

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное учреждение профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

В.А. ЗВЕРЕВ, Т.В. ТОЧИЛИНА

ОСНОВЫ ОПТОТЕХНИКИ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2005

Зверев В.А., Точилина Т.В. ОСНОВЫ ОПТОТЕХНИКИ. Учебное пособие.
– СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. – 293 с.

Рассматривая теорию световых явлений как естественное развитие феноменологической теории электромагнитного поля, получены уравнение волны и основное уравнение геометрической оптики – уравнение эйканала, рассмотрены свойства волны и электромагнитного поля на границе раздела двух однородных изотропных сред. Получены основные соотношения геометрической оптики и теории геометрического построения изображения системой оптических поверхностей. Описаны основные понятия и приведены основные соотношения фотометрии. В геометрическом приближении, положив в основу понятие и свойства световой трубки, получены соотношения, определяющие световой поток, проходящий через оптическую систему, и освещённость образованного ею изображения. На основании представлений о функции рассеяния в изображении точки показано, что оптическую систему можно рассматривать как фильтр пространственных частот. Изложены основы теории дифракции и рассмотрена дифракционная и абберационная структура изображения точки.

Материал пособия ориентирован на студентов оптических специальностей и, прежде всего, на изучающих курсы "Основы оптики", "Специальные разделы прикладной оптики", "Оценка качества изображения и расчёт допусков".

Учебное пособие подготовлено на кафедре Прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики.

Рецензенты: д.т.н., профессор А.А. Бузников (Санкт-Петербургский
государственный электротехнический университет)
д.т.н., профессор М.Н. Сокольский (ОАО «ЛОМО»)

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оптотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров 551900 – Оптотехника и специальности 190700 – Оптико-электронные приборы и системы направления дипломированных специалистов 654000 – Оптотехника.

ISBN 5-7577-0281-8

© СПбГУ ИТМО
(Санкт-Петербургский
университет информационных
технологий, механики и оптики)

© В.А. Зверев
Т.В. Точилина, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Глава 1. Основные свойства электромагнитного поля.....	7
1.1. Электромагнитное поле.....	7
1.2. Волновое уравнение.....	12
1.3. Скалярные волны.....	14
1.4. Векторные волны.....	19
1.4.1. Поляризация плоских монохроматических волн.....	21
1.4.2. Характеристика состояния поляризации с помощью параметров Стокса.....	31
1.4.3. Характеристика состояния поляризации квазимонохроматической световой волны с помощью параметров Стокса.....	33
1.5. Закон сохранения энергии электромагнитного поля.....	41
1.6. Электромагнитное поле на границе раздела двух сред.....	44
1.6.1. Плоская волна на границе раздела двух однородных изотропных сред.....	48
1.6.2. Формулы Френеля.....	52
1.6.3. Коэффициенты отражения и пропускания света на границе раздела двух сред.....	57
1.6.4. Поляризация света на поверхности раздела двух сред....	58
1.6.5. Полное внутреннее отражение.....	66
Глава 2. Основы геометрической оптики.....	71
2.1. Основное уравнение геометрической оптики.....	71
2.2. Световые лучи.....	74
2.3. Закон преломления.....	80
2.4. Принцип Ферма.....	84
2.5. Интегральный инвариант Лагранжа-Пуанкаре.....	87
2.6. Конгруэнции лучей.....	88
2.7. Теорема Малюса.....	90
Глава 3. Основы теории геометрического построения изображения предмета системой оптических поверхностей.....	93
3.1. Параксиальная оптика.....	93

3.2. Оптика нулевых лучей.....	96
3.3. Кардинальные точки оптической системы.....	98
3.4. Геометрическое построение изображения и основные оптические формулы.....	100
Глава 4. Основные понятия и соотношения фотометрии.....	105
4.1. Интенсивность излучения некогерентного источника конечных размеров в геометрическом приближении.....	106
4.2. Оптическое излучение. Световой поток. Энергетические и эффективные характеристики оптического излучения.....	110
4.3. Фотометрические величины и единицы их измерения.....	115
4.3.1. Сила света.....	115
4.3.2. Световой поток.....	117
4.3.3. Освещённость. Светимость.....	119
4.3.4. Яркость.....	121
4.3.5. Световая энергия. Экспозиция.....	123
4.4. Энергетические величины.....	125
4.4.1. Связь между световыми и энергетическими величинами.....	125
4.4.2. Световая эффективность.....	126
4.5. Фотометрические свойства тел.....	129
4.5.1. Общие соотношения.....	130
4.5.2. Гладкая поверхность раздела двух диэлектриков.....	134
4.5.3. Отражение света от гладкой поверхности металла.....	137
4.5.4. Поглощение света в веществе.....	151
Глава 5. Светотехника оптических систем.....	155
5.1. Световая трубка.....	155
5.2. Инвариант Штраубеля.....	157
5.3. Ограничение световых пучков лучей в оптической системе.....	162
5.4. Световой поток, проходящий через оптическую систему от излучающего элемента поверхности, расположенного на оптической оси перпендикулярно к ней.....	166
5.5. Освещённость в осевой точке изображения.....	171

5.6. Световой поток, проходящий через оптическую систему от излучающего элемента поверхности, расположенного вне оптической оси.....	176
5.7. Освещённость элемента изображения, расположенного вне оптической оси системы.....	181
Глава 6. Структура изображения, образованного оптической системой, и оценка его качества.....	183
6.1. Оптическая система как фильтр пространственных частот..	188
6.2. Структура изображения точечного предмета, образованного оптической системой.....	205
6.2.1. Введение в дифракционную теорию образования изображения.....	205
6.2.2. Интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа.....	214
6.2.3. Теория дифракции Кирхгофа.....	221
6.2.4. Дифракция Фраунгофера и Френеля.....	228
6.2.5. Дифракция Фраунгофера на отверстиях разной формы...	234
6.2.6. Дифракция Фраунгофера на одинаковых и одинаково ориентированных отверстиях.....	245
6.2.7. Дифракционный интеграл при наличии аберраций	254
Глава 7. Геометрическая теория аберраций.....	265
7.1. Уравнение луча. Волновая и поперечная аберрации	265
7.2. Функция волновой аберрации. Первичные аберрации.....	269
7.3. Допустимые величины первичных аберраций.....	277
Аберрационные свойства сферической поверхности (вместо заключения).....	282
Литература.....	292

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении всей истории научной мысли оптика по праву занимала передовые позиции по числу фундаментальных открытий – будь то в прикладных вопросах или в разработке общих оптических теорий. Недаром именно зрение даёт нам наибольшую информацию об окружающем нас мире. Оптика оказала глубокое влияние на многочисленные отрасли знания. С самых истоков наука ставила вопросы о строении космоса и месте человека во Вселенной. Изобретение телескопа открыло перед человеком полные чудес бездны Вселенной. С изобретением микроскопа оптика вторглась в биологию. Изобретение фотографии позволило фотохимическим, а теперь и электронным путём регистрировать изображение, образованное оптической системой фотоаппарата. Пожалуй, уместно подчеркнуть, что одним из самых важных элементов научной аппаратуры, которой пользуется человек во всех естественных науках, является оптическая система и составляющие её элементы, к которым, прежде всего, следует отнести линзы. Без линзы не было бы микроскопа, а без этого прибора беспомощны и медицина, и металлургия, и кристаллография, а также вся физика и биология. Без линзы не было бы ни кино, ни телевидения. Без простой линзы не было бы и очков, и, подобно пребывавшим в отчаянии старым монахам в средневековых монастырях, многие из нас, перевалив за пятьдесят лет, были бы вынуждены отказаться от радостей чтения.

Физические принципы, лежащие в основе оптических явлений, описанию которых посвящено настоящее учебное пособие, к концу XIX века были в основном сформулированы. Выдающееся открытие в 1900 году М.Планком кванта энергии коренным образом изменило существовавшие представления об испускании излучения и его поглощения, но не оказало существенного влияния на понимание других оптических явлений. Поэтому обобщение известных принципов и методов их использования в различных конкретных случаях продолжались и продолжают столь же интенсивно и в настоящее время.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. Электромагнитное поле

Принято считать, что в пространстве задано поле некоторой величины, если в каждой точке пространства (или в некоторой его части) определено значение этой величины. Поле может быть скалярным или векторным в зависимости от характера исследуемой величины, стационарным (установившимся), если оно не меняется с течением времени в каждой точке пространства, или нестационарным (неустановившимся) в противном случае.

Знаменитый английский учёный Джемс Клерк Максвелл (1831–1879), основатель теоретической электродинамики, является создателем электромагнитной теории света. Развивая идею английского физика Майкла Фарадея о том, что взаимодействия между электрически заряженными телами осуществляются посредством электромагнитного поля, Д.К.Максвелл на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений в шестидесятых годах XIX века сформулировал фундаментальные уравнения классической макроскопической электродинамики, описывающие электромагнитные явления в произвольной среде.

Физический смысл уравнений Максвелла удобно напомнить, следуя исторической последовательности развития электродинамики. Французский физик Шарль Огюстен Кулон в 1785 году установил один из основных законов электростатики, определяющий силу взаимодействия между двумя "точечными" электрическими зарядами, в виде:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где F – сила взаимодействия зарядов; q_1, q_2 – величины взаимодействующих зарядов; r – расстояние между зарядами; k – коэффициент пропорциональности, величина которого определяется выбором системы единиц физических величин, входящих в это выражение; так, например, в системе единиц измерения физических величин СГС (сантиметр, грамм, секунда) коэффициент k полагается равным единице. Закон Кулона позволил ввести понятие электрического поля. Силы электрического поля будут вполне определены, если в каждой точке этого поля определена сила, действующая на помещённый в ней единичный положительный заряд. Эта сила называется

напряжённостью электрического поля и обычно обозначается буквой \mathbf{E} . При $q_1 = q$, а $q_2 = 1$ в соответствии с законом Кулона имеем

$$\mathbf{E} = k \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведённый из заряда q в рассматриваемую точку поля.

Для описания электрических процессов в материальной среде вводится вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$. Для большинства изотропных сред

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ – диэлектрическая проницаемость (для вакуума в системе СГС $\varepsilon = 1$).

При этом поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность S определяется электрическим зарядом, находящимся в объёме V , ограниченном этой поверхностью, то есть:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (1.4)$$

Здесь $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к граничной поверхности, а ρ – плотность заряда в пространстве (заряд в единице объёма).

Поднеся компас к проводнику с током, датский физик Ханс Кристиан Эрстед в 1820 году обнаружил, что магнитная стрелка устанавливается перпендикулярно проводнику. Из опыта Эрстеда следует, что магнитное поле имеет направленный характер и должно характеризоваться векторной величиной. Основную силовую характеристику магнитного поля назвали магнитной индукцией, которую принято обозначать буквой \mathbf{B} .

Для описания магнитных процессов в среде вводится вектор магнитной напряжённости $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$. Для большинства изотропных сред

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.5)$$

где $\mu = \mu(x, y, z)$ – магнитная проницаемость среды (для вакуума в системе СГС $\mu = 1$).

