Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики

С.И. Росс

Математическое моделирование и исследование национальной экономики

Санкт-Петербург
2006

УДК 338.24 (075)
ББК 49(2)29-212.1407

Росс С.И. Математическое моделирование и управление национальной экономикой: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПб ГУ ИТМО, 2006. 74 с.

В данном пособии с позиций системного подхода рассматриваются методы формализованного представления систем управления, основанные на использовании математических, экономико-математических методов и моделей исследования систем управления. Приводятся примеры их практического использования.

Пособие предназначено для подготовки по курсу «Математическое моделирование и управление национальной экономикой» дипломированных специалистов по специальности 061100 – «Национальная экономика».

Рецензенты:
кафедра информационных систем факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета(зав.–д.ф.-м.н.,проф.А.Н.Квитко);
д.э.н.,проф. С.Б.Смирнов (Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики)

Утверждено к печати
учебно-методическим советом ГФ
в качестве учебного пособия

Содержание

Введение

В данном пособии мы будем рассматривать не технические или биологические, а только социально-экономические системы, или как их еще называют хозяйственные системы национальной экономики.

В хозяйственных системах смысл процесса управления состоит в изменении их организованности, причем осуществляется процесс управления в форме принятия и реализации хозяйственных решений, другой формы проявления управления в системах этого класса не существует.

Управление возможно, если имеется система управления, задана цель управления, элементы системы охвачены причинной связью, в системе имеется управляющий параметр, она характеризуется динамичностью, движением и преобразованием информации, наличием обратной связи, управляемой и управляющей подсистемами и др.

В конструктивном плане система управления (СУ) задается через системные элементы.

Функция СУ – поддержание и рост организованности хозяйственной системы, цели СУ – обеспечение наиболее эффективных способов реализации ее целей.

Выходы СУ – принятые и реализованные конкретные управленческие решения, входы – воздействия внешней среды, воздействия объекта управления и т.п. Процессор включает технические условия принятия решений, процедуры и методы принятия решений, управленческий персонал и его мотивацию.

Важно отметить, что принятие решений при управлении хозяйственной системой возможно только на основе сбора и анализа информации о системе управления, в том числе с помощью математических, экономико-математических методов и моделей.

В Главе 1 рассматриваются основные понятия системы управления и принципы их исследования (принцип обратной связи, принцип моделирования, принцип гомеостазиса, закон необходимого разнообразия, принцип черного ящика и принципы системного исследования хозяйственных систем).

В Главе 2 демонстрируется использование системного анализа (на основе теории систем бинарного типа с отношением эквивалентности) применительно к исследованию конкретных систем управления: функционирования фирмы, страховой и инвестиционной компаний.

В Главе 3 показана эффективность метода математического моделирования при исследовании социально-экономических систем (с точки зрения влияния такого важного фактора как этика бизнеса), а в Главе 4 проведено исследование хозяйственной системы, допускающей математическое моделирование, на основе принципов динамического программирования.

Глава 1. Системы управления и принципы их исследования

Исследование систем управления базируется как на принципах исследования, сформулированных в общей теории систем (кибернетике), так и на специфических принципах системных исследований в экономике.

1.1 Общие принципы системных исследований.

Принцип обратной связи.

Функционирование совокупности отдельных объектов как целостных систем обеспечивается взаимодействием этих объектов, т.е. установлением и реализацией определенных связей между ними.

Выделяют два основных вида связей – прямые и обратные. Прямая связь обеспечивает передачу воздействия (вещества, энергии, информации) с выхода одного элемента на вход другого, а обратная связь – с выхода некоторого элемента на вход того же элемента, либо непосредственно, либо через другие элементы.

В зависимости от типа используемых связей различают разомкнутые и замкнутые системы управления.

Так, управление движением транспорта на перекрестке с помощью светофора осуществляется по разомкнутой схеме, т.к. переключение сигналов светофора происходит по заранее составленной программе без учета реальной ситуации на перекрестке.

Если движением транспорта управляет регулировщик, то он учитывает складывающуюся обстановку, т.е. использует информацию обратной связи, тем самым управление осуществляется по замкнутой схеме.

В первом случае имеет место жесткое управление, основанное на прямых связях, во втором – мягкое, основанное на использовании обратных связей.

Управление по разомкнутой схеме предполагает выбор управляющих воздействий в зависимости от известного поведения внешней среды, которая может способствовать отклонению системы (ее параметров) от заданного состояния. В основе такого управления – идея компенсации возмущающего воздействия среды на регулируемый параметр, т.е. в управлении используется сведения о воздействиях на систему.

В замкнутой схеме управления постоянно используются сведения о состоянии самой системы (регулируемого параметра), поступающие по каналу обратной связи.

Таким образом, принцип обратной связи – универсальный принцип управления, позволяющий в изменяющейся среде достигать заданной цели.

В зависимости от характера цели управления выделяют отрицательные и положительные обратные связи.

Отрицательная обратная связь – воздействие, передаваемое с выхода управляемой системы на ее вход, обеспечивающее поддержание системы в заданном состоянии (при неизменном значении описывающих ее параметров).

В технических системах примером может служить терморегулятор, цель которого – обеспечить постоянство температуры в заданном объеме (холодильной камере, оранжерее и т.д.). В живом организме с помощью отрицательных обратных связей поддерживаются физиологические константы (температура тела, кровяное давление и др.).

В экономике хозяйственные системы характеризуются развитым механизмом обратных связей. В частности, рынок, играя роль стабилизатора экономики, имеет в своей основе именно отрицательные обратные связи.

В самом деле, при недостаточном выпуске товаров цены на них повышаются, в результате чего появляются дополнительные стимулы к расширению производства, что приводит к увеличению вложений средств на вход системы, и, как следствие, к увеличению производства до необходимого уровня. И, наоборот, рост выпуска продукции приводит к снижению цен на рынке и, следовательно, к уменьшению средств, поступающих на вход хозяйственной системы.

Однако в экономических системах практически отсутствуют «долговечные цели», т.е. цели, состоящие в поддержании некоторых параметров на заданном уровне. Поэтому основной тип обратных связей в экономике – положительный.

Положительная обратная связь – воздействие, передаваемое с выхода управляемой системы на ее вход, предназначенное для перевода системы в новое состояние, которое зависит от сложившейся конкретной ситуации.

Рассмотрим процесс производства. Если некоторую часть средств, получаемых от реализации продукции предприятия подать на вход системы и использовать для расширения или модернизации производства, то это приведет к увеличению средств, получаемых от реализации продукции, что даст, в свою очередь, возможность увеличить вложение в производство и т.д. Как видно, положительная обратная связь является основой расширенного воспроизводства.

В экономике можно найти системы, характеризующиеся комбинацией положительных и отрицательных обратных связей.

Выявление механизмов и схем обратных связей является необходимым элементом исследования систем управления.

Принцип моделирования

Моделирование – это воспроизведение свойств одного объекта (оригинала) с помощью другого объекта (его модели). Моделирование включает в себя: создание (конструирование) модели, исследование модели, изучение реального объекта по его модели.

Модель представляет собой отображение каким-либо способом существенных характеристик, процессов и взаимодействий реальных систем. Она является инструментом исследования объекта, позволяющая на основе регулирования исходных параметров прогнозировать поведение системы.

Модели строятся на разных основаниях: или модели, имитирующие свойства и поведение реально существующего объекта или модели, выступающие реальным воплощением некоторой умозрительной концепции или идеи.

В обоих случаях в основе моделирования лежит метод аналогий. Аналогия – это подобие, сходство предметов в каких-либо свойствах, признаках, отношениях. Убедившись в аналогиях двух объектов, предполагают, что функции, свойства одного объекта, для которого они установлены, присущи и другому объекту. Метод аналогий состоит в том, что изучается один объект – модель, а выводы переносятся на другой – оригинал.

Модели бывают самые разные. Графическая модель – объект геометрически подобный оригиналу (географические карты). Геометрическая модель – объект, подобный оригиналу по форме (слепок). Функциональная модель – объект, отображающий поведение оригинала. Символическая модель – выражается с помощью абстрактных символов (программа для ЭВМ). Статистическая модель – описывает взаимодействие элементов, имеющих случайный характер (схема Бернулли). Описательная модель – словесное описание объекта. Математическая модель – совокупность уравнений, неравенств, таблиц и др. способов математического описания оригинала.

Исследование систем управления базируется на экономико-математических моделях.

Принцип гомеостазиса

Гомеостазисом называют свойство системы сохранять в процессе взаимодействия со средой значения существенных переменных в некоторых заданных пределах. Существенными называют характеристики, тесно связанные с основным качеством системы, нарушение которого приводит к ее разрушению.

В основе гомеостазиса лежит механизм обратных связей. Экономический гомеостазис – устойчивое равновесие функционирования хозяйственных систем в изменяющейся природно-социальной среде. Одной из задач исследования систем управления является выявление и изучение механизмов, обеспечивающих гомеостатический характер их функционирования.

Закон необходимого разнообразия

Закон необходимого разнообразия был впервые сформулирован У.Р.Эшби. По его определению разнообразие системы есть число различных состояний, или логарифм этого числа.

Система в своем поведении может принимать различные состояния, значения ее параметров могут меняться. Однако вследствие каких-либо условий, ограничений, внутренних свойств системы и т.д. из всех теоретически возможных состояний практически реализуется меньшее их число. Такое изменение числа возможных состояний есть ограничение разнообразия.

В связи с тем, что хозяйственная система не разделяется на управляющую и управляемую подсистемы, закон необходимого разнообразия для хозяйственной системы выражает отношение между множеством управляемых и управляющих параметров: для того, чтобы уменьшить разнообразие в поведении управляемых параметров, необходимо увеличить разнообразие управляемых.

<u>Принцип черного ящика</u>

В исследовании сложных систем очень важная роль принадлежит методу «черного ящика». «Черный ящик» - это система, о внутренней организации которой сведений нет, но существует возможность воздействовать на ее входы и воспринимать ее выходы.

Метод «черного ящика» заключается в том, что система изучается не как совокупность взаимодействующих элементов, а как нечто целое (неделимое), взаимодействующее со средой на своих входах и выходах.

1.2 Принципы системного исследования хозяйственных систем

Хозяйственные (социально-экономические) системы имеют существенные отличия от технических и живых систем. Поэтому наряду с использованием общих принципов исследования систем, изложенных выше, для хозяйственных систем разработаны специфические принципы исследования.

