированной схемы которого показаны на рис.5.23, находит применение и для контроля формы оптических поверхностей. На этой схеме  $AM$  – апланатический мениск;  $CC$  – сфера сравнения (эталонная поверхность);  $КП$  – контролируемая сферическая поверхность.

Схема интерферометра Тваймана-Грина, представленная на рис.5.21, эквивалентна схеме интерферометра Физо, но в отличие от последней здесь пути световых пучков полностью разделены. Оптическая разность хода между выходящими после делителя лучами равна

$$\Delta = 2nh, \quad (5.70)$$

где  $h$  – разность расстояний от осевой точки деления пучков до зеркал  $M_1$  и  $M_2$ . Соответствующая разность фаз равна

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} nh. \quad (5.71)$$

Заметим, что интерференционные полосы, являющиеся геометрическим местом точек, для которых величина  $\delta$  постоянна, образуются в любой плоскости той области, где встречаются оба луча из  $S$ . В этом случае принято говорить, что такие полосы не локализованы. Они всегда наблюдаются с точечным источником и их контрастность (их видность) зависит только от относительной интенсивности обеих волн.

В соответствии с соотношениями (5.71) и (5.49) находим, что глаз, помещённый в фокальную плоскость объектива  $\varphi_{\text{п}}$ , увидит в некоторой точке  $P$  светлую полосу, если

$$nh = \frac{m-1}{2} \lambda_0, \quad (5.72a)$$

или тёмную полосу, если

$$nh = \frac{2m-1}{4} \lambda_0, \quad (5.72б)$$

где  $m = 1, 2, \dots$

Если одно из зеркал в интерферометре Тваймана-Грина представляет собой сферу со стрелкой шарового сегмента  $h$ , то интерференционная картина будет выглядеть в виде системы чередующихся светлых и тёмных колец, при этом порядок интерференции будет равен  $m = \frac{2nh}{\lambda_0}$ . Различные модификации

интерферометра Тваймана-Грина находят широкое применение в оптическом производстве при контроле оптических поверхностей и деталей.

#### 5.4.4. Интерферометры сдвига

Важная особенность интерферометров сдвига заключается в том, что они не требуют формирования эталонного волнового фронта (не требуют применения эталонных оптических поверхностей), так как в них интерференционная картина образуется в результате сложения волновых фронтов, образованных путём амплитудного деления контролируемого волнового фронта, при последующем смещении каждого или одного из них. Сдвиг может быть боковым, поворотным, реверсным или радиальным. Характер воздействия на волновой фронт в интерферометрах радиального, поворотного и реверсивного сдвига показан на рис.5.24.

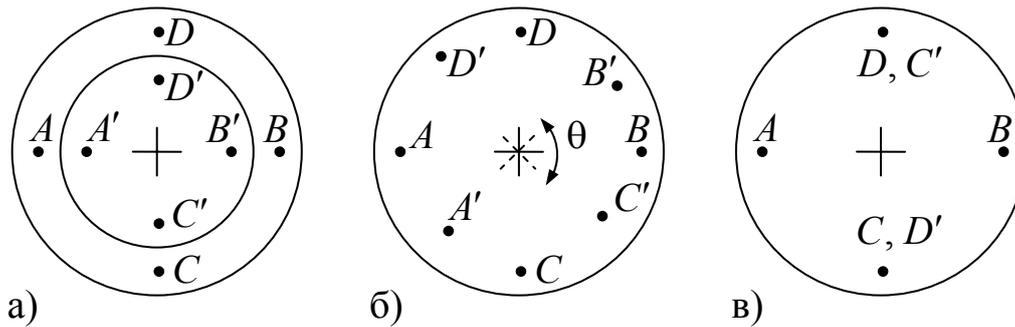


Рис.5.24. Три метода получения сдвига между волновыми фронтами:  
а) – радиального; б) – вращения; в) – реверсивного

В интерферометре радиального сдвига образуются два интерферирующих волновых фронта, имеющих идентичные деформации, но сжатые или расширенные относительно друг друга. Интерферометр поворотного сдвига образует два одинаковых взаимно повернутых волновых фронта. Интерферометр реверсивного сдвига создаёт два волновых фронта, деформации которых симметричны друг другу относительно диаметра как оси симметрии.

Интерферометры бокового (поперечного) сдвига, являясь важной областью общей интерферометрии, широко применяются при исследовании оптических деталей и систем, при изучении потоков и явлений диффузии в газах и жидкостях. Основной принцип этой интерферометрии заключается в амплитудном делении волнового фронта и получении интерференционной картины между ними при последующем небольшом смещении полученных волновых фронтов относительно друг друга, как показано на рис.5.25.

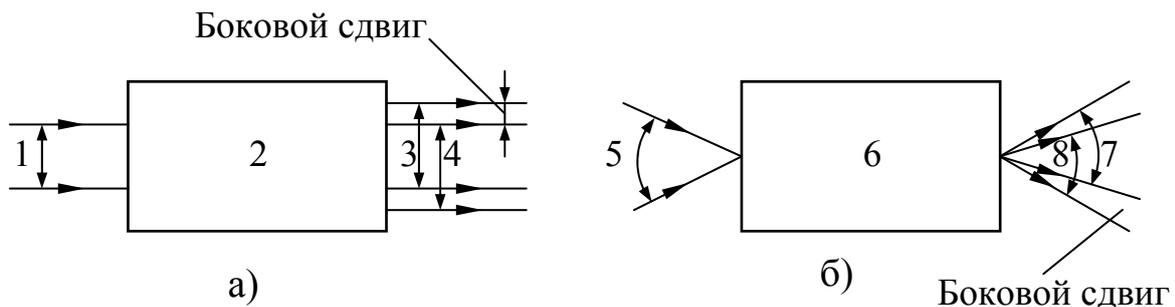


Рис.5.25. Схематическое изображение бокового сдвига с коллимированным а) и сходящимся б) ходами лучей: 1, 3, 5, 7 – исходный волновой фронт; 2 – интерферометр бокового сдвига с параллельным ходом лучей; 4, 8 – волновой фронт с боковым сдвигом; 6 – интерферометр бокового сдвига со сходящимся ходом лучей

Если номинальная форма поверхности исходного волнового фронта плоская, то боковой сдвиг достигается его смещением в собственной плоскости, а при сферической форме – смещением волнового фронта относительно собственного исходного положения

путём вращения вокруг оси, проходящей через центр его кривизны. Принцип работы интерферометра сдвига рассмотрим на примере схемы, представленной на рис.5.26.