Вполне очевидно, что силовые линии магнитного поля замкнуты сами на себя. Поэтому для любого магнитного поля поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю, то есть

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1.6)$$

Из опыта известно, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: поле \mathbf{B} , порождаемое несколькими токами, равно векторной сумме полей \mathbf{B}_i , порождаемых каждым током в отдельности, т.е. $\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i$. Пусть

замкнутый контур лежит в плоскости, перпендикулярной току. При этом циркуляция вектора \mathbf{B} по контуру L равна

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I,$$

где под I следует понимать ток, охватываемый контуром, при этом вектор $d\mathbf{l}$ совпадает с касательной в каждой точке контура в направлении обхода. Если некоторый контур охватывает несколько проводов с током, то в силу принципа суперпозиции имеем

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \left(\sum_K \mathbf{B}_K \right) d\mathbf{l} = \sum_K \oint_L \mathbf{B}_K \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_K I_K.$$

Здесь I_K – алгебраическая величина. Если токи текут во всём пространстве, то $\sum_K I_K = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$. Этот интеграл берётся по произвольной поверхности S , натянутой на контур. Вектор \mathbf{j} определяет плотность тока в той точке, где расположена площадка dS ; \mathbf{n} – орт положительной нормали к этой площадке (т.е. нормали, образующей с направлением обхода контура при вычислении циркуляции правовинтовую систему).

При этом

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Для большинства изотропных сред

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{СТР}, \quad (1.7)$$

где $\sigma = \sigma(x, y, z)$ – удельная электропроводимость, $\mathbf{j}_{СТР}$ – плотность так называемых сторонних токов, т.е. токов, поддерживаемых любыми силами, кроме сил электрического поля.

Согласно гипотезе Д.К.Максвелла магнитное поле порождается не только токами, текущими в проводнике, но и переменными электрическими полями в диэлектриках или в вакууме. Величина, пропорциональная скорости изменения электрического поля во времени, была названа Максвеллом током смещения. При этом

циркуляция вектора магнитной напряжённости вдоль замкнутого контура L определяется полным током через произвольную поверхность S , ограниченную рассматриваемым контуром, в виде

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

В 1826 году немецкий физик Георг Симон Ом установил закон, согласно которому сопротивление R контура определяется выражением

$$R = \frac{E}{I},$$

где E – электродвижущая сила (ЭДС), равная работе, совершаемой над единичным зарядом при обходе им замкнутого контура; I – сила тока: $I = -\frac{dq}{dt}$.

В 1831 году выдающийся английский физик Майкл Фарадей, основоположник учения об электромагнитном поле, описал ставший теперь классическим эксперимент, открывший новую главу электродинамики. Много раз повторяя свои опыты в различных вариантах, М.Фарадей пришёл к выводу, что при всяком пересечении проводником линий магнитной индукции в последнем появляется ток, названный им индукционным, при этом протекший заряд Δq пропорционален числу пересечённых силовых линий $\Delta\Phi$ и обратно пропорционален электрическому сопротивлению проводника R , то есть

$$R\Delta q = \frac{1}{c} \Delta\Phi.$$

Д.К.Максвелл ввёл связанный с контуром магнитный поток

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где S – натянутая на контур поверхность. Отождествив величину $\Delta\Phi$ с приращением потока Φ и учитывая закон Ома, Д.К.Максвелл придал закону электромагнитной индукции М.Фарадея следующий вид:

$$E = RI = -R \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

или

$$E = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Вполне очевидно, что напряжённость электрического поля, определяющая индукционный ток в опыте М.Фарадея, незлекростатического происхождения. Циркуляция этого поля по контуру даёт величину ЭДС, индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

При этом

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.9)$$

т.е. циркуляция вектора напряжённости электрического поля вдоль замкнутого контура L (ЭДС индукции) определяется скоростью изменения потока вектора магнитной индукции через поверхность S , ограниченную рассматриваемым контуром. Знак "минус" соответствует правилу Ленца для направления индуцированного тока.

Если считать, что вектора электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} и \mathbf{H} являются непрерывными функциями координат, то, рассматривая потоки векторов \mathbf{B} и \mathbf{D} через поверхности, ограничивающие бесконечно малые объёмы, и циркуляции векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} по бесконечно малым контурам, можно от интегральных уравнений (1.4), (1.6), (1.8) и (1.9) перейти к системе дифференциальных уравнений Максвелла, характеризующих поле в каждой точке пространства.

В соответствии с определением соответствующих функций имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{\Delta V \rightarrow M} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}; \\ \frac{d}{dV} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}; \\ \frac{d}{dS} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}{\pi r^2} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= \mathbf{n} \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E} = \\ &= \mathbf{n} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right]. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения Максвелла принимают вид:

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1.10)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Уравнения Максвелла не образуют полной замкнутой системы, позволяющей рассчитывать электромагнитные процессы при наличии материальной среды. Поэтому их необходимо дополнить соотношениями (1.3), (1.5) и (1.7), которые называют уравнениями состояния или материальными уравнениями.

1.2. Волновое уравнение

Английский математик У.Гамильтон ввёл символ

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

называемый "набла". При своём применении он сохраняет черты как вектора, так и оператора дифференцирования. "Умножение" (т.е. действие) оператора Гамильтона на скаляр f и вектор \mathbf{A} (точнее на скалярное и векторное поля соответственно) производится по следующим естественным правилам

$$\nabla f = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z} = \text{grad} f,$$

$$\nabla \mathbf{A} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div} \mathbf{A},$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) = \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Рассмотрим электромагнитное поле в однородной непроводящей ($\sigma = 0$) среде в области поля, не содержащей ни зарядов ($\rho = 0$), ни токов ($j = 0$). При этих условиях, используя оператор набла, уравнения (1.10)–(1.13) удобно представить в виде:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \quad (1.15)$$

$$\nabla \mathbf{D} = 0. \quad (1.14)$$

Точка над буквой означает дифференцирование по времени.

Дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять каждый из векторов поля в отдельности, можно получить путём исключения другого. Подставив соотношение (1.5) в уравнение (1.17), разделив его на μ и векторно умножив на оператор набла, получаем:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.18)$$

Дифференцируя по времени уравнение (1.16), имеем

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} - \frac{1}{c} \ddot{\mathbf{E}} = 0. \quad (1.19)$$

Выражение (1.19) с учётом материального уравнения (1.3) позволяет выражение (1.18) представить в виде

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0. \quad (1.20)$$

В результате последующих преобразований выражение (1.20) можно привести к виду:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \nabla(\ln \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla[\mathbf{E} \nabla(\ln \varepsilon)] = 0. \quad (1.21)$$

Аналогично находим

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} + \nabla(\ln \varepsilon) \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \nabla[\mathbf{H} \nabla(\ln \mu)] = 0. \quad (1.22)$$

$$\text{Здесь } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

В рассматриваемой части пространства среду будем считать однородной. В этом случае $\nabla(\ln \varepsilon) = 0$ и $\nabla(\ln \mu) = 0$. При этом уравнения (1.21) и (1.22) принимают вид:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} = 0. \quad (1.24)$$

Уравнение вида (1.23) или (1.24) называется уравнением д'Аламбера или волновым уравнением. Эти уравнения волнового движения определяют существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$. Впервые постоянная c

была определена немецкими физиками Фридрихом Кольраушем и Вильгельмом Вебером в 1856 году из отношения значений ёмкости конденсатора, измеренных в электростатических и электромагнитных единицах. Оказалось, что она совпадает со скоростью света в вакууме. Используя этот результат, Максвелл развил свою электромагнитную теорию света, предсказывающую существование электромагнитных волн. Правильность его предсказания была подтверждена знаменитыми экспериментами немецкого физика Генриха Герца в 1888 году и русским физиком Петром Николаевичем Лебедевым, который в 1895 году впервые получил и исследовал миллиметровые электромагнитные волны.

1.3. Скалярные волны

В однородной среде в областях, где отсутствуют заряды и токи, любой из декартовых компонентов $A(\mathbf{r}, t)$ векторов поля \mathbf{E} или \mathbf{H} в соответствии с уравнениями (1.23) и (1.24) удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \nabla^2 A = 0. \quad (1.25)$$

Пусть $\mathbf{r}(x, y, z)$ – радиус-вектор некоторой точки P , а $\mathbf{s}(s_x, s_y, s_z)$ – единичный вектор с фиксированным направлением. При этом любое решение уравнения (1.25) в виде $A = A(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, t)$ определяет плоскую волну, так как в каждый момент времени величина A

постоянна в плоскостях $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \text{const}$, которые перпендикулярны к единичному вектору \mathbf{s} .

Удобно выбрать такое положение осей декартовой системы координат ξ, ζ, η , чтобы ось $O\xi$ была бы направлена вдоль орта \mathbf{s} . Тогда в соответствии с рис.1.1 имеем

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \zeta$$

или $x s_x + y s_y + z s_z = \zeta$.

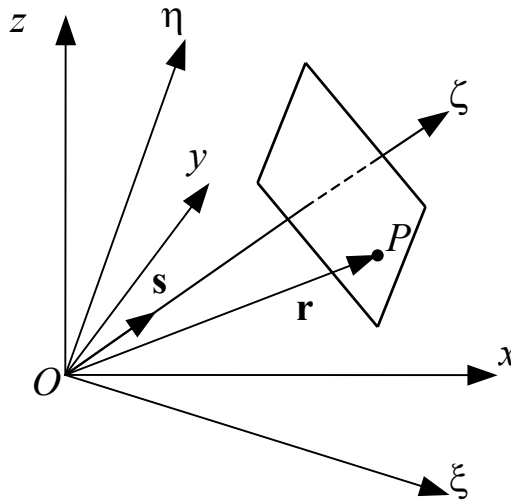


Рис.1.1. Распространение плоской волны

В системе координат x, y, z имеем

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

Переходя к новой системе координат, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} s_x; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \zeta} s_y; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} s_z.$$

При этом

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) = \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2}.$$

Таким образом, в системе координат ξ, ζ, η уравнение (1.25) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} = 0. \tag{1.26}$$

Для решения этого уравнения перепишем его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) A = 0.$$

Введём новые переменные

$$t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \zeta = p; \quad t + \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \zeta = q.$$

Отсюда находим

$$t = \frac{1}{2}(q + p), \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}(q - p).$$

При этом

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right).$$

Применив эти соотношения к функции A , получаем

$$\frac{\partial^2 A}{\partial p \partial q} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения (1.26) имеет вид:

$$A = A_1(p) + A_2(q),$$

где A_1 и A_2 – произвольные функции, т.е. любая функция от аргумента $t \pm \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \zeta$ будет решением уравнения (1.26).

Пусть, например, $A_2 = 0$. При этом $A = A_1\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} \zeta\right)$. Легко

видеть, что в каждой плоскости $\zeta = const$ при изменении времени изменяется и поле. С другой стороны, в каждый момент времени поле различно для разных значений координат ζ . Вполне очевидно, что значение поля будет одним и тем же для сочетаний координаты ζ и момента времени t , удовлетворяющих условию:

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t - \zeta = const. \quad (1.27)$$

Положив в этом условии $t = 0$, получаем $-\zeta = const = -\zeta_0$. Тогда условие (1.27) можно записать в виде:

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} t = \zeta - \zeta_0.$$

Это значит, что если при $t = 0$ в некоторой точке $\zeta = \zeta_0$ пространства поле имело некоторое фиксированное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле будет иметь

на расстоянии, равном $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}t$ от начальной точки в направлении оси $O\zeta$. Отсюда следует, что электромагнитное поле распространяется в пространстве, например, вдоль оси $O\zeta$, со скоростью $V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}$, где $\sqrt{\epsilon\mu} = n$ – показатель преломления среды. Таким образом, функция $A_1\left(t - \frac{1}{V}\zeta\right)$ определяет плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси $O\zeta$. Очевидно, что функция $A_2\left(t + \frac{1}{V}\zeta\right)$ определяет плоскую волну, бегущую в противоположном, отрицательном, направлении оси $O\zeta$. В точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ пространства возмущение, вызванное волной, зависит только от времени: $A(\mathbf{r}_0, t) = f(t)$.

Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической. Зависимость компонентов поля от времени в монохроматической волне определяется множителем вида: $\cos(\omega t + \delta)$, где ω – угловая частота волны. При этом функцию $f(t)$ можно представить в виде:

$$f(t) = a \cos(\omega t + \delta). \quad (1.30)$$

Величина a ($a > 0$) называется амплитудой, а аргумент косинуса, т.е. $\omega t + \delta$, называется фазой. Величина $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ называется частотой колебаний. При замене величины t на $t + T$ значение функции $f(t)$ остаётся неизменным. Поэтому величина T является периодом колебаний. Волновые функции в форме (1.30) называют гармоническими функциями относительно времени.

Заменим в выражении (1.30) величину t величиной $t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{V}$. При этом получаем

$$A(\mathbf{r}, t) = a \cos\left[\omega\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{V}\right) + \delta\right]. \quad (1.31)$$

Полученная волновая функция определяет гармоническую плоскую волну, распространяющуюся в направлении, заданном единичным вектором \mathbf{s} . Расстояние, на которое перемещается

поверхность волны за время T , равное периоду одного колебания, определяет период изменения напряжённости поля в пространстве, равный $\lambda = VT = V \frac{2\pi}{\omega}$. Расстояние, равное λ , называется длиной волны, при этом приведённая к вакууму длина волны $\lambda_0 = cT = n\lambda$. Эта длина волны соответствует длине распространяющейся в вакууме гармонической волны той же частоты. Легко убедиться, что величина $A(\mathbf{r}, t)$, определяемая выражением (1.31), не изменится, если величину $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ заменить величиной $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \lambda$.

Выражение (1.31) можно представить в виде:

$$A(\mathbf{r}, t) = a \cos[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta], \quad (1.32)$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ называется волновым вектором или вектором распространения волны в среде, при этом волновое число

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{2\pi}{\lambda_0} = nk_0.$$

Амплитуда a и начальная фаза δ плоской монохроматической волны не зависят от \mathbf{r} и t , т.е. одинаковы во всём пространстве во все моменты времени, а, следовательно, выражение (1.32) определяет однородную волну. Никакие реальные волны этим свойством не обладают.

Плоскую монохроматическую волну можно рассматривать как частный случай гармонических волн более сложной формы, в общем виде определяемых уравнением

$$A(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[\omega t - g(\mathbf{r})], \quad (1.33)$$

где $a > 0$ и g – вещественные скалярные функции положения. Поверхности $g(\mathbf{r}) = \text{const}$ называют поверхностями постоянной фазы или волновыми поверхностями.

Расчёты, связанные с гармоническими волнами, упрощаются, если использовать экспоненциальные функции вместо тригонометрических. При этом уравнение (1.33) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &= R_e \{U(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\} = \\ &= \frac{1}{2} [U(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + U^*(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)], \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $U(\mathbf{r})$ – комплексная функция вида: $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[ig(\mathbf{r})]$, а символ R_e означает, что берётся вещественная часть. Если операции, производимые над функцией A , линейны, то в выражении (1.34)

символ R_e можно опустить и оперировать непосредственно с комплексной функцией вида:

$$A(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t). \quad (1.35)$$

Используя выражение (1.35), находим, что $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 U(\mathbf{r}) \times \exp(-i\omega t)$, а $\nabla^2 A = \exp(-i\omega t) \nabla^2 U(\mathbf{r})$. При этом уравнение (1.25) принимает вид:

$$\nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0. \quad (1.36)$$

Полученное уравнение называют уравнением Гельмгольца.

Величину U называют комплексной амплитудой волны. В частности, для плоской волны, имеем

$$g(\mathbf{r}) = \omega \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{V} - \delta = k \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - \delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta.$$

При этом $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, где $a(\mathbf{r}) = a_0(\mathbf{r}) \exp(-i\delta)$.

1.4. Векторные волны

Простейшим электромагнитным полем является поле плоской волны. Электромагнитную плоскую волну общего вида определим векторами

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\psi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\psi), \quad \text{где } \psi = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{V}.$$

При этом

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi},$$

$$\nabla \mathbf{E} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{V} (\mathbf{i}s_x + \mathbf{j}s_y + \mathbf{k}s_z) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} = -\frac{1}{V} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi},$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{V} \frac{\partial E_z}{\partial \psi} s_y + \frac{1}{V} \frac{\partial E_y}{\partial \psi} s_z = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \times \mathbf{s} \right)_x;$$

вполне очевидно, что $(\nabla \times \mathbf{E})_y = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \times \mathbf{s} \right)_y$, $(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \times \mathbf{s} \right)_z$;

при этом $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{V} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \times \mathbf{s}$.

Аналогично получаем

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi}, \quad \nabla \mathbf{H} = -\frac{1}{V} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{V} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi} \times \mathbf{s}.$$

Подставив полученные выражения в уравнения Максвелла (1.10)–(1.13), с учётом материальных уравнений (1.3) и (1.5) преобразуем их к виду:

$$\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi} \times \mathbf{s} - \varepsilon \frac{V}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \psi} \times \mathbf{s} + \mu \frac{V}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi} = 0. \quad (1.40)$$

Полагая постоянную интегрирования равной нулю (т.е. пренебрегая постоянным полем во всём пространстве) и учитывая, что $\frac{c}{V} = \sqrt{\varepsilon \mu} = n$, в результате интегрирования выражений (1.37)–(1.40) получаем

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1.42)$$

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\mathbf{H} \times \mathbf{s}), \quad (1.43)$$

$$\mathbf{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{E} \times \mathbf{s}). \quad (1.44)$$

Из вида равенств (1.41) и (1.42) следует "поперечность" электромагнитного поля, поскольку векторы электрической и магнитной напряжённости поля лежат в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения поля. Как следует из выражений (1.43) и (1.44), векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} ортогональны друг другу и образуют вместе с ортом \mathbf{s} правую систему ортогональных векторов, как показано на рис.1.2. Кроме того, из выражений (1.43) и (1.44) следует, что $E = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H$, $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$.

В результате получаем

$$\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H. \quad (1.45)$$

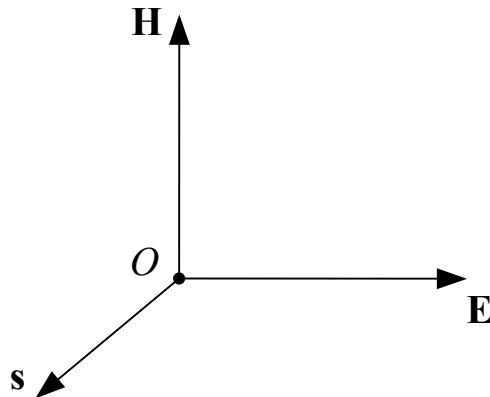


Рис.1.2. Взаимное расположение векторов напряженности электрического **E** и магнитного **H** полей и вектора **s** направления распространения электромагнитной волны

1.4.1. Поляризация плоских монохроматических волн

Направим ось z системы координат x, y, z вдоль волнового вектора $\mathbf{k} = ks$. Тогда у векторов **E** и **H** могут быть отличны от нуля только проекции на оси x и y . Уравнения Максвелла допускают, в частности, такое решение, при котором у вектора **E** во всех точках в пространстве и во все моменты времени отлична от нуля только одна

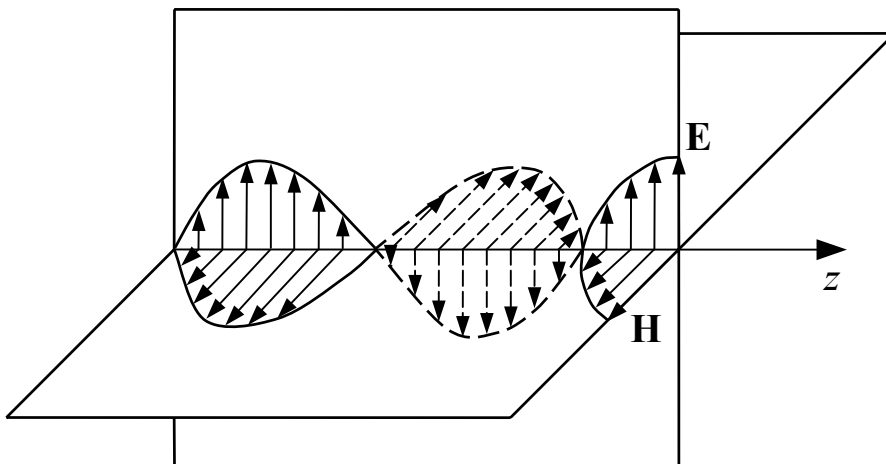


Рис.1.3. Электромагнитная волна

проекция, например, $E_x(z, t)$. Вследствие свойства поперечности у вектора **H** при этом отлична от нуля только проекция на ось y , т.е. $H_y(z, t)$. Эти проекции связаны между собой соотношением $\sqrt{\epsilon}E_x = \sqrt{\mu}H_y$. Мгновенный "снимок" такой волны, показывающий векторы **E** и **H** в разных точках оси z в один момент времени, показан на рис.1.3. В этом случае говорят, что волна имеет линейную

(или плоскую) поляризацию. Плоскость, в которой лежит вектор напряжённости электрического поля волны \mathbf{E} и волновой вектор \mathbf{k} , называют плоскостью поляризации или плоскостью колебаний. Чтобы представить себе изменение электрического и магнитного полей с течением времени, можно считать, что вся система векторов, показанная на рис.1.3, движется как целое вдоль оси z со скоростью V (в вакууме со скоростью c).

Свет, в котором представлены все направления колебаний вектора \mathbf{E} в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, называется естественным светом. Излучение обычных источников света не поляризовано. Линейно поляризованный свет получают, пропуская естественный через оптические поляризаторы, действие которых основано на различных физических принципах. С их помощью можно не только получить линейно поляризованный свет, но и выяснить, имеет ли исследуемое излучение линейную поляризацию. Выполняющее такую роль поляризационное устройство называют анализатором. В отличие от обычных источников света излучение газового лазера, окна разрядной трубки которого наклонены на некоторый угол к её оптической оси (угол Брюстера), обладает линейной поляризацией.