Важнейшим принципом системного исследования хозяйственной системы является выяснение роли ее функции, образующей новое качество. Функция является исходным моментом исследования и конструирования хозяйственных объектов, выявления и решения проблем формирования организационных структур и т.д.

Вторым принципом является принцип конструктивных определений.

В системном исследовании используются два вида определений: дескриптивные (описательные) и конструктивные. Для экономической науки характерно использование дескриптивных определений. Поэтому необходимым элементом системных исследований выступает поиск и формулировка конструктивных определений исследуемых явлений и их свойств.

Следующий принцип – это принцип формулировки идеальной модели, предполагающий выделение существенных свойств объектов, которые потом доводятся до некоторого предельного, не обязательно в действительности достижимого состояния. Основное назначение идеализированных моделей состоит в том, что они упрощают реальный объект, что позволяет вскрыть и глубже понять сущность происходящих в нем процессов.

Другой важный принцип системных исследований – принцип разработки системных классификаторов – инвариантов. Классификатор – это принцип, правило, метод или показатель, обеспечивающие разделение объектов на отдельные, в каком-либо смысле однородные совокупности (классы).

Еще одним **важным принципом системы** исследования систем управления в экономике является принцип дифференциации и согласованности хозяйственных интересов. Из определения хозяйственных интересов следует, что хозяйственные интересы разных решающих центров различны не только и не столько вследствие разной профессиональной подготовленности и ценностной ориентации лиц принимающих решения, сколько вследствие различия ресурсов.

Заключение

Всю совокупность методов исследования систем управления условно делят на три большие группы: методы, основанные на знании и интуиции специалистов; методы формализованного представления систем управления (методы формализованного моделирования исследуемых процессов) и комплексированные методы.

К первой группе относят следующие методы: метод «мозговой атаки», метод «сценариев», метод экспертных оценок (включая SWOT – анализ), метод типа «Дельфи», методы типа « дерева целей», «деловой игры», морфологические методы и ряд других методов. С ними можно подробно познакомиться по литературе, приведенной ниже.

В данных указаниях мы сосредоточились **на второй группе методов** – методах формализованного представления систем управления, причем из всей большой совокупности этих методов (аналитических, теоретико-множественных, логических, лингвистических, семиотических, графических и др.) мы ограничились рассмотрением некоторых наиболее используемых в экономике в настоящее время методов математического программирования и статистических методов.

Третью группу образуют комплексированные методы, к которым относят комбинаторику, ситуационное моделирование, топологию, графосемиотику и др. По сути дела они представляют собой интеграцию экспертных и формализованных методов.

Литература:

1. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2000.
2. *Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А.* Системный анализ в управлении. – М.: Финансы и статистика, 2003.
3. *Бир С.* Кибернетика и управление производством. – М.: Физматгиз, 1963.
4. *Блауберг И.В., Юдин Э.Г.* Становление и сущность системного подхода. – М.:Наука,1973.
5. *Винер Н.* Кибернетика или управление и связь в животном и машине. – М.:Сов.радио,1982.
6. *Волкова В.Н., Денисов А.А.* основы теории систем и системного анализа. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.

7. *Глушенко В.В., Глушенко Н.И.* Разработка управленческого решения. - Железнодорожный: ТОО НЦ «Крылья», 1997.
8. *Дик В.В.* Методология формирования решений в экономических системах и инструментальные среды их поддержки.- М.: Финансы и статистика, 2000.
9. *Игнатьева А.В., Максимцов М.М.* Исследование систем управления. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
10. *Карасев А.И.* и др. Математические методы и модели в планировании: Учебное пособие для экономических вузов. – М.: Экономика, 1987.
11. *Коротков Э.М.* Исследование систем управления. – М.:Дека,2000.
12. *Малин А.С., Мухин В.И.* Исследование систем управления. – М.: 2002
13. *Минеева Н.В., Мотышина М.С., Погостинская Н.Н., Эйсснер Ю.Н.* Исследование систем управления и системный анализ. Часть 1. Методологические и методические основы: Учебное пособие. – Спб.: Изд-во СПбГУЭФ.2000.
14. *Мишин В.И.* Исследование систем управления.- М.:2003.

Глава 2. Методы исследования систем управления на основе теории информации

Введение

Пусть рассматривается некоторая фирма, производящая однородную группу объектов (товаров, услуг и т.д.). Объекты образуют конечное множество элементов X,Y,Z,…,W.

Допустим, что X,Y,Z,…,W – это однородные товары, каждый из которых имеет свой жизненный цикл (ЖЦ), зависящий от состояния рынка, качества товаров, маркетинговой деятельности фирмы и других причин.

Для успешного функционирования фирмы и ее оптимального управления первостепенное значение имеет знание законов распределения случайных величин - ЖЦ каждого товара, поскольку эта информация напрямую связана с принятием решений по изменению ассортимента, направлениям инвестирования и другой деятельностью по управлению фирмой.

Нахождение этих законов представляет собой чрезвычайно сложную экономико-математическую задачу, которую, по-видимому, решить не представляется возможным в силу многообразия начальных условий.

Однако не меньший интерес для менеджеров фирмы представляет знание закона распределения другой случайной величины, так называемой «первой смерти» $T\{\min(X,Y,Z,W)\}$ товара. Под «первой смертью» понимается завершение ЖЦ («смерть») одного из товаров однородной группы, первое среди ЖЦ остальных товаров.

Знание закона распределения $T\{\min(X,Y,Z,W)\}$ позволит фирме осуществлять продуманную и своевременную инновационную политику, поскольку завершение ЖЦ («смерть») одного из товаров рассматриваемой группы означает принятие решения о переходе к новой группе с точки зрения структуры ассортимента, либо, по крайней мере, к изменению весов оставшихся товаров.

Рассмотрим формализованные методы анализа системы управления фирмой, основанные на теории информации, позволяющие найти закон распределения момента «первой смерти» товара (не важно какого именно), первый для всей группы.

Эти методы полностью основываются на системном подходе и математическом моделировании, а конкретно на свойствах систем бинарного типа с отношением эквивалентности.

2.1 Системы бинарного типа с отношением эквивалентности (П-системы) и их свойства.

В настоящее время приходится констатировать наличие либо предельно обобщенного математического, либо качественного вербального описания понятия системы, проявляющегося с трех сторон: функциональной, морфологической, информационной (см. список литературы к Главе 1).

Такое положение ограничивает возможности количественного анализа системных свойств многокомпонентных объектов, какими являются хозяйственные системы.

Естественный путь преодоления этих трудностей состоит в попытке существенного сужения всего рассматриваемого множества многокомпонентных объектов, относимых к системам, до подмножества, для элементов которого можно дать аксиоматическое определение понятию система и формировать информационные показатели ее синтеза и функционирования.

Проведем такое сужение: из всех множеств элементов с отношением (X, R), где X − множество элементов и R − отношение, рассматриваются только такие множества A конечной мощности n (названные П-системами), для элементов которых бинарное отношение R удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности:

1) для каждых $a_i \in A$ выполняется $a_i R a_i$ (рефлексивность);

2) для каждых $a_i, a_j \in A,\ i \neq j$ из условия $a_i R a_j$ следует, что $ajRa_i$ (симметричность);

3) для каждых $a_i, a_{k,} a_j \in A$ из условий $a_i R a_k$ и $a_k R a_j$ вытекает, что $a_j R a_i$ (транзитивность).

Выполнение этих условий приводит к тому, что множество A разбивается отношением эквивалентности R на попарно не пересекающиеся классы эквивалентности $a*_i : \bigcup_i a_i* = A$. Это позволяет на количественном уровне анализировать основные системные свойства.

2.2. Состояния П-системы, их классификация

Рассмотрим конечное множество и его разбиение на непересекающиеся классы эквивалентности.

Дадим следующие определения.

Определение. П – системой называется реляционная система с одним отношением эквивалентности.

Определение. Неизоморфные разбиения конечного множества назовем состояниями П - системы.

Очень удобна и наглядна интерпретация П-систем в терминах теории графов, хотя она и страдает некоторой избыточностью по сравнению с диаграммами Юнга. Симметричность и рефлексивность обязывают рассматривать полностью неориентированные графы кратности 1, в которых вершинам поставлены в соответствие элементы П-системы, а ребра отражают тот факт, что соответствующие элементы вступили в бинарное отношение *R*, т. е. отражают факт наличия понимаемой в каком-либо смысле взаимосвязи между элементами.

Условие транзитивности приводит к тому, что классы эквивалентности a_i* П-системы изображаются полными графами (отсюда название этих систем). Если наличию связи ставить в соответствие 1, а ее отсутствию − 0, то с информационной точки зрения свойства П-системы могут быть отображены квадратной, симметрической матрицей инциденций, т.е. матрицей, состоящей из нулей и единиц.

При этом отношение эквивалентности формирует такую матрицу инциденций, которая путем изменения нумерации элементов всегда может быть преобразована к виду, когда она состоит а) сплошь из единиц или б) из квадратных подматриц, сплошь составленных из единиц, и прямоугольных подматриц, сплошь составленных из нулей.

Для доказательства этого достаточно всем элементам, входящим в каждый класс эквивалентности, поставить в соответствие числа натурального ряда, сплошь заполняющие данный его отрезок.

Это обстоятельство приводит к тому, что у каждой П-системы существует конечное, строго определенное число состояний: под ними будем понимать структуру описывающего П-систему графа (полностью неориентированного, кратности 1) или вид соответствующей матрицы инциденций. В этом для П-систем проявляется принцип ограниченного разнообразия Эшби.

В силу того, что П-система − это система бинарного типа с отношением эквивалентности, ее состояния изображаются или полным графом, или объединением конечного числа полных подграфов.

Общее число состояний П-системы мощности *n* (обозначим его S_n) соответствует известной теоретико-числовой функции *p(n),* для которой Харди и Рамануджаном построена асимптотическая формула [6]. Для случая $n \le 8$ верна следующая формула, позволяющая сосчитать S_n:

$$S_n = \begin{cases} 1 + \sum_{j=2}^{n}[n/j] + \sum_{j=2}^{n/2}\ \sum_{l=j+1}^{n-j}\ \sum_{p=1}^{[n/l]}[n-lp/j], \text{ если n > 2 - четное} \\ 1 + \sum_{j=1}^{n}[n/j] + \sum_{j=2}^{[n/2]+1}\ \sum_{l=j+1}^{n-j}\ \sum_{p=1}^{[n/l]}[n-lp/j], \text{ если n > 2 – нечетное.} \end{cases}$$

Здесь [*n/j*] − целая часть числа *n/j;* если (*n − lp)<0,* то [*n − lp /j*] ==0.

