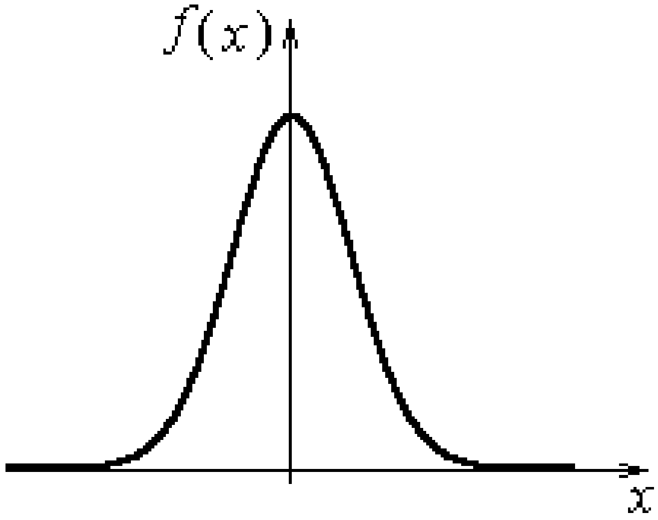
О.И. Судавная, В.М. Фролов, С.В. Фролов

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи

для студентов вечернего отделения

IV семестр



Санкт - Петербург

2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

О.И. Судавная, В.М. Фролов, С.В. Фролов

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения

IV семестр

Методическое пособие

Санкт- Петербург

2010

О.И. Судавная, В.М. Фролов, С.В. Фролов. Типовые расчеты по высшей математике. Методические указания и задачи для студентов вечернего отделения. IV семестр. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 54 с.

Пособие содержит типовые расчеты с методическими указаниями по темам

- теория функций комплексной переменной
- теория вероятностей

Пособие адресовано студентам второго курса вечернего отделения СПбГУ ИТМО всех специальностей

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО 31 августа 2010 года, протокол №1

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

Введение

Типовые расчеты по математике для студентов второго курса вечернего отделения в четвертом семестре содержат 2 типовых расчета по темам

- «Теория функций комплексной переменной»
- «Теория вероятностей»

Каждый типовой расчет включает 26 вариантов по пяти различным разделам. Перед заданиями помещены методические указания, основные теоретические формулы и разобранные решения наиболее типичных задач.

Рекомендуемые пособия:

1. Гусарова Е.В. и др. Математический анализ III / Под общей редакцией И.Ю. Попова. Учебное пособие. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2000.
2. Бодрова Н.А., Родина Т.В., Суслина И.А. Элементы теории вероятностей и математической статистики / Под редакцией В.П. Смирнова. Учебное пособие. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2001.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1980.

Типовой расчет по теме «Теория функций комплексной переменной»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Нахождение значений функций комплексной переменной в заданных точках.
II. Восстановление регулярной функции по ее действительной или мнимой части с помощью условий Коши-Римана.
III. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной по заданной кривой.
IV. Разложение функций в ряд Лорана.
V. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Образцы решения задач по теме «Нахождение значений функций комплексной переменной в заданных точках»

Основные функции комплексной переменной приведены в приложении.

Задача 1. Найдите значение функции $f(z)=\dfrac{2z-i-2}{z^2 i}$ в точке $z_0=2-i$.

Решение. Подставив z_0 в выражение функции, получим

$$f(z_0)=\frac{4-2i-i-2}{(2-i)^2 i}=\frac{2-3i}{(4-4i-1)i}=\frac{2-3i}{4+3i}=\frac{(2-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=$$

$$=\frac{8-12i-6i+9i^2}{16+9}=\frac{-1-18i}{25}=-0,04-0,72i.$$

Ответ: $-0,04-0,72i$.

Задача 2. Найдите значение функции $f(z)=\sin z$ в точке $z_0=\dfrac{\pi}{2}+3i$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части данной функции: $f(z)=\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$, где $z=x+iy$. Подставим в полученное выражение $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ и $y_0=3$:

$$f(z_0)=\sin\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}3+i\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}3=\operatorname{ch}3.$$

Ответ: $\operatorname{ch}3$.

Задача 3. Найдите значение функции $f(z)=\operatorname{ch} z$ в точке $z_0=(-2+i)\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Выделим действительную и мнимую части данной функции: $f(z)=\operatorname{ch} z=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\cos y\operatorname{ch} x+i\sin y\operatorname{sh} x$, где $z=x+iy$. Подставим в полученное выражение $x_0=-\pi$ и $y_0=\dfrac{\pi}{2}$:

$$f(z_0)=\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{ch}\left(-\pi\right)+i\sin\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}\left(-\pi\right)=-i\operatorname{sh}\pi.$$

Ответ: $-i\operatorname{sh}\pi$.

Образцы решения задач по теме «Восстановление регулярной функции по ее действительной или мнимой части с помощью условий Коши-Римана»

Задача 4. Восстановите регулярную функцию $f(z)$ по ее заданной действительной части $u(x,y)=e^{-y}\cos x+2x$, если $f(i)=e^{-1}$.

Решение. 1) Действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части регулярной функции $f(z)$ связаны условиями Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Отсюда следует, что $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^{-y}\cos x$ и $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2-e^{-y}\sin x$.

Полный дифференциал мнимой части $v(x,y)$ функции $f(z)$ равен $dv=e^{-y}\cos x dx+(2-e^{-y}\sin x)dy$.

2) Найдем функцию $v(x,y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла второго рода $v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv+v(x_0,y_0)$,

который не зависит от пути интегрирования. Согласно условию задачи, значение мнимой части в точке $z_0 = x_0 + y_0 i = 0 + 1i = i$ равно нулю, т.е. $v(x_0,y_0) = v(0, 1) = 0$.

В качестве пути интегрирования выберем ломаную линию ABC, (рис.1), где $A(0, 1)$, $B(x, 1)$, $C(x, y)$. Криволинейный интеграл по ломаной ABC равен

$$v(x,y)=\int\limits_{(0,1)}^{(x,y)} e^{-\tilde{y}}\cos\tilde{x}d\tilde{x}+(2-e^{-\tilde{y}}\sin\tilde{x})d\tilde{y},$$

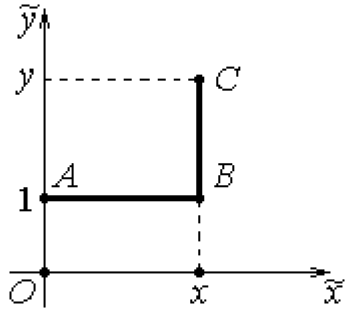


Рис. 1

где $\tilde{x}, \tilde{y}$ – обозначения переменных интегрирования. Разобьем ломаную ABC на два отрезка AB и BC и найдем значения интеграла на каждом отрезке.

На отрезке AB $\tilde{y}=1,\ d\tilde{y}=0$, а $\tilde{x}$ меняется от 0 до x. Значение I_{AB} интеграла на этом отрезке равно $I_{AB}=\int\limits_0^x e^{-1}\cos\tilde{x}d\tilde{x}=e^{-1}\sin x$.

На отрезке BC $\tilde{x}$ = const, d$\tilde{x}$= 0, а $\tilde{y}$ меняется от 1 до y. Значение I_{BC} интеграла на этом отрезке равно $I_{BC}=\int\limits_1^y\left(2-e^{-\tilde{y}}\sin x\right)d\tilde{y}=\left(2\tilde{y}+e^{-\tilde{y}}\sin x\right)\Big|_1^y=$

$=2y+e^{-y}\sin x-2-e^{-1}\sin x$.

Таким образом, согласно свойству аддитивности криволинейного интеграла, мнимая часть искомой функции равна

$$v(x,y) = I_{AB} + I_{BC} = e^{-1}\sin x + 2y + e^{-y}\sin x - 2 - e^{-1}\sin x = e^{-y}\sin x + 2y - 2.$$

3) Регулярная функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y)i = e^{-y}\cos x + 2x + (e^{-y}\sin x + 2y - 2)i =$$

$$= e^{-y}(\cos x + i\sin x) + 2(x+yi) - 2i = e^{-y+xi} + 2(x+yi) - 2i =$$

$$= e^{(x+yi)i} + 2(x+yi) - 2i = e^{zi} + 2z - 2i.$$

Ответ: $f(z) = e^{zi} + 2z - 2i$.

Образцы решения задач по теме «Вычисление интеграла от функции комплексной переменной по заданной кривой»

Задача 5. Вычислите интеграл $\int\limits_C (z - \operatorname{Im} z)dz$, где C – отрезок OM прямой от точки $O(0, 0)$ до точки $M(2, -2)$.

Решение. Подынтегральное выражение имеет вид $(z - \operatorname{Im} z)dz =$

$$= (x + yi - y)(dx + idy) = (x-y)dx - ydy + i(ydx + (x-y)dy).$$

Искомый интеграл выражается через два криволинейных интеграла второго рода: $\int\limits_C (z - \operatorname{Im} z)dz = \int\limits_C (x-y)dx - ydy + i\int\limits_C ydx + (x-y)dy$.

Путь интегрирования представляет собой отрезок OM (рис. 2), где $O(0, 0)$, $M(2, -2)$. Уравнение этого отрезка: $y = -x$, причем $dy = -dx$, а x меняется от 0 до 2.

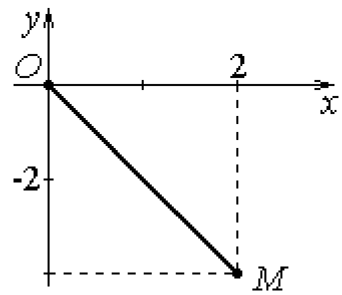


Рис. 2

Выразим криволинейные интегралы через определенные:

$$\int\limits_C (z - \operatorname{Im} z)dz = \int\limits_0^2 (2x - x)dx + i\int\limits_0^2 (-x - 2x)dx =$$

$$= \int\limits_0^2 xdx - i\int\limits_0^2 3xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 - 3i\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2 - 6i.$$

Ответ: $2 - 6i$.

Задача 6. Вычислите интеграл $\int\limits_C z^5 dz$, где C – дуга окружности $|z| = \sqrt{6}$, лежащая между двумя лучами $\arg z = \frac{\pi}{12}$ и $\arg z = \frac{7\pi}{12}$. Обход производится в положительном направлении.

Решение. Подынтегральное выражение, записанное в показательной форме, имеет вид $z^5 dz = r^5 e^{5\varphi i} d\left(re^{\varphi i}\right)$.

По условию $r = |z| = \sqrt{6}$, значит $d\left(re^{\varphi i}\right) = re^{\varphi i} i d\varphi = \sqrt{6} e^{\varphi i} i d\varphi$, откуда следует, что $z^5 dz = \left(\sqrt{6}\right)^6 e^{6\varphi i} i d\varphi$. Аргумент φ меняется от $\frac{\pi}{12}$ до $\frac{7\pi}{12}$ (рис. 3).

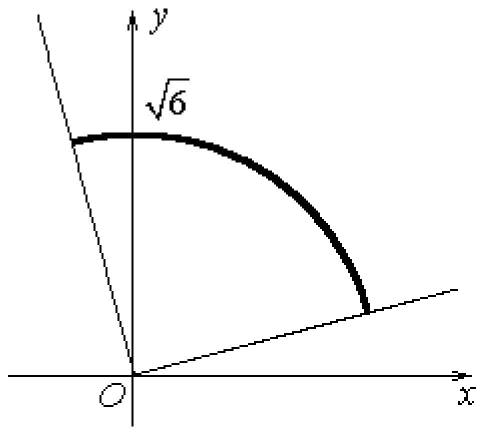


Рис. 3

Искомый интеграл равен

$$\int\limits_C z^5 dz = \int\limits_{\pi/12}^{7\pi/12} \left(\sqrt{6}\right)^6 e^{6\varphi i} i d\varphi = 216 \cdot \left. \frac{e^{6\varphi i} i}{6i} \right|_{\pi/12}^{7\pi/12} = 36 \left. e^{6\varphi i} \right|_{\pi/12}^{7\pi/12} =$$

$$= 36\left(e^{7\pi i/2} - e^{\pi i/2}\right) = 36\left(e^{3\pi i/2} - e^{\pi i/2}\right) = 36(-i - i) = -72i.$$

Ответ: – 72*i*.

Образцы решения задач по теме «Разложение функций комплексной переменной в ряд Лорана»

Задача 7. Разложите функцию $f(z) = z\,\mathrm{ch}\frac{1}{z} + \mathrm{sh}\frac{1}{z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ (при $0 < |z| < \infty$). Выделите главную и регулярную части ряда Лорана.

Решение. Применяя стандартные разложения (см. приложение), получим

$$f(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n}(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Выпишем член первого ряда при $n = 0$, т. е. z, после чего перенумеруем члены первого ряда

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!} =$$

$$= z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}(2n+1)!}.$$

Запишем сумму двух рядов в виде единого ряда, сгруппировав слагаемые при одинаковых степенях z:

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} \left(\frac{1}{(2n+2)!} + \frac{1}{(2n+1)!} \right) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{z^{2n+1}(2n+2)!}.$$

Регулярная часть равна z; главная часть равна $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{z^{2n+1}(2n+2)!}$.