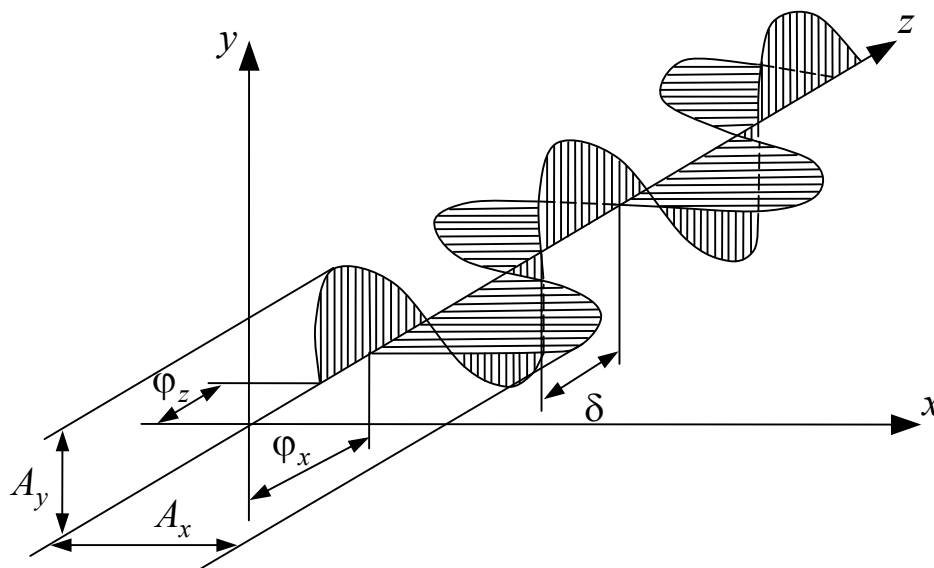


Рис.1.4. Сложение двух электромагнитных волн

В общем случае вектор \mathbf{E} может иметь любые направления в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Пусть наряду с волной, поляризованной в плоскости xOz , в том же направлении (в направлении оси z) распространяется другая волна той же частоты ω , но поляризованная в плоскости yOz , как показано на рис.1.4. Вследствие линейности уравнений Максвелла

такое наложение (суперпозиция) волн также является решением уравнений. В зависимости от разности фаз складываемых линейно поляризованных волн результирующая волна может иметь различную поляризацию.

Рассмотрим электрическое поле $\mathbf{E}(z, t)$ волны, возникающей при сложении двух волн одинаковой частоты с ортогональными направлениями линейной поляризации:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \exp[i(kz - \omega t)] = A_x \exp(-i\varphi_x) \exp[i(kz - \omega t)] \quad (1.46)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \exp[i(kz - \omega t)] = A_y \exp(-i\varphi_y) \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (1.47)$$

При одинаковых (или отличающихся на $n\pi$, где n – целое число) фазах φ_x и φ_y комплексных амплитуд E_{0x} и E_{0y} в каждой точке происходит сложение взаимно перпендикулярных колебаний в одной фазе, что даёт колебание в новом направлении. Результирующая волна будет линейно поляризованной. Направление её поляризации зависит от отношения амплитуд A_x и A_y , как показано на рис.1.5.

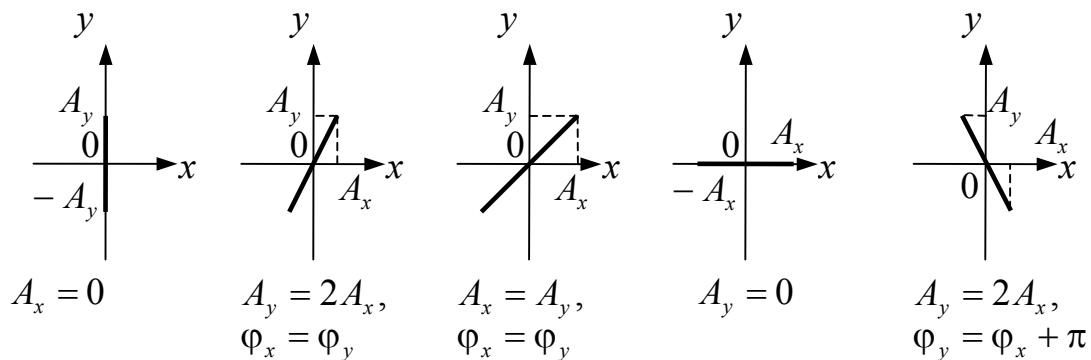


Рис.1.5. Зависимость направления линейно поляризованной волны от отношения амплитуд складываемых волн

Пусть волна, поляризованная в плоскости yOz , отстаёт по фазе на $\frac{1}{2}\pi$ от волны, поляризованной в плоскости xOz , т.е. $\varphi_x - \varphi_y = \frac{1}{2}\pi$. Если амплитуды этих волн одинаковы ($A_x = A_y = A$), то вектор \mathbf{E} в любой точке z будет вращаться в плоскости xOy против часовой стрелки, оставаясь неизменным по модулю. Например, в точке $z = 0$ имеем

$$E_x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (1.48)$$

$$E_y(t) = A \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{1}{2}\pi\right) = A \sin(\omega t + \varphi_x). \quad (1.49)$$

Такую волну называют поляризованной по кругу или циркулярно поляризованной. Когда при наблюдении навстречу волне вращение

вектора \mathbf{E} в фиксированной плоскости происходит так, как в рассмотренном примере при $z = 0$, т.е. против часовой стрелки, то говорят о волне левой круговой поляризации. Правая круговая поляризация соответствует вращению вектора в фиксированной плоскости $z = \text{const}$ в направлении часовой стрелки:

$$E_x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (1.50)$$

$$E_y(t) = A \cos\left(\omega t + \varphi_x + \frac{1}{2}\pi\right) = -A \sin(\omega t + \varphi_x), \quad (1.51)$$

т.е. волна $E_y(t)$ опережает по фазе волну $E_x(t)$ на $\frac{1}{2}\pi$.

На практике для превращения линейно поляризованного света в свет с круговой поляризацией используют анизотропные кристаллические пластинки, в которых две волны с ортогональными направлениями линейной поляризации имеют различные фазовые скорости. Подбором толщины пластинки можно получить на выходе заданную разность фаз этих волн и тем самым требуемое состояние поляризации.

При использовании комплексной записи в виде (1.46) и (1.47) для складываемых волн с ортогональными направлениями линейной поляризации результирующая волна имеет линейную поляризацию, если отношение комплексных амплитуд E_{0y} к E_{0x} выражается вещественным числом. Результирующая волна имеет круговую поляризацию, если отношение комплексных амплитуд определяется мнимым числом, по модулю равным единице. При $\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$, волна будет иметь правую круговую поляризацию, а при $\frac{E_{0y}}{E_{0x}} = -i$ –

левую. В общем случае при наложении световых колебаний во взаимно перпендикулярных плоскостях кривая, которую описывает конец вектора \mathbf{E} в произвольной фиксированной плоскости $z = \text{const}$, является геометрическим местом точек, координаты которых определяются уравнениями вида:

$$E_x = A_x \cos(\tau + \varphi_x) \quad (1.52)$$

$$E_y = A_y \cos(\tau + \varphi_y) \quad (1.53)$$

$$E_z = 0. \quad (1.54)$$

Здесь $\tau = kz - \omega t$.

Для того, чтобы исключить τ из уравнений (1.52) и (1.53), перепишем их в виде:

$$\frac{E_x}{A_x} = \cos \tau \cos \varphi_x - \sin \tau \sin \varphi_x \quad (1.55)$$

$$\frac{E_y}{A_y} = \cos \tau \cos \varphi_y - \sin \tau \sin \varphi_y. \quad (1.56)$$

При этом

$$\frac{E_x}{A_x} \sin \varphi_y - \frac{E_y}{A_y} \sin \varphi_x = \cos \tau \sin(\varphi_y - \varphi_x),$$

$$\frac{E_x}{A_x} \cos \varphi_y - \frac{E_y}{A_y} \cos \varphi_x = \sin \tau \sin(\varphi_y - \varphi_x).$$

Возведя в квадрат левую и правую части этих уравнений и сложив полученные выражения соответствующих частей, имеем

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{E_x}{A_x}\frac{E_y}{A_y}\cos\delta = \sin^2\delta, \quad (1.57)$$

где $\delta = \varphi_y - \varphi_x$. Выражение (1.57) представляет собой уравнение конического сечения. Известно, что квадратичная форма $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H$ будет эллиптической, если дискриминант формы $D = AC - B^2 > 0$. В рассматриваемом случае соответствующий дискриминант равен

$$D = \frac{1}{A_x^2 A_y^2} - \frac{\cos^2 \delta}{A_x^2 A_y^2} = \frac{\sin^2 \delta}{A_x^2 A_y^2} > 0.$$

Таким образом, уравнение (1.57) описывает эллипс, вписанный в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат Ox и Oy и имеют длины $2A_x$ и $2A_y$, как показано на рис.1.6. Положив в уравнении (1.57) величину $E_x = A_x$, получаем $E_y = A_y \cos \delta$, а при $E_y = A_y$ получаем $E_x = A_x \cos \delta$, т.е. эллипс касается сторон прямоугольника в точках $(\pm A_x, \pm A_y \cos \delta)$ и $(\pm A_x \cos \delta, \pm A_y)$. В этом случае говорят, что волна, описываемая уравнениями (1.52)–(1.54), эллиптически поляризована. В общем случае оси эллипса не параллельны осям Ox и Oy .

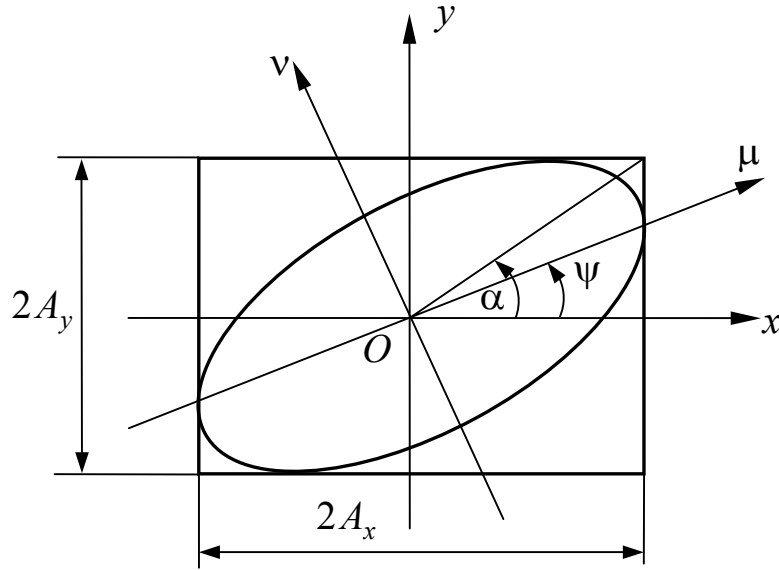


Рис.1.6. Эллиптически поляризованная волна

Пусть $O\mu$ и $O\nu$ – новые оси, совпадающие с осями эллипса, а ψ ($0 \leq \psi < \pi$) – угол между осью Ox и направлением главной оси $O\mu$, как показано на рисунке. При этом компоненты E_μ и E_ν связаны с компонентами E_x и E_y соотношениями

$$E_\mu = E_x \cos \psi + E_y \sin \psi \quad (1.58)$$

$$E_\nu = -E_x \sin \psi + E_y \cos \psi. \quad (1.59)$$

Если $2a$ и $2b$ ($a \geq b$) – длины осей эллипса, то уравнение эллипса относительно осей $O\mu$ и $O\nu$ можно записать в виде:

$$E_\mu = a \cos(\tau + \varphi_0) \quad (1.60)$$

$$E_\nu = b \sin(\tau + \varphi_0). \quad (1.61)$$

Чтобы определить амплитуды a и b , приравняем в развёрнутом виде правые части уравнений (1.58) и (1.60) и уравнений (1.59) и (1.61). При этом, учитывая выражения (1.52) и (1.53), получаем

$$a(\cos \tau \cos \varphi_0 - \sin \tau \sin \varphi_0) = \cos \tau (A_x \cos \varphi_x \cos \psi + A_y \cos \varphi_y \sin \psi) - \sin \tau (A_x \sin \varphi_x \cos \psi + A_y \sin \varphi_y \sin \psi),$$

$$b(\sin \tau \cos \varphi_0 + \cos \tau \sin \varphi_0) = \cos \tau (A_y \cos \varphi_y \cos \psi - A_x \cos \varphi_x \sin \psi) + \sin \tau (A_x \sin \varphi_x \sin \psi - A_y \sin \varphi_y \cos \psi).$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \tau$ и при $\sin \tau$, имеем

$$a \cos \varphi_0 = A_x \cos \varphi_x \cos \psi + A_y \cos \varphi_y \sin \psi, \quad (1.62)$$

$$a \sin \varphi_0 = A_x \sin \varphi_x \cos \psi + A_y \sin \varphi_y \sin \psi; \quad (1.63)$$

$$b \cos \varphi_0 = A_x \sin \varphi_x \sin \psi - A_y \sin \varphi_y \cos \psi, \quad (1.64)$$

$$b \sin \varphi_0 = -A_x \cos \varphi_x \sin \psi + A_y \cos \varphi_y \cos \psi. \quad (1.65)$$