Доказательство этой формулы проведено автором указаний в работе [5].

Следующий вывод дает представление о числе состояний П-системы, сосчитанных по этой формуле для $n \le 8$:

n 1 2 3 4 5 6 7 8

S_n 1 2 3 5 7 11 15 22

Из него следует, что S_n удовлетворяет следующим разностным уравнениям:

$\Delta^2 S_n = 0$, если *n* < 8 − нечетное,

$\Delta^2 \boldsymbol{S_n} = n-2/2$, если $n \le 8$ − четное.

Здесь $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$, $\Delta^2 S_n = \Delta S_n - \Delta S_{n-1}$.

Каждый класс эквивалентности a_i* (полный подграф) можно для краткости называть «кольцом» зависимости порядка *К,* если он состоит из *К* элементов (вершин).

Среди состояний П-системы имеются такие, которые описываются одинаковым числом колец, но разного порядка. Назовем появление таких состояний вырождением.

Справедливо следующее утверждение 1.

Утверждение 1. П-система мощности n имеет ровно n состояний, отличающихся друг от друга числом колец зависимости. Все остальные состояния возникают за счет вырождения.

Доказательство.

Рассмотрим П-систему мощности n. Пусть структура взаимоотношений этой системы описывается нуль-графом. Очевидно, такое состояние содержит n колец зависимости порядка 1 каждое.

Пусть теперь какие-либо два элемента образовали кольцо зависимости порядка 2, а все остальные элементы П-системы образовывают кольца зависимости порядка 1. Это состояние описывается уже $n - 1$ числом колец зависимости.

Пусть теперь какие-либо три элемента образовали кольцо зависимости порядка 3, а все остальные элементы образовывают кольца зависимости порядка 1. Общее число колец этого состояния равно $n - 2$. Продолжая аналогичным образом, получим состояния, содержащие $n - 3$, $n - 4$, ... 3, 2, 1 кольцо зависимости. Назовем эти состояния опорными и обозначим $C^{(n)}$, $C^{(n-1)},\ldots,C^{(2)}$, $C^{(1)}$. Опорные состояния различны по построению.

Поскольку состояние П-системы не может содержать число колец зависимости, большее чем число элементов П-системы, то любое из оставшихся S_n - n состояний (назовем их вырожденными) будет содержать число колец зависимости, равное числу колец одного из вышеперечисленных опорных состояний.

Отсюда непосредственно следует, что общее число вырожденных состояний равно $R_n = S_n - n$. Утверждение 1 доказано.

Таким образом, число $R_n = S_n - n$, зависящее от мощности П-системы, является ее количественной характеристикой. Назовем это число числом расщепления. Из утверждения 1 следует, что $R_n \geq 0$.

Поясним смысл этого числа.

Оно показывает, сколько у П-системы имеется состояний (без учета опорных), содержащих одинаковое с опорными состояниями число колец зависимости.

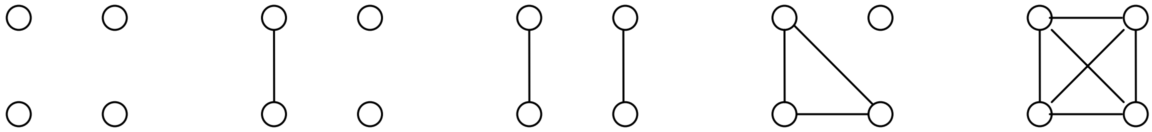
В терминах теории графов то же самое можно определить следующим образом: число R_n показывает, сколько у П-системы может быть неопорных состояний, описываемых графами, которые можно представить объединениями одинакового (с опорными состояниями) числа полных подграфов.

Ниже приведены значения числа расщепления для П-системы мощности $n = 1,2, \ldots 7, 8$:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	**7**	**8**
R_n	**0**	**0**	0	**1**	**2**	**5**	**8**	**14**

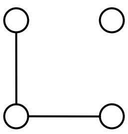
Наличие связей (понимаемых в каком-либо смысле) между элементами является необходимым, но недостаточным условием образования П-системы. В этом проявляется свойство целостности П-системы. Поясним сказанное графически (на примере П-системы мощности n=4).

а)



$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

б)



в)

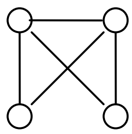


Рис. 1. *Изображение в виде графов состояний* П-*системы мощности* $n = 4$

Рядом с графами представлены соответствующие матрицы инциденций; *а* − состояния, представимые объединением полных подграфов; б, в − состояния, запрещенные принципом транзитивности бинарной зависимости.

У этой П-системы, как и у всякой П-системы, существует строго определенное число состояний, что отмечалось выше. На рис. 1 они представлены пятью графами. Связи (зависимости) между элементами-вершинами − изображены ребрами графа. Рядом с соответствующим графом представлены матрицы инциденций, структура которых и позволяет различать состояния этой П-системы ($S^{(k)}$ − ее состояние, $k = 1,2,\ldots,5$).

Рассмотрим теперь ситуацию, изображенную на рис. 1,б Она характеризуется наличием четырех элементов и связей между ними. Однако эта ситуация, хотя и представлена неориентированным графом кратности 1, не соответствует состоянию П-системы.

В самом деле, согласно принципу «кольцевой» зависимости (условие транзитивности), существование установленной связи между элементами № 1 и № 2 (см. рисунок), а также между элементами № 2 и № 3, обеспечивает ее существование между элементами № 1 и № 3 и далее № 3 и № 4.

Это обстоятельство резко сокращает число состояний, равное 2^n, которое возможно в общем случае (принцип необходимого разнообразия).

Заметим, что с ростом n увеличивается доля вырожденных состояний в их общем числе Sn. Так, для n = 8 эта доля равна уже 0,636.

Впервые вырождение наступает как раз у П-системы мощности n = 4. В самом деле, $R_4 = S_4 - 4 = 5 - 4 = 1$. Это означает, что у одного из опорных состояний имеется «двойник» в том смысле, что он представим объединением подграфов, содержащих такое же число колец зависимости.

Действительно, как видно из рис.1 а), состояния $S^{(2)}$ и $S^{(3)}$ представимы объединением подграфов, содержащих по два кольца зависимости, но разного порядка.

Таким образом, каждая П-система характеризуется мощностью n, а также числами Sn и Rn.

Для числа состояний Sn П-системы не выполняется свойство аддитивности, т. е.

$$Sn_1 + n_2 > Sn_1 + Sn_2.$$

Здесь $Sn_1 + n_2$ - число состояний П-системы мощности $n_1 + n_2$. Это следует и из наших данных, и из таблицы, приведенной в книге Эндрюса [6], что говорит о том, что П-системы являются суперсистемами.

2.3 Информационные показатели синтеза П-систем

Элементы, образующие П-систему, могут иметь как стохастическую, так и не стохастическую природу. При этом если удовлетворение отношения R условиям рефлексивности и симметричности зависит исключительно от природы элементов, то для удовлетворения транзитивности требуется выполнение некоторых условий. Эти условия удобно сформулировать в виде ограничений, накладываемых на информационные показатели П-систем.

Пусть a_i, a_j, a_k − элементы стохастической природы, $i \neq j$; $i,j,k = 1,2,\ldots n$. В качестве R для таких элементов естественно выбрать стохастическую взаимозависимость, выражаемую в терминах теории информации через условную и безусловную энтропию [3]. Очевидно, она удовлетворяет условиям рефлексивности и симметричности.

Но для удовлетворения транзитивности достаточно выполнения следующего условия:

$$H(a_i, a_j) \leq H(a_i / a_k) + H(aj / a_k), \qquad (2.1)$$

где $H(a_i / a_k)$, $H(aj / a_k)$ − средние условные энтропии элементов a_i и a_j; $H(a_i, a_j)$ − их совместная энтропия. Именно его выполнение приводит к тому, что для любых $a_i, a_{k,} a_j \in A$ из взаимозависимостей (рефлексивность и симметричность) a_i и a_k, а также a_k и a_j, следует взаимозависимость a_i и a_j.

Другими словами, П-система возникает, если при рассмотрении любых трех элементов такой системы информация об одном из них не настолько уменьшает сумму условных энтропий двух других, чтобы она стала меньше их совместной энтропии.

Условие (1.1) следует рассматривать как условие синтеза П-системы из стохастических элементов, для бинарных отношений между которыми выполняются аксиомы симметричности и рефлексивности.

Заметим, что совокупности элементов, которые могут вступать между собой в бинарные отношения только функциональной, или детерминированной, взаимозависимости, являются только П-системами, поскольку для них соотношение (2.1) выполняется всегда.

Покажем достаточность ограничения (2.1) для выполнения требования транзитивности зависимости между стохастическими элементами.

Доказательство

Допустим, что a_k взаимозависима в каком-либо смысле с a_i и a_j, по отдельности. Тогда справедливы следующие соотношения [3]:

$H(a_i/a_k) < H(a_i)$ и $H(a_j/a_k) < H(a_j)$,

где через Н (.) обозначены энтропии от аргумента (.) .

Сложим левые и правые части этих неравенств.

Имеем

$H(a_i/a_k) + H(a_j/a_k) < H(a_i) + H(a_j)$.

Допустим, что соотношение (1.1) выполнено. Тогда, очевидно, имеем $H(a_i, a_j) \le H(a_i/a_k) + H(aj/a_k) < H(a_i) + H(a_j)$, т. е. $H(a_i, a_j) < H(a_i) + H(a_j)$, что означает, что элементы a_i и a_i взаимозависимы. Таким образом, достаточность доказана.

Но тогда величина K= $H(a_i/a_k) + H(aj/a_k) - H(a_i, a_j)$ может служить информационным показателем синтеза П-системы.

В самом деле, если K$\ge$0, то П-система возникает, и если K<0, то не возникает; $i \ne k \ne j$; $i, k, j = 1, 2 \ldots n$.

Выясним на конкретном примере, какой содержательный смысл можно вложить в условие (1.1).

Приведем пример совокупности стохастических элементов, не являющейся П-системой, и убедимся, что соотношение (2.1) для нее не выполняется, т. е. K< 0.