Ответ: $z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{z^{2n+1}(2n+2)!}$.

Задача 8. Разложите функцию $f(z) = \frac{3z}{z^2 - 5z + 4}$ в ряд Лорана по степеням z а) в круге $|z| < 1$, б) в кольце $1 < |z| < 4$, в) в кольце $4 < |z| < \infty$. Выделите главную и регулярную части ряда Лорана.

Решение. Представим функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(z) = \frac{3z}{z^2 - 5z + 4} = \frac{3z}{(z-4)(z-1)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-1} = \frac{Az - A + Bz - 4B}{(z-4)(z-1)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow f(z) = \frac{4}{z-4} - \frac{1}{z-1} \; (*).$$

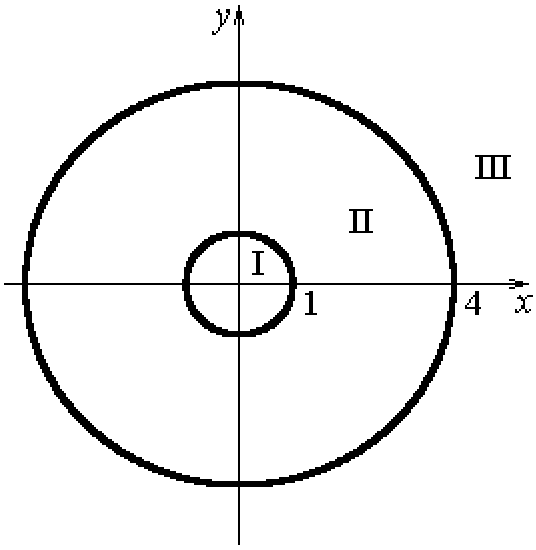


Рис. 4

а) Если $|z| < 1$ (рис. 4, обл. I), то $|z| < 4 \Rightarrow \frac{|z|}{4} < 1$. Представим (*) в виде:

$$f(z) = -\frac{1}{1 - \frac{z}{4}} + \frac{1}{1 - z}.$$

Первое слагаемое представляет собой сумму геометрического ряда с первым членом, равным -1 и знаменателем, равным $z/4$, а второе – сумму геометрического ряда с первым членом, равным 1 и знаменателем, равным z. Поэтому их можно представить геометрическими рядами (см. приложение):

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n-1}{4^n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-1}{4^n}z^n.$$

Последний переход обусловлен тем, что член ряда при $n = 0$ равен 0. Полученный ряд содержит только регулярную часть.

б) Если $1<|z|<4$ (рис. 4, обл. II), то $\frac{1}{|z|}<1$, $\frac{|z|}{4}<1$. Представим (*) в виде $f(z)=-\frac{1}{1-\frac{z}{4}}-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$. Первое слагаемое разложим в геометрический ряд так же, как в предыдущем случае. Второе слагаемое представим в виде геометрического ряда с первым членом, равным $1/z$ и знаменателем, равным $1/z$. Тогда получим $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$.

Регулярная часть равна $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}$; главная часть равна $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$.

в) Если $4<|z|<\infty$ (рис. 4, обл. III), то $\frac{1}{|z|}<1$, $\frac{4}{|z|}<1$. Представим (*) в виде $f(z)=\frac{4}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$. Первое слагаемое представим в виде суммы геометрического ряда с первым членом $4/z$ и знаменателем $4/z$. Второе слагаемое разложим в степенной ряд так же, как в предыдущем случае:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}-1}{z^{n+1}}.$$

Полученный ряд содержит только главную часть.

Ответ: а) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-1}{4^n}z^n$; б) $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$;

в) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+1}-1}{z^{n+1}}$.

Образцы решения задач по теме «Вычисление интегралов с помощью вычетов»

Задача 9. По теореме Коши о вычетах вычислите интеграл $\int\limits_C (12z^3-2z)\cos\frac{1}{z}dz$, где контур C – окружность $|z|=1$, обход которой происходит в положительном направлении.

Решение. Контур интегрирования $|z|=1$ представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Подынтегральная функция $f(z)=(12z^3-2z)\cos\frac{1}{z}$ имеет единственную особую точку $z_0=0$, принадлежащую области, ограниченной контуром C. Эта точка является существенно особой, т. к. $\lim\limits_{z\to 0}(12z^3-2z)\cos\frac{1}{z}$ не существует. Для нахождения вычета в этой точке разложим функцию в ряд Лорана по степеням z с помощью стандартного разложения:

$$f(z)=(12z^3-2z)\cos\frac{1}{z}=(12z^3-2z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-2n}}{(2n)!}=$$

$$=12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{3-2n}}{(2n)!}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{1-2n}}{(2n)!}.$$

Получили разность двух рядов. Поскольку вычет – это коэффициент a_{-1} при степени z^{-1} ряда Лорана, найдем номер члена каждого ряда, содержащего z^{-1} и соответствующий коэффициент.

а) Рассмотрим первый ряд $12\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{3-2n}}{(2n)!}$. Приравняв показатель степени $3-2n$ к -1, получим $3-2n=-1\Rightarrow n=2\Rightarrow a_{-1}=\frac{12\cdot(-1)^2}{4!}=0{,}5$.

б) Рассмотрим второй ряд $-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{1-2n}}{(2n)!}$. Приравняв показатель степени $1-2n$ к -1, получим $1-2n=-1\Rightarrow n=1\Rightarrow a_{-1}=\frac{-2\cdot(-1)}{2!}=1$.

Вычет функции в точке $z_0=0$ равен сумме полученных коэффициентов: $\operatorname{res} f(0)=0{,}5+1=1{,}5$. По теореме Коши о вычетах получим

$$\int\limits_C (12z^3-2z)\cos\frac{1}{z}dz=2\pi i\cdot 1{,}5=3\pi i$$

Ответ: $3\pi i$.

Задача 10. По теореме Коши о вычетах вычислите интеграл $\int\limits_C \frac{2z-1}{z(z-2i)^3}dz$, где контур C – окружность $|z-2i|=1$, обход которой происходит в положительном направлении.

Решение. Контур интегрирования $|z-2i|=1$ представляет собой окружность единичного радиуса с центром в точке $z_0 = 2i$ (рис. 5).

Подынтегральная функция $f(z)=\frac{2z-1}{z(z-2i)^3}$ имеет две изолированные особые точки: $z_0 = 2i$ и $z_1 = 0$.

Первая точка принадлежит области, ограниченной контуром, а вторая ей не принадлежит. Значит, искомый интеграл равен $2\pi i \cdot \operatorname{res} f(2i)$.

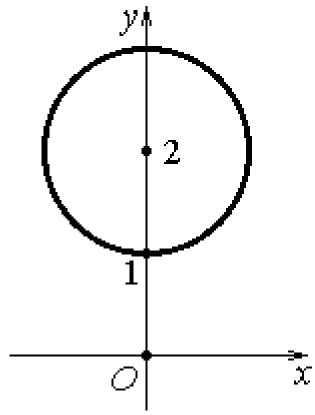


Рис. 5

Найдем вычет в точке $z_0 = 2i$, которая является полюсом третьего порядка данной функции (корнем кратности 3 знаменателя). Вычет в полюсе порядка k находится по формуле $\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)^k\right)^{(k-1)}$.

В нашем случае $k = 3$, поэтому данная формула примет вид

$$\operatorname{res} f(2i)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 2i}\left(\frac{2z-1}{z(z-2i)^3}(z-2i)^3\right)''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(\frac{2z-1}{z}\right)''=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(2-z^{-1}\right)''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(z^{-2}\right)'=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left(-2z^{-3}\right)=-(2i)^{-3}=-\frac{i}{8}.$$

Окончательно получим $\int\limits_C \frac{2z-1}{z(z-2i)^3}dz=2\pi i\left(-\frac{i}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 11. По теореме Коши о вычетах вычислите интеграл $\int\limits_C \frac{1-\cos z}{z^2\left(z^2-\pi^2\right)}dz$, где контур C – окружность $|z-1|=2{,}5$, обход которой происходит в положительном направлении.

Решение. Контур интегрирования $|z-1|=2{,}5$ представляет собой окружность радиуса, равного 2,5, с центром в точке $z_0 = 1$ (рис. 6). Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2\left(z^2-\pi^2\right)}$ имеет три изолированные особые точки: $z_1=0,\ z_2=\pi,\ z_3=-\pi$. Последняя точка не лежит в области, ограниченной контуром. Значит, искомый интеграл равен $2\pi i\left(\operatorname{res} f(z_1)+\operatorname{res} f(z_2)\right)$.

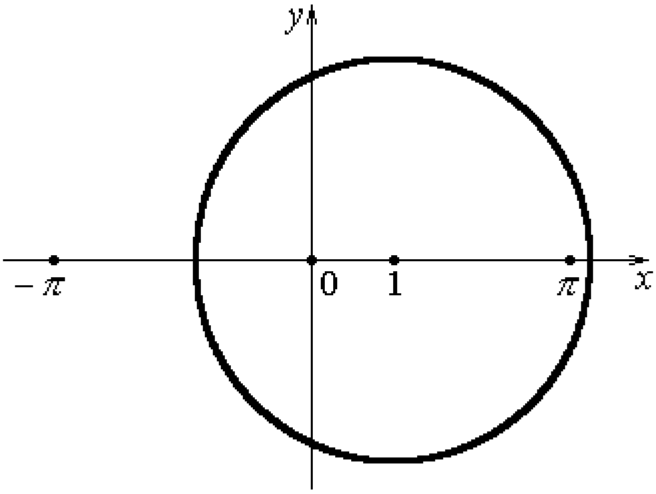


Рис. 6

Определим тип каждой особой точки и найдем вычеты в них.

Найдем предел функции в точке $z_1 = 0$:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2\left(z^2-\pi^2\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2/2}{z^2\left(z^2-\pi^2\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2\left(z^2-\pi^2\right)}=-\frac{1}{2\pi^2}.$$

При нахождении предела использована эквивалентность бесконечно малых: $1-\cos z \underset{z\to 0}{\sim} z^2/2$. Таким образом, точка $z_1 = 0$ является устранимой особой точкой, поэтому $\operatorname{res} f(0) = 0$.

Точка $z_2=\pi$ является простым полюсом (однократным корнем знаменателя). Найдем вычет в этой точке:

$$\operatorname{res} f(\pi)=\lim_{z\to\pi} f(z)(z-\pi)=\lim_{z\to\pi}\frac{(1-\cos z)(z-\pi)}{z^2(z+\pi)(z-\pi)}=\lim_{z\to\pi}\frac{1-\cos z}{z^2(z+\pi)}=\frac{1+1}{\pi^2\cdot 2\pi}=\frac{1}{\pi^3}$$

Искомый интеграл равен $\int\limits_C f(z)dz=2\pi i\left(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(\pi)\right)=2\pi i\cdot\frac{1}{\pi^3}=\frac{2i}{\pi^2}$.

Ответ: $\frac{2i}{\pi^2}$.

Расчетные задания

I. Найдите значение функции $w = f(z)$ в заданной точке $z = z_0$

1. $f(z) = e^z, \quad z_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}i$

2. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i$

3. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}(-1 + i)$

4. $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = 2 + \dfrac{\pi}{2}i$

5. $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = \pi\left(-1 + \dfrac{1}{2}i\right)$

6. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = -1 + i$

7. $f(z) = e^z, \quad z_0 = 2 - \dfrac{\pi}{4}i$

8. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \pi - i$

9. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = -\pi + i$

10. $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = \pi\left(-2 + i\right)$

11. $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = -3 + \pi i$

12. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = 1 - \sqrt{3}i$

13. $f(z) = \dfrac{z - 2i}{z^2}, \quad z_0 = 2 + i$

14. $f(z) = e^z, \quad z_0 = 1 - \dfrac{\pi}{2}i$

15. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}(1 + i)$

16. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2} - i$

17. $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = -2 + \pi i$

18. $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}(1 - i)$

19. $f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = -1 - i$

20. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 3i}, \quad z_0 = 1 - 2i$

21. $f(z) = e^z, \quad z_0 = \ln 2 + \dfrac{\pi}{3}i$

22. $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \pi(1 - i)$

23. $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \pi(1 - i)$

24. $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{2}(1 + i)$

25. $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = 2 + \dfrac{\pi}{2}i$

26. $f(z) = \dfrac{z^2 - i}{z - i}, \quad z_0 = 1 + 2i$

II. Восстановите регулярную функцию $w = f(z)$ по ее заданной действительной $u(x; y)$ или мнимой $v(x; y)$ части, если $f(z_0) = w_0$