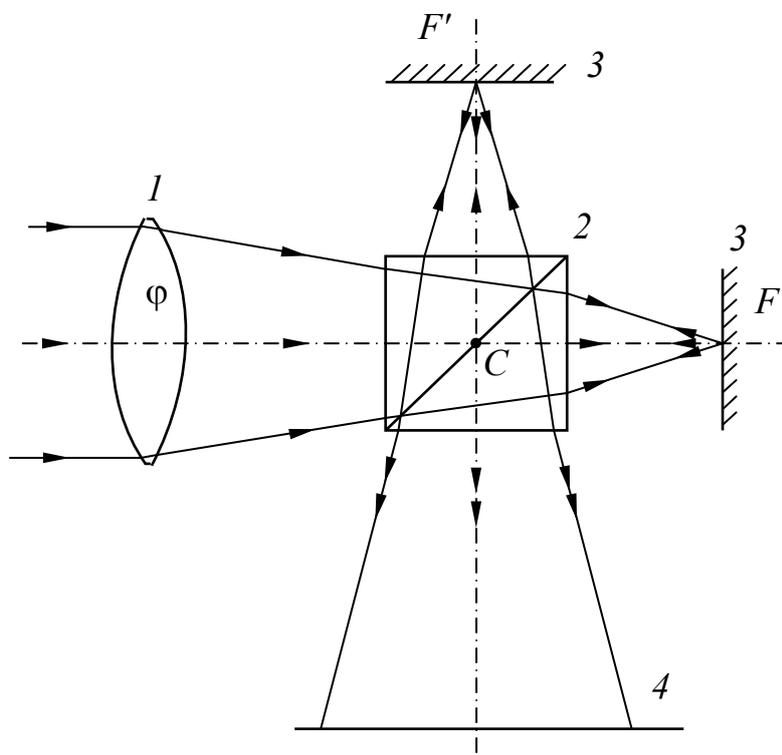


Рис.5.26. Принципиальная схема интерферометра сдвига

Пусть на исследуемую оптическую систему 1, например, объектив, падает плоский волновой фронт, в общем случае отличающийся от сферического. Кубик 2 с полупрозрачной гипотенузной гранью делит пучок световых лучей на два и направляет полученные пучки к плоским зеркалам 3. Задний фокус исследуемой системы совмещён с плоскостью зеркала 3. Лучи света, отражённые от зеркал 3, возвращаются на светоделительный кубик 2 и направляются к экрану 4, на котором возникает интерференционная картина. Вид, форма и расположение интерференционных полос зависят как от деформации исследуемого волнового фронта, так и от настройки интерферометра. Если зеркала 3 расположены на равных расстояниях от осевой точки  $C$  деления пучков в кубике 2, то поворотом одного из зеркал 3 вокруг точки  $F'$  можно получить интерференционную картину при боковом сдвиге волновых фронтов. При параллельном смещении вдоль оси одного из зеркал 3, т.е. при неодинаковых расстояниях зеркал 3 от осевой точки деления пучков, можно получить интерференционную картину при радиальном сдвиге волновых фронтов.

Таким образом, интерференционная картина, образованная в интерферометре сдвига, во всех случаях является результатом сложения двух совершенно одинаковых, но смещённых один относительно другого волновых фронтов, полученных с помощью разделительного элемента. В качестве разделительных элементов применяют поляризационные призмы, зеркала, клинья, дифракционные решётки и другие оптические элементы.

Принципиально схему интерферометра бокового сдвига с параллельным ходом лучей можно построить, используя схему циклического интерферометра, в котором два когерентных пучка световых лучей распространяются во встречных направлениях и, в конечном счёте, интерферируют. В этом смысле, например, интерферометр Харихарана и Сена с треугольным ходом параллельных лучей может рассматриваться как типичный циклический интерферометр, в котором боковой сдвиг волновых фронтов достигается параллельным смещением одного из плоских зеркал, как показано на рис.5.27.

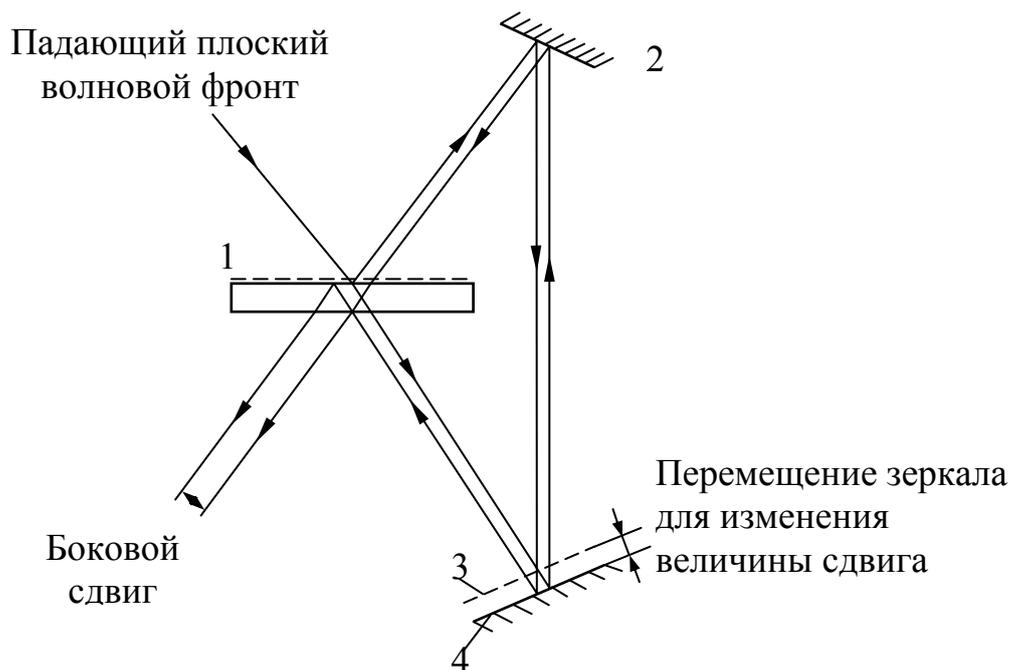


Рис.5.27. Интерферометр с треугольным ходом лучей: 1 – полупрозрачное покрытие; 2, 4 – плоское зеркало; 3 – положение зеркала 4 при нулевом сдвиге

Рассмотрим образование интерференционной картины при сложении двух волновых фронтов  $L_1$  и  $L_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$ , смещёнными на величину  $s$ , как показано на рис.5.28, и определим форму волнового фронта по интерферограмме бокового сдвига.

Будем считать, что отклонения исходного волнового фронта от плоскости определяются его малыми деформациями, равными

$W(x, y)$ , где  $x, y$  – координаты произвольной точки  $P$ . При смещении волнового фронта на величину  $s$  в направлении, например, оси  $x$  его деформация в точке  $P$  будет равна  $W(x-s, y)$ , а результирующая разность хода  $\Delta W$  для двух волновых фронтов определится разностью  $W(x, y) - W(x-s, y)$ .