Пример

Рассмотрим опыт, в результате которого могут возникать следующие три случайных события: A_1 – выпадение двух очков при бросании экспериментатором правильной игральной кости левой рукой; A_2 – выпадение двух очков при бросании другой правильной игральной кости правой рукой; A_3 – выпадение хотя бы на одной кости двух очков. Бросания производятся одновременно.

Очевидно, случайные события A_1 и A_3, а также A_2 и A_3 зависимы, в то время как случайные события A_1 и A_2 независимы ($A_1 \subset A_3$, $A_2 \subset A_3$) .

Свяжем с этим опытом дискретные случайные величины *X, Y, Z* со следующими законами распределения:

X	$X_1 = 1$ (если наступило событие A_1)	$x_2 = 0$ (если наступило событие не A_1)
P	1/6	5/6

Y	$Y_1 = 1$ (если наступило событие A_2)	$y_2 = 0$ (если наступило событие не A_2)
P	1/6	5/6

Z	$z_1 == 1$ (если наступило событие Аз)	$z_2 == 0$ (если не наступило событие Аз)
P	11/36	25/36

В самом деле, $P(z_1 = 1) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 1/6 + 1/6 - 1/6\ 1/6 = 11/36$.

Ясно, что совокупность этих случайных величин не образует П-систему, так как X и Z, а также У и Z взаимозависимы, а *X* и *Y* независимы по построению.

Покажем, что $H(X,Y) > H(X/Z) + H(Y/Z)$, т. е К < 0.

В самом деле,

$$H(X, Y) = -\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j) \ln p(x_i, y_j) =$$

$= -\ 1/36 \ln(1/36) - 5/6\ 1/6 \ln(5/36) - 1/6\ 5/6 \ln(5/36) - 5/6\ 5/6 \ln(25/36) = 0.910.$

$$H(X/Z) = -\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} p(x_i, z_j) \ln p(x_i / z_j) =$$

$= -\ 1/6 \ln(6/11) - 5/6\ 1/6 \ln(5/11) - 0 - 5/6\ 5/6 \ln 1 = 0.206.$

В силу симметрии задачи

$H(X/Z)=H(Y/Z)$.

Тогда

$H(X,Y) = 0.910$; $H(X/Z) + H(Y/Z) = 0.412$.

Полученные результаты противоречат условию синтеза П-системы, поскольку К = - 0.412.

Вернемся **к исходной задаче**.

Исследуется закон распределения момента «смерти» (потери спроса) одного из товаров этой группы (не важно какого), первый для всей группы.

Например, можно говорить о группе трикотажных товаров, (производимой некоторой фирмой), состоящих из четырех наименований. Пусть это носки (Н), колготки (К), гольфы (Г), чулки (Ч). В случае «смерти» любого из членов товарной группы производитель должен принять решение об изменении ассортимента.

Пусть теперь случайные величины X, Y, Z и W характеризуют «возраст» (например, этап ЖЦ) каждого из перечисленных товаров, т.е. X – «возраст» носков, Y – колготок и т.д. Данная совокупность образует однородную группу попарно взаимосвязанных между собой товаров.

Пусть f (X,Y,Z,W) – плотность распределения вероятностей этих случайных величин. Найти эту функцию, как уже отмечалось, не представляется возможным.

Однако производителю важно знать закон распределения другой случайной величины – момента “смерти” (снятия с производства) одного из членов этой группы, первого для нее.

Обозначим его T (min {X,Y,Z,W }) . Зная закон распределения этой случайной величины, можно рассчитать длину жизненного цикла всей группы товаров.

Поскольку X , Y , Z , W -− непрерывные случайные величины, то условие (1.1) в явном виде выписывается следующим образом:

$$\mathrm{H}\,(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_3) = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_{13}(x_1, x_3) \ln f_{13}(x_1, x_3) dx_1 dx_3 \le$$

$$\le \mathrm{H}(\mathrm{X}_1 / \mathrm{X}_2) = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_{12}(x_1, x_2) \ln f_{12}(x_1 / x_2) dx_1 dx_2 -$$

$$-\mathrm{H}(\mathrm{X}_3/\mathrm{X}_1) = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_{32}(x_3, x_2) \ln f_{32}(x_3 / x_2) dx_3 dx_2 \qquad (2.2)$$

Мы использовали обозначения X_1, X_2, X_3 для любых трех элементов множества {X, Y, Z , W}.

В маркетинговых исследованиях X_1, X_2, X_3 характеризуются следующими дифференциальными функциями:

− законом распределения Эрланга

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{n-1}[(\mathrm{N}-1)!]^{-1} \nu^{N} \exp(-\nu \mathrm{x}),$$

где N, ν − параметры,

− логнормальным распределением

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 1/\sigma(\ln(\mathrm{x}))(2\pi)^{1/2} \exp(-½(\ln \mathrm{x} - \mathrm{a}(\ln \mathrm{x})/\sigma(\ln \mathrm{x}))^2,$$

где a (ln (x) и σ(ln x) − параметры распределения,

− распределением со следующей плотностью

$$\mathrm{f}_i(\mathrm{x}_i) = 1/\mathrm{ek}\ \lambda_i \exp(-\lambda_i x_i)/1+\lambda_i x_i,\ \lambda_i>0,\ \mathrm{x}_i \ge 0, \qquad (2.3)$$

$$\mathrm{k} = \int_1^\infty x_i^{-1} \exp(-x_i) dx_i,\ \mathrm{i} = 1,2,3 \qquad (2.4)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^\infty f(x_i)dx_i = 1 \text{ и } \int_0^\infty f_{ij}(x_i, x_j)dx_j = \mathrm{f}_i(x_i),$$

где $\mathrm{f}_{ij}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j) = 1/\mathrm{ek}\ \lambda_i \lambda_j \exp(-\lambda_i \mathrm{x}_i - \lambda_j \mathrm{x}_j - \lambda_i \lambda_j \mathrm{x}_i \mathrm{x}_j)$ (2.5)

Назовем это распределение (1.5) обобщенным экспоненциальным распределением.

Из этих соотношений следует, что

$\mathrm{f}_{ij}(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j) \neq \mathrm{f}_i(\mathrm{x}_i)\ \mathrm{f}_j(\mathrm{x}_j)$, $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$. (2.6)

Для логнормального и обобщенного экспоненциального распределения условие (1.6) выполняется, а для распределения Эрланга не выполняется.

Отсюда вытекает **важный результат** теории систем бинарного типа с отношением эквивалентности (П-систем): срок жизни каждого элемента как члена однородной группы, рассматриваемый как случайная величина, **должен** подчиняться обобщенному экспоненциальному (однопараметрическому) или логнормальному (двухпараметрическому) распределению.

Срок жизни, возможно, может подчиняться еще какому-либо распределению, но выяснение этого − задача отдельных исследований.

Итак, рассматривается однородная группа товаров – группа из четырех наименований: носков (Н, будем обозначать также индексом 1) , колготок (К, индексом 2), гольфов (Г, индексом 3) и чулок (Ч, индексом 4).

Поскольку элементы рассматриваемой группы товаров в силу однородности взаимозависят друг от друга, то эта группа товаров – П-система, состояние которой инвариантно относительно времени и описывается одним полным графом.

Следовательно, для этой системы и ее элементов (носков, колготок, гольфов и чулок), рассматриваемой как множество мощности 4, должно выполняться транзитивное замыкание для элементов любого его подмножества, состоящего из трех элементов.

Имеем следующие четыре подмножества этого множества:

- Н – Г - Ч (подмножество НГЧ)
- К – Г – Ч (подмножество КГЧ)
- Н – К – Ч (подмножество НКЧ)
- Н – Г - К (подмножество НГК)

Рассмотрим любое из этих подмножеств.

Оно будет П-системой, если выполняется транзитивное замыкание бинарных отношений между его элементами.

Следовательно, для того, чтобы однородная группа товаров, рассматриваемая как множество, была П-системой необходимо и достаточно одновременное выполнение транзитивного замыкания для всех элементов каждого из множеств НГК, НКЧ, КГЧ и НГЧ .

В общем случае, для однородной группы, состоящей их N товаров (множества мощности N) , одновременное выполнение транзитивного замыкания должно выполняться для C_N^2 (числа сочетаний из N элементов по два) подмножеств данного множества, состоящих из трех элементов.

Выясним, какие соотношения между параметрами λ_1, λ_2, λ_3 дифференциальных функций распределения $f_i(x)$ должны выполняться , чтобы осуществилось транзитивное замыкание для трех элементов любого из множеств НГК, НКЧ, КГЧ и НГЧ .

Для этого подставим выражения (2.4) и (2.3) в неравенство (2.2), вспомнив, что

$f_{ij} (x_i / x_j) = f_{ij} (x_i , x_j) / f_j (x_j), i \neq j.$

В результате громоздких преобразований имеем следующее эквивалентное неравенству (2.2) соотношение:

$$\ln \lambda_1 \lambda_3 \geq (1/1 - ek) (2ek_1 + \ln k + e - 1) , \qquad (2.7)$$

где $k_1 = \int_1^{\infty} x_i^{-1} \exp (- x_i) \ln x_i dx_i$.

С учетом конкретных значений k_1= 0.09783 и k = 0.21942 (точность расчета 10-^5) окончательно, получаем

$\ln (\lambda_1 \ \lambda_3) \geq 1.51678.$

Тогда для П-системы - множества из 4 элементов: Н, К, Г, Ч - должна выполняться следующая система неравенств:

$\ln (\lambda_1 \lambda_4) \geq 1.51678$

$\ln (\lambda_3 \lambda_4) \geq 1.51678$

$\ln (\lambda_1 \ \lambda_3) \geq 1.51678$

$\ln (\lambda_3 \lambda_2) \geq 1.51678$

$\ln (\lambda_3 \lambda_4) \geq 1.51678$

$\ln (\lambda_2 \lambda_4) \geq 1.51678.$

Найдем решение этой системы, соответствующее нижней границе достаточного условия выполнения транзитивного замыкания. Оно соответствует случаю равенств. В итоге получаем:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2.12.$

Нетрудно видеть, что мы получим значение $\lambda = 2.12$ для любого числа членов в однородной группе товаров.

Таким образом, распределение случайной величины T{min(X,Y,Z,W)} описывается следующим законом

$f (x) = (1/ek) \lambda \exp (- \lambda x) /(1 + \lambda x)$

при условии, что параметр λ=2.12.