1. $u(x; y) = x^2 - y^2 - 4x, \quad f(i) = -1$

2. $v(x; y) = e^{2x}\sin 2y + y, \quad f(\pi/2) = e^{\pi}$

3. $u(x; y) = 3x - x^2 + y^2, \quad f(i) = 1$

4. $v(x; y) = 2e^x \cos y, \quad f(0) = 2i$

5. $u(x; y) = -x^2 + y^2 + 2y + 1, f(-i) = 0$

6. $v(x; y) = e^{-y}\sin x - y, \quad f(0) = 1$

7. $u(x;y)=x^2-y^2-2y-1, f(-i)=0$

8. $v(x;y)=-e^{-2x}\sin 2y+\pi, f(0)=1+\pi i$

9. $u(x;y)=4(x^2-y^2+1), \quad f(i)=0$

10. $v(x;y)=e^{-y}\sin x+x, \quad f(i)=e^{-1}$

11. $u(x;y)=x^2-y^2+y, \quad f(i)=0$

12. $v(x;y)=e^{-\pi y}\sin \pi x, \quad f(1-i)=-e^{\pi}$

13. $u(x;y)=-2x(y+1), \quad f(-i)=i$

14. $v(x;y)=2xy-4y+4, \quad f(i)=-1$

15. $u(x;y)=e^{2x}\cos y+2x, \quad f\left(0\right)=1$

16. $v(x;y)=3y-2xy-3$, $\quad f(i)=1$

17. $u(x;y)=-2e^{x}\sin y, \quad f(0)=2i$

18. $v(x;y)=-2xy-2x, \quad f(-i)=0$

19. $u(x;y)=e^{-y}\cos x-x, \quad f(0)=1$

20. $v(x;y)=2xy+2x, \quad f(-i)=0$

21. $u(x;y)=e^{-2x}\cos 2y, f(0)=1+\pi i$

22. $v(x;y)=8xy-x, \quad f(i)=1$

23. $u(x;y)=e^{-y}\cos x-y+1, f(i)=e^{-1}$

24. $v(x;y)=2xy-x+\pi, \quad f(i)=i\pi$

25. $u(x;y)=e^{-\pi y}\cos \pi x, f(1-i)=-e^{\pi}$

26. $v(x;y)=x^2-y^2-2y, \quad f(-2i)=0$

III. Найдите интеграл $\int\limits_C f(z)dz$, где C – заданный путь интегрирования.

Сделайте схематический рисунок пути интегрирования

1. $\int\limits_C \bar{z}dz$, C – отрезок OM, где $O(0;\ 0)$, $M(-3;\ 1)$
2. $\int\limits_C z^2dz$, C – дуга окружности $|z|=3$ при условии $\pi/6 \le \arg z \le \pi/3$
3. $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, C – отрезок OM, где $O(0;\ 0)$, $M(-2;\ 1)$
4. $\int\limits_C z^3dz$, C – дуга окружности $|z|=2$ при условии $\pi/8 \le \arg z \le \pi/4$
5. $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz$, C – отрезок OM, где $O(0;\ 0)$, $M(1;-2)$
6. $\int\limits_C z dz$, C – дуга окружности $|z|=4$ при условии $3\pi/4 \le \arg z \le \pi$

7. $\int\limits_C \mathrm{Im}(z^2)dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(-1; 3)$

8. $\int\limits_C z^2 dz$, C – дуга окружности $|z| = 3$ при условии $5\pi/6 \le \arg z \le 7\pi/6$

9. $\int\limits_C \mathrm{Re}(z^2)dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(4; -1)$

10. $\int\limits_C z^3 dz$, C – дуга окружности $|z| = 2$ при условии $5\pi/8 \le \arg z \le 3\pi/2$

11. $\int\limits_C \bar{z} dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(2; -4)$

12. $\int\limits_C z^2 dz$, C – дуга окружности $|z| = 3$ при условии $\pi/2 \le \arg z \le 2\pi/3$

13. $\int\limits_C \mathrm{Re}\, z dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(2; -3)$

14. $\int\limits_C z^3 dz$, C – дуга окружности $|z| = 2$, при условии $5\pi/8 \le \arg z \le \pi$

15. $\int\limits_C \mathrm{Im}\, z dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(-3; 2)$

16. $\int\limits_C z dz$, C – дуга окружности $|z| = 4$ при условии $\pi/2 \le \arg z \le 5\pi/4$

17. $\int\limits_C \mathrm{Re}\, z dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(3; -1)$

18. $\int\limits_C z^2 dz$, C – дуга окружности $|z| = 3$ при условии $2\pi/3 \le \arg z \le 5\pi/6$

19. $\int\limits_C \mathrm{Re}(z^2)dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(-1; 4)$

20. $\int\limits_C z^3 dz$, C – дуга окружности $|z| = 2$ при условии $7\pi/8 \le \arg z \le 9\pi/8$

21. $\int\limits_C \bar{z} dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$ $M(1; -3)$

22. $\int\limits_C z^2 dz$, C – дуга окружности $|z| = 3$ при условии $2\pi/3 \le \arg z \le \pi$

23. $\int\limits_C \mathrm{Re}\, z dz$, C – отрезок OM, где $O(0; 0)$, $M(4; -1)$

24. $\int\limits_C z^3 dz$, C – дуга окружности $|z| = 2$ при условии $\pi/4 \le \arg z \le 3\pi/8$

25. $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz$, C – отрезок OM, где $O(0;\,0)$, $M(-1;\,4)$

26. $\int\limits_C \bar{z} dz$, C – отрезок OM, где $O(0;\,0)$, $M(-4;\,2)$

IV. Разложите функцию $w = f(z)$ в ряд Лорана в заданной области. Выделите главную и регулярную части ряда Лорана

1. $f(z) = \dfrac{3z}{z^2 - 7z + 10}$, $|z| < 2$

2. $f(z) = z^4 \cos\dfrac{2}{z}$, $|z| > 0$

3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $|z| < 2$

4. $f(z) = z^5 e^{1/z^2}$, $|z| > 0$

5. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$, $0 < |z| < 1$

6. $f(x) = \cos\dfrac{1}{z} + z\sin\dfrac{1}{z}$, $|z| > 0$

7. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$, $|z| < 1$

8. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5}$, $|z| > 0$

9. $f(z) = \dfrac{3z}{z^2 - 7z + 10}$, $2 < |z| < 5$

10. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z} + \sin\dfrac{1}{z}$, $|z| > 0$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $2 < |z| < 3$

12. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{z^3}$, $|z| > 0$

13. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$, $|z| > 1$

14. $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^3}$, $|z| > 0$

15. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$, $1 < |z| < 2$

16. $f(z) = \cos\dfrac{1}{z} + \operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$, $|z| > 0$

17. $f(z) = \dfrac{3z}{z^2 - 7z + 10}$, $|z| > 5$

18. $f(z) = z^4 \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, $|z| > 0$

19. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 6}$, $|z| > 3$

20. $f(z) = z^3 \ln\left(1 + \dfrac{1}{z}\right)$, $|z| > 0$

21. $f(z) = \dfrac{2z + 4}{z^2 + 4z + 3}$, $|z| < 1$

22. $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} + \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, $|z| > 0$

23. $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3z + 2}$, $|z| > 2$

24. $f(z) = \dfrac{2z + 4}{z^2 + 4z + 3}$, $1 < |z| < 3$

25. $f(z) = \dfrac{\ln\left(1 + z^2\right)}{z^4}$, $|z| > 0$

26. $f(z) = \dfrac{e^{-2z^2}}{z^3}$, $|z| > 0$

V. Вычислите интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ с помощью вычетов при условии, что обход контура C происходит в положительном направлении. Сделайте схематический рисунок контура C и особых точек

1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{e^{0,5z^2}}{(z-2i)^3}dz$

2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{2-z^3}{z(z-1)^3}dz$

3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (3z^2+i)\sin\frac{1}{z}dz$

4. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \mathrm{tg}z\ dz$

5. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2} \frac{e^z-1}{z^4}dz$

6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{-z^2}}{z(z^2+1)}dz$

7. $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=1} \frac{z}{(z-i)(z+i)^3}dz$

8. $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=3} \mathrm{ctg}zi dz$

9. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (2z+z^3)e^{\frac{1}{z^2}}dz$

10. $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1,5} \frac{\sin^2 z}{z^2(4z^2-\pi^2)}dz$

11. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{(z-i)^2}{z^3-z}dz$

12. $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=1} \frac{1}{z(z+2i)^3}dz$

13. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (2i+6z^2)\mathrm{sh}\frac{1}{z}dz$

14. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \mathrm{tg}\frac{\pi i z}{2}dz$

15. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{iz^2-3}{z(z-1)(z-2)}dz$

16. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=1} \frac{\cos z-1}{z^2(z-\pi)^2}dz$

17. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2,5} \frac{2^{\pi i z}}{(z+i)(z+2i)}dz$

18. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{e^{\pi z/2}}{z(z-i)^2}dz$

19. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (12z^3+zi)\cos\frac{1}{z}dz$

20. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{\sin 2z}dz$

21. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}dz$

22. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} (30z^5+zi)\mathrm{ch}\frac{1}{z}dz$

23. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{zi}}{z^2+1}dz$

24. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$

25. $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3}{\cos z}\,dz$

26. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{zi}}{(z-i)^4}\,dz$

Типовой расчет по теме «Теория вероятностей»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Классическое определение вероятности и свойства вероятности
II. Формула полной вероятности и формула Байеса
III. Дискретная случайная величина
IV. Непрерывная случайная величина
V. Нормальная случайная величина

Образцы решения задач по теме «Классическое определение вероятности и свойства вероятности»

Если пространство элементарных событий представляет собой конечное множество равновозможных исходов опыта, то справедливо *классическое* определение вероятности: $P(A)=\dfrac{m(A)}{n}$, где n – общее число исходов опыта, $m\ (A)$ – число исходов опыта, благоприятствующих появлению события A. Во многих задачах для нахождения n и $m(A)$ применяются формулы комбинаторики (см. приложение).

Задача 1. В фирме трудятся 8 человек – 5 женщин и 3 мужчины. Три человека, выбранные наугад, отправляются в командировку. Найдите вероятности следующих событий:

а) A = {среди отобранных сотрудников все 3 – женщины};

б) B = {среди отобранных сотрудников 2 женщины и 1 мужчина};

в) C = {среди отобранных сотрудников 1 женщина и 2 мужчины};

г) D = {среди отобранных сотрудников все 3 – мужчины}.

Решение. Общее число n исходов – число способов, которыми можно выбрать 3 человек из 8, т. е. $n=C_8^3=\dfrac{8!}{5!3!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}=56$.

а) Число исходов, благоприятствующих событию A, – число способов отбора трех женщин из пяти, т. е. $m\ (A) = C_5^3 = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$, тогда $P(A) = \dfrac{10}{56} = \dfrac{5}{28}$.

б) Число исходов, благоприятствующих событию B, – число способов отбора двух женщин из пяти, умноженное на число способов отбора одного мужчины из трех, т. е. $m\ (B) = C_5^2 \cdot C_3^1 = \dfrac{5!}{3!2!} \cdot \dfrac{3!}{2!1!} = 10 \cdot 3 = 30$, $P(B) = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$.

в) Аналогично случаю, рассмотренному в пункте б), получим $m(C) = C_5^1 \cdot C_3^2 = \dfrac{5!}{4!1!} \cdot \dfrac{3!}{1!2!} = 5 \cdot 3 = 15$, $P(C) = \dfrac{15}{56}$.

г) Аналогично случаю, рассмотренному в пункте а), получим $m(D) = C_3^3 = 1$, $P(D) = \dfrac{1}{56}$.

Ответ: $\dfrac{5}{28}, \dfrac{15}{28}, \dfrac{15}{56}, \dfrac{1}{56}$.

Замечание. Поскольку рассмотрены все возможные комбинации, которые могут быть получены в группе из трех человек, причем события A, B, C и D попарно несовместны, то одно из событий обязательно реализуется. Значит сумма событий – достоверное событие, следовательно, вероятность суммы равна сумме вероятностей и равна единице: $\dfrac{5}{28} + \dfrac{15}{28} + \dfrac{15}{56} + \dfrac{1}{56} = 1$.

Задача 2. Наудачу взят телефонный номер, состоящий из 5 цифр. Найдите вероятность того, что все цифры разные.

Решение. Общее число исходов – количество упорядоченных пятизначных комбинаций из 10 цифр с повторениями. Будем считать, что допустимы номера, начинающиеся с 0. Тогда общее число n исходов равно $n = \tilde{A}_{10}^5 = 10^5$. Число исходов, благоприятствующих событию B = {все цифры разные}, это число размещений без повторений из 10 по 5, т. е. $m(B) = A_{10}^5$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{A_{10}^5}{\tilde{A}_{10}^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = \frac{189}{625} = 0,3024.$$

Ответ: 0,3024.

Задача 3. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найдите вероятности следующих событий:

а) A = {все пассажиры выйдут на четвертом этаже};

б) B = {все пассажиры выйдут на одном и том же этаже};

в) C = {все пассажиры выйдут на разных этажах}.

Решение. Каждому пассажиру лифта сопоставим номер этажа, на котором он выйдет, т. е. одну из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Таким образом, общее число n исходов – это количество трехзначных чисел с повторениями, которые можно составить из шести данных цифр, т. е. $n = \tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

а) Если все пассажиры выйдут на четвертом этаже, то из номеров этажей получим единственное трехзначное число 444, т. е. m (A) = 1, $P(A) = \frac{1}{216}$.