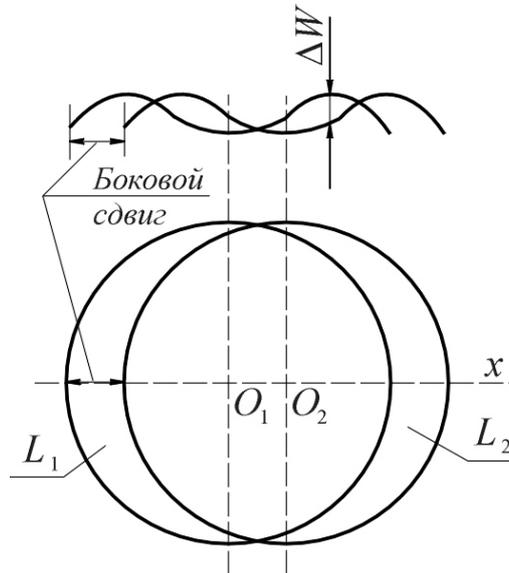


Рис.5.28. Сдвиг волновых фронтов в пределах круглой апертуры

Именно величина  $\Delta W$  и определяется в интерферометрии бокового сдвига. Вполне очевидно, что при  $s = 0$  в любой точке волнового фронта разность хода отсутствует, а, следовательно, невозможно при этом оценить деформацию волнового фронта какой бы большой она ни была. Результат интерференции волновых фронтов в каждой точке интерференционной картины можно оценить из простого соотношения

$$\Delta W = m\lambda, \quad (5.73)$$

где  $m$  – порядок интерференции полосы;  $\lambda$  – длина волны используемого света. Заметим, что при малых значениях смещения  $s$  уравнение (5.73) можно записать в виде

$$s \frac{\partial W}{\partial x} = m\lambda, \quad (5.74)$$

т.е. интерферометр бокового сдвига даёт информацию об аберрации луча в угловой мере. Равенство (5.74) становится более точным при  $s \rightarrow 0$ . Однако, при этом снижается точность измерения. Следовательно, исходя из требуемой в каждом конкретном случае точности, необходимо находить оптимальное значение  $s$ .

Пусть диаметральные сечения волновых фронтов осевой плоскостью по линии  $O_1O_2$  имеют вид, представленный на рис.5.29

первыми двумя кривыми, смещёнными друг относительно друга на величину  $s$ . Разобьём сечения волновых фронтов на отрезки, равные сдвигу  $s$ , и проведём вертикальные линии между обоими сечениями, как показано на рисунке. По методу, предложенному Сондерсом, оценивают порядок интерференции в равноудалённых точках вдоль диаметра и затем определяют сечение волнового фронта, как показано на рис.5.29, полагая  $W_1 = 0$ ;  $W_2 = W_1 + \Delta W_1 = \Delta W_1$ ;  $W_3 = W_2 + \Delta W_2 = \Delta W_1 + \Delta W_2$  и т.д. Этот метод был распространён на двумерный случай. Форму волнового фронта можно определить, используя метод, основанный на предположении, что неизвестный волновой фронт  $W(x, y)$  представляет собой "гладкую" функцию, описываемую полиномом, коэффициенты которого выражают интерферометрическую функцию  $\Delta W(x, y)$ . Измеряя положения интерференционных полос, определяют значения  $\Delta W$  и по ним вычисляют искомые коэффициенты.

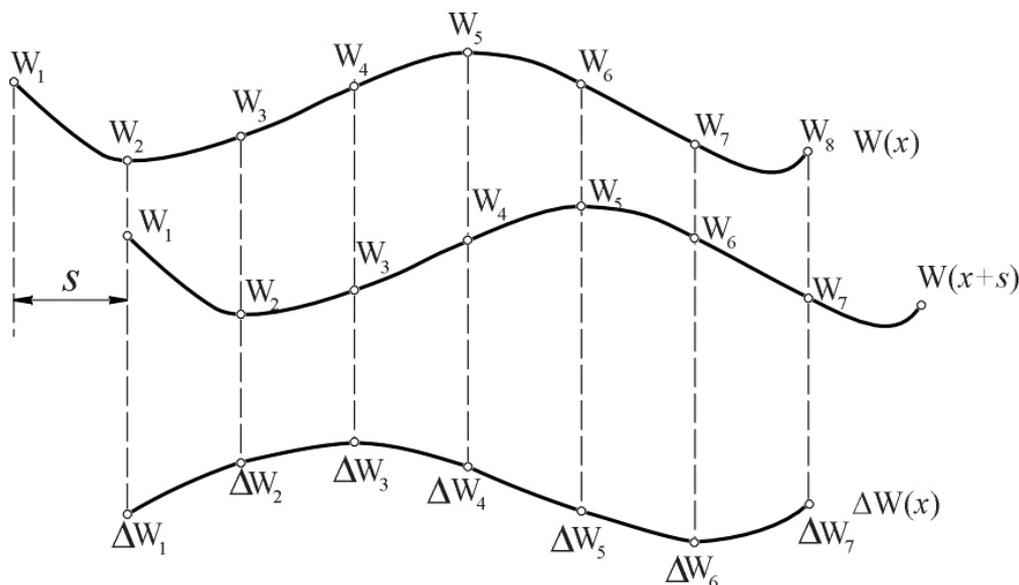


Рис.5.29. Определение формы волнового фронта по интерферограмме бокового сдвига

Этот метод получил применение при определении формы волнового фронта вдоль диаметра, параллельного направлению сдвига, т.е. при определении сечения волнового фронта плоскостью. Малакара и Мендес использовали его для поверхностей вращения. Принципиально метод аппроксимации поверхности волнового фронта полиномом вполне применим и в случае двумерного варианта.

Пусть волновой фронт определяется функцией  $W(x, y)$ , которую можно представить двумерным полиномом степени  $k$ , содержащим  $N = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  членов, в виде:

$$W(x, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} x^m y^{n-m}. \quad (5.75)$$

В этом случае для восстановления волнового фронта необходимы две интерферограммы, полученные в результате сдвига волнового фронта в двух взаимно перпендикулярных направлениях на величину  $s$  и  $t$  соответственно. При этом сдвинутые волновые фронты можно определить выражениями вида:

$$W(x+s, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} (x+s)^m y^{n-m} \quad (5.76)$$

$$W(x, y+t) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} x^m (y+t)^{n-m}. \quad (5.77)$$

Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$(x+s)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} s^j, \quad (5.78)$$

где биномиальный коэффициент

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{(m-j)! j!}. \quad (5.79)$$

Уравнения (5.76) и (5.77) можно преобразовать к виду

$$W(x+s, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m B_{nm} \binom{m}{j} x^{m-j} y^{n-m} s^j \quad (5.80)$$

$$W(x, y+t) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^{n-m} B_{nm} \binom{n-m}{j} x^m y^{n-m-j} t^j. \quad (5.81)$$

Учитывая, что эти функции при  $j=0$  равны  $W(x, y)$ , в результате преобразований получаем

$$\Delta W_s = W(x+s, y) - W(x, y) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^n C_{nm} x^m y^{n-m}, \quad (5.82)$$

$$\Delta W_t = W(x, y+t) - W(x, y) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^n D_{nm} x^m y^{n-m}, \quad (5.83)$$

где

$$C_{nm} = \sum_{j=1}^{k-n} \binom{j+m}{j} s^j B_{j+n, j+m}; \quad (5.84)$$

$$D_{nm} = \sum_{j=1}^{k-n} \binom{j+n-m}{j} t^j B_{j+n,m}. \quad (5.85)$$

В результате обработки интерферограмм находим значения величин  $\Delta W_s$  и  $\Delta W_t$ , входящих в уравнения (5.82) и (5.83). Решив систему уравнений (5.82) и (5.83), получаем значения коэффициентов  $C_{nm}$  и  $D_{nm}$ , что, в свою очередь, позволяет в результате решения системы уравнений (5.84) и (5.85) найти значения коэффициентов  $B_{nm}$ , определяющих форму волнового фронта. Если волновой фронт обладает симметрией вращения, то  $B_{n0} = B_{nn} = 0$  для всех значений  $n$ . При этом достаточно иметь только одну интерферограмму и использовать уравнения (5.82) и (5.84) или (5.83) и (5.85).