Полученный результат позволяет рассчитать важнейшую для производителя характеристику: вероятность того, что с момента t (до которого в группе товаров не было «смертельных» случаев) и до момента $t_1 \geq t$ произойдет “смертельный” случай :

$$P (t \leq T \{ \min (X, Y, Z, W) \} \leq t_1) =$$

$$= \int_t^{t1} f (x) dx = \int_t^{t1} (1/ек) \lambda \exp (- \lambda x)/(1 + \lambda x) d x \qquad (2.8)$$

Отсюда следует **другой важный результат** применения теории П-систем к экономике рынка: указанная вероятность не зависит от числа элементов, составляющих однородную группу.

Полученный результат обобщается и на другие области исследования систем управления экономическими объектами.

2.4 Применение теории П-систем к задачам исследования управления страховыми и инвестиционными компаниями

В математике **страхования жизни** рассматривается задача о нахождении распределения случайной величины T{min(X,Y,Z,W)} – срока возникновения страхового случая («первой» смерти) у группы однородных страхователей, например у семьи, состоящей из мужа (X), жены (Y), дочери (Z) и сына (W) .

Для ее решения можно использовать приведенное выше решение задачи маркетинговых исследований.

Полученное там решение дает возможность найти распределение вероятностей случайной величины T{min (X,Y,Z,W)}. При этом это распределение не зависит от числа страхователей в однородной группе.

Очевидно, что это решение позволяет рассчитать величину страхового аннуитетного платежа (что важно для страхователя) и величину нетто и брутто премии (что важно для успешного функционирования страховой компании).

Покажем теперь эффективность применения теории П-систем к задачам количественной оценки природных и техногенных рисков при управлении инвестициями в объекты промышленного и гражданского строительства (строительство атомных станции, гидроэлектростанций, нефтепроводов и т.д.).

Пусть X,Y,Z,W − потоки случайных событий (оползней, карстовых разломов, размывов почвы, землетрясений и т.д.) − от, допустим, четырех участков пятна застройки. Эти случайные процессы взаимозависимы, так как являются проявлением сейсмической активности ядра Земли.

Ищется распределение случайной величины T{min(X,Y,Z,W)} − срока наступления «первого смертельного» случая − природного или техногенного катаклизма на каком-либо (не важно каком) участке пятна застройки. Решение этой задачи приведено выше.

Задаваясь (из соображений конкретной задачи) уровнем вероятности появления «смертельного события», (например , 0.7) , можно исходя из таблицы вероятностей распределения «смертельных случаев» определить интервал времени, через который такое событие произойдет или (как противоположное событие), интервал времени в течение которого «смертельное событие» не произойдет.

Например, можно найти с фиксированной вероятностью, выбор которой обусловливается экономическими и экологическими факторами, срок функционирования без экологических интервенций в окружающую среду («смертельных событий») таких потенциально опасных объектов, атомная станция или нефтепровод.

В настоящее время управление инвестиционными компаниями в области строительства немыслимо без оценки экологических характеристик объекта инвестирования. При этом управление проектами сопровождается работой со страховыми компаниями.

Страхование [2] как известно, разделяется на обязательное (соответствующие виды страхования устанавливаются законом) и добровольное (по договору между страхователем и страховщиком).

Примером обязательного страхования является страхование ответственности за причинение вреда при эксплуатации опасного производственного объекта, введенное в действие Статьей 15 Закона РФ «О промышленной безопасности опасных производственных объектов».

Этой Статьей определена обязательность страхования ответственности за причинение вреда жизни, здоровью или имуществу других лиц и окружающей природной среде в случае аварии на опасном производственном объекте.

Тарифная ставка, по которой заключается договор страхования, как известно, носит название брутто-ставки, которая, в свою очередь, состоит из нетто-ставки и нагрузки. Собственно, нетто-ставка выражает ожидаемый уровень потерь от пожара, наводнения, взрыва и т.д.

В основе построения нетто-ставки по любому виду страхования лежит вероятность наступления страховых случаев, например рассмотренных выше «смертельных событий».

Расчеты тарифных ставок осуществляются с помощью актуарных расчетов (системы математических и статистических закономерностей), регламентирующих взаимоотношения между страховщиком и страхователями. Актуарные расчеты позволяют оценивать ожидаемый уровень потерь общества вследствие чрезвычайных ситуаций, обусловленных промышленными авариями, то есть техногенный риск.

С помощью актуарных расчетов определяется доля участия каждого страхователя в создании страхового фонда, что и определяет, в конечном счете, размеры тарифных ставок.

В настоящее время в РФ ущерб, нанесенный авариями, катастрофами, стихийными бедствиями измеряются затратами, которые возмещает государство. По данным МЧС России затраты на компенсацию материальных потерь от аварий, катастроф и стихийных бедствий составляют около 5 миллиардов рублей за счет средств федерального бюджета и около 7 миллиардов рублей за счет средств российских страховых компаний.

В современных экономических условиях возможности государства по возмещению потерь от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера крайне ограничены и основным резервом улучшения положения в этой области является страхование соответствующих рисков.

Нахождение закона распределения случайной величины $T\{\min(X,Y,Z,\ldots,W)\}$ − «первого смертельного» события для случая экологического страхования соответствует нахождению закона распределения первой природной или техногенной катастрофы, обусловленной конечной группой факторов риска $X,Y,Z,\ldots,W$ (социального, индивидуального, экономического характера и других типов риска от различных природных и технологических опасностей).

Как известно из статистики наблюдений за природными и техногенными катаклизмами [4] , распределение интервалов между последовательными катастрофами (в каком – либо участке территории, подверженной карстовым провалам), подчиняется логнормальному распределению.

Средний за определенный интервал времени риск события А определяется из выражения

$$R(A) = P(A)\, Y(A), \qquad (2.9)$$

где P(A) – повторяемость события А, имеющая размерность обратную времени, Y (A) – возможный одномоментный ущерб от события А, имеющий размерность потерь.

Повторяемость обычно оценивается частотой события А , равной числу появления события в единицу времени, или другими словами, интенсивностью потока событий.

В работе [4] предложено риск, определенный по формуле (2.9), называть комбинированным или приведенным (к единице времени) в соответствии со своим классификатором риска. Автором этой работы вводятся понятия стоимостного риска:

$$R^*(A) = Y(A) \qquad (2.10)$$

и событийного риска:

$$(R^*)\,(A) = P(A) \qquad (2.11)$$

Как следует из формулы (2.11) , событийный риск представляет собой одну из характеристик опасности «смертельного события» (в терминологии автора указанной выше работы – негативного события), в то время как стоимостный риск является показателем уязвимости объекта – системы (населения, жилой застройки и т.д.).

Эти представления корреспондируют с методологией исследования систем управления на основе П-систем.

В самом деле, в качестве события А нами рассматривается событие, состоящее в том, что за определенный интервал времени произойдет «смертельное событие» (природная или техногенная катастрофа).

Вероятность этого события вычисляется по формуле (2.8), выведенной для элементов П-системы. Но жилая застройка, население какого-либо региона и т.д., рассматриваемые как системы попарно взаимосвязанных элементов, в точности представляют собой П-систему.

Следовательно, для (R*)(A) можно воспользоваться результатами, представленными в разделе 2.3.

Размеры ущерба, или стоимостного риска, в каждом конкретном случае зависят, с одной стороны, от интенсивности негативного события (объем и скорость перемещения масс, пород, снега, воды, объем выброса, разлива, зоны поражения и т.д.), а с другой от уязвимости поражаемого объекта.

Под уязвимостью поражаемого объекта понимается степень возможных потерь объекта или его отдельных элементов (люди, здания, дороги, угодья, флора, фауна и т.д.), обусловленных действием на него поражающих факторов определенной интенсивности.

Ниже изложен статистический метод оценки интенсивности негативного события [1].

2.5 Статистический метод количественной оценки интенсивности негативного события

Количественная оценка устойчивости территорий в отношении провалов, как известно, проводится по целому ряду показателей [4]. Однако основным среди них является интенсивность провалообразования – среднегодовое количество карстовых провалов, отнесенное к единице площади.

Точность его определения играет первостепенную роль в оценке надежности территории для строительства, т.е. в оценке вероятности того, что в течение определенного заданного времени эта территория не будет поражена карстовыми провалами диаметрами, превышающими фиксированную величину.

Этот показатель представляет собой, как всякая средняя, случайную величину, и должен быть охарактеризован через свой закон распределения. Оценка этого закона может быть проведена на основании регистрации периодичности провалов, т.е. промежутков времени, через которые на площади 1 квадратный километр появляется один провал.

Для решения этой задачи строится гистограмма распределения этих интервалов, которая затем аппроксимируется подходящим аналитическим законом, параметры которого определяются, например, методом максимального правдоподобия. При этом средняя периодичность провалов вычисляется как математическое ожидание длины интервалов, а среднегодовое количество карстовых провалов – как обратная ей величина.

Однако этот простой алгоритм нуждается в серьезном теоретическом обосновании, поскольку гистограмма будет использована корректно, если допустить, что интервалы между провалами являются статистически независимыми и представляют собой реализации одинаково распределенных случайных величин.

В данном разделе рассматривается статистический метод оценки степени достоверности этого допущения на основе имеющихся эмпирических данных.

Эта задача может быть переформулирована как задача оценки взаимосвязи временных потоков провалов (как событий на временной оси) от двух расчетных участков.

Потребуем выполнения следующего условия − в распоряжении исследователя имеются синхронные записи потоков провалов каждого отдельно взятого участка и двух вместе.

Пусть это условие выполнено.

Обозначим через X_1 первый поток провалов, а через X_2 - второй. Предположим, что X_1 и X_2 − потоки восстановления, т. е. выполнены следующие допущения:

1) случайные величины $x_1, x_2, \ldots$ (интервалы между провалами) независимы;

2) функции распределения величин $x_2, x_3, \ldots$ одинаковы, т. е. $P(x_k < t) = F(t)$ для $k = 2, 3, 4, \ldots$

Заметим, что функция распределения $F_1(t) = P(x_1 < t)$ не обязана быть равной функциям распределения остальных интервалов, т. е. $F_1(t) \neq F(t)$. Функцию $F(t) = P(x_k < t)$, $k = 2,3, \ldots$ называют функцией распределения потока восстановления. Для нахождения функции распределения первого интервала стационарного ординарного потока восстановления используем следующее утверждение (1).