б) Если все пассажиры выйдут на одном и том же этаже, то из номеров этажей можно составить шесть чисел с одинаковыми цифрами, т. е. m (B) = 6, $P(B) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

в) Если все пассажиры выйдут на разных этажах, то каждому событию сопоставим трехзначное число, все цифры которого разные. Таким образом, число исходов, благоприятствующих событию C, равно $m(C) = A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, откуда $P(C) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{5}{9}$.

Задвча 4. В корзине находятся 5 пронумерованных шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Наудачу вынимается один шар, после чего он возвращается в корзину. Такой опыт проводится 4 раза. Найдите вероятность события A = {шар № 1 вынимался хотя бы один раз}.

Решение. Четырехкратной выемке с возвращениями сопоставим число, составленное из номеров вынутых шаров. Тогда общее число исходов это количество способов, которыми можно составить четырехзначное число из цифр 1, 2, 3, 4, 5 с повторениями, т. е.

$$n = \tilde{A}_5^4 = 5^4 = 625.$$

Введем событие $\overline{A}$, противоположное событию A, т. е. $\overline{A}$ = {шар № 1 ни разу не вынимался}. Зафиксируем этот шар (мысленно «приклеим» его к корзине) и найдем количество $m(\overline{A})$ способов, которыми можно составить четырехзначное число из цифр 2, 3, 4, 5 с повторениями: $m(\overline{A}) = \tilde{A}_4^4 = 4^4 = 256$.

Следовательно, $P(\overline{A}) = \frac{256}{625}$. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{256}{625} = \frac{369}{625} = 0,5904$.

Ответ: 0,5904.

Задача 5. Шесть шаров, половина которых – белые, а вторая половина – черные, случайным образом размещаются в вершинах правильного шестиугольника *ABCDEF.* Найдите вероятность того, что любые два соседних (лежащих на одной стороне шестиугольника) шара имеют разные цвета.

Решение. Введем событие G = {любые два соседних шара имеют разные цвета}. Общее число n исходов опыта – это число перестановок из шести элементов, т. е. $n = P_6 = 6! = 720$.

Найдем, число $m(G)$ исходов опыта, благоприятствующих событию G. Для этого выясним, каким числом способов можно разместить 3 белых шара в вершинах A, C, E. Это число способов равно числу перестановок из трех элементов, т. е. $P_3 = 3! = 6$. На каждую такую перестановку приходится P_3 перестановок черных шаров. Следовательно, число положений белых шаров в точках A, C, E, а черных шаров в точках B, D, F равно $(P_3)^2 = 6^2 = 36$. Такое же количество комбинаций получим, если белые шары разместим в точках B, D, F, а черные – в точках A, C, E. Таким образом, число положений шаров в вершинах шестиугольника так, чтобы происходило чередование цветов, равно $2\,(P_3)^2 = 72$, т. е. $m(G) = 72$. Следовательно, вероятность события G равна $P(G) = \frac{m(G)}{n} = \frac{72}{720} = 0,1$

Ответ: 0,1.

Задача 6. Офис фирмы оборудован тремя независимо работающими копировальными устройствами. Вероятность отказа в течение рабочего дня первого устройства равна 0,1, второго – 0, 15, третьего – 0,2. Найдите вероятность того, что в течение дня а) хотя бы два устройства будут работать исправно, б) хотя бы одно устройство будет работать исправно.

Решение. Введем события A_i = {i-е устройство работает безотказно в течение рабочего дня}, где $i = 1, 2, 3$, B = {хотя бы два устройства работают исправно в течение дня}, C = {хотя бы одно устройство работает исправно в течение дня}.

а) Выразим событие B через события A_i и противоположные им: $B = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3$, где $\overline{A}_i$ – события, противоположные

A_i (i = 1, 2, 3). Все слагаемые в полученной сумме попарно несовместны, а множители в полученных произведениях независимы. Поэтому, применяя теоремы сложения и умножения, получим

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) +$$
$$+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Вероятности противоположных событий $\overline{A}_i$ даны в условии задачи, а вероятности событий A_i равны

$$P(A_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9, \quad P(A_2) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85, \quad P(A_3) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Окончательно получим

$$P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}068 + 0{,}108 + 0{,}153 + 0{,}612 = 0{,}941.$$

б) Вероятность события *C* может быть найдена аналогично. Но чтобы избежать громоздких вычислений, найдем вероятность события *C* через вероятность противоположного события. Пусть $\overline{C}$ = {все устройства в течение дня оказались неисправными} – событие, противоположное событию *C*. Его вероятность равна $P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}003$. Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}003 = 0{,}997$.

Ответ: 0,941, 0,997.

Задача 7. Одновременно наудачу извлекается одна игральная карта из колоды в 36 карт и подбрасывается игральная кость. Найдите вероятность того, что а) карта оказалась тузом **и** на кости выпала шестерка, б) карта оказалась тузом **или** на кости выпала шестерка, в) карта не оказалась тузом **и** не выпала шестерка.

Решение. Введем события *A* = {извлеченная карта – туз}, *B* = {на игральной кости выпала шестерка}. Вероятности этих событий: $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{1}{6}$. События *A* и *B* независимы.

Событие, описанное в пункте а), представляет собой произведение событий *A* и *B*, поэтому по теореме умножения вероятностей независимых событий получим $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$.

Событие, описанное в пункте б), представляет собой сумму событий *A* и *B*, поэтому по теореме сложения вероятностей получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{54} = \frac{14}{54} = \frac{7}{27}.$$

Событие, описанное в пункте в), представляет собой произведение событий, противоположных *A* и *B*, которые также независимы, поэтому

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{27}.$$

Ответ: $\frac{1}{36}$, $\frac{7}{27}$, $\frac{20}{27}$.

Образцы решения задач по теме «Формула полной вероятности. Формула Байеса»

Формула полной вероятности имеет вид

$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$, где $P(A)$ – вероятность события A, $P(H_i)$ – вероятности гипотез, сопутствующих событию A, $P(A/H_i)$ – условные вероятности события A при условии реализации каждой гипотезы.

Формула Байеса (формула апостериорной вероятности гипотезы):

$P(H_k/A)=\dfrac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$, где $P(H_k/A)$ – *апостериорная* вероятность гипотезы H_k , т. е. вероятность гипотезы H_k при условии, что событие A произошло.

Задача 8. Группа студентов, состоящая из 30 человек, выполняет контрольную работу по математике. По результатам выполнения предыдущих контрольных работ всех студентов условно можно разбить на три подгруппы:

студенты I подгруппы, насчитывающей 5 человек, могут написать контрольную работу на “отлично” с вероятностью 0,8;

студенты II подгруппы, насчитывающей 15 человек, могут написать контрольную работу на “отлично” с вероятностью 0,4;

студенты III подгруппы, насчитывающей 10 человек, могут написать контрольную работу на “отлично” с вероятностью 0,1.

1) Найдите вероятность того, что произвольно выбранный студент написал контрольную работу на “отлично”. 2) Оказалось, что произвольно выбранный студент написал контрольную работу по математике на “отлично”. Определите, к какой из трех условных подгрупп он принадлежит с наибольшей вероятностью.

Решение. Введем следующие события:

A = {студент написал контрольную работу на “отлично”};

H_1 = {студент принадлежит к I подгруппе};

H_2 = {студент принадлежит ко II подгруппе};

H_3 = {студент принадлежит к III подгруппе}.

События H_1, H_2, H_3 – гипотезы, сопутствующие событию A. Вероятность каждой гипотезы равна отношению количества студентов каждой подгруппы к общему количеству студентов, т. е. $P(H_1) = 5/30 = 1/6$, $P(H_2) = 15/30 = 1/2$, $P(H_3) = 10/30 = 1/3$.

Условные вероятности события A при условии реализации каждой гипотезы даны в задаче: $P(A/H_1) = 0{,}8$, $P(A/H_2) = 0{,}4$, $P(A/H_3) = 0{,}1$.

1) Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) =$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 0{,}8+\frac{1}{2}\cdot 0{,}4+\frac{1}{3}\cdot 0{,}1=\frac{11}{30}.$$

2) Найдем апостериорные вероятности гипотез о принадлежности данного студента к каждой из условных подгрупп.

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot 0{,}8}{\frac{11}{30}}=\frac{2\cdot 30}{15\cdot 11}=\frac{4}{11};$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}4}{\frac{11}{30}}=\frac{30}{5\cdot 11}=\frac{6}{11};$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}1}{\frac{11}{30}}=\frac{30}{30\cdot 11}=\frac{1}{11}.$$

Сравнив полученные вероятности, сделаем вывод о том, что наиболее вероятна принадлежность студента ко II подгруппе.

Ответ: 1) 11/30, 2)II.

Замечание. При решении задач с использованием формулы полной вероятности, чтобы не ошибиться с выбором событий, выступающих в качестве гипотез, нужно помнить, что эти события образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей должна равняться единице, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)=1$. Условные вероятности события A этим свойством не обладают.

Задача 9. На первой книжной полке стоят 2 детектива и 1 триллер, а на второй – 3 детектива и 2 триллера. Две книги, выбранные наугад, переставляются со второй полки на первую, после чего с первой полки берут наудачу выбранную книгу. 1) найдите вероятность того, что эта книга оказалась детективом. 2) Выбранная книга оказалась детективом. Найдите вероятность того, что со второй полки на первую были переставлены детектив и триллер.

Решение. Рис. 7 изображает первоначальное расположение книг на полках.

I	Д	Д	Т		
II	Д	Д	Д	Т	Т

Рис. 7

Введем следующие события:

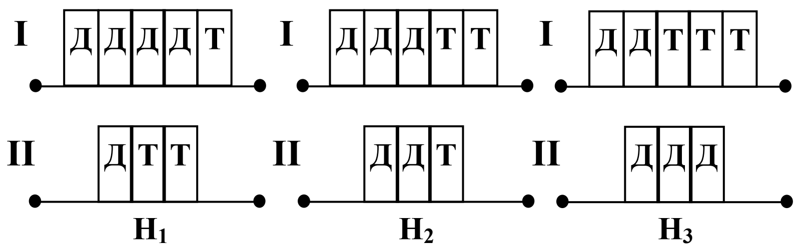
A = {взятая с первой полки после перестановки книга – детектив};

H_1 = {со второй полки на первую были переставлены 2 детектива};

H_2 = {со второй полки на первую были переставлены детектив и триллер};

H_3 = {со второй полки на первую были переставлены 2 триллера}.

События H_1, H_2, H_3 – гипотезы, сопутствующие событию A. На рис.8 а), б), в) изображено расположение книг на полках при условии реализации каждой гипотезы.



а) б) в)

Рис. 8

1) Найдем вероятности гипотез, используя классическое определение вероятности и формулы комбинаторики.

Общее число исходов опыта, состоящего в перестановке со второй полки на первую двух книг, равно $n = C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Число исходов, благоприятствующих гипотезе H_1, равно $m(H_1) = C_3^2 = 3$, значит, вероятность гипотезы H_1 равна $P(H_1) = 0{,}3$.

Число исходов, благоприятствующих гипотезе H_2, равно $m(H_2) = C_3^1 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2 = 6$, следовательно, вероятность гипотезы H_2 равна $P(H_2) = 0{,}6$.

Число исходов, благоприятствующих гипотезе H_3, равно $m(H_3) = C_2^2 = 1$, значит, вероятность гипотезы H_3 равна $P(H_3) = 0{,}1$.

Найдем теперь вероятности события A при условии реализации каждой гипотезы. Пусть n_A – общее число исходов опыта, состоящего в выборе одной книги из пяти; $n_A = C_5^1 = 5$.

Число исходов, благоприятствующих событию A при условии реализации гипотезы H_1, равно $m_1(A) = C_4^1 = 4$, следовательно, условная вероятность $P(A/H_1)$ равна $P(A/H_1) = 0{,}8$.

Число исходов, благоприятствующих событию A при условии реализации гипотезы H_2, равно $m_2(A) = C_3^1 = 3$, следовательно, условная вероятность $P(A/H_2)$ равна $P(A/H_2) = 0{,}6$.

Число исходов, благоприятствующих событию A при условии реализации гипотезы H_3, равно $m_3(A) = C_2^1 = 2$, следовательно, условная вероятность $P(A/H_3)$ равна $P(A/H_3) = 0{,}4$.

Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\,P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)\,P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}24 + 0{,}36 + 0{,}04 = 0{,}64.$$

2) Найдем апостериорную вероятность гипотезы H_2 по формуле Байеса:

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}6}{0{,}64} = \frac{0{,}36}{0{,}64} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

Ответ: 1) 0,64; 2) 0,5625

Образцы решения задач по теме «Дискретная случайная величина»

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество всех ее значений конечно или счетно. Это значит, что все значения дискретной случайной величины (ДСВ) представляют собой изолированные точки числовой оси.

Основные числовые характеристики ДСВ, принимающей конечное множество значений, вычисляются по формулам:

математическое ожидание: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$;

дисперсия: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(E(X)\right)^2$;

среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

В этих формулах x_i – значения случайной величины, p_i – вероятности этих значений (i = 1, 2, 3, …).