Возведя левые и правые части этих уравнений в квадрат и последовательно складывая полученные части уравнений (1.62) и (1.63) и уравнений (1.64) и (1.65), находим, что

$$a^2 = A_x^2 \cos^2 \psi + A_y^2 \sin^2 \psi - A_x A_y \sin 2\psi \cos \delta,$$

$$b^2 = A_x^2 \sin^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \psi - A_x A_y \sin 2\psi \cos \delta,$$

где $\delta = \varphi_y - \varphi_x$. Отсюда следует, что

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2. \quad (1.66)$$

Перемножив левые и правые части уравнений (1.62) и (1.64) и уравнений (1.63) и (1.65) и сложив соответствующие части полученных выражений, имеем

$$\pm ab = A_x A_y \sin \delta. \quad (1.67)$$

Наличие двух знаков в уравнении (1.67) определяет возможность двух направлений вращения вектора \mathbf{E} , конец которого описывает эллипс.

Поделив левые и правые части уравнений (1.64) и (1.65) соответственно на левые и правые части уравнений (1.62) и (1.63), получаем

$$\begin{aligned} \pm \frac{b}{a} &= \frac{A_x \sin \varphi_x \sin \psi - A_y \sin \varphi_y \cos \psi}{A_x \cos \varphi_x \cos \psi + A_y \cos \varphi_y \sin \psi} = \\ &= \frac{-A_x \cos \varphi_x \sin \psi + A_y \cos \varphi_y \cos \psi}{A_x \sin \varphi_x \cos \psi + A_y \sin \varphi_y \sin \psi}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &A_x^2 \sin^2 \varphi_x \sin \psi \cos \psi + A_x A_y \sin \varphi_x \sin \varphi_y \sin^2 \psi - \\ &- A_x A_y \sin \varphi_x \sin \varphi_y \cos^2 \psi - A_y^2 \sin^2 \varphi_y \sin \psi \cos \psi = \\ &= -A_x^2 \cos^2 \varphi_x \sin \psi \cos \psi + A_x A_y \cos \varphi_x \cos \varphi_y \cos^2 \psi - \\ &- A_x A_y \cos \varphi_x \cos \varphi_y \sin^2 \psi + A_y^2 \cos^2 \varphi_y \sin \psi \cos \psi. \end{aligned}$$

Преобразовав это выражение, получаем

$$(A_x^2 - A_y^2) \sin 2\psi = 2A_x A_y \cos \delta \cos 2\psi.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \delta. \quad (1.68)$$

Обозначим $\frac{A_y}{A_x} = \operatorname{tg} \alpha$, где $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

При этом уравнение (1.68) можно представить в виде:

$$tg 2\psi = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \cos \delta = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \cos \delta$$

или

$$tg 2\psi = tg 2\alpha \cos \delta. \quad (1.69)$$

Из выражений (1.66) и (1.67) следует, что

$$\pm \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} \sin \delta = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \sin \delta = 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \delta$$

или

$$\pm \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \sin 2\alpha \sin \delta. \quad (1.70)$$

Обозначим $\pm \frac{b}{a} = tg\chi$, где $\chi \left(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right)$ – вспомогательный

угол, при этом численное значение $tg\chi$ определяет величину отношения осей эллипса, а знак при χ характеризует два варианта, которые можно использовать при описании эллипса. При этом выражение (1.70) можно представить в виде:

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta. \quad (1.71)$$

Итак, если заданы величины A_x и A_y , относящиеся к произвольному положению осей, разность фаз δ и если $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то главные полуоси эллипса a и b и угол ψ ($0 \leq \psi < \pi$), который большая ось эллипса образует с осью Ox , определяются формулами:

$$a^2 + b^2 = A_x^2 + A_y^2 \quad (1.72)$$

$$tg 2\psi = tg 2\alpha \cos \delta \quad (1.73)$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta. \quad (1.74)$$

С другой стороны, если известны длины осей a и b и ориентация эллипса (т.е. заданы величины a , b и ψ), то эти формулы позволяют найти амплитуды A_x и A_y и разность фаз δ . Существуют оптические устройства, которые позволяют определять эти величины прямым способом.

В предельных случаях эллипс поляризации вырождается либо в прямую, либо в окружность. Согласно выражению (1.57) эллипс

вырождается в прямую при $\delta = \varphi_y - \varphi_x = m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

При этом
$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x}.$$

В этом случае имеем линейно поляризованную волну. В том случае, когда эллипс вырождается в окружность, имеем круговую поляризацию волны. Вполне очевидно, что условием этого является преобразование описанного прямоугольника в квадрат, что эквивалентно выравниванию амплитуд: $A_x = A_y = A$. Кроме того, в этом случае один из компонентов вектора \vec{E} должен равняться нулю, когда другой достигает максимального значения. Последнее условие эквивалентно равенству: $\delta = \varphi_y - \varphi_x = \pm(2m-1)\frac{\pi}{2}$, где $m = 1, 2, 3, \dots$.

При соблюдении названных условий уравнение (1.57) принимает вид уравнения окружности:

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2.$$

В случае правой поляризации $\sin \delta > 0$.

При этом

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$E_x = a \cos(\tau + \varphi_x),$$

$$E_y = a \cos\left(\tau + \varphi_x + \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = -a \sin(\tau + \varphi_x).$$

При левой поляризации $\sin \delta < 0$.

При этом

$$\delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \text{ где } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$E_x = a \cos(\tau + \varphi_x),$$

$$E_y = a \cos\left(\tau + \varphi_x - \frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) = a \sin(\tau + \varphi_x).$$

Если вместо вещественного представления компонентов вектора \vec{E} использовать комплексное:

$$E_x = A_x \exp[i(\tau + \varphi_x)],$$

$$E_y = A_y \exp[i(\tau + \varphi_y)], \text{ то}$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} \exp[i(\tau + \varphi_y - \tau - \varphi_x)] = \frac{A_y}{A_x} \exp(i\delta)$$

или

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{A_y}{A_x} \exp(i\delta).$$

Значение этого отношения позволяет сразу же определить характер поляризации:

– линейная поляризация электромагнитной волны, если $\delta = \pm m\pi$, где $m = 0, 1, 2, \dots$; при этом

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{A_y}{A_x};$$

– правая круговая поляризация электромагнитной волны, если $A_x = A_y$, $\delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; при этом

$$\frac{E_x}{E_y} = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)\right] = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i;$$

– левая круговая поляризация электромагнитной волны, если

$A_x = A_y$, $\delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; при этом

$$\frac{E_x}{E_y} = \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)\right] = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i.$$

Можно показать, что в общем случае для правой эллиптической поляризации мнимая часть отношения $\frac{E_y}{E_x}$ положительна, тогда как

для левой эллиптической поляризации она отрицательна. На рис.1.7 показаны эллипсы поляризации при разных значениях δ .

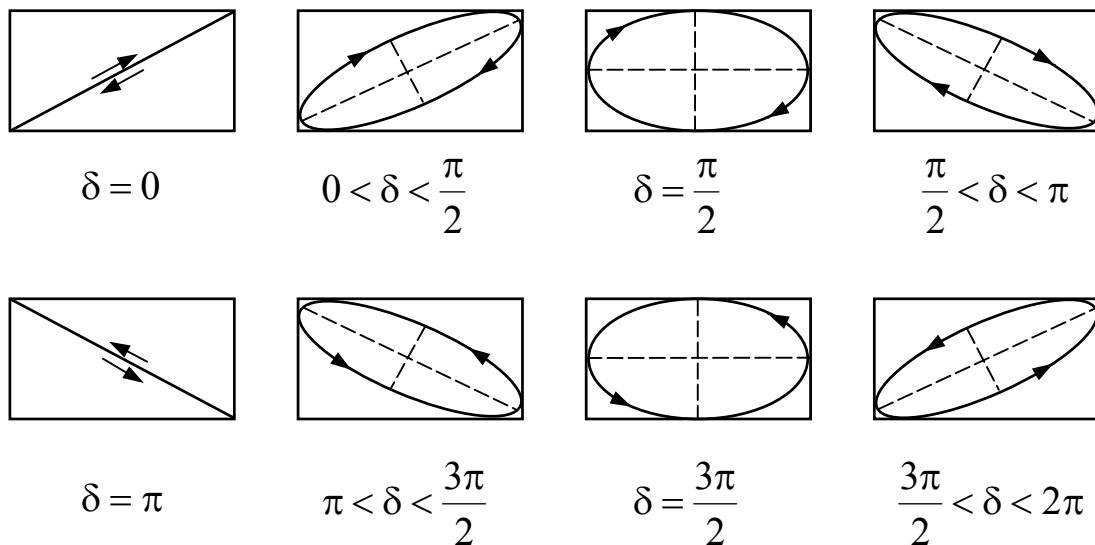


Рис.1.7. Эллиптическая поляризация при различных значениях разности фаз δ

1.4.2. Характеристика состояния поляризации с помощью параметров Стокса

Для характеристики эллипса поляризации необходимы три независимые величины, к которым из уже рассмотренных можно отнести амплитуды A_x и A_y и разность фаз δ или малую и большую полуоси эллипса a и b и угол ψ , характеризующий ориентацию эллипса. Для практических целей состояние поляризации удобно характеризовать параметрами, обладающими одинаковой физической размерностью. Такие параметры были введены английским физиком и математиком Джорджем Габриелем Стоксом в 1852 году при его исследованиях частично поляризованного света. Параметрами Стокса для плоской монохроматической волны служат следующие четыре величины:

$$s_0 = A_x^2 + A_y^2 \quad (1.75a)$$

$$s_1 = A_x^2 - A_y^2 \quad (1.75б)$$

$$s_2 = 2A_x A_y \cos \delta \quad (1.75в)$$

$$s_3 = 2A_x A_y \sin \delta. \quad (1.75г)$$

Лишь три из этих величин независимы, так как справедливо тождество

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (1.76)$$

Из выражения (1.75) следует, что параметр s_0 пропорционален интенсивности волны.