Сохранив принцип получения интерферометрической функции  $\Delta W$ , саму функцию  $W$ , определяющую деформацию волнового фронта, может оказаться удобным представить в виде разложения по ортогональным полиномам Цернике.

Принципиальная схема интерферометра с компенсатором в параллельном пучке лучей для контроля несферических поверхностей представлена на рис.5.30.

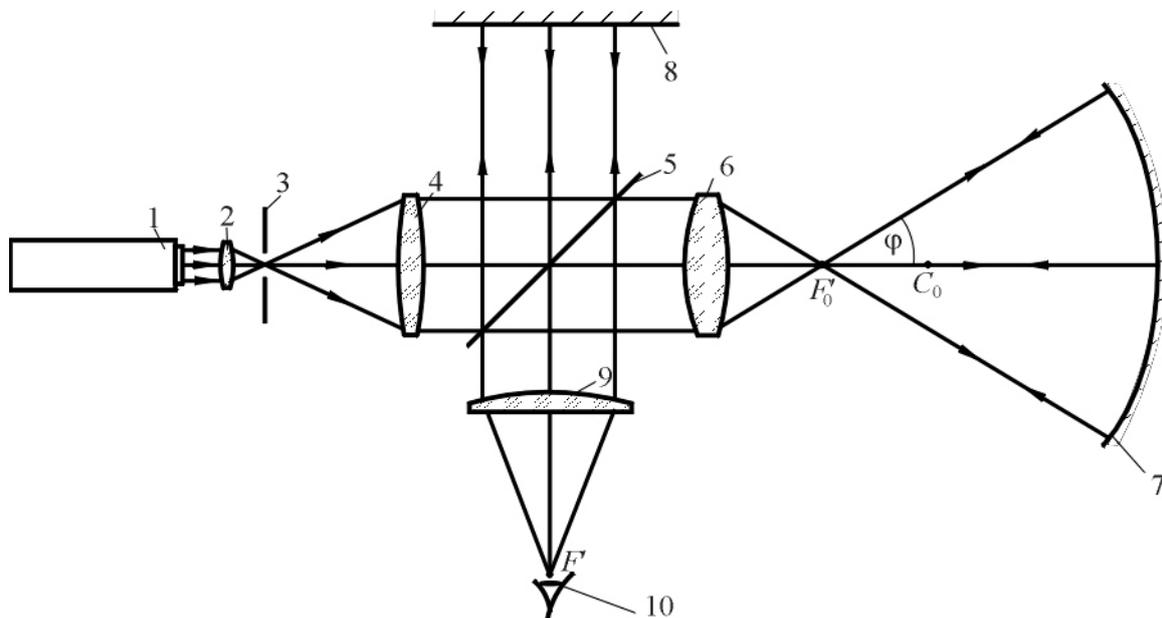


Рис.5.30. Схема интерферометра с компенсатором в параллельном пучке лучей: 1 – лазерный источник излучения; 2 – фокусирующая линза; 3 – диафрагма; 4 – объектив коллиматора; 5 – светоделительная пластина; 6 – компенсатор; 7 – контролируемая несферическая поверхность; 8 – эталонное зеркало; 9 – глазная линза; 10 – глаз наблюдателя

Ход лучей в интерферометре вполне очевиден из схемы. В качестве источника света 1 наиболее часто применяют гелий-

неоновый лазер, работающий в одномодовом режиме. Для фокусировки излучения на диафрагме 3, расположенной в передней фокальной плоскости объектива 4 коллиматора, применяют либо простую линзу 2, либо микрообъектив с соответствующей апертурой. Объектив 4 коллиматора формирует параллельный пучок световых лучей (плоский волновой фронт), поступающий в интерферометр. Отличием рассматриваемого интерферометра от интерферометра Тваймана-Грина является устройство рабочей ветви, в которой установлены компенсатор 6 и контролируемая поверхность 7. Компенсатор преобразует плоский волновой фронт, падающий на него, в волновой фронт, эквидистантный контролируемой поверхности при номинальной её форме. При этом задний фокус  $F'_0$  компенсатора совмещён с центром кривизны  $C_0$  при вершине контролируемой поверхности, а любой луч, выходящий из компенсатора под углом  $\varphi$  к оптической оси, направлен по нормали к ней. Если контролируемая поверхность имеет идеальную форму, то лучи, отразившись от неё, повторяют свой путь в обратном направлении, а, следовательно, из компенсатора выходит плоский волновой фронт. Волновой фронт, выходящий из компенсатора, после отражения от разделительной пластинки 5 интерферирует с плоским волновым фронтом, идущим из эталонной ветви от плоского зеркала 8. Поместив зрачок глаза 10 в задней фокальной плоскости объектива 9, наблюдают интерференционную картину, отображающую отклонение реальной формы контролируемой несферической поверхности от номинальной. Поместив входной зрачок объектива фотоаппарата в фокальной плоскости объектива 9, можно зафиксировать изображение наблюдаемой интерференционной картины для последующей её обработки.

При центрированной схеме интерферометра интерференционная картина имеет вид колец, при этом качество колец, расстояние от оптической оси до каждого из них и отклонение колец от окружности вполне определяют погрешности формы контролируемой поверхности. Действительно, расстояние между светлыми или тёмными кольцами на интерференционной картине (интерферограмме) соответствует оптической разности хода соответствующих лучей в рабочей и эталонной ветвях интерферометра, равной  $\lambda$ . Однако, отдельно взятая интерферограмма не несёт информации о знаке оптической разности хода и об изменении его в пределах поля интерферограммы. Сопоставительный анализ рассматриваемой интерферограммы с

интерферограммой, полученной при дозированном смещении вдоль оптической оси поверхности сравнения на расстояние порядка  $\frac{1}{4}\lambda$ , позволяет достаточно опытному исследователю оценить знак разности хода. Решить эту задачу можно методически гораздо проще.

Пусть в некотором сечении меридиональной плоскостью деформация волнового фронта в пределах контролируемой поверхности изменяет знак и определяется кривой, показанной на рис.5.31. Если зеркало сравнения 8 (рис.5.30) наклонить на малый угол  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка в точке пересечения поверхности зеркала с оптической осью, то к деформации волнового фронта, определяемой кривой  $W$  на рис.5.31, добавится оптическая разность хода  $W_3 = 2 \frac{D_3}{2} \rho \operatorname{tg} \omega = D_3 \rho \operatorname{tg} \omega$ , где  $D_3$  – диаметр светового пучка лучей в эталонной ветви интерферометра.