Задача 10. Две монеты одновременно подбрасываются 4 раза. Событие A состоит в выпадении двух гербов одновременно.

1) Составьте ряд распределения ДСВ X – числа одновременного выпадения двух гербов при четырех подбрасываниях двух монет.
2) Найдите ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.
3) Найдите вероятность того, что 2 герба выпадут одновременно не менее двух раз.
4) Постройте многоугольник распределения.

Решение. Данная случайная величина распределена по биномиальному закону, который задается формулой Бернулли:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n,$$

где n – число независимых опытов, p – вероятность успеха в одном опыте q – вероятность неудачи, k – значение ДСВ. Для ДСВ, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание и дисперсия равны соответственно $E(X)=np$, $D(X)=npq$.

1) Найдем вероятность успеха, т. е. наступления события A в одном опыте. При одновременном подбрасывании двух монет возможны 4 равновероятных исхода: a_1 = {герб выпадет только на первой монете}, a_2 = = {герб выпадет только на второй монете}, a_3 = {герб не выпадет ни на одной монете}, a_4 = {герб выпадет и на первой, и на второй монете}. Успех соответствует исходу a_4, поэтому вероятность успеха равна $p=P(A)=P(a_4)=$ $=1/4$, а вероятность неудачи равна $q=1-p=3/4$.

Для составления ряда распределения случайной величины X применим формулу Бернулли, которая в данном случае примет вид

$$P(X=k)=C_4^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{4-k},\ k=0,1,2,3,4$$

Будем подставлять в эту формулу поочередно все значения k:

$$k=0\Rightarrow P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}\approx 0,316$$

$$k=1\Rightarrow P(X=1)=C_4^1\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{108}{256}=\frac{27}{64}\approx 0,422$$

$$k=2\Rightarrow P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{54}{256}=\frac{27}{128}\approx 0,211$$

$$k=3\Rightarrow P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}=\frac{12}{256}=\frac{3}{64}\approx 0,047$$

$$k=4\Rightarrow P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}\approx 0,004$$

Ряд распределения данной случайной величины задается таблицей:

Табл. 1

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$81/256\approx 0,316$	$27/64\approx 0,422$	$27/128\approx 0,211$	$3/64\approx 0,047$	$1/256\approx 0,004$

2) Найдем числовые характеристики.

Математическое ожидание: $E(X) = 4 \cdot 1/4 = 1$;

дисперсия: $D(X) = 4 \cdot 1/4 \cdot 3/4 = 3/4 = 0,75$;

среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{3/4} \approx 0,87$.

3) Вероятность того, что 2 герба выпадут одновременно не менее двух раз, равна $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$$= \frac{54 + 12 + 1}{256} = \frac{67}{256} \approx 0,26.$$

4) Многоугольник распределения изображен на рис. 9.

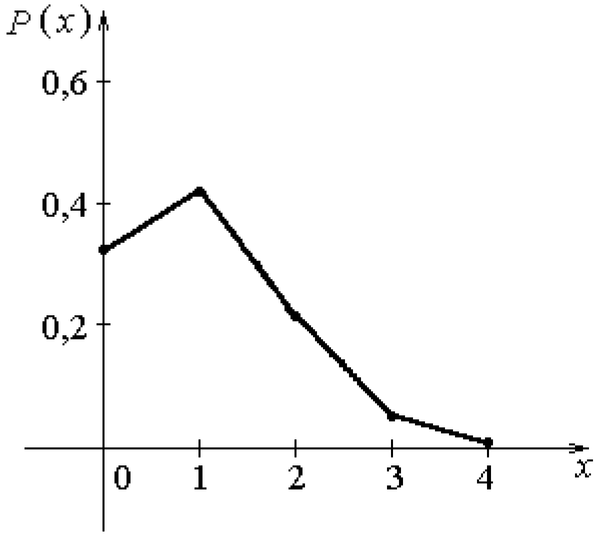


Рис. 9

Ответ: 1) табл. 1; 2) 1; 0,75; 0,87; 3) 0,26 4) рис. 9 .

Задача 11. На первой книжной полке стоят 1 книга российского автора и 3 книги иностранных авторов, на второй – 2 российских и 2 иностранных, на третьей – 3 российских и 1 иностранного, на четвертой – 4 российских. С каждой полки читатель берет по одной книге.

1) Составьте ряд распределения ДСВ X – числа книг российских авторов в выборке.
2) Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение ДСВ X.
3) Найдите вероятность того, что в выборке окажется не менее трех книг российских авторов.
4) Постройте многоугольник распределения.

Решение. 1) Случайная величина X может принять значения 1, 2, 3, 4. Введем события A_k = {автор книги, взятой с k-й полки, – российский писатель}, k = 1, 2, 3, 4. Тогда $\overline{A}_k$ = {автор книги, взятой с k-й полки, – иностранный писатель}. Отметим, что $\overline{A}_4 = \varnothing$, т. е. событие $\overline{A}_4$ невозможно. Выразим через A_k и $\overline{A}_k$ события, состоящие в том, что ДСВ X примет значения, равные k, где k = 1, 2, 3, 4, т. е. события $\{X = k\}$:

$$\{X=1\} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4;\ \{X=2\} = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4;$$

$$\{X=3\} = A_1A_2\overline{A}_3A_4 + A_1\overline{A}_2A_3A_4 + \overline{A}_1A_2A_3A_4;\ \{X=4\} = A_1A_2A_3A_4.$$

Пусть p_k – вероятность того, что с k-й полки взята книга российского автора, $q_k = 1 - p_k$ – вероятность противоположного события. Из условия задачи следует, что

$$p_1 = \frac{1}{4}, q_1 = \frac{3}{4},\quad p_2 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2},\quad p_3 = \frac{3}{4}, q_3 = \frac{1}{4},\quad p_4 = 1, q_4 = 0.$$

Найдем вероятность каждого значения случайной величины X с помощью теорем сложения и умножения вероятностей:

$$P(X=1) = q_1q_2q_3p_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{3}{32} \approx 0{,}094,$$

$$P(X=2) = p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32} \approx 0{,}406,$$

$$P(X=3) = p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} = \frac{13}{32} \approx 0{,}406,$$

$$P(X=4) = p_1p_2p_3p_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{32} \approx 0{,}094.$$

Составим ряд распределения ДСВ X:

Табл. 2

X	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{3}{32} \approx 0{,}094$	$\frac{13}{32} \approx 0{,}406$	$\frac{13}{32} \approx 0{,}406$	$\frac{3}{32} \approx 0{,}094$

2) Найдем математическое ожидание:

$$E(X) = 1\cdot\frac{3}{32} + 2\cdot\frac{13}{32} + 3\cdot\frac{13}{32} + 4\cdot\frac{3}{32} = \frac{3+26+39+12}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5.$$

Для нахождения дисперсии составим ряд распределения случайной величины X^2:

Табл. 3

X^2	1	4	9	16
$P(X^2)$	$\frac{3}{32} \approx 0,094$	$\frac{13}{32} \approx 0,406$	$\frac{13}{32} \approx 0,406$	$\frac{3}{32} \approx 0,094$

Дисперсия равна

$$D(X) = 1 \cdot \frac{3}{32} + 4 \cdot \frac{13}{32} + 9 \cdot \frac{13}{32} + 16 \cdot \frac{3}{32} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{3+52+117+48}{32} - \frac{25}{4} = \frac{220}{32} - \frac{25}{4} = \frac{55-50}{8} = \frac{5}{8} = 0,625.$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0,791.$$

3) Вероятность того, что в выборке окажется не менее трех книг российских авторов, равна $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{13}{32} + \frac{3}{32} = \frac{16}{32} = 0,5$.

4) Многоугольник распределения изображен на рис. 10.

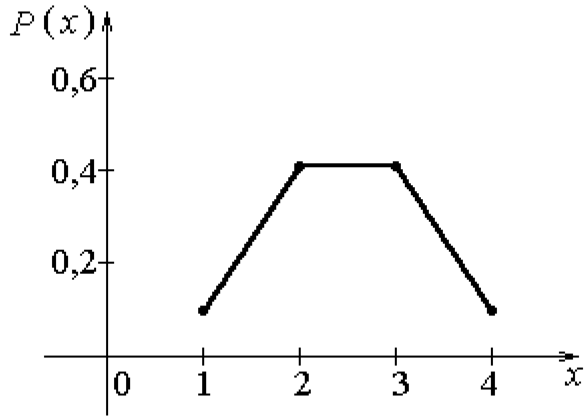


Рис. 10

Ответ: 1) табл. 2; 2) 2,5, 0,625, 0,791; 3) 0,5; 4) рис. 10.

Образцы решения задач по теме «Непрерывная случайная величина»

Случайную величину X будем называть *непрерывной*, если множество всех ее значений имеет *мощность континуума* и не содержит изолированных точек. Это значит, что все значения непрерывной случайной величины (НСВ) сплошь заполняют некоторый промежуток числовой оси или всю числовую ось.

Основные числовые характеристики НСВ вычисляются по формулам:

математическое ожидание: $E(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, где $f\ (x)$ – плотность вероятности;

дисперсия: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(E(X)\right)^2$;

среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Функция распределения НСВ имеет вид $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Задача 12. Непрерывная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C(4x-x^2), & 0\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$. Найдите 1) значение параметра C, 2) функцию распределения, 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, 4) вероятность того, что случайная величина примет значение, большее 1, 5) постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. 1) Значение параметра C найдем с помощью свойства плотности вероятности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, которое в нашем случае примет вид $\int\limits_0^4 C(4x-x^2)dx=1$. Интеграл в правой части формулы равен $\int\limits_0^4 C(4x-x^2)dx=C\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=C\left(32-\frac{64}{3}\right)=\frac{32C}{3}$. Приравняв полученное выражение к 1, получим $\frac{32C}{3}=1$, откуда, $C=\frac{3}{32}$.

2) При $x<0$ функция распределения равна 0, т. е. $F(x)=0$; при $0\le x\le 4$ получим $F(x)=\frac{3}{32}\int\limits_0^x(4t-t^2)dt=\frac{3}{32}\left(2t^2-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x=\frac{3}{32}\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)$; при $x>1$ функция распределения равна 1, т. е. $F(x)=1$. Окончательно будем иметь

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{3}{32}\left(2x^2-\dfrac{x^3}{3}\right), & 0\le x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}.$$

3) На отрезке [0; 4] график плотности вероятности представляет собой дугу параболы между ее нулями, которая симметрична относительно прямой $x = 2$. Вне этого промежутка $f(x) = 0$. Поэтому в данной задаче математическое ожидание случайной величины равно $E(X) = 2$. Найдем дисперсию случайной величины:

$$D(X)=\frac{3}{32}\int_0^4 x^2(4x-x^2)dx-2^2=\frac{3}{32}\int_0^4(4x^3-x^4)dx-4=\frac{3}{32}\left(x^4-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4-4=$$

$$=\frac{3}{32}4^4\left(1-\frac{4}{5}\right)-4=\frac{24}{5}-4=4{,}8-4=0{,}8.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(X)=\sqrt{0{,}8}\approx 0{,}894$.

4) Вероятность попадания данной случайной величины в промежуток $(a;b]$ вычисляется по формуле

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a).$$

В нашем случае получим

$$P(1<X\le 4)=F(4)-F(1)=$$

$$=1-\frac{3}{32}\left(2\cdot 1-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{5}{32}=$$

$$=\frac{27}{32}=0{,}84375\approx 0{,}844.$$

5) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 11.

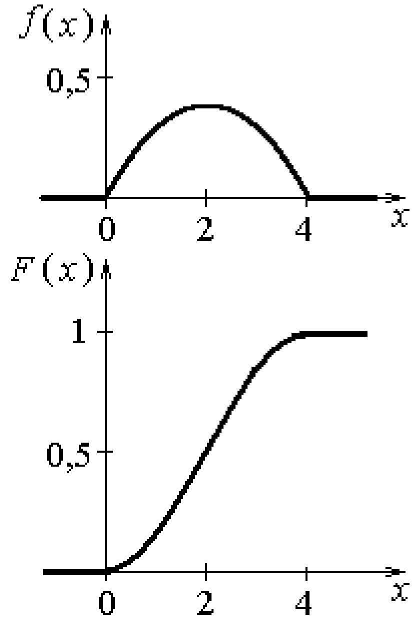


Рис. 11

Ответ: 1) $C = 3/32$; 2) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{3}{32}\left(2x^2-\dfrac{x^3}{3}\right), & 0\le x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$;

3) $E(X) = 2$, $D(X) = 0{,}8$, $\sigma(X)\approx 0{,}894$; 4) $P(1<X\le 4)\approx 0{,}844$; 5) рис. 11.

Задача 13. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ C\left(\sqrt{(3-x)^3}-8\right), & -1\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$. Найдите 1) значение параметра C, 2) плотность вероятности, 3) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, 4) вероятность того, что случайная величина примет отрицательное значение, 5) постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. 1) Найдем параметр C, используя непрерывность функции распределения на всей часовой оси, т. е. из условия $F(3) = 1$:

$F(3) = -8C = 1$, следовательно, $C = -1/8$.