Напомним, что $\frac{A_y}{A_x} = \operatorname{tg} \alpha$. При этом из соотношения (1.75) имеем

$$s_0 = A_x^2 \left(1 + \frac{A_y^2}{A_x^2} \right) = A_x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{A_x^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Полученное соотношение позволяет выражение (1.74) преобразовать к виду:

$$\sin 2\chi = 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \sin \delta = 2 \cos^2 \alpha \frac{A_x A_y}{A_x^2} \sin \delta = 2 \frac{A_x A_y \sin \delta}{s_0}.$$

Учитывая при этом выражение (1.75г), получаем

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi. \quad (1.77)$$

В результате подстановки соотношений (1.75б) и (1.75в) в выражение (1.68) имеем

$$s_2 = s_1 \operatorname{tg} 2\psi. \quad (1.78)$$

Подставим соотношения (1.77) и (1.78) в выражение (1.76):

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 \operatorname{tg}^2 2\psi + s_0^2 \sin^2 2\chi.$$

Отсюда находим, что

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi. \quad (1.79)$$

При этом выражение (1.78) можно представить в виде:

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi.$$

Итак,

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \quad (1.80a)$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \quad (1.80б)$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi. \quad (1.80в)$$

Отсюда следует, что параметры s_1 , s_2 и s_3 достаточно простыми соотношениями связаны с углом χ $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}\right)$, характеризующим эллиптичность поляризации и направление вращения электрического вектора, и с углом ψ ($0 \leq \psi < \pi$), характеризующим ориентацию эллипса.

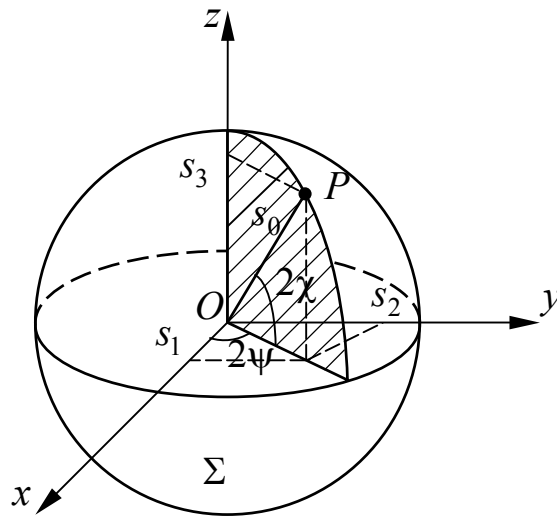


Рис.1.8. Представление состояния поляризации монохроматической волны по Пуанкаре (сфера Пуанкаре)

Полученные выражения (1.80a)–(1.80в) определяют возможность простого геометрического представления различных состояний поляризации: параметры Стокса s_1 , s_2 и s_3 можно рассматривать как декартовы координаты точки P на сфере Σ радиуса s_0 , причём углы 2χ и 2ψ являются сферическими угловыми координатами этой точки, как показано на рис.1.8. Таким образом, каждому возможному состоянию поляризации плоской монохроматической волны заданной интенсивности ($s_0 = const$) соответствует одна точка на сфере Σ и

наоборот. Так как знак угла χ определяет направление вращения вектора, то, как следует из выражения (1.80в), правая поляризация представляется точками на поверхности Σ , лежащими выше экваториальной плоскости (плоскости xy), а левая поляризация – точками на поверхности Σ , лежащими ниже этой плоскости.

Для линейно поляризованного света разность фаз δ равна нулю или числу, кратному π . В соответствии с выражением (1.80в) параметр Стокса s_3 равен нулю, если $\chi = m\pi$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, K$. Таким образом, линейная поляризация представляется точками окружности в экваториальной плоскости. Для круговой поляризации $A_x = A_y$ и при правой поляризации угол $\delta = \frac{\pi}{2}$, а при левой поляризации угол $\delta = -\frac{\pi}{2}$. При этом в соответствии с соотношением

(1.74) $\sin 2\chi = \pm 1$. Следовательно, правая круговая поляризация представляется северным полюсом ($s_1 = s_2 = 0, s_3 = s_0$), а левая круговая поляризация – южным полюсом ($s_1 = s_2 = 0, s_3 = -s_0$).

Рассмотренное геометрическое представление различных состояний поляризации точками на сфере было предложено французским математиком, физиком и философом Жюлем Анри Пуанкаре. Оно чрезвычайно полезно в кристаллооптике для определения влияния кристаллических сред на состояние поляризации проходящего через них света. Сфера Σ называется сферой Пуанкаре.

1.4.3. Характеристика состояния поляризации квазимонохроматической световой волны с помощью параметров Стокса

Итак, строго монохроматический свет всегда поляризован, т.е. конец электрического (или магнитного) вектора в каждой точке пространства движется периодически, описывая эллипс, который в особых случаях переходит в круг или прямую линию. В том случае, когда конец вектора движется совершенно нерегулярно и никакие световые колебания не имеют никаких преимущественных направлений в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения, свет называется неполяризованным. Эти два случая относятся к экстремальным. В общем случае изменение векторов поля не является ни вполне регулярным, ни вполне нерегулярным; при этом можно сказать, что свет частично поляризован. Обычно такой свет получается из неполяризованного при отражении или рассеянии.

Рассмотрим квазимонохроматическую световую волну со средней частотой световых колебаний ν , распространяющуюся в положительном направлении оси z . Пусть $E_x(t)$ и $E_y(t)$ – два взаимно ортогональных компонента электрического вектора в некоторой точке O , перпендикулярные к направлению распространения.

При этом

$$E_x(t) = A_x(t) \exp\{i[\varphi_x(t) - 2\pi\nu t]\} \quad (1.81)$$

$$E_y(t) = A_y(t) \exp\{i[\varphi_y(t) - 2\pi\nu t]\}. \quad (1.82)$$

В большинстве известных приложений спектральные амплитуды световых колебаний заметно отличаются от нуля лишь в частотном интервале шириной $\Delta\nu$, малом по сравнению со средней частотой ν .

При этом $\Delta t \Delta\nu \sim \frac{1}{4\pi}$, где Δt – время когерентности света. Заметим,

что при $\Delta\nu \approx \frac{1}{\Delta t}$ величина Δt определяет длительность одного

волнового цуга. При $\Delta t \rightarrow \infty$ частотный интервал $\Delta\nu \rightarrow 0$, т.е. при этом имеем монохроматический свет. Если бы свет был строго монохроматическим, то величины A_x, A_y, φ_x и φ_y были бы постоянными. Для квазимонохроматической волны эти величины зависят также от времени t , но за любой интервал времени, малый по сравнению с временем когерентности, их изменение относительно невелико.

Предположим, что запаздывание компонента E_y электрического вектора относительно компонента E_x равно ε , что можно осуществить с помощью прибора, называемого компенсатором, и определим интенсивность $I(\theta, \varepsilon)$ световых колебаний в направлении, которое образует угол θ с положительным направлением оси x . Такие колебания можно выделить, пропуская свет через соответствующим образом ориентированный поляризатор. Вполне очевидно, что сквозь поляризатор пройдут колебания, определяемые проекциями компонентов E_x и E_y на соответствующее направление, т.е. модуль электрического вектора после введения запаздывания ε можно записать в виде:

$$E(t; \theta, \varepsilon) = E_x \cos \theta + E_y \exp(i\varepsilon) \sin \theta, \quad (1.83)$$

при этом интенсивность света

$$I(\theta, \varepsilon) = \langle E(t; \theta, \varepsilon) E^*(t; \theta, \varepsilon) \rangle = J_{xx} \cos^2 \theta + J_{yy} \sin^2 \theta + J_{xy} \exp(-i\varepsilon) \cos \theta \sin \theta + J_{yx} \exp(i\varepsilon) \sin \theta \cos \theta, \quad (1.84)$$

где J_{xx}, K – элементы матрицы

$$J = \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_x^2 \rangle & \langle A_x A_y \exp[i(\varphi_y - \varphi_x)] \rangle \\ \langle A_x A_y \exp[-i(\varphi_y - \varphi_x)] \rangle & \langle A_y^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Здесь скобками $\langle \rangle$ обозначены усреднённые по времени величины.

Диагональные элементы матрицы J вещественны и представляют собой интенсивности компонентов E_x и E_y электрического вектора. Следовательно, шпур $S_p J$ этой матрицы, т.е. сумма её диагональных элементов, равен полной интенсивности света:

$$S_p J = J_{xx} + J_{yy} = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle. \quad (1.86)$$

Недиагональные элементы в общем случае комплексны, но они являются комплексно-сопряжёнными. Заметим, что матрица, для которой $J_{ji} = J_{ij}^*$ при всех i и j , называется эрмитовой. Введём нормировку смешанного члена J_{xy} , полагая

$$\mu_{xy} = |\mu_{xy}| \exp(i\beta_{xy}) = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}} \sqrt{J_{yy}}}.$$

Используя неравенство Шварца, можно показать, что $|\mu_{xy}| \leq 1$. Комплексный коэффициент корреляции μ_{xy} служит мерой корреляции между x - и y -компонентами электрического вектора. Модуль $|\mu_{xy}|$ служит мерой их "степени когерентности", а фаза β_{xy} этого коэффициента – мерой их "эффективной разности фаз". Матрица J называется матрицей когерентности световой волны. Так как J_{xx} и J_{yy} не могут быть отрицательными, то приведённые соотношения означают, что определитель матрицы когерентности неотрицателен, т.е. $|J| = J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx} \geq 0$. Элементы матрицы когерентности заданной волны можно определить с помощью относительно простых экспериментов. Для этого необходимо лишь

измерить интенсивность для нескольких различных значений θ (ориентации поляризатора) и ε (запаздывания, обусловленного компенсатором) и решить соответствующие уравнения, полученные из выражения (1.84).

Пусть $I(\theta, \varepsilon)$ обозначает результат измерения, соответствующий определённой паре значений углов θ и ε , которую обозначим в виде: $\{\theta, \varepsilon\}$. Удобно использовать следующие их значения:

$$\{0^\circ, 0\}, \{45^\circ, 0\}, \{90^\circ, 0\}, \{135^\circ, 0\}, \left\{45^\circ, \frac{\pi}{2}\right\}, \left\{135^\circ, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Из выражения (1.84) следует, что элементы матрицы когерентности выражаются через интенсивности, полученные в результате измерений при шести сочетаниях указанных значений величин θ и ε в виде:

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= I(0^\circ, 0), \\ J_{yy} &= I(90^\circ, 0), \\ J_{xy} &= \frac{1}{2}[I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)] + \frac{1}{2}i \left[I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) \right], \\ J_{yx} &= \frac{1}{2}[I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0)] - \frac{1}{2}i \left[I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} (1.87)$$

Отсюда следует, что для определения элементов матрицы J_{xx} , J_{yy} и вещественной части J_{xy} (или J_{yx}) необходим лишь поляризатор. Величины J_{xx} и J_{yy} можно определить, используя результаты измерений с поляризатором, ориентированным так, чтобы пропускать компоненты с азимутами $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$ соответственно. Для получения вещественной части J_{xy} необходимы измерения с поляризатором, вначале ориентированным так, чтобы он пропускал компоненту с азимутом $\theta = 45^\circ$, а затем – компоненту с азимутом $\theta = 135^\circ$. Для определения мнимой части J_{xy} (или J_{yx}), согласно двум последним соотношениям в (1.87), необходим компенсатор, который вносил бы разности фаз в четверть периода между компонентами E_x и E_y (например, четвертьволновая пластинка). Поляризатор при этом вначале должен быть ориентирован так, чтобы он пропускал компоненту с азимутом $\theta = 45^\circ$, а затем – компоненту с азимутом $\theta = 135^\circ$. Последние два измерения нужны для идентификации правой и левой круговой поляризации.