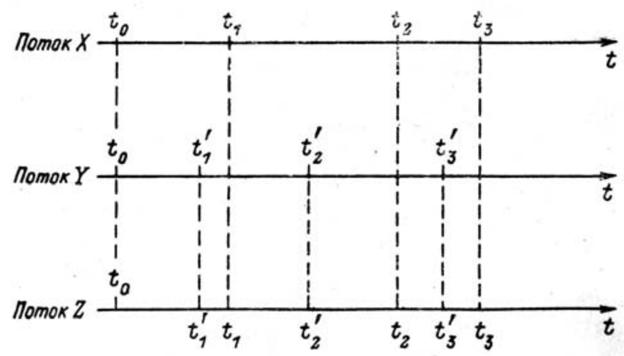


Рис. 2. *Схема образования суперпозиции потоков.*
t_i, t_i' − *моменты появления событий (провалов)*

Утверждение 1. Пусть X − стационарный и ординарный поток восстановления. Пусть $F(t)$ − функция распределения потока, а $F_1(t)$ − функция распределения первого интервала, т. е. $F_1(t) = P(x_1 < t)$.

Пусть μ − среднее время между событиями потока восстановления. Тогда $F_1(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t (1 - F(\Theta))d\Theta$. Будем называть два потока X и Y независимыми, если независимы случайные величины $x_1, x_2, x_3 \ldots, y_1, y_2, y_3 \ldots$ Здесь $x_1, x_2, \ldots$ − длины интервалов потока X, $y_1, y_2, \ldots$ − длины интервалов потока Y.

Далее, пусть X и Y − два потока. Снесем моменты появления событий потоков X и Y на одну ось, как показано на рис.2. Поток Z, соответствующий полученной последовательности провалов, будем называть объединением (наложением), или суперпозицией потоков X и Y.

Справедливо утверждение 2.

Утверждение 2. Пусть X и Y − независимые стационарные ординарные потоки восстановления. Пусть $F_1^{(X)}$ и $F_1^{(Y)}$ − функции распределения первого интервала времени для потоков X и Y соответственно, а $F_x \oplus F_y$ − функция распределения объединения потоков X и Y. Тогда

$$(F_X \oplus F_Y)(t) = F_1^{(X)}(t) + F_1^{(Y)}(t) - F_1^{(X)}(t)\, F_1^{(Y)}(t)$$

Пусть Z − объединение потоков X_1 и X_2.

Обозначим через F_Z функцию распределения потока Z. Допустим, что потоки X_1 и X_2 независимы.

Тогда, как следует из утверждения 2, можно найти функцию распределения объединенного потока при условии независимости, т. е. $F_{X_1} \oplus F_{X_2}$, зная деления F_{X_1} и F_{X_2} потоков X_1 и X_2. Обозначим через $F_{X_1} \oplus F_{X_2}$ полученную таким образом функцию.

Понятно, что если функция F_Z равна $F_{X_1} \oplus F_{X_2}$, то гипотезу о независимости потоков X_1 и X_2 не следует отвергать. Следовательно, алгоритм оценки взаимн й независимости потоков сводится к проверке следующей основной гипотезы H.

Гипотеза H. Распределения F_Z и $F_{X_1} \oplus F_{X_2}$ совпадают.

Проверку этой гипотезы естественно осуществить с помощью критерия согласия Смирнова-Колмогорова.

Выдвинем гипотезу H_1: структура потока каждого договора удовлетворяет следующей модели.

Если x - интервал между провалами, последовательность появления которых составляет поток, то плотность вероятности $f_j(x)$ в такой модели описывается следующим выражением:

$$f_j(x) = \frac{x^{N_j - 1}}{(N_j - 1)!} \nu_j^{N_j} \exp(-\nu_j x) \tag{2.12}$$

Здесь N_j = 1,2, ..., $\nu_j > 0$, j =1,2. Распределение (2.12), как известно, является распределением Эрланга.

Для проверки гипотезы H_1 используем метод максимального правдоподобия и критерий согласия χ^2. Можно считать, что $x_i > 0$ для i = 1,2, ..., n. Проверку гипотезы H_1 разобьем на два этапа.

Первый этап будет состоять в нахождении таких чисел N^* и ν^*, для которых соответствующая функция правдоподобия достигает максимума. Второй этап − проверка гипотезы H_1, где $N = N^*$ и $\nu = \nu^*$, с помощью критерия согласия χ^2. Перейдем к подробному описанию этапов 1 и II.

Этап 1. Нахождение N^*, ν^*. Очевидно, что функция правдоподобия для последовательности значений интервалов между провалами при условии выполнения гипотезы H_1 имеет вид

$$L(\vec{x}, N, \nu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{N-1}}{((N-1)!)^n} \nu^{nN} \exp(-\nu \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Здесь $\vec{x}$ − вектор с координатами $x_1, x_2, \dots x_n$. Требуется найти такие значения ν^* и N^* параметров ν и N, при которых достигается глобальный максимум функции правдоподобия $L(\vec{x}, N, \nu)$.

Далее будем придерживаться следующих обозначений:

$$r = \prod_{i=1}^{n} x_i; \; s = \sum_{i=1}^{n} x_i; \; g = \frac{s}{\sqrt[n]{r}\, n}.$$

Заметим, что из классического неравенства о среднем арифметическом S/n и среднем геометрическом $\sqrt[n]{r}$ следует, что $g \geq 1$; причем $g = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Прежде чем приступить к нахождению N^* и ν^*, отметим, что справедливо следующие утверждения (3 и 4).

Утверждение 3. Пусть $\delta_k = (1 + 1/k)^{k+1}$, где $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

а) если $g > 1$ и $\delta_1 \leq g$e, то $\delta_k \leq g$e при $k = 1,2,\ldots$;

б) если $g > 1$ и $\delta_1 > g$e, то существует и единственно такое натуральное число k_0, что $\delta_k > g$e при $1 \leq k < k_0$ и $\delta_j \leq g$e при $j \geq k_0$;

в) если $g = 1$, то $\delta_k > g$e при $k = 1,2,\ldots$ (здесь е - основание натуральных логарифмов).

Утверждение 4.

Случай 1. Пусть число $g > 1$. Тогда глобальный максимум функции правдоподобия $L(\bar{x}, N, \nu)$ достигается при $\nu^* = nN^*/S$, причем

а) если ge ≥ 4, то $N^* = 1$;

б) если ge < 4, то $N^* = k_0$.

Случай 2. Если $g = 1$, то функция правдоподобия не ограничена сверху и потому глобального максимума не существует.

Этап II. Проверка гипотезы H_1 с помощью критерия согласия χ^2 проводится обычным образом.

В качестве показателя уязвимости объекта предлагается использовать степень уязвимости, представляющую собой отношение пораженных (разрушенных) объектов (элементов) к общему их числу в зоне поражения, зафиксированное для событий определенной интенсивности, вычисленной по предложенному статистическому методу.

Степень уязвимости предлагается выражать в долях единицы от возможных полных потерь в поражаемой зоне.

Ущерб в формулах риска (1.10) и (1.11) связан со степенью уязвимости соотношением

$$У(А) = СУП(А), \qquad (2.13)$$

где СУ(А) − степень уязвимости объекта при осуществлении события А определенной интенсивности, УП(А) – условный полный ущерб от события А, равный численности населения, количеству или стоимости всех объектов (элементов) в зоне поражения.

Степень интенсивности можно определить отдельно для каждого объекта по эмпирическим зависимостям зависимости ущерба в социальной, экономической или экологической сферах от интенсивности этих процессов, полученным по результатам статистической обработки фактических данных или по данным моделирования негативных событий на основе использования теории систем бинарного типа с отношением эквивалентности (П – систем).

Заключение

Полученные результаты представляют собой решения ряда экономических задач, позволяющих осуществлять на количественной основе поддержку управления сложными хозяйственными системами:

− страховыми компаниями, осуществляющими политику в разных видах страхования,

− банками и инвестиционными компаниями за счет выбора оптимальной политики инвестирования,

− фирмами за счет прогнозирования их финансового состояния.

Полученные результаты не требуют проведения специальных статистических исследований или анализа уже имеющихся баз данных. Это обусловлено тем обстоятельством, что срок “жизни” каждого из рассматриваемых стохастических элементов системы управления: человека, элементов микросреды фирмы (финансовой службы, бухгалтерии, производства, службы маркетинга и т.д.), подразделений строительной или промышленной корпорации, товаров, услуг и многих других подчиняется одному и тому же закону распределения.

Литература:

1. *Ковбаса С.И.* Статистическая оценка независимости интервалов в динамических моделях процессов исков //Известия РАЕН. Серия: Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. Том 4. – 2000.- №3. – с. 89-98.
2. *Кудрявцев А.А.* Математика страхования жизни. В 2-х выпусках. Вып.1 оценка обязательств компании страхования жизни. – СПб.: Институт страхования, 1999. – 258 с.
3. *Кульбак К.* Теория информации.- М.: Физматгиз. 1976. – 457 с.
4. *Рагозин А.Л.* Оценка и картографирование опасности и риска от природных и техноприродных процессов (методика и примеры)// Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. – 1993.- Вып.3. – с.16-41.
5. *Росс С.И.* Теория систем бинарного типа с отношением эквивалентности и ее применения в экономических исследованиях // Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов.-2003. № 2. – с.17-34.
6. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. – М.:Наука,1982. – 252 с.

Глава 3. Метод исследования социально-экономических систем управления на основе математического моделирования этики бизнеса

Введение

В настоящее время очень популярным стал метод исследования социально-экономических систем управления, названный « прикладной этикой» (applied ethics). Его сущность состоит в рассмотрении проблем морали во всех экономических, социальных и политических ситуациях, требующих этического подхода.

Особенно активно развиваются такие направления прикладной этики, как этика бизнеса, этика окружающей среды, биоэтика, этика средств массовой информации, космическая этика и т.д.

Первые исследования, посвященные роли этического фактора в экономике, были выполнены в США. Теперь уже общепринято во всем мире, что строгое соблюдение этических норм является важным условием адекватного принятия решений и развития предпринимательства.

В данной главе показано как можно посредством моделирования и количественного изучения влияния этических сторон бизнеса на такие микроэкономические характеристики региона, как обеспеченность товарами и услугами, вероятность кризисной ситуации (связанной, например, с нехваткой в течение некоторого времени особенно важного для жизни региона товара или услуги) и др. принимать оптимальные управленческие решения, касающиеся региональной социально-экономической системы.

3.1 Постановка задачи

В морали оцениваются практические действия людей (поведение), их мотивы, побуждения и намерения. Строго говоря, мораль проявляется в поведении, во взаимоотношениях между людьми. Моральной оценке в жизни подвергаются нравственные качества личности, отдельные поступки человека, движущие мотивы конкретных действий.