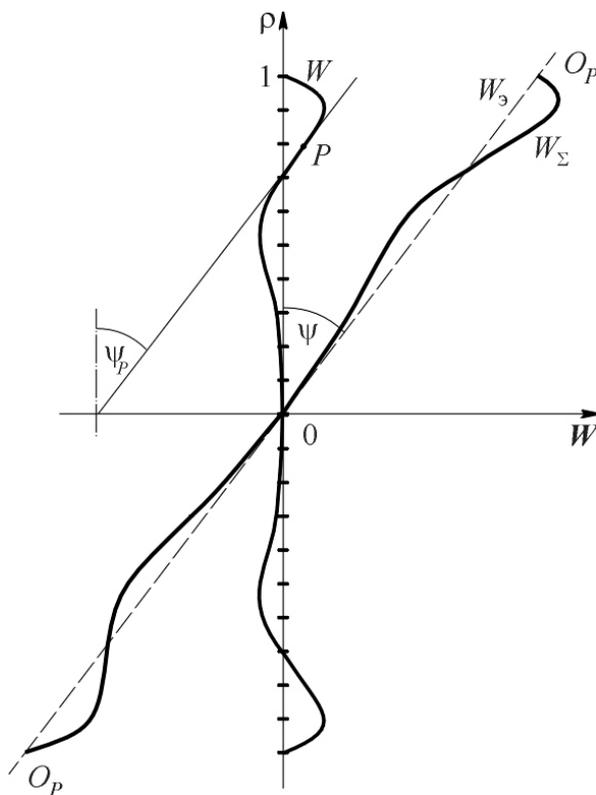


Рис.5.31. Условие преобразования интерференционной картины, определяющее однозначность её расшифровки

Дополнительная оптическая разность хода  $W_3$  на рис.5.31 определяется прямой линией  $O_p O_p$ , образующей с осью ординат угол  $\psi$ , тангенс которого равен  $\operatorname{tg} \psi = \frac{\partial W_3}{\partial \rho} = D_3 \operatorname{tg} \omega$ . При этом суммарная

оптическая разность хода  $W_{\Sigma} = W + W_0$  на рис.5.31 определяется кривой  $W_{\Sigma}(\rho)$ . Если тангенс угла  $\psi$  равен по величине и по знаку наибольшей по абсолютной величине производной кривой  $W = W(\rho)$ , например, в точке  $P$ , т.е. если  $\left| \operatorname{tg} \varphi_P \right| = \left| \frac{dW}{d\rho} \right|_{\text{наиб}}$ , то зависимость  $W_{\Sigma} = W_{\Sigma}(\rho)$  становится монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией. Заметим, кстати, что меридиональная составляющая поперечной аберрации равна

$$\delta g' = \frac{1}{\sin \sigma'} \frac{dW}{d\rho},$$

где  $\sigma'$  – угловая апертура луча, выходящего из объектива 9 коллиматора. Следовательно,

$$\left| \operatorname{tg} \psi \right| = \left| \delta g' \sin \sigma' \right|_{\text{наиб}}.$$

Вполне очевидно, что при  $W_{\Sigma} = W_{\Sigma}(\rho)$  интерференционная картина будет иметь вид интерференционных полос, как показано на рис.5.32, при этом оптическая разность хода в соответствующей точке контролируемой поверхности определится числом полос до неё, умноженном на  $\lambda$ . От полученной таким образом кривой суммарной оптической разности хода аналитически или графически легко перейти к собственно деформации волнового фронта, обусловленной отклонением формы контролируемой поверхности от номинальной.



Рис.5.32. Вид интерференционной картины

Определив значения деформации волнового фронта для ряда меридиональных (радиальных) сечений контролируемой (исследуемой) поверхности, можно аппроксимировать её для всей поверхности, например, системой ортогональных полиномов

Цернике. В результате получим функциональную зависимость, которую можно принять в качестве зрачковой функции. Преобразование Фурье зрачковой функции, как известно, с точностью до постоянной величины определяет световое возмущение  $u(x', y')$  в изображении точки. Распределение освещённости в изображении точки определяется произведением комплексно сопряжённых величин, определяющих световое возмущение, т.е.  $E(x', y') = u(x', y')u^*(x', y')$ .

При этом функция рассеяния точки определится очевидным соотношением вида:

$$D(x', y') = \frac{E(x', y')}{\iint_{-\infty}^{\infty} E(x', y') dx' dy'}$$

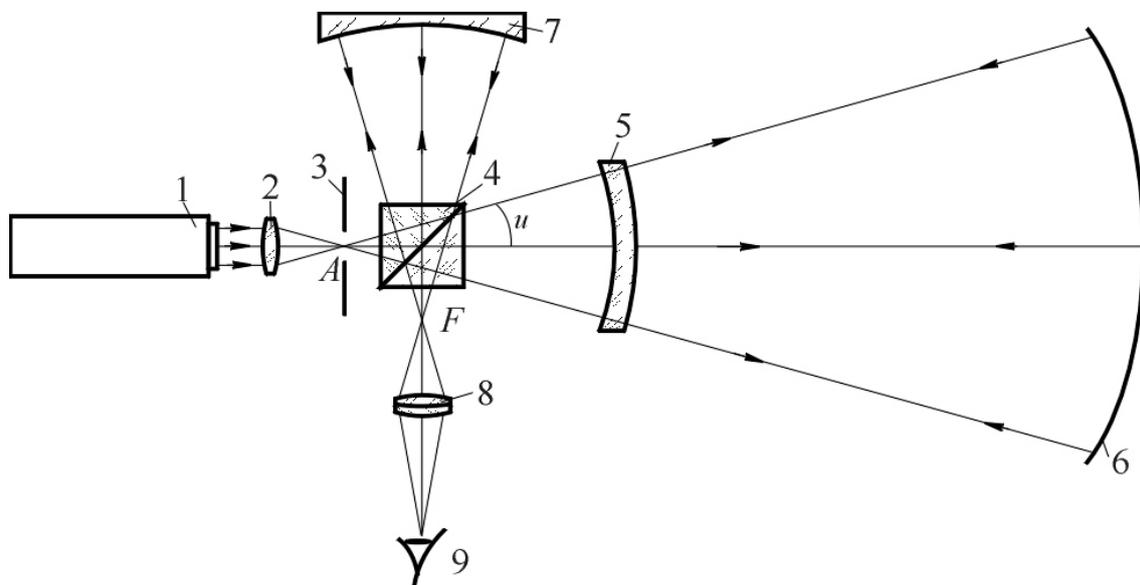


Рис.5.33. Схема лазерного интерферометра с компенсатором в расходящемся пучке лучей: 1 – лазерный источник излучения; 2 – фокусирующая линза; 3 – диафрагма; 4 – разделительная призма-куб; 5 – компенсатор; 6 – контролируемая асферическая поверхность; 7 – эталонное сферическое зеркало; 8 – глазная линза; 9 – глаз наблюдателя