Итак, для характеристики квазимонохроматической плоской волны, вообще говоря, необходимы четыре вещественные величины, например, J_{xx} , J_{yy} , вещественная и мнимая части J_{xy} (или J_{yx}). В своих исследованиях, относящихся к частично поляризованному свету, Стокс ввёл несколько отличное представление характеристики состояния поляризации квазимонохроматической волны четырьмя параметрами, тесно связанное с рассмотренным. Параметрами Стокса общего вида являются следующие четыре величины:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \langle A_x^2 \rangle + \langle A_y^2 \rangle, \\ s_1 &= \langle A_x^2 \rangle - \langle A_y^2 \rangle, \\ s_2 &= 2\langle A_x A_y \cos \delta \rangle, \\ s_3 &= 2\langle A_x A_y \sin \delta \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

где, как и прежде, A_x и A_y – мгновенные амплитуды двух взаимно перпендикулярных компонентов электрического вектора E_x и E_y , а $\delta = \varphi_y - \varphi_x$ – разность их фаз. Для монохроматического света A_x , A_y и δ не зависят от времени, при этом выражения (1.88) переходят в параметры Стокса монохроматической волны, определяемые соотношениями (1.75а)–(1.75г).

Из выражений (1.88) и (1.85) следует, что параметры Стокса и элементы матрицы когерентности связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= J_{xx} + J_{yy}, \\ s_1 &= J_{xx} - J_{yy}, \\ s_2 &= J_{xy} + J_{yx}, \\ s_3 &= i(J_{yx} - J_{xy}); \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

$$\left. \begin{aligned}
 J_{xx} &= \frac{1}{2}(s_0 + s_1), \\
 J_{yy} &= \frac{1}{2}(s_0 - s_1), \\
 J_{xy} &= \frac{1}{2}(s_2 + is_3), \\
 J_{yx} &= \frac{1}{2}(s_2 - is_3).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Как и элементы матрицы когерентности, параметры Стокса любой плоской квазимонохроматической волны можно определить с помощью простых экспериментов. И в этом случае обозначим через $I(\theta, \varepsilon)$ интенсивность световых колебаний в направлении, образующем угол θ с осью Ox , когда компонент E_y запаздывает на величину ε по отношению к компоненту E_x . Тогда на основании соотношений (1.87) и (1.90) имеем

$$\left. \begin{aligned}
 s_0 &= I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0), \\
 s_1 &= I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \\
 s_2 &= I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \\
 s_3 &= I\left(45^\circ, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(135^\circ, \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

Параметр s_0 определяет полную интенсивность. Параметр s_1 равен разности интенсивностей линейно поляризованного света, прошедшего через поляризаторы с азимутами $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$. Так же интерпретируется и параметр s_2 , но для азимутов $\theta = 45^\circ$ и $\theta = 135^\circ$. Наконец, параметр s_3 равен разности интенсивностей света, прошедшего через прибор, пропускающий колебания с правой круговой поляризацией, и света, прошедшего через прибор, пропускающий колебания с левой круговой поляризацией.

Используя соотношения (1.90), условие $J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} \geq 0$ можно представить в виде:

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \quad (1.92)$$

При суперпозиции нескольких независимых световых волн, распространяющихся в одном направлении, матрица когерентности

результатирующей волны равна сумме матриц когерентности для отдельных волн. Чтобы доказать это, рассмотрим компоненты электрических векторов (в обычном комплексном представлении) отдельных волн E_{xn} и E_{yn} ($n = 1, 2, \dots, N$). Компоненты электрического вектора результирующей волны равны

$$E_x = \sum_{n=1}^N E_{xn}, \quad E_y = \sum_{n=1}^N E_{yn},$$

а, значит, элементы матрицы когерентности для этой волны определяются выражением

$$J_{kl} = \langle E_k E_l^* \rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \langle E_{kn} E_{lm}^* \rangle = \sum_n \langle E_{kn} E_{ln}^* \rangle + \sum_{n \neq m} \langle E_{kn} E_{lm}^* \rangle.$$

Так как предполагается, что волны независимы, каждый член последней суммы равен нулю и, следовательно,

$$J_{kl} = \sum_n J_{kln}, \quad (1.93)$$

где $J_{kln} = \langle E_{kn} E_{ln}^* \rangle$ – элементы матрицы когерентности n -ой волны. Из формулы (1.93) следует, что матрица когерентности для сложной волны равна сумме матриц когерентности для всех составляющих волн.

Свет, который обладает тем свойством, что интенсивность любого его компонента, перпендикулярного к направлению распространения, одинакова, при этом на эту интенсивность не оказывает влияния никакое предыдущее взаимное запаздывание перпендикулярных друг другу компонентов, на которые можно разложить свет, называется полностью неполяризованным светом. Другими словами, при таком свете должно соблюдаться условие $I(\theta, \varepsilon) = \text{const}$ при всех значениях θ и ε . Его часто называют естественным светом.

Как следует из выражения (1.84), интенсивность $I(\theta, \varepsilon)$ не зависит от θ и ε при $J_{xy} = J_{yx} = 0$ и $J_{xx} = J_{yy}$. При этом

$$I(\theta, \varepsilon) = J_{xx} + J_{yy} = I.$$

В соответствии с формулой (1.89) для полностью неполяризованного света имеем: $s_0 = I, s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

В случае строго монохроматического (полностью поляризованного) света величины A_x, A_y, φ_x и φ_y в выражениях (1.81) и (1.82) не зависят от времени. При этом матрица когерентности имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} A_x^2 & A_x A_y \exp(-i\delta) \\ A_x A_y \exp(i\delta) & A_y^2 \end{bmatrix},$$

где $\delta = \varphi_y - \varphi_x$.

Легко видеть, что в этом случае определитель матрицы когерентности равен нулю, т.е. $|J| = J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx} = 0$. При этом, как следует из соотношений (1.90), имеем

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

Рассмотрим теперь разложение некоторой произвольной волны на взаимно независимые поляризованную и неполяризованную части, используя представление через параметры Стокса. Соотношения (1.93) и (1.90) позволяют сделать вывод о том, что параметры Стокса системы независимых волн равны сумме соответствующих параметров Стокса отдельных волн. Как было показано, для неполяризованной волны справедливо соотношение: $s_1 = s_2 = s_3 = 0$. Обозначим четыре параметра Стокса s_0, s_1, s_2 и s_3 одним символом s . Тогда для волны, характеризующейся параметром s , требуемое разложение можно записать в виде:

$$s = s^{(1)} + s^{(2)}, \quad (1.94)$$

$$\text{где } s^{(1)} = s_0 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, 0, 0, 0; \quad (1.95)$$

$$s^{(2)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, s_1, s_2, s_3. \quad (1.96)$$

Параметр $s^{(1)}$ соответствует неполяризованной, а $s^{(2)}$ – поляризованной части волны. Следовательно, с помощью параметров Стокса степень поляризации исходной волны можно выразить в виде:

$$P = \frac{I_{\text{поляри}}}{I_{\text{полн}}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0}. \quad (1.97)$$

С помощью параметров Стокса можно также записать выражения, определяющие форму и ориентацию эллипса поляризации, связанного с поляризованной частью волны. Если, как и раньше, соотношение

$$\pm \frac{b}{a} = \text{tg}\chi \left(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

определяет отношение малой и большой осей эллипса поляризации и направление вращения электрического вектора, то на основании соотношений (1.80в) и (1.96) имеем

$$\sin 2\chi = \frac{s_3}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}. \quad (1.98)$$

Угол ψ ($0 \leq \psi < \pi$) между большой осью и осью Ox определяется в соответствии с выражениями (1.78) и (1.96) соотношением

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{s_2}{s_1}. \quad (1.99)$$

Итак, параметры Стокса, как и матрица когерентности, служат полезным инструментом для систематического анализа состояния поляризации квазимонохроматической волны.

1.5. Закон сохранения энергии электромагнитного поля

Умножим уравнение (1.12) на \mathbf{E} , а уравнение (1.13) на \mathbf{H} и образуем разность полученных произведений:

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.100)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \right) + \\ &+ \mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Из свойств смешанного произведения векторов следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \times \mathbf{H} \right) &= \mathbf{H} \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \right), \\ \mathbf{i} \left(\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right) &= -\mathbf{i} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \times \mathbf{E} \right) = -\mathbf{E} \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \right) \text{ и так далее.} \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \right) - \\ &- \mathbf{E} \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Полученное векторное тождество позволяет выражение (1.100) представить в виде

$$\frac{1}{\tilde{n}} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0. \quad (1.101)$$

Умножив это выражение на $\frac{c}{4\pi}$ и проинтегрировав по произвольному объёму, получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{c}{4\pi} \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = 0.$$

В соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса имеем

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S},$$

где S – замкнутая поверхность, ограничивающая объём V . При этом полученное выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \\ & + \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Используя материальные уравнения (1.3) и (1.5), получаем

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}),$$

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

Обозначим

$$\frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = w_e, \quad \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = w_m, \quad \int_V (w_e + w_m) dV = W.$$

При этом выражение (1.102) принимает вид:

$$\frac{dW}{dt} + \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{c}{4\pi} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.103)$$

Плотность тока \mathbf{j} в уравнениях Максвелла можно представить в виде суммы токов

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_V, \quad (1.104)$$

где плотность тока проводимости

$$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E},$$

а плотность конвекционного тока

$$\mathbf{j}_V = \rho \mathbf{V},$$

где \mathbf{V} – скорость конвекционного движения заряда.

Обозначив скорость движения заряда q_k через \mathbf{V}_k , будем считать, что $\mathbf{V}_k \ll c$, где c – скорость света в вакууме. Сила,

действующая со стороны поля (\mathbf{E}, \mathbf{B}) на заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{V} , определяется так называемым законом Лорентца:

$$\mathbf{F} = q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \right],$$

основанным на экспериментальных данных. Отсюда следует, что если все заряды q_k за время δt смещаются на расстояние $\delta \mathbf{x} = \mathbf{V}_k \delta t$ ($k = 1, 2, K$), то полная работа, выполненная при этом, равна

$$\delta A = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k = \sum_k q_k \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{V}_k \delta t,$$

так как $\mathbf{V}_k (\mathbf{V}_k \times \mathbf{B}) = 0$.