2) Плотность вероятности равна

$f(x)=F'(x)=-\dfrac{3C}{2}(3-x)^{1/2}=\dfrac{3}{16}\sqrt{3-x}$ при $-1\le x\le 3$, $f(x) = 0$ при $x < -1$, $x > 3$. Окончательно получим

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \dfrac{3}{16}\sqrt{3-x}, & -1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}.$$

3) Математическое ожидание равно $E(X)=\dfrac{3}{16}\int\limits_{-1}^{3}x\sqrt{3-x}dx$. Для нахождения интеграла произведем замену переменной по формулам $t=\sqrt{3-x}, 3-x=t^2, x=3-t^2, dx=-2tdt$, $t = 2$ при $x = -1$, $t = 0$ при $x = 3$.

$$E(X)=\frac{3}{16}\int\limits_{-1}^{3}x\sqrt{3-x}dx=\frac{3}{16}\int\limits_{2}^{0}(3-t^2)t(-2tdt)=-\frac{3}{8}\int\limits_{2}^{0}(3t^2-t^4)dt=$$

$$=-\frac{3}{8}\left(t^3-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_2^0=\frac{3}{8}\left(8-\frac{32}{5}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Дисперсию найдем с помощью аналогичной замены:

$$D(X)=\frac{3}{16}\int\limits_{-1}^{3}x^2\sqrt{3-x}dx-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{16}\int\limits_{2}^{0}(3-t^2)^2t(-2tdt)-\frac{9}{25}=$$

$$=-\frac{3}{8}\int\limits_{2}^{0}(9t^2-6t^4+t^6)dt-\frac{9}{25}=-\frac{3}{8}\left(3t^3-\frac{6t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_2^0-\frac{9}{25}=$$

$$=\frac{3}{8}2^3\left(3-\frac{24}{5}+\frac{16}{7}\right)-\frac{9}{25}=\frac{51}{35}-\frac{9}{25}=\frac{192}{175}\approx 1{,}097\,.$$

Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(X)=\sqrt{1{,}097}\approx 1{,}047$.

4) Найдем вероятность того, что случайная величина примет отрицательное значение:

$$P(-1\le X<0)=\frac{3}{16}\int_{-1}^{0}\sqrt{3-x}dx=$$

$$=-\frac{3}{16}\int_{-1}^{0}(3-x)^{1/2}d(3-x)=-\frac{3}{16}\cdot\frac{2}{3}\left((3-x)^{3/2}\right)\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(3^{3/2}-4^{3/2}\right)=1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx 0{,}351.$$

5) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 12.

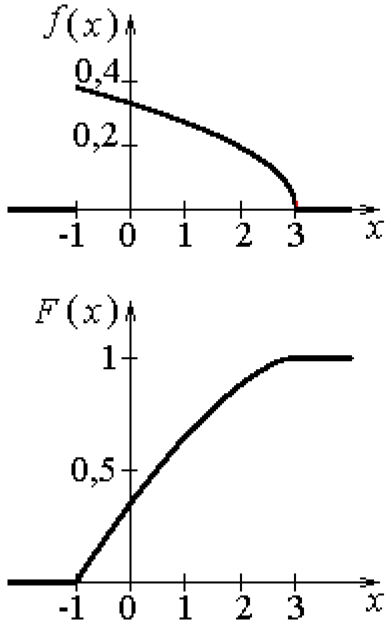


Рис. 12

Ответ: 1) $C=-1/8$; 2) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{3}{16}\sqrt{3-x}, & -1\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$; 3) $E(X)=0{,}6$;

$D(X)\approx 1{,}097$, $\sigma(X)\approx 1{,}047$; 4) $P(-1\le X<0)\approx 0{,}351$; 5) рис. 12.

Образцы решения задач по теме «Нормальная случайная величина»

Задача 14. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m=-1{,}6$. Вероятность того, что случайная величина примет значение, не меньшее чем $-1{,}4$, равна 0,3085. Найдите 1) среднее квадратическое отклонение, 2) плотность вероятности $f(x)$, 3) вероятность попадания случайной величины в промежуток [– 1,8; – 0,8], 4) постройте схематический график плотности вероятности $f(x)$.

Решение. 1) Найдем среднее квадратическое отклонение σ НСВ из условия $P(X\ge -1{,}4)=0{,}3085$. Для этого воспользуемся формулой $P(a\le X\le b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой приведены в таблице приложения. В рассматриваемом случае эта формула примет вид

$$P(-1,4 \le X \le +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{-1,4+1,6}{\sigma}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{0,2}{\sigma}\right) = 0,3085.$$

С учетом того, что $\Phi(+\infty) = 0,5$, получим $0,5 - \Phi\left(\frac{0,2}{\sigma}\right) = 0,3085$, откуда следует, что $\Phi\left(\frac{0,2}{\sigma}\right) = 0,5 - 0,3085 = 0,1915$. По таблице найдем аргумент функции Лапласа $\frac{0,2}{\sigma} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$.

2) Плотность вероятности НСВ, распределенной по нормальному закону равна $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. В нашем случае эта формула примет вид

$$f(x) = \frac{1}{0,4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1,6)^2}{2\cdot 0,4^2}} = \frac{5}{2\sqrt{2\pi}} e^{-3,125(x+1,6)^2}.$$

3) Найдем вероятность попадания НСВ в промежуток [– 1,8; – 0,8]:

$$P(-1,8 \le X \le -0,8) = \Phi\left(\frac{-0,8+1,6}{0,4}\right) - \Phi\left(\frac{-1,8+1,6}{0,4}\right) = \Phi(2) - \Phi(-0,5).$$

Приняв во внимание нечетность функции Лапласа, а также воспользовавшись таблицей, получим

$$P(-1,8 \le X \le -0,8) = \Phi(2) + \Phi(0,5) =$$

$$= 0,4772 + 0,1915 = 0,6687.$$

5) График плотности вероятности данной нормальной случайной величины представлен на рис. 13

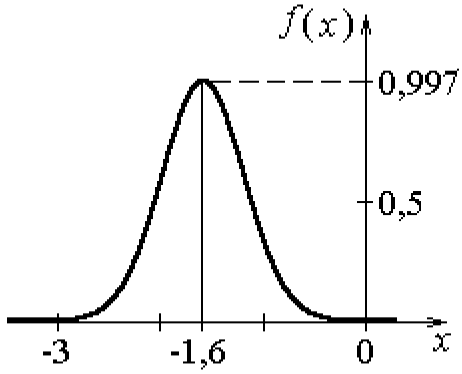


Рис. 13

Ответ: 1) σ = 0,4; 2) $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{2\pi}} e^{-3,125(x+1,6)^2}$;

3) $P(-1,8 \le X \le -0,8)$ = 0,6687; 4) рис. 13.

Расчетные задания

I. Решите задачи с использованием классического определения и свойств вероятности. Ответ дайте в виде обыкновенной дроби или в виде десятичной дроби, если эта дробь точная

1. На полке стоят 5 учебников математики и 7 учебников истории. Найдите вероятность того, что а) из трех наудачу взятых книг две – учебники математики, б) из трех наудачу взятых книг две – учебники истории.

2. В корзине лежат 4 яблока. Наудачу вынимают одно из них, после чего его возвращают обратно в корзину, причем этот опыт повторяют 4 раза. Найдите вероятность того, что а) каждое из 4-х яблок вынималось хотя бы по одному разу, б) каждый раз вынималось одно и то же яблоко.

3. В пенале хранятся 12 шариковых ручек, половина которых – черные. Из пенала наудачу вынимают половину всех ручек. Найдите вероятность того, что а) треть вынутых ручек – черные, б) половина вынутых ручек – черные.

4. Колода карт (36 карт) делится наугад на две равные стопки по 18 карт. Найдите вероятность того, что а) в каждой стопке оказалось по два туза, б) в одной стопке оказался 1туз, а в другой – 3 туза.

5. Каждую из 3-х книг наугад кладут в один из 5 ящиков. Найдите вероятность того, что а) все книги попадут в разные ящики, б) все книги попадут в один ящик.

6. Тест состоит из 8 заданий, 3 из которых – теоретические, а остальные – вычислительные. Найдите вероятность того, что а) половина наудачу выбранных заданий содержит ровно 2 вычислительных, б) половина наудачу выбранных заданий не содержит ни одного теоретического.

7. В сквер, в котором установлены 4 скамейки, заходят 3 человека. Они случайным образом садятся на скамейки. Найдите вероятность того, что а) хотя бы два из них окажутся на одной скамейке, б) все они окажутся на разных скамейках.

8. Три лыжника съезжают с горы. Вероятность падения первого лыжника равна 0,3, второго – 0,2, третьего – 0,1. Найдите вероятность того, что а) только два лыжника не упадут, б) хотя бы два лыжника не упадут.

9. В магазин поступила партия, состоящая из 30 пар мужских ботинок, среди которых 4 пары коричневые, а остальные черные. Коробки с ботинками случайным образом разделили поровну и разместили в двух торговых залах. Найдите вероятность того, что а) в каждом зале оказались 2 пары коричневых ботинок, б) в одном зале оказались 3 пары коричневых ботинок, а в другом – одна.

10. Одновременно подбрасываются игральная кость и монета. Найдите вероятность того, что а) выпадут шестерка **и** герб, б) выпадут шестерка **или** герб, в) не выпадут ни шестерка, ни герб.

11. В классе 20 учеников. Учитель вызывает наугад к доске 6 человек. Найдите вероятность того, что а) в число вызванных войдут первый и последний по списку, б) в число вызванных попадет хотя бы один из двух учеников, один из которых – первый, а второй – последний по списку.

12. Книги шеститомного собрания сочинений случайным образом расставляются на пустой книжной полке. Найдите вероятность того, что а) книги будут стоять в порядке возрастания номеров томов, б) на первом месте слева окажется том №1, а на последнем – том №6.

13. В овощной магазин завезли 20 мешков картофеля, 3 из которых содержат сорт «Елизавета», а остальные – сорт «Надежда». Мешки с картофелем случайным образом разделили поровну и разместили в двух торговых залах. Найдите вероятность того, что а) в одном зале оказались 2 мешка с сортом «Елизавета», а в другом – один, б) в одном из залов не оказалось ни одного мешка с сортом «Елизавета».

14. Станция метрополитена оборудована тремя эскалаторами. Вероятность поломки в течение рабочего дня первого эскалатора равна 1/20, второго – 1/10, третьего – 3/20. найдите вероятность того, что а) в течение рабочего дня будут исправны только два эскалатора, б) в течение рабочего дня будут исправны хотя бы два эскалатора.

15. Пять человек садятся в электричку, выбирая случайным образом один из восьми вагонов. Найдите вероятность того, что а) все они попадут в разные вагоны, б) хотя бы два из них попадут в один вагон.

16. В кошельке находятся 2 пятирублевые монеты и 5 двухрублевых монет. Наудачу извлекают 2 монеты. Найдите вероятность того, что извлеченная сумма денег а) превышает 5 рублей, б) не превышает 5 рублей.

17. Среди 20 контрольных работ студенческой группы №1 – 5 незачтенных работ, а среди 16 работ группы №2 – 3 незачтенные работы. Работы каждой группы сложены в стопку случайным образом. Найдите вероятность того, что среди двух работ, каждая из которых наудачу взята из своей стопки, а) обе – незачтенные, б) обе – зачтенные, в) одна зачтенная и одна незачтенная.

18. Три студента пришли сдавать экзамен. Вероятность того, что первый студент сдаст экзамен, равна 0,8, второй – 0,7, третий – 0,6. Найдите вероятность того, что а) только два студента сдадут экзамен, б) хотя бы два студента сдадут экзамен.

19. Три женщины и трое мужчин случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найдите вероятность того, что а) три женщины окажутся сидящими рядом, б) женщины и мужчины будут чередоваться.

20. В маршрутном такси едут 4 пассажира. Каждый из них с равной вероятностью может выйти на одной из пяти остановок, включая последнюю. Найдите вероятность того, что а) все пассажиры выйдут на одной остановке, б) ни один из них не доедет до конечной остановки.

21. Из коробки конфет, содержащей по 10 конфет трех разных сортов, последовательно извлекают 3 конфеты. Найдите вероятность того, что все 3 конфеты будут а) одного сорта, б) разных сортов.

22. В поезд, состоящий из 10 вагонов, садятся 5 пассажиров, наудачу выбирая вагон. Найдите вероятность того, что а) 2 из них окажутся в одном вагоне, а остальные 3 – в разных, б) 3 из них окажутся в одном вагоне, а 2 – в разных.

23. Во время тренировки 3 баскетболиста бросают мячи в корзину. Вероятность попадания первого равна 0,7, второго – 0,75, третьего – 0,8. Каждый баскетболист делает один бросок. Найдите вероятность а) хотя бы двух попаданий, б) хотя бы одного попадания мяча в корзину.

24. Среди 10 срезанных роз 6 красных и 4 белые. Из роз случайным образом формируют два букета по 5 цветков в каждом. Найдите вероятность того, что а) все белые розы попадут в один букет, б) в каждом букете количество красных роз будет больше чем количество белых.