Достаточно широко применяются интерферометры с компенсатором в расходящемся пучке лучей, типовая схема которых представлена на рис.5.33. И в этом случае в качестве источника света наиболее часто применяют гелий-неоновый лазер. Компенсатор 5, предназначенный для контроля несферической поверхности 6, установлен в расходящемся пучке лучей, исходящих из диафрагмы 3. В качестве эталонного зеркала 7 применяют вогнутое сферическое зеркало. Для наблюдения интерференционной картины зрачок 8 глаза

наблюдателя располагают в плоскости изображения диафрагмы 3 (точка  $A'$ ). Важно отметить, что светоделительный кубик 4 должен удовлетворять высоким требованиям, предъявляемым к точности углов призм, составляющих кубик, и к качеству обработки их рабочих граней. По своим абберационным свойствам идеально изготовленный кубик эквивалентен плоскопараллельной пластинке, которая, будучи расположенной в расходящемся или сходящемся пучке лучей, нарушает его гомоцентричность. И хотя в рабочую и эталонную ветви интерферометра направляется одинаково искажённый волновой фронт, при достаточно больших апертурных углах световых пучков лучей абберации ветвей интерферометра далеко не всегда компенсируются при образовании интерференционной картины. Поэтому можно рекомендовать такие интерферометры в качестве средства для контроля несферических поверхностей при числовых апертурах пучков световых лучей, не превышающих  $0,1 \div 0,15$ .

Интерференционный метод контроля несферических поверхностей незаменим особенно на заключительной стадии их обработки.

### 5.5. Метод изофотометрической фоторегистрации

Наиболее полное представление о качестве изображения, образованного исследуемой оптической системой, даёт двумерное распределение освещённости в изображении точечного объекта в виде дифракционно-абберационного пятна рассеяния. Нормированное к виду:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = 1,$$

где  $x'_0, y'_0$  – координаты параксиального изображения точки, пятно рассеяния называется функцией рассеяния точки (ФРТ). Таким образом, ФРТ можно интерпретировать как изображение точечного источника излучения, в котором распределён поток излучения, равный единице.

Визуальное наблюдение и фотографирование пятна рассеяния не позволяют получить достаточно объективного представления о структуре пятна рассеяния и распределении освещённости в нём. Непосредственное фотометрирование пятна рассеяния путём сканирования "точечной" диафрагмой сопряжено с проблемой измерения слабых сигналов. Известным методом фотографической фотометрии является регистрация имеющегося распределения

освещённости на малоконтрастном фотоматериале, обладающем значительным диапазоном полезных экспозиций. Одновременно определяется калибровочная (характеристическая) кривая фотоматериала

$$D = f(\lg Et),$$

где  $D$  – оптическая плотность почернения;  $E$  – освещённость;  $t$  – время экспозиции.

Микрофотометрирование с последующим переводом плотностей почернения в значения освещённостей при помощи характеристической кривой позволяет с достаточной точностью воспроизвести форму данного распределения освещённости в пределах, соответствующих линейному участку кривой. Однако, трудоёмкость этой операции высока, а диапазон исследуемых освещённостей невелик из-за ограниченности диапазона полезных экспозиций характеристической кривой фотоматериала.

Распределение света в изображении точки можно оценить путём получения фотометрических сечений, соответствующих различным уровням равной освещённости в пятне рассеяния. Такую оценку можно осуществить путём применения метода изофотометрической фоторегистрации, позволяющего получать изофотограмму распределения освещённости в пятне рассеяния при перепадах освещённости, достигающих четырёх порядков и более, а также кривые распределения освещённости в любом сечении пятна рассеяния и вычислить относительное распределение светового потока в нём. Получение фотометрических сечений оптического изображения точки в необходимом диапазоне освещённостей достигается путём использования высококонтрастного фотографического процесса, позволяющего сузить до требуемого значения диапазон полезных экспозиций. При этом в пределе фотоматериал реагирует на некоторое значение экспозиции, достижение которого приводит к переходу оптической плотности почернения  $D$  из области недодержек в область передержек, т.е. к переходу  $D_0$  в  $D_{\max}$ . По существу фотоматериал играет роль двоичного датчика, фиксирующего накопление заданного уровня световой энергии, как показано на рис.5.34.

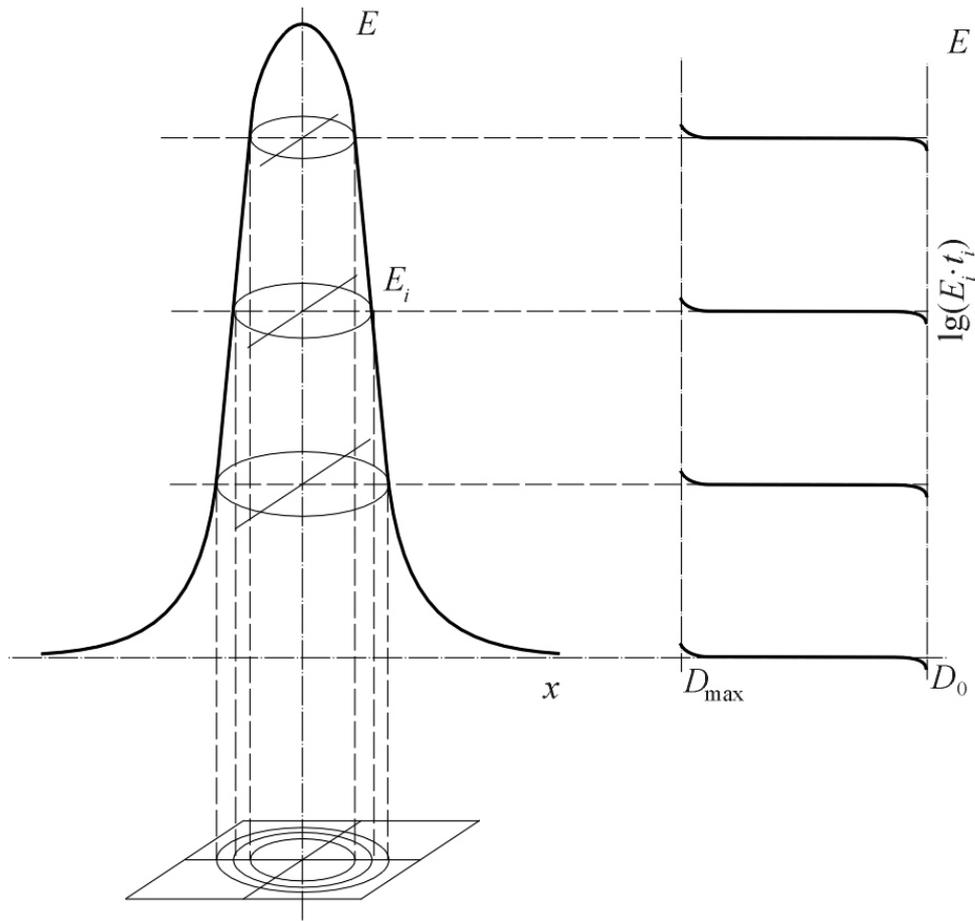


Рис.5.34. Фоторегистрация пятна рассеяния

Пусть фотоматериал в рабочем диапазоне времени экспозиции удовлетворяет закону Шварцшильда  $Et^p = const$ . Коэффициент Шварцшильда  $p$  определяется экспериментально для данного фотоматериала при данных условиях экспонирования и обработки. Пусть в результате серии экспозиций увеличенного изображения пятна рассеяния установлено, что время экспозиции, соответствующее максимуму освещённости в пятне рассеяния, равно  $t_{\min}$ , т.е.  $E_{\max} = ct_{\min}^{-p}$ , где  $c$  – некоторая константа. При этом относительная освещённость в некотором сечении пятна рассеяния при времени экспозиции  $t = t_i$  равна