Нет ни одной области человеческой жизни, где не присутствовала бы мораль, связанная со всеми видами и сферами человеческой деятельности. Но эта связь очень сложна, поскольку помимо морали во всех сферах действуют и другие регуляторы поведения - правовые нормы, декреты государства, уставы и инструкции и т.д.

В морали принято различать, такие понятия как должное и сущее. Должное – это некий идеал того, как следует поступать, т.е. « идеальные» требования. Сущее – это многообразие практических действий людей.

Следовательно, должное и практически принятое совпадают не всегда и, если совпадают, то не полностью.

Можно предположить, что этика предпринимательства обладает как общими чертами, так и определенными различиями в зависимости социально-экономических условий в конкретном регионе.

Существуют два основных подхода к оценке влияния этики на бизнес.

Первый состоит в том, что во всех без исключения областях человеческой жизни необходимо следовать моральным нормам. Это поведение соответствует христианской этике и его нужно распространять на сферу бизнеса. Довольно давно ведется дискуссия о том, существует ли особая этика бизнеса, отличная от этической нормы христианской морали.

Ряд ученых считает, что нет этики бизнеса. Есть этические нормы, типа: честность – лучшая политика (следуйте «золотому» правилу нравственности). Они размышляет о том, можно ли реально следовать этим принципам в рыночной среде и приходят к выводу, что любое свободно **принятое решение** обязательно имеет этическую составляющую.

И решения, принимаемые в бизнесе, не являются исключением. **Каждое решение** в бизнесе является выражением философского и этического взгляда на жизнь.

Изложенный подход принято называть **моралистическим.**

Второй подход, в отличие от первого, носит чисто **прагматический** характер, состоящий в том, что бизнес должен приносить максимальную прибыль. Основная парадигма этого подхода состоит в том, что деловые отношения невозможно строить, если вы не в состоянии предсказать поведение партнера.

Нормы морали в чем-то ограничивают бизнес, но одновременно выгодны и полезны для предпринимательства, которое рассчитывает на длительный успех, доброе имя и высокий престиж.

Между этими двумя подходами не существует четкой границы. В реальной жизни они реализуются вместе и тесно переплетаются. При этом первый подход делает упор на убеждение и моральную ответственность. Второй подход опирается на нормативное регулирование через законодательство и воздействие, оказываемое на участников бизнеса средствами массовой информации.

Строго говоря, существует и третий подход к рассмотрению этики бизнеса, который никак не связан с соображениями пользы и выгоды.

Его можно назвать **эвристическим.**

В истории человечества известны альтруистические поступки людей, логически не оправданные и даже не связанные с религиозными убеждениями. При оценке эффективности этики бизнеса нельзя не учитывать и этот фактор.

В США этика бизнеса рассматривается с позиций популярной там теории социального обмена. Основная идея этой теории состоит в том, что деятельность людей очень сильно зависит от обмена с другими людьми информацией, идеями, знаниями, материальными благами и т.п.

Существует сильная взаимозависимость бизнеса, общества и его членов. В каждом человеке необходимо видеть индивидуальность, личность. Человек должен осознать свою ответственность за принимаемые решения, поскольку они оказывают влияние на других людей.

Более того, не только решения, но и стиль поведения и манера общения с людьми - все это также является существенным для тех, с кем приходится иметь дело.

Следовательно, можно сделать вывод о большом значении «личностных» элементов бизнеса, этики общения и имиджа менеджера.

Наконец, следует отметить популярную в западной науке концепцию разумно понятого интереса. Ее представители пытаются гармонизировать взаимоотношения между бизнесом и обществом. Основная идея этой концепции заключается в попытке непротиворечивого соединения общественных интересов и эффективности бизнеса. Например, выдвинуто предложение включать в цену любой продукции затраты на решение глобальных проблем.

Таким образом, в настоящее время очень актуальной является задача нахождения количественных показателей в оценке этики бизнеса и разработки математического аппарата для исследования влияния этической компоненты на эффективность бизнеса.

3.2 Формализация задачи

Этика предпринимательства проявляется при взаимодействии предпринимателей (фирм) с:

- заказчиками и поставщиками;
- потребителями;
- акционерами;
- персоналом в целом;
- каждым работником в отдельности;
- органами власти;
- конкурентами;
- местным населением.

Оно проявляется также в неформальных коммуникациях.

Для формализации задачи рассмотрим следующую модель.

Пусть в некоторой местности построен супермаркет. Вокруг него имеются частные дома, банк, мэрия, церковь, колледж, полицейский участок. Очевидно, все эти объекты функционально взаимосвязаны между собой.

Супермаркет представляет собой систему следующих взаимосвязанных отделов (служб): маркетинга, кадров, рекламы, логистики, охраны.

В момент окончания постройки отделы и склады супермаркета еще пусты и не функционируют.

Введем в рассмотрение декартову систему координат, где по оси абсцисс будем откладывать время t (неотрицательная величина), а по оси ординат будем откладывать величину потребности сообщества, проживающего в данной местности, в товарах и услугах. Обозначим ее z (может принимать и положительные и отрицательные значения) и ее можно количественно оценить с помощью экспертов.

Условно назовем ее положительные значения зоной «печали» (у населения есть потребности в товарах и услугах, а супермаркет еще не работает), а ее отрицательные значения зоной « радости» (у населения есть избыток товара, купленный про запас и есть сертификаты на оказание разнообразных услуг, как то телефонные карточки, абонементы и на обслуживание, отдых и т.д.).

Значение $z = 0$ означает ситуацию, когда товаров и услуг населением куплено ровно столько, чтобы жить «с колес». Экономически это оптимальная ситуация, так как « лишние» товары вызывают проблему их хранения, а сертификаты могут быть не использованы. Например, абонемент в бассейн часто не используется полностью или вообще не используется в связи с занятостью его обладателя.

Подчеркнем, что мы рассматриваем ситуацию, когда все товары и услуги можно приобрести только в данном супермаркете. Это допущение не ограничивает общности рассуждений, так как в европейской провинции оно выполняется во многих случаях, а в американской провинции является законом.

Пусть t_0 − момент постройки супермаркета, а t_1 − момент его открытия его. Очевидно, в течение времени $[t_0, t_1]$ величина z принимает постоянное и отрицательное значение.

С момента t_1 (момента открытия супермаркета) величина z увеличивает свое значение, поскольку супермаркет наполняется товарами и вводит службы сервиса.

Однако с момента t_2 из-за нерасторопности менеджеров или в силу этических проблем, возникших между поставщиками и отделом маркетинга супермаркета, величина z уменьшает свое значение, т.е. ощущается большая, чем до момента t_1, потребность в определенном товаре или услуге или в группе товаров.

Затем с момента t_2 величина z опять увеличивает свое значение, так как менеджеры справились с ситуацией и обеспечили поставку данного товара или услуги потребителю (жителям данной местности, или commutity, как это называется в США).

Этот процесс, то увеличения то уменьшения значения величины z, продолжается в силу влияния этических и экономических причин на организацию менеджерами супермаркета торговли товарами и услугами.

Однако значения величины z со временем имеют тенденцию к увеличению в силу организации торговли, налаживания связей с поставщиками, и в какой-то момент t_3 пересекает ось абсцисс.

Назовем интервал времени $(t_2, t_3]$ периодом оптимизма.

С момента t_3 и до момента t_4 в деятельности супермаркета и в жизни данной социальной общины наступает период « благополучия» (назовем его так, поскольку величина z принимает положительные значения). При этом и в периоде «благополучия» возможно увеличение или уменьшение значений величины z.

С момента t_4 и до момента t_5 наступает период «пессимизма». Он характеризуется тем, что значение величины z уменьшается, т.е. супермаркет не справляется с потребностями общины. Это может быть вызвано, например, высокими ценами, которые установил супермаркет на свои товары и/или услуги.

В свою очередь, высокие цены обусловлены неудовлетворительной работой отдела маркетинга супермаркета, который ориентирован на «дорогого» поставщика.

Это может быть в точности объяснено этическими проблемами взаимодействия руководства супермаркета и руководства фирмы − поставщика товаров или услуг. Например, поставщик может лоббировать интересы руководства супермаркета в органах управления регионом.

В результате община начинает покупать товары в другом супермаркете, пусть дальше расположенном.

С момента t_5 и до момента t_6 может начаться период, который можно назвать периодом « выживания» супермаркета. В этот период супермаркет вынужден идти на снижения цен и привлечение покупателей, неся большие убытки.

С момента t_6, если меры по оздоровлению финансового состояния супермаркета не увенчались успехом, возможно банкротство супермаркета, вследствие не выплаты долгов банку, и как результат − продажа супермаркета.

Очевидно, точно так же с позиций этики бизнеса ставится задача анализа деятельности любой фирмы или предприятия.

3.3 Решение задачи

Введем следующие функции.

Пусть функция $F(t) = z_0 \exp(-ht)$, где z_0 – константа, h – интенсивность удовлетворения потребностей общины, t – время, отражает характер удовлетворения покупателей – членов общины товарами и услугами. Выбор функции этого класса совершенно естественен, так как со временем (и достаточно быстро) супермаркет насыщает рынок товарами и услугами.

Пусть функция $L(t) = (a - \exp(-rt)) + b$ отражает уровень наличия товаров и услуг в супермаркете в момент t.

Здесь r – параметр, а b – постоянная, равная значению функции в начальный момент – момент открытия супермаркета, a – это уровень наличия товаров в супермаркете по прошествии достаточно большого времени его работы.

Строго говоря, $F(t), L(t)$ – это случайные процессы, например процессы восстановления.

Рассмотрим случайный процесс

$R(t) = F(t) - L(t)$.

Он отражает ситуацию в общине в момент t.

Если закон распределения $R(t)$ известен, то можно решать задачу следующего вида

$$P(R(t) \geq s) = a_{0,}$$

где P – вероятность, а s, a_0 – некоторые уровни, соответствующие катастрофическому состоянию в деятельности супермаркета и соответственно жизни общины, поскольку ей придется предпринимать меры через руководство общины, так как жителям общины гораздо удобнее покупать товары и пользоваться услугами «своего» супермаркета.

Заключение

В главе посредством моделирования показана возможность количественной оценки такого важного фактора бизнеса, как его этика.