25. В партии мужской обуви, поступившей в магазин, содержится 0,5% брака. В данной партии 60% составляют пары черных ботинок, 40% – коричневых. Найдите вероятность того, что наудачу выбранная пара окажется а) черной **и** бракованной, б) коричневой **и** небракованной, в) коричневой **или** бракованной.

26. В бумажнике хранятся 5 пятисотрублевых купюр и 3 тысячных купюры. Наудачу извлекаются 3 купюры. Найдите вероятность того, что а) вынутые купюры составят сумму в 2500 рублей, б) вынутых купюр окажется достаточно, чтобы оплатить покупку стоимостью 2500 рублей.

II. Решите задачи с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса

1. Три секретаря-референта набрали на компьютере 30 страниц текста: первый набрал 12 страниц, второй и третий – по 9. Вероятности ошибки составляют для первого 20%, для второго 15%, для третьего – 10%. а) Найдите вероятность того, что в странице, выбранной наугад, **нет** ни одной ошибки. б) Найдите вероятность того, что наугад выбранная страница набрана первым секретарем-референтом, если в ней **нет** ни одной ошибки.

2. В первой коробке находятся 3 лампочки по 60 ватт и 5 – по 75 ватт, во второй 6 – по 60 ватт и 2 – по 75 ватт. Наудачу выбирают коробку и вынимают из нее 2 лампочки. а) Найдите вероятность того, что обе лампочки оказались одной мощности. б) Обе лампочки оказались одной мощности. Найдите вероятность того, что они вынуты из второй коробки.

3. В первом ящике лежат 6 шаров: 4 белых и 2 черных; во втором – 4 шара: 2 белых и 2 черных. Из каждого ящика извлекли наудачу по одному шару, а затем из этих двух произвольно выбрали один. а) Найдите вероятность того, что он белый. б) Найдите вероятность того, что из первого ящика был взят черный шар, если вынутый шар оказался белым.

4. В потоке из 120 абитуриентов 48 человек – выпускники школ, 36 – выпускники гимназий, 18 – выпускники колледжей, остальные – выпускники лицеев. Вероятности того, что вступительный экзамен по истории будет сдан на “5” для каждой группы абитуриентов равны соответственно 8%, 12%, 8% и 16%. а) Найдите вероятность того, что наудачу выбранный абитуриент сдал экзамен на “5”. б) Найдите

вероятность того, что абитуриент является выпускником гимназии, если известно, что он сдал экзамен на “5”.

5. Иван-царевич наугад выбирает одну из трех дорог, ведущих к Василисе Прекрасной. Первую дорогу преграждает болото, в котором он может увязнуть с вероятностью 80%; вторую дорогу пересекает река, в которой он может утонуть с вероятностью 30%; третья дорога ведет через лес, в котором он может быть растерзан дикими зверями с вероятностью 10%. а) Найдите вероятность того, что Иван-царевич доберется до Василисы Прекрасной **живым** и невредимым. б) Найдите вероятность того, что он шел через лес, если известно, что он добрался живым.

6. В библиотеке два читальных зала. В первом занимаются 3 мужчины и 2 женщины, во втором – 2 мужчины и 4 женщины. Из первого зала во второй перешел один человек, после чего из второго зала один человек ушел. а) Найдите вероятность того, что ушедший – мужчина. б) Найдите вероятность того, что из первого зала во второй перешла женщина, если известно, что ушедший – мужчина.

7. На первой книжной полке стоят 4 триллера и 2 детектива, а на второй – 3 триллера и 3 детектива. Читатель переставляет одну произвольно выбранную книгу с первой полки на вторую, после чего наугад берет одну книгу со второй полки. а) Найдите вероятность того, что взятая книга – детектив. б) Найдите вероятность того, что был переложен триллер, если взятая наугад книга оказалась детективом.

8. Согласно списку абитуриентов, количества выпускников школ, колледжей и лицеев относятся как 6:3:1. Вероятность того, что вступительный экзамен по математике будет сдан на “отлично” для выпускника школы равна 9%; для выпускника колледжа – 12%; для выпускника лицея – 8%. а) Найдите вероятность того, что наудачу выбранный абитуриент сдаст экзамен на “отлично”. б) Найдите вероятность того, что наудачу выбранный абитуриент – выпускник колледжа, если известно, что он сдал экзамен на “отлично”.

9. Сын бросает игральную кость, после чего играет с отцом в шахматы. Если выпадет 1 очко, то отец играет с полным набором фигур и пешек, если 2 очка – без пешки, 3 очка – без коня, 4 очка – без слона, 5 очков – без ладьи, 6 очков – без ферзя. Вероятности выигрыша отца в каждой ситуации равны соответственно 1, 0,9, 0,8, 0,8, 0,5 и 0,2. а) Найдите вероятность того, что отец выиграл партию. б) Найдите вероятность того, что отец играл без ладьи, если известно, что он выиграл партию.

10. В первом ящике лежат 10 деталей, из которых 4 бракованных, а во втором – 8 деталей, из которых 3 бракованных. Наудачу выбирают ящик и вынимают из него 2 детали. а) Найдите вероятность того, что вынутые детали – бракованные. б) Вынутые детали оказались бракованными. Найдите вероятность того, что они были вынуты из первого ящика.

11. Имеются 3 колоды по 36 карт в каждой, причем в двух – стандартный набор карт, а в третьей – 6 тузов. Наудачу выбирают 2 колоды, а затем из каждой извлекают по одной карте. а) Найдите вероятность того, что извлеченные карты – тузы. б) Извлеченные карты оказались тузами. Найдите вероятность того, что одна из выбранных колод содержала 6 тузов.

12. Чтобы достичь цели путешествия туристы наудачу выбирают одну из трех дорог. Вероятность того, что они достигнут конечного пункта к назначенному сроку, обратно пропорциональна длине дороги с коэффициентом пропорциональности, равным k = 4 км. Длина первой дороги равна 8 км, второй – 12 км, третьей – 6 км. а) Найдите вероятность того, что туристы добрались до конечного пункта вовремя. б) Найдите вероятность того, что они выбрали вторую дорогу, если известно, что они прибыли к сроку.

13. Студент может добраться до университета на одном из 4-х видов транспорта: на автобусе, на трамвае, на троллейбусе и на метро, причем выбор вида транспорта равновозможен. Вероятность того, что он успевает на занятия, добираясь на автобусе, равна 0,6; на трамвае – 0,4; на троллейбусе – 0,5; на метро – 0,7. а) Найдите вероятность того, что студент **успел** на занятия. б) Найдите вероятность того, что студент ехал на трамвае, если известно, что он **опоздал** на занятия.

14. После праздника сестры Маша, Даша и Глаша моют тарелки. Маша взялась вымыть половину всех тарелок, Даша – одну треть, а Глаша – остальные. Вероятность того, что Маша разобьет тарелку, равна 5%, Даша – 10%, Глаша – 15%. а) Найдите вероятность того, что одна тарелка окажется разбитой. б) Одна тарелка оказалась разбитой. Какая из сестер с наибольшей вероятностью разбила тарелку?

15. В первом отделе работают 3 женщины и 1 мужчина, а во втором – 2 женщины и 4 мужчины. Случайным образом выбирают по одному сотруднику из каждого отдела. Затем из двух сотрудников по жребию выбирают одного – ответственного за пожарную безопасность. а) Найдите вероятность того, что ответственным за пожарную безопасность стал мужчина. б) Найдите вероятность того, что

кандидатами от отделов были выбраны мужчина и женщина, если известно, что ответственным за пожарную безопасность стал мужчина.

16. В магазине 60% всех имеющихся в продаже свитеров китайского производства, 40% – турецкого. Вероятность того, что китайский свитер окажется бракованным, равна 0,3, вероятность того, что турецкий свитер окажется бракованным, равна 0,2. Покупатель приобрел 2 свитера. а) Найдите вероятность того, что купленные свитеры оказались небракованными. б) Оба свитера оказались небракованными. Найдите вероятность того, что оба свитера изготовлены в одной стране.

17. В первой сумке находятся 1 пакет яблочного сока и 1 пакет виноградного, во второй – 3 пакета яблочного и 1 пакет виноградного. Из второй сумки в первую перекладывается один наудачу выбранный пакет, после чего из первой сумки один пакет извлекают. а) Найдите вероятность того, что извлеченный пакет оказался с виноградным соком. б) Извлеченный пакет оказался с виноградным соком. Найдите вероятность того, что из второй сумки в первую был переложен пакет с яблочным соком.

18. Отец бросает игральную кость, после чего играет с сыном в шахматы. Если выпадет 1 очко, то отец играет с полным набором фигур и пешек, если 2 очка – без пешки, 3 очка – без коня, 4 очка – без слона, 5 очков – без ладьи, 6 очков – без ферзя. Вероятности выигрыша отца в каждой ситуации равны соответственно 1, 0,9, 0,8, 0,8, 0,5 и 0,2. а) Найдите вероятность того, что отец **проиграл** партию. б) Найдите вероятность того, что он играл без пешки, если известно, что он **выиграл** партию.

19. На первой книжной полке стоят 4 книги российских авторов и 6 книг иностранных авторов, а на второй – 7 книг российских авторов и 3 книги иностранных. Читатель наугад выбирает полку и снимает с нее 2 книги. а) Найдите вероятность того, что одна из них российская, а другая иностранная. б) Оказалось, что одна из них российская, а другая иностранная. Найдите вероятность того, что они сняты со второй полки.

20. В первом ящике лежат 7 деталей, из которых 3 бракованные, а во втором – 10 деталей, из которых 4 бракованных. Из второго ящика в первый переложили одну деталь, после чего из первого ящика вынули 2 детали. а) Найдите вероятность того, что вынутые детали – бракованные. б) вынутые детали оказались бракованными. Найдите вероятность того, что из второго ящика в первый была переложена бракованная деталь.

21. Студент может добраться до университета на одном из 4-х видов транспорта: на автобусе, на трамвае, на троллейбусе и на метро, причем выбор вида транспорта равновозможен. Вероятность того, что он успевает на занятия, добираясь на автобусе, равна 0,6; на трамвае – 0,4; на троллейбусе – 0,5; на метро – 0,7. а) Найдите вероятность того, что студент **опоздал** на занятия. б) Найдите вероятность того, что студент ехал на трамвае, если известно, что он **успел** на занятия.

22. У первого кубика одна грань окрашена в красный цвет, у второго кубика 2 грани окрашены в красный цвет, а у третьего кубика 3 грани окрашены в красный цвет. Наудачу выбирают 2 кубика и их подбрасывают. а) Найдите вероятность того, что оба кубика выпали красными гранями кверху. б) Оказалось, что оба кубика выпали красными гранями кверху. Найдите вероятность того, что были выбраны второй и третий кубики.

23. Среди вопросов, которые могут быть предложены студенту на зачете, 40% составляют теоретические, а 60% – практические. Вероятность того, что студент верно ответит на теоретический вопрос, равна 0,7, а на практический – 0,5. а) Найдите вероятность того, что студент верно ответил на предложенные ему 2 вопроса. б) Оказалось, что он верно ответил на предложенные ему 2 вопроса. Найдите вероятность того, что один из них был теоретический, а второй практический.

24. В первом отделе работают 2 женщины и 4 мужчины, а во втором – 3 женщины и 1 мужчина. Одного произвольно выбранного сотрудника первого отдела перевели во второй отдел. Через некоторое время одного наудачу выбранного сотрудника второго отдела перевели в третий отдел. а) Найдите вероятность того, что в третий отдел была переведена женщина. б) Найдите вероятность того, что из первого отдела во второй был переведен мужчина, если известно, что в третий отдел была переведена женщина.

25. Подбрасывается игральная кость. Если выпало четное число очков, то опыт прекращается. Если выпало нечетное число очков, то кость подбрасывается второй раз. Если выпало число очков, кратное 3, то опыт прекращается. В противном случае кость подбрасывается третий раз. а) Найдите вероятность того, что при последнем подбрасывании выпала шестерка. б) Найдите вероятность того, что было произведено 3 броска, если известно, что при последнем подбрасывании выпала шестерка.

26. Компьютерный класс оборудован 20 компьютерами, 5 из которых изготовлены фирмой A, 7 – фирмой B, 8 – фирмой C. Вероятность безотказной работы в течение года компьютера фирмы A равна 0,88,

компьютера фирмы B – 0,80, компьютера фирмы C – 0,75. а) Найдите вероятность того, что наудачу выбранный компьютер безотказно работал в течение года. б) Наудачу выбранный компьютер работал в течение года безотказно. Какой из трех фирм A, B или C он изготовлен с наибольшей вероятностью?

III. Дана дискретная случайная величина (ДСВ) X. Найдите

1) ее ряд распределения,
2) математическое ожидание,
3) дисперсию и среднеее квадратическое отклонение,
4) вероятность попадания в промежуток [2; 4].

Постройте многоугольник распределения ДСВ X.

1. Из букв слова СТАТИСТИКА случайным образом выбирают 5 букв. ДСВ X – количество согласных букв в выборке.