$$\tilde{E}_i = \frac{E_i}{E_{\max}} = t_{\min}^p t_i^{-p}.$$

Пусть  $t_i = t_{\min} 2^k$ . При этом  $\tilde{E}_i = 2^{-kp} = 2^{-i}$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Отсюда следует, что уменьшение освещённости в сечениях пятна рассеяния будет кратным двум, если время экспозиции будет увеличиваться с кратностью  $2^{\frac{i}{p}}$ .

Для получения изофотограмм на фотоматериале делается серия экспозиций увеличенного изображения пятна рассеяния по шкале времени с кратностью  $2^i$  (или  $2^p$  при соблюдении закона взаимозаменяемости  $Et = const$ ). Полученные негативы печатаются контактно за одну экспозицию на сверхконтрастном фотоматериале. С полученных отпечатков производится повторная печать на том же материале и при тех же условиях экспонирования и проявления. Для получения изофот с последних отпечатков производится аналогичная константная печать для выделения эквиденсит с  $D \approx 1,5$ . Для этого производится первое проявление, ополаскивание, равномерная засветка в чёрной кювете с водой при положении пластинки эмульсионным слоем вверх, второе проявление и, наконец, фиксирование. В результате последовательной фотопечати практически был достигнут суммарный коэффициент контрастности изофот, равный 160. Путём последовательной печати всех изофот на одном отпечатке можно получить изофотограммы распределения освещённости в исследуемом изображении точки, например, в виде, показанном на рис.5.35. Используя изофотограммы, можно получать кривые распределения освещённости и светового потока в изображении точки.

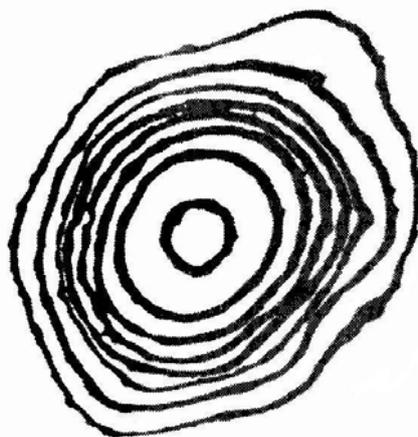


Рис.5.35. Изофотограмма пятна рассеяния

При размере фотометрического сечения пятна рассеяния на негативе не менее 1 мм метод изофотометрии позволяет оценить распределение освещённости в пятне с погрешностью порядка 2 %.

Развитие телевизионной и вычислительной техники позволяет в некоторых случаях заменить фотографическую изофотометрию телевизионной, что позволяет существенно снизить трудоёмкость получения изофот и автоматизировать их обработку.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агурок И.П., Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В. Оптимальная компенсация погрешностей изготовления астрономических зеркал юстировкой телескопа. Журнал «ОМП», 1980, №7. С. 17-19.
2. Бахолдин А.В., Зверев В.А., Карпова Г.В., Нечаева Н.А. Определение технологических параметров несферических поверхностей второго порядка на модели эквидистантного волнового фронта. «Оптический журнал», том 67, №12, 2000. С. 59-62.
3. Грамматин А.П., Зверев В.А. Интерферометрический контроль выпуклых гиперболоидальных зеркал. «Оптический журнал», том 67, №4, 2000. С. 76-78.
4. Гуриков В.А. Становление прикладной оптики XV-XIX вв. М.: «Наука», 1983. 188 с.
5. Гуриков В.А. История прикладной оптики. М.: «Наука», 1993. 176 с.
6. Зверев В.А., Кирилловский В.К., Сокольский М.Н. Применение изофотометрической регистрации при исследованиях и аттестации главного зеркала БТА. Журнал «ОМП», 1976, №12. С. 6-8.
7. Зверев В.А., Сокольский М.Н., Родионов С.А., Орлов П.В., Кирилловский В.К. Голографический интерферометр для контроля формы поверхности. Материалы краткосрочного семинара 17-18 мая 1977 года в ЛДНТП «Опыт внедрения прогрессивных методов и средств размерного контроля». Л., 1977. 84 с.
8. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В. Математические основы гартмановского теста главного зеркала БТА. Журнал «ОМП», 1977, №2. С. 18-22.
9. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В. Технологический контроль главного зеркала БТА методом Гартмана. Журнал «ОМП», 1977, №3. С. 3-5.
10. Зверев В.А., Орлов П.В., Родионов С.А., Сокольский М.Н. и Кирилловский В.К. Интерферометр для контроля погрешностей формы вогнутых сферических поверхностей. Авторское свидетельство СССР № 564520. Бюллетень изобретений, № 25, 1977.
11. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В. Исследование главного зеркала БТА в обсерватории. Журнал «ОМП», 1977, №4. С. 3-5.

12. Зверев В.А., Кирилловский В.К., Сокольский М.Н., Болдырев Н.И. и Маларёв В.А. Устройство для контроля качества изображения оптической системы. Авторское свидетельство СССР № 637758. Бюллетень изобретений, № 46, 1978.

13. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Ермакова З.И. и Королько Б.С. Интерферометр для исследования качества оптических элементов и прозрачных неоднородностей. Авторское свидетельство СССР № 625132. Бюллетень изобретений, № 35, 1978.

14. Зверев В.А., Агурок И.П., Родионов С.А., Сокольский М.Н. Автоматизация обработки интерферограмм при контроле оптических систем. Журнал «ОМП», 1978, №9. С. 7-10.

15. Зверев В.А., Кашерининов Р.М., С.А. Родионов, Сокольский М.Н. и Усоскин В.В. Телескоп. Авторское свидетельство СССР №652518. Бюллетень изобретений, № 10, 1979.

16. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В. Применение диафрагмы Гартмана в сходящемся пучке лучей при исследовании телескопов в обсерватории. Журнал «ОМП», 1980, №2. С. 48-49.

17. Зверев В.А., Кирилловский В.К., Сокольский М.Н., Болдырев Н.И. и Маларёв В.А. Устройство для контроля качества изображения оптических систем. Авторское свидетельство СССР № 779838. Бюллетень изобретений, № 42, 1980.

18. Зверев В.А. Основы геометрической оптики. СПбГИТМО (ТУ), Санкт-Петербург, 2002. 218 с.

19. Зверев В.А., Соболев К.Ю. Определение допусков на некоторые общие параметры схем контроля поверхностей вращения второго порядка. «Оптический журнал», том 64, №2, 1997. С. 83-85.