Ясно, что выбор функций $F(t)$ и $L(t)$ в таком виде как он сделан в данном разделе, не является строго обязательным. Более того, оценка параметров этих функций r и h должна строится на основании эмпирических данных, используя, например, метод максимального правдоподобия с последующей проверкой по критерию согласия « хи-квадрат».

Изложенный в данной главе метод количественной оценки этики бизнеса может быть перспективным в маркетинговых исследованиях систем управления, при оценке инвестиций и производственном и финансовом менеджменте.

Литература

1. *Благов Ю.Е.* Этика бизнеса. Вестник СПГУ. Менеджмент. №1 , 2002.
2. *Гавлин М.* Идея ответственности в русском предпринимательстве// Предпринимательство, 1994, № 3 - 4 .
3. *Ковбаса С.И., Ивановский В.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для экономистов. СПб « Альфа» , 2001.
4. *Кауфман Р.* Тактика успеха в бизнесе и науке. М.,1993 - С. 114.
5. *Мескон А. ,Альберт М., Хедоури Ф.* Основы менеджмента. М., 1993 .
6. *Donaldson T.* The ethics of Enternational Business/ - New York, 1992. 6/ 7. Stevens Ed. Business Ethics. New York, 1979.

Глава 4. Метод исследования хозяйственной системы с помощью математического моделирования (динамическое программирование)

Введение

Динамическое программирование – это общий метод решения управленческих задач, когда общее решение заменяется решением последовательности задач, в каждой из которых количество переменных меньше, чем число переменных во всей задаче.

Применим этот метод к управленческой задаче, известной как задача о распределении ресурсов.

4.1. Формулировка задачи

Пусть имеется некоторая сумма финансовых средств S_0, которую нужно разделить между двумя отраслями производства. При этом известен годовой доход каждой отрасли при вложении в эту отрасль какого-то количества средств.

Пусть при вложении в первую отрасль количество финансовых средств, равное X, мы получаем годовой доход, равный $D_1(X)$, а в случае вложения во вторую отрасль финансовых средств Y, получаем годовой доход, равный $D_2(Y)$. При этом мы допускаем, что не все средства, вложенные в любую из этих отраслей, используются до конца.

Допустим, что $R_1(X)$ – остаток на конец года при инвестировании X средств в первую отрасль, а $R_2(Y)$ – при инвестировании средств Y во вторую отрасль.

Требуется так управлять распределением средств в обе отрасли, чтобы за n лет суммарный доход от обеих отраслей был бы максимальным. Мы допускаем, что в начале каждого года (кроме первого) между отраслями происходит перераспределение суммы средств, оставшихся от предыдущего года.

4.2 Математическая модель задачи

Пусть X_i и Y_i – это средства, которые вкладываются в первую и вторую отрасль в начале i- го года, и S_i – остаток средств на конец i- го года, $i = 1,2,\ldots, n$.

Тогда $S_i = R_1(X_i) + R_2(Y_i)$,

$S_{i-1} = X_i + Y_i$.

Следовательно

$S_i = R_1(X_i) + R_2(S_{i-1} - X_i)$.

Суммарный доход за n лет запишется следующим образом:

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} (D_1(X_i) + D_2(Y_i)) \to \max .$$

При этом должны выполнятся следующие ограничения:

$X_1 + Y_1 = S_0$,

$X_2 + Y_2 = S_1$,

$X_3 + Y_3 = S_2$,

. . . .

$X_n + Y_n = S_{n-1}$.

4.3 Решение задачи

Данная задача решается с помощью применения принципа Беллмана, который лежит в основе динамического программирования. Этот принцип состоит в том, что решение задачи на каждом шаге должно строится так, чтобы последующие шаги от данного шага до конца приводили к оптимальному решению всей задачи, а не только данного шага.

Чтобы следовать этому принципу задачу решают с конца. Сначала рассматривается n шаг, а именно выделение средств X_n и Y_n при условии, что предпоследний шаг закончился остатком средств S_{n-1}. Затем переходят к $n-1$ шагу и управляют выделением средств X_{n-1} и Y_{n-1} таким образом, чтобы суммарный доход за последние два года был максимальным, затем переходят к шагу n – 2 и т.д., вплоть до первого.

Поясним подробнее эти шаги:

Первый шаг

Найти наибольшее значение следующей функции:

$$D_n = \max_{0 \le X_n \le S_{n-1}} \{D_1(X_n) + D_2(Y_n)\} = \max_{0 \le X_n \le S_{n-1}} \{D_1(X_n) + D_2(S_{n-1} - X_n)\}$$

Второй шаг

Найти наибольшее значение следующей функции:

$$D_{n-1,n} = \max_{0 \le X_{n-1} \le S_{n-2}} \{D_1(X_{n-1}) + D_2(Y_{n-1}) + D_n(S_{n-1})\} = \max_{0 \le X_{n-1} \le S_{n-2}} \{D_1(X_{n-1}) + D_2(S_{n-2} - X_{n-1}) + D_n(R_1(X_{n-1}) + R_2(S_{n-2} - X_{n-1}))\}$$

Последним будет шаг, состоящий в выделении средств X_1 и Y_1, причем общее количество выделяемых средств известно уже не условно, а точно. Оно равно S_0.

Приведем **конкретный пример решения данной зад**ачи.

Пусть S_0=100, n=3, $D_1(X) = X^2$, $D_1(Y) = 2Y^2$, $R_1(X) = 0.8X$, $R_2(Y) = 0.3Y$.

Доход за три года можно записать следующим образом:

$$F(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3) = \sum_{i=1}^{3} (D(X_i) + D(Y_i)).$$

При этом $X_1 + Y_1 = 100$, $X_2 + Y_2 = S_1$, $X_3 + Y_3 = S_2$.

Запишем решение на первом шаге.

$$D_3 = \max_{0 \le X_3 \le S_2} \{D_1(X_3) + D_2(Y_3)\} = \max_{0 \le X_3 \le S_2} \{D_1(X_3) + D_2(S_2 - X_3)\} =$$

$$= \max\{X_3^2 + 2(S_2 - X_3)^2\} = \max\{X_3^2 + 2(S_2^2 - 2S_2X_3 + X_3^2\} =$$

$0 \le X_3 \le S_2 \quad 0 \le X_3 \le S_2$

$= \max\{3X_3^2 + 2S_2^2 - 4S_2X_3\}$.

$0 \le X_3 \le S_2$

График функции (S_2 – параметр), стоящей в последних фигурных скобках, представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Поэтому ее максимальное значение лежит на концах отрезка $0 \le X_3 \le S_2$. Имеем

$D_3(X_3 = 0) = 2S_2^2$,

$D_3(X_3 = S_2) = 3S_2^2 + 2S_2^2 - 4S_2S_2 = S_2^2$.

Таким образом, максимальное значение равно $2S_2^2$, когда $X_3 = 0$. Следовательно $Y_3 = S_2$.

Рассмотрим теперь второй шаг:

$D_{2,3} = \max\{D_1(X_2) + D_2(Y_2) + D_3(S_2)\} = \max\{D_1(X_2) + D_2(S_1 - X_2) + D_3(R_1(X_2) + R_2(S_1 - X_2)\}$

$0 \le X_2 \le S_1 \qquad 0 \le X_2 \le S_1$

$= \max\{X_2^2 + 2(S_1 - X_2)^2 + 2(0.8X_2^2 + 0.3(S_1 - X_2))^2\} = \max\{0.5X_2^2 - 3.45S_1X_2 + 2.18\ S_1^2\}$.

$0 \le X_2 \le S_1 \qquad 0 \le X_2 \le S_1$

Аналогично первому шагу получаем

$D_{2,3}(X_3 = 0) = 2.18S_1^2$,

$D_{2,3}(X_3 = S_1) = 1.28S_1^2$.

Таким образом, максимальное значение равно $2.18S_1^2$, когда $X_2 = 0, Y_2 = S_1$.

Третий шаг:

$D_{1,2,3} = \max\{D_1(X_1) + D_2(100 - X_1) + 2.18S_1^2\} =$

$0 \le X_1 \le S_0 = 100$

$= \max\{D_1(X_1) + D_2(100 - X_1) + 2.18(0.8X_1 + 0.3(100 - X_1))^2\} =$

$0 \le X_1 \le S_0 = 100$

$= \max\{X_1^2 + 2(100 - X_1)^2 + 2.18(0.8X_1 + 0.3(100 - X_1))^2\}$.

$0 \le X_1 \le S_0 = 100$

Аналогично шагам 1 и 2 получаем

$D_{1,2,3}(X_1 = 0) = 21962$,

$D_{1,2,3}(X_1 = 100) = 23952$.

Итак, максимальное значение дохода за три хозяйственных года равно 23 952, когда $X_1 = 100, Y_1 = 0$.

Таким образом, оптимальное управление ресурсом в 100 единиц состоит в следующем:

1. В первый год первой отрасли следует выделить финансовых средств в количестве 100 единиц, а второй – 0 единиц.

2. Во второй год первой отрасли следует выделить 0 средств. Остаток средств после первого года хозяйствования будет равен следующей

величине: $R_1(X_1 = 100) = 0.8 * 100 = 80.$ Поэтому второй отрасли надо выделить, следуя полученному решению, 80 единиц финансовых средств.

3. В третий год первой отрасли надо снова выделить 0 средств. Остаток после второго года хозяйствования будет равен следующей величине: $R_2(Y_2 = 80) = 0.3 * 80 = 24.$ Поэтому, следуя полученному решению, второй отрасли в третий год надо выделить 24 единицы.

Общий максимальный доход, как уже отмечалось, при этом составит 23 952 единицы.

Заключение

Заметим, что если бы мы принимали все время интуитивное решение вкладывать все средства на каждом шаге (в начале каждого хозяйственного года) во вторую отрасль (более доходную), то получили бы следующий общий доход:

$D_1 = 2Y^2 = 2 * 100^2 = 20000$, остаток равен 0.3 $*$ 100 = 30,

$D_2 = 2 * 30^2 = 1800$, остаток равен 0.3 $*$ 30 = 9,

$D_3 = 2 * 9^2 = 162.$

Тогда общий доход за три года равнялся бы 20 000 + 18 00 + 162 = 21962, что меньше, чем получилось при решении методом динамического программирования.

Литература:

1. *Калихман И.Л., Войтенко М.А*. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. – 1979.
2. Справочник по математике для экономистов / Под ред. *В.И. Ермакова*. - М.: Высшая школы. – 1987.