2. Секретариат фирмы оборудован 4 независимо работающими компьютерами. Вероятность отказа каждого из них в течение рабочего дня равна 0,1. ДСВ X – количество безотказно работающих в течение рабочего дня компьютеров.

3. Игральная кость подбрасывается до выпадения шестерки, но не более пяти раз. ДСВ X – количество подбрасываний.

4. Всхожесть семян данного сорта растений равна 0,8. Посеяно 5 семян. ДСВ X – количество взошедших семян из 5 посеянных.

5. Среди 10 монет 3 фальшивые. Наудачу вынимают 5 монет. ДСВ X – количество фальшивых монет в выборке.

6. Вероятность того, что баскетболист забросит мяч в корзину, равна 3/4. Он бросает мяч в корзину до попадания, но не более 5 раз. ДСВ X – количество бросков.

7. Из букв слова КОМБИНАТОРИКА случайным образом выбирают 5 букв. ДВС X – количество согласных в выборке.

8. На книжной полке стоят 5 книг российских авторов и 4 книги иностранных авторов. Читатель берет наудачу 4 книги. ДСВ X – количество книг российских авторов в выборке.

9. В первой коробке лежат 4 белых шара, во второй – 3 белых и 1 черный, в третьей – 2 белых и 2 черных, в четвертой – 1 белый и 3 черных, в

пятой – 4 черных. Из каждой коробки наудачу вынимают один шар. ДСВ X – количество белых шаров в выборке.

10. В контрольной работе 5 задач. Вероятность правильного решения студентом каждой задачи, равна 3/5 и не зависит от правильности решения остальных. ДСВ X – количество правильно решенных задач.

11. В кошельке 5 двухрублевых и 3 пятирублевые монеты. Наудачу извлекают 4 монеты. ДСВ X – сумма денег в рублях, которую составляют извлеченные монеты.

12. В корзине 3 синих и 7 красных мячей. Наудачу вынимают 4 мяча. ДСВ X – количество красных мячей в выемке.

13. Сотрудник лаборатории производит 5 независимых опытов. Вероятность успешного опыта, равна 4/5. ДСВ X – число успешных опытов.

14. Из букв слова ВЕРОЯТНОСТЬ случайным образом выбирают 4 буквы. ДСВ X – количество гласных в выборке (буква «Ь» – не гласная!).

15. Противоположные грани кубика окрашены в красный, зеленый и синий цвета. Кубик подбрасывается 5 раз. ДСВ X – количество подбрасываний, в результате которых сверху окажется грань, окрашенная в зеленый цвет.

16. В ящике находятся 4 белых и 6 черных шаров. Случайным образом последовательно вынимаются шары до появления черного шара. Шары не возвращаются в ящик. ДСВ X – количество вынутых шаров.

17. Среди партии шарфов, поступивших в магазин, 30% составляют однотонные шарфы, а остальные – пестрые. Покупатель случайным образом выбирает 4 шарфа. ДСВ X – количество пестрых шарфов в выборке.

18. В ящике находятся 10 деталей, среди которых 4 бракованные. Наудачу вынимаются 5 деталей. ДСВ X – количество бракованных деталей в выборке.

19. Из букв слова ДИСПЕРСИЯ случайным образом выбирают 5 букв. ДСВ X – количество согласных в выборке.

20. В конфетнице лежат 10 конфет: 6 – с желейной, 4 – с ореховой начинкой. Случайным образом выбирают 4 конфеты. ДСВ X – количество желейных конфет в выборке.

21. Экзаменатор задает студенту вопросы до тех пор, пока не получит верный ответ, но не более 5 вопросов. Вероятность того, что студент верно ответит на 1-й вопрос, равна 4/5, на 2-й – 3/5, на 3-й – 2/5, на 4-й – 1/5. ДСВ X – число вопросов, заданных студенту.

22. На экзамен пришли 6 студентов, уровень подготовки которых примерно одинаков. Вероятность того, что каждый студент успешно сдаст экзамен, равна 2/3 и не зависит от результатов сдачи остальных. ДСВ X – число студентов, успешно сдавших экзамен.

23. На маршруте работают 4 автобуса. Вероятность поломки каждого из них в течение рабочего дня равна 2/5 и не зависит от состояния остальных. ДСВ X – число исправных в течение рабочего дня автобусов.

24. Игральная кость подбрасывается до выпадения двух шестерок подряд, но не более 5 раз. ДСВ X – количество подбрасываний.

25. В бумажнике лежат 4 пятисотрублевые и 4 тысячные купюры. Наудачу извлекают 5 купюр. ДСВ X – сумма в рублях, которую составляют извлеченные купюры.

26. Вероятность заболеть гриппом в период эпидемии составляет 60%. Рассматривается контрольная группа, состоящая из 5 человек. ДСВ X – количество человек данной группы, оставшихся здоровыми в период эпидемии.

IV. Непрерывная случайная величина (НСВ) X задана в нечетных вариантах – плотностью вероятности $f(x)$, а в четных вариантах – функцией распределения $F(x)$. Найдите

1) значение параметра C,
2) в нечетных вариантах – функцию распределения $F(x)$, в четных вариантах – плотность вероятности $f(x)$,
3) математическое ожидание,
4) дисперсию и среднее квадратическое отклонение,
5) вероятность попадания случайной величины в промежуток $[-1; 1]$.

Постройте графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

1. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C(2x-x^2), & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ Cx\sqrt{x}, & 0\le x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C\sin x, & 0\le x\le \pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ C(3x^2+x^3-4), & -2\le x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ C\sqrt{x+2}, & -2\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C\ln x, & 1\le x\le e \\ 1, & x>e \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-3 \\ C(3x+x^2), & -3\le x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C(e^x-x-1), & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2 \\ C\cos x, & -\pi/2\le x\le \pi/2 \\ 0, & x>\pi/2 \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ C(3x-x^3+2), & -1\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C\sqrt{x-1}, & 1\le x\le 5 \\ 0, & x>5 \end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C(1-1/x), & 1\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ C(1-x), & -1\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C(3x^2-x^3), & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C\sqrt{x}, & 0\le x\le 4 \\ 0, & x>4 \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C(1-\cos x), & 0\le x\le \pi \\ 1, & x>\pi \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ C(2x+x^2), & -2\le x\le 0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2 \\ C\sqrt{(x+2)^3}, & -2\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C/x, & 1\le x\le e \\ 0, & x>e \end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-3 \\ C(9x^2+2x^3-27), & -3\le x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ C(e^x-1), & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

22. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2 \\ C(\sin x+1), & -\pi/2\le x\le \pi/2 \\ 1, & x>\pi/2 \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ C(1-x^2), & -1\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

24. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C\sqrt{(x-1)^3}, & 1\le x\le 5 \\ 1, & x>5 \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ C/x^2, & 1\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

26. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ C(2x-x^2+3), & -1\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$

V. Непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ.

1) С помощью заданного в задаче условия найдите значение неизвестного параметра m или σ.
2) Найдите плотность вероятности $f(x)$ этой НСВ.
3) Найдите вероятность попадания НСВ в промежуток $[a; b]$.

1. $m = 1$, σ неизвестно, $P(X \le 0,6) = 0,3085$, $a = 0,4$, $b = 1,4$.

2. $m = -1$, σ неизвестно, $P(X \le -0,4) = 0,8413$, $a = -2,2$, $b = 0,2$.

3. $m = 1,2$, σ неизвестно, $P(X \le 0,2) = 0,0228$, $a = 0,7$, $b = 1,7$.

4. $m = -1,2$, σ неизвестно, $P(X \le -0,6) = 0,8413$, $a = -1,8$, $b = -0,9$.

5. $m = 1,5$, σ неизвестно, $P(X \le 1,9) = 0,6915$, $a = 1,26$, $b = 1,74$.

6. $m = -1,5$, σ неизвестно, $P(X \le -1) = 0,8413$, $a = -1,8$, $b = -1,1$.

7. $m = 0,5$, σ неизвестно, $P(X \le 0,1) = 0,1587$, $a = 0,1$, $b = 0,9$.

8. $m = -0,5$, σ неизвестно, $P(X \le -0,1) = 0,6919$, $a = -0,98$, $b = 0,06$.

9. $m = 0,8$, σ неизвестно, $P(X \le 1,2) = 0,8413$, $a = 0,6$, $b = 1,04$.

10. $m = -0,8$, σ неизвестно, $P(X \le -1,1) = 0,6919$, $a = -1,4$, $b = -0,2$.

11. $m = 0,4$, σ неизвестно, $P(X \le 0,2) = 0,3085$, $a = 0$, $b = +\infty$.

12. $m = -0,4$, σ неизвестно, $P(X \le -0,1) = 0,7257$, $a = -\infty$, $b = 0$.

13. $m = 0,6$, σ неизвестно, $P(X \le 0,4) = 0,3085$, $a = 0$, $b = +\infty$.

14. m неизвестно, $\sigma = 0,8$, $P(X \ge 0,6) = 0,6915$, $a = 0,4$, $b = 1,4$.

15. m неизвестно, $\sigma = 0{,}6$,
$P(X \geq -0{,}4) = 0{,}1587$,
$a = -2{,}2$, $b = 0{,}2$.

16. m неизвестно, $\sigma = 0{,}5$,
$P(X \geq 0{,}2) = 0{,}9772$,
$a = 0{,}7$, $b = 1{,}7$.

17. m неизвестно, $\sigma = 0{,}6$,
$P(X \geq -0{,}6) = 0{,}1587$,
$a = -1{,}8$, $b = -0{,}9$.

18. m неизвестно, $\sigma = 0{,}8$,
$P(X \geq 1{,}9) = 0{,}3085$,
$a = 1{,}26$, $b = 1{,}74$.

19. m неизвестно, $\sigma = 0{,}5$,
$P(X \geq -1) = 0{,}1587$,
$a = -1{,}8$, $b = -1{,}1$.

20. m неизвестно, $\sigma = 0{,}4$,
$P(X \geq 0{,}1) = 0{,}8413$,
$a = 0{,}1$, $b = 0{,}9$.

21. m неизвестно, $\sigma = 0{,}8$,
$P(X \geq -0{,}1) = 0{,}3085$,
$a = -0{,}98$, $b = 0{,}06$.

22. m неизвестно, $\sigma = 0{,}4$,
$P(X \geq 1{,}2) = 0{,}1587$,
$a = 0{,}6$, $b = 1{,}04$.

23. m неизвестно, $\sigma = 0{,}6$,
$P(X \geq -1{,}1) = 0{,}3085$,
$a = -1{,}4$, $b = -0{,}2$.

24. m неизвестно, $\sigma = 0{,}4$,
$P(X \geq 0{,}2) = 0{,}6915$,
$a = 0$, $b = +\infty$.

25. m неизвестно, $\sigma = 0{,}5$,
$P(X \geq -0{,}1) = 0{,}2743$,
$a = -\infty$, $b = 0$.

26. m неизвестно, $\sigma = 0{,}4$,
$P(X \geq 0{,}4) = 0{,}6915$,
$a = 0$, $b = +\infty$.

Приложение

Основные функции комплексной переменной $z = x + iy$

1. $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
2. $\sin z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$
3. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y$
4. $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} x \cos y + i\operatorname{ch} x \sin y$
5. $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^z}{2} = \cos y \operatorname{ch} x + i\sin y \operatorname{sh} x$
6. $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2n\pi), \quad n \in Z$, $|z|$ – модуль, $\arg z$ – аргумент комплексной переменной

Стандартные разложения функций комплексной переменной в степенные ряды

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $|z| < \infty$
2. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$
3. $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$
4. $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$
5. $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$
6. $(1+z)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z| < 1$
7. $(1-z)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$
8. $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$, $|z| < 1$

Основные формулы комбинаторики

1. $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – число перестановок из n элементов
2. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}_{m}$ – число размещений из n элементов по m без повторений
3. $\tilde{A}_n^m = n^m$ – число размещений из n элементов по m с повторениями
4. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n} = \dfrac{n!}{(n-m)!n!}$ – число сочетаний из n элементов по m

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3883	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3909	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2703	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1959	1,03	0,3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1930 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон. С 1944 по 1973 г. кафедрой заведовал В.А. Тартаковский – выдающийся математик и замечательный педагог.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицин, проф. И.А. Молотков.

С 1997 года кафедрой руководит И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем. Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине «Высшая математика» и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. В настоящее время на кафедре ВМ работают профессора В.В. Жук, А.П. Качалов, Г.П. Мирошниченко, А.Г. Петрашень, В.П. Смирнов, В.М. Уздин, В.Ю. Тертычный.

На кафедре ВМ образовалась научная школа по математическому моделированию сложных физических систем, активно развиваются напраления, связанные с нанотехнологиями. Сложилось тесное сотрудничество с крупными научными центрами, как в России, так и за рубежом.

Ольга Илларьевна Судавная
Валентин Михайлович Фролов
Сергей Валентинович Фролов

Типовые расчеты по высшей математике

Методические указания и задачи
для студентов вечернего отделения
IV семестр

Методическое пособие

В авторской редакции
Дизайн О.И. Судавная
Верстка О.И. Судавная
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати <дата фактического подписания>
Заказ № <получить в РИО>
Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49