20. Зверев В.А., Нечаева Н.А., Тимошук И.Н. Допустимые отклонения обрабатываемых поверхностей от номинальной формы. «Оптический журнал», том 70, №8, 2003. С. 75-86.

21. Зверев В.А., Романова Г.Э. Несферические поверхности в оптике и проблемы их аппроксимации. «Оптический журнал», том 72, №10, 2005. С. 29-40.

22. Зверев В.А., Кривоустова Е.В. Анализ схемы контроля вогнутых поверхностей вращения несферической формы компенсационным методом. «Оптический журнал», том 71, №11, 2004. С. 40-46.

23. Кашерининов Р.М., Зверев В.А., Кирилловский В.К. и Сокольский М.Н. Способ контроля оптических систем. Авторское свидетельство СССР № 574656. Бюллетень изобретений, № 36, 1977.

24. Линник В.П. Способ исследования параболических зеркал и астрономических объективов. «Труды Государственного оптического института им. С.И. Вавилова». Т. VII, 1931, вып. 67, с.15.
25. Максutow Д.Д. Изготовление и исследование астрономической оптики. Л.-М., Гостехиздат, 1948. 280 с.
26. Михельсон Н.Н. Оптические телескопы. Теория и конструкция. М.: «Наука», 1976, 512 с.
27. Оптический производственный контроль. Под ред. Д. Малакары. М. «Машиностроение», 1985. 400 с., ил.
28. Пуряев Д.Т. Методы контроля оптических асферических поверхностей. М.: «Машиностроение», 1976. 262 с.
29. Puryayev D.T. Afokal two-mirror system // Opt. Engin. 1993. V.32. №6. P. 1325-1327.
30. Русинов М.М. Несферические поверхности в оптике. М.: «Недра», 1973. 296 с.
31. Русинов М.М. Несферические поверхности в оптике. Расчёт, изготовление, контроль. М.: «Недра», 1992. 256 с., ил.
32. Слюсарев Г.Г. Методы расчёта оптических систем. Л.: «Машиностроение», 1969. 672 с.
33. Тараненко В.Г., О.И. Шанин. Адаптивная оптика. М.: «Радио и связь», 1990. 112 с., ил.
34. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов. М.-Л.: «Машиностроение», 1996. 564 с.
35. Чуриловский В.Н. Теория хроматизма и аберраций третьего порядка приборов. Л.: «Машиностроение», 1998. 312 с.
36. Couder A. Procédé d'Examen d'un Miroir Concave Non-spherique. «Revue d'Optique theorique et instrumentale», 1927, ann.6, №2, pp.49-55.
37. Dall H.E. A Null Test for Paraboloids. – In: Amateur Telescopes Making (Book Three). Scientific American, New York, 1953, pp.149-153.
38. Ross F.E. Parabolizing mirrors without a flat. «Astrophysical Journal», vol.98, 1943, №6, pp.341-346.
39. Offner A. A Null Corrector for Paraboloidal Mirrors. «Applied Optics», vol.2, February 1963, №2, pp.153-155.
- Offner A. Field Lenses and Secondary Axial Aberration, Appl. Opt., 8, 1735 (1969).

Кафедра прикладной и компьютерной оптики была образована в 1996 году путем объединения двух старейших кафедр оптического факультета: кафедры теории оптических приборов и кафедры оптических приборов и компьютерной оптики, в результате чего кафедра стала крупнейшей и ведущей в России в области прикладной оптики, оптических приборов и компьютерной оптики.

Кафедра имеет восемь учебно-исследовательских лабораторий: оптических измерений, контрольно-измерительных оптических приборов, микроскопов и медицинских оптических приборов, геодезических приборов, кинофотоприборов, компьютерных средств контроля оптики, исследования качества оптического изображения, а также лабораторию компьютерной оптики. На кафедре работают два сетевых компьютерных класса.

В учебном процессе используются научный потенциал и лабораторная база крупнейшего в России научного центра в области оптики – ВНИЦ ГОИ им. С.И.Вавилова, ведущего оптического предприятия – ОАО "ЛОМО".

В списке достижений кафедры: создание широкоугольных аэрофотосъёмочных объективов с улучшенным светораспределением по полю и приборов обработки аэрофотоснимков (М.М. Русинов, Н.А. Агальцова), превосходящие зарубежные аналоги гидросъёмочные объективы (М.М. Русинов, П.Д. Иванов, Л.Н. Кручинская), методы и средства контроля главного зеркала телескопа БТА (В.А. Зверев, С.А. Родионов, В.В. Усоскин), металлостеклянная оптика (И.И. Крыжановский, С.М. Никитин), оптика для космического проекта «Вега» (Г.И. Цуканова), высокоскоростные кинокамеры для научных исследований (И.И. Крыжановский, В.И. Решеткин), компьютерные пакеты автоматизированного проектирования оптики (С.А. Родионов с сотрудниками). Эти достижения в своё время были отмечены двумя ленинскими премиями, пятью государственными премиями, премией Совета Министров СССР, премией французской академии наук.

В настоящее время кафедра ведёт подготовку специалистов и научную работу в следующих взаимосвязанных направлениях:

- теория и проектирование оптических систем, традиционно называемые вычислительной оптикой;
- оптические измерения и контроль оптических элементов и систем;
- оптические приборы, включая общую теорию, микроскопы и контрольно-измерительные приборы, геодезические приборы, офтальмологическая оптика;
- математические методы, алгоритмы, программы и компьютерные системы решения оптических задач, что можно коротко назвать компьютерной оптикой.

В настоящее время объектами исследований в области компьютерной оптики, проводимых на кафедре являются:

- методы и программы проектирования оптических систем (методы синтеза, анализа аберраций и качества изображения, методы оптимизации, расчёт допусков);
- обработка данных контроля оптических элементов и систем (интерферограммы, гартманогаммы и т.п.);
- компьютерное моделирование изображения с учётом различных факторов (частичная когерентность, поляризация, нелинейности и неизопланатизм и т.д.)
- теория и методы оптимальной компьютерной юстировки;
- моделирование процессов ближнепольной оптики.

За период существования кафедры было подготовлено более 150 кандидатов наук, из них 30 иностранцев, а также 16 докторов наук. Большинство научных и производственных подразделений в области прикладной оптики в России, а также многие в США, Израиле и Китае возглавляют ученики нашей научной школы.

Кафедра прикладной и компьютерной оптики факультета Оптико-информационных систем и технологий является одним из крупнейших подразделений Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, ориентированным на выпуск высоко-квалифицированных специалистов.

**Зверев В.А., Кривоустова Е.В. Оптотехника несферических поверхностей. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 203 с.**

Виктор Алексеевич Зверев  
Екатерина Всеволодовна Кривоустова  
**Оптотехника несферических поверхностей**  
**Учебное пособие**  
В авторской редакции  
Дизайн обложки Н.А. Кривоустова

**Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО**

Зав. РИО Н.Ф. Гусарова  
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99.

Подписано в печать  
Заказ 947. Тираж 100 экз.