Если число заряженных частиц велико, то распределение зарядов можно считать непрерывным. При этом $q_k = \rho dV$, где ρ – плотность зарядов. Тогда последнее равенство можно представить в виде

$$\delta A = \delta t \int_V \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (1.105)$$

при этом интегрирование выполняется по произвольному объёму. Выражение (1.105) удобно представить в виде

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \int_V \mathbf{j}_V \cdot \mathbf{E} dV. \quad (1.106)$$

Определим вектор \mathbf{G} и скаляр Q соотношениями

$$\mathbf{G} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.107)$$

$$Q = \int_V \mathbf{j}_c \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV. \quad (1.108)$$

Равенство (1.102) и соотношения (1.106)–(1.108) позволяют представить выражение (1.103) в виде

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial A}{\partial t} - Q - \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.109)$$

Если замкнутая поверхность S представляет собой граничную поверхность полного поля, то поток энергии через граничную поверхность можно пренебречь, что эквивалентно равенству $\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS = 0$. Для непроводящей среды ($\sigma = 0$) величина $Q = 0$. При

этом выражение (1.109) в результате интегрирования принимает вид: $W + A = 0$. Следовательно, в замкнутой системе в непроводящей среде (т.е. при отсутствии потерь энергии) увеличение энергии W в единицу времени определяется работой по переносу зарядов в

течение этого времени. При $\sigma \neq 0$ величина Q , называемая джоулевым теплом, определяет количество теплоты, выделяемой в единицу времени в проводнике из-за наличия электрического сопротивления. Если замкнутая поверхность не охватывает собой полного поля, то поле достигает этой поверхности и в соответствии с выражением (1.109) происходит дополнительное уменьшение энергии, т.е. поверхностный интеграл в выражении (1.109) определяет поток энергии через эту поверхность. Таким образом, величина W определяет полную энергию, заключённую внутри объёма.

В непроводящей среде, свободной от зарядов и токов, в соответствии с выражением (1.109) имеем

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V (w_e + w_m) dV = \frac{d}{dt} \int_V w dV = - \int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Следовательно, величину w_e можно отождествить с плотностью энергии электрического поля, а w_m – с плотностью энергии магнитного поля.

Плотность потока энергии электромагнитного поля определяется так называемым вектором Умова-Пойнтинга, равным

$$\mathbf{G} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.107)$$

Заметим, что впервые вектор плотности потока любого вида энергии был введён в 1874 году русским физиком Николаем Алексеевичем Умовым.

Направление вектора Умова-Пойнтинга перпендикулярно векторам \mathbf{E} и \mathbf{H} и совпадает с направлением распространения электромагнитной энергии, а его величина равна энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору \mathbf{G} .

В оптике наибольший интерес представляет усреднённый вектор Умова-Пойнтинга. Величина его служит мерой интенсивности света, а направление указывает направление распространения света.

1.6. Электромагнитное поле на границе раздела двух сред

Любая оптическая система представляет собой систему поверхностей раздела двух сред с различными свойствами, характеризующимися величинами ϵ и μ . Уравнения электромагнитного поля можно применить к каждой среде с учётом значений электрических и магнитных параметров, характеризующих каждую среду. Однако, необходимо иметь систему граничных условий,

которые связывали бы на границе раздела двух сред два решения уравнений электромагнитного поля, каждое из которых справедливо в отдельности по одну сторону от границы раздела. Выведем соотношения, описывающие переход электромагнитного поля через такую поверхность раздела.

Заменим поверхность раздела сред S тонким переходным слоем, внутри которого ϵ и μ быстро, но непрерывно меняются от значений, характеризующих среду с одной стороны поверхности, до значений с другой её стороны. Внутри этого слоя построим цилиндр, ограниченный с боков частоколом нормалей к поверхности S в пределах малых площадок δS_1 и δS_2 , параллельных поверхности S и служащих основаниями цилиндра с каждой её стороны, как показано на рис.1.9. Поскольку во всём цилиндре вектор \mathbf{B} и его производные непрерывны, мы можем применить теорему Остроградского-Гаусса к интегралу от $\text{div}\mathbf{B}$, взятому по объёму цилиндра, в виде:

$$\oint_V \text{div}\mathbf{B} dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.110)$$

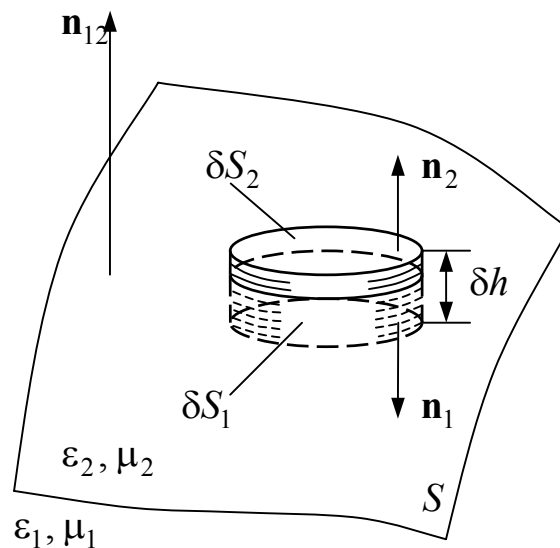


Рис.1.9. К выводу граничных условий для нормальных компонентов \mathbf{B} и \mathbf{D}

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали. Заметим, что второй интеграл берётся по всей поверхности цилиндра. Так как площадки dS_1 и dS_2 предполагаются малыми, можно считать, что на них вектор магнитной индукции \mathbf{B} принимает постоянные значения \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 . Тогда выражение (1.110) можно заменить выражением вида:

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \delta S_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \delta S_2 + \text{âêëââ} \hat{\text{ò}} \hat{\text{ñ}} \hat{\text{ò}} \hat{\text{â}} \hat{\text{î}} \hat{\text{ê}} = 0. \quad (1.111)$$

Если высота цилиндра dh стремится к нулю, то переходный слой переходит в поверхность, а вклад от стенок цилиндра исчезает при

условии, что отсутствует поверхностный поток магнитной индукции. Такой поток никогда не наблюдается и, следовательно, в пределе имеем

$$(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \delta S = 0, \quad (1.112)$$

где δS – площадь поверхности пересечения рассматриваемого цилиндра с поверхностью S . Если \mathbf{n}_{12} – единичный вектор нормали, направленный из первой среды во вторую, то $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_{12}$, а $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_{12}$. При этом соотношение (1.112) принимает вид:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (1.113)$$

т.е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции непрерывна на поверхности раздела двух сред.

Подобным образом можно исследовать электрическое поле на границе раздела двух сред. Однако, в этом случае при наличии зарядов следует учесть выражение (1.10). При этом аналогично выражению (1.110) получаем

$$\oint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \oint_V \rho dV. \quad (1.114)$$

При слиянии площадок δS_1 и δS_2 объёмная плотность зарядов ρ переходит в поверхностную плотность зарядов $\tilde{\rho}$, определяемую соотношением

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = \int_S \tilde{\rho} dS. \quad (1.115)$$

Аналогично объёмная плотность тока \mathbf{j} переходит в поверхностную плотность тока $\tilde{\mathbf{j}}$:

$$\lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_V \mathbf{j} dV = \int_S \tilde{\mathbf{j}} dS. \quad (1.116)$$

Если площадку δS и высоту δh выбрать достаточно малыми, то выражение (1.114) можно заменить выражением вида:

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \delta S_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \delta S_2 = 4\pi \tilde{\rho} \delta S.$$

Вклад от стенок при уменьшении высоты δh уменьшается, приближаясь к нулю и поэтому в пределе при $\delta h \rightarrow 0$ получаем

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi \tilde{\rho}, \quad (1.117)$$

т.е. при наличии на поверхности раздела сред слоя с поверхностной плотностью заряда $\tilde{\rho}$ нормальный компонент вектора электрического смещения при переходе через эту поверхность испытывает скачок, равный $4\pi \tilde{\rho}$.

Исследуем теперь поведение тангенциальной составляющей векторов электрического и магнитного полей. Заменяем поверхность

раздела сред переходным слоем, а цилиндр, показанный на рис.1.9, прямоугольной площадкой, стороны которой параллельны и перпендикулярны поверхности S , как показано на рис.1.10.

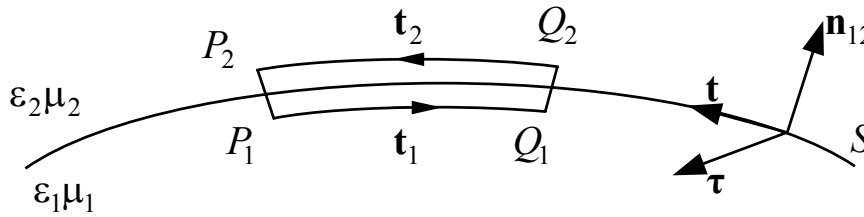


Рис.1.10. К выводу граничных условий для тангенциальных компонентов **Е** и **Н**

Пусть $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости рассматриваемого прямоугольника. Используя уравнение (1.13), в соответствии с теоремой Стокса имеем

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} dS = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \int_S \mathbf{V} \times \boldsymbol{\tau} dS. \quad (1.118)$$

Здесь первый и третий интегралы берутся по площади прямоугольника, а второй – вдоль его границ. Если длины $P_1Q_1 = \delta l_1$ и $P_2Q_2 = \delta l_2$ малы, то на каждой из этих сторон вектор \bar{E} можно заменить постоянными векторами \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . При этом и вектор $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\tau}$ можно считать постоянным. Тогда выражение (1.118) можно заменить выражением вида:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \delta l_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \delta l_2 + \hat{\epsilon}\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}\hat{\epsilon} \hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath}\hat{\imath} = -\frac{1}{\tilde{n}} \mathbf{V} \times \boldsymbol{\tau} \delta l \delta h, \quad (1.119)$$

где δl – линейный элемент, по которому прямоугольник пересекается с поверхностью раздела, \mathbf{t} – единичный вектор касательной к поверхности.

Если теперь постепенно уменьшать высоту прямоугольника, то вклад от концов P_1P_2 и Q_1Q_2 будет уменьшаться, приближаясь к нулю. Предположим также, что вектор $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\tau}$ при этом остаётся конечным. Тогда в пределе при $\delta h \rightarrow 0$ получим

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2) \delta l = 0. \quad (1.120)$$

В соответствии с рисунком

$$\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t} = -\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}_{12}, \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}_{12}.$$

При этом выражение (1.120) принимает вид:

$$\boldsymbol{\tau} [\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0.$$

Так как ориентация прямоугольника, а, следовательно, и единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, произвольна, то

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.121)$$

т.е. тангенциальная составляющая электрического вектора непрерывна на поверхности раздела двух сред.

Аналогичный анализ поведения тангенциальной составляющей магнитного вектора позволяет получить выражение, аналогичное выражению (1.119), вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t}_1 \delta l_1 + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t}_2 \delta l_2 + \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{i}}_0 \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{a}} &= \\ = \frac{1}{\tilde{n}} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\tau} \delta l \delta h + \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}} \cdot \boldsymbol{\tau} \delta l. \end{aligned} \quad (1.122)$$

В результате предельного перехода ($\delta h \rightarrow 0$) получаем

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}}. \quad (1.123)$$

Итак, из полученных соотношений следует, что векторы напряжённости электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей и векторы электрической \mathbf{D} и магнитной \mathbf{B} индукции удовлетворяют следующим граничным условиям:

1. Тангенциальные составляющие напряжённости электрического поля непрерывны, т.е. $\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2}$, на границе раздела двух сред, где физические свойства среды, характеризуемые значениями ε и μ , изменяются скачком.

2. Нормальные компоненты вектора электрической индукции непрерывны, т.е. $\mathbf{D}_{n_1} = \mathbf{D}_{n_2}$, при отсутствии поверхностных зарядов на границе раздела сред.

3. Тангенциальные составляющие вектора напряжённости магнитного поля непрерывны, т.е. $\mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{H}_{t_2}$, при отсутствии поверхностных токов на границе раздела сред.

4. Нормальные составляющие вектора магнитной индукции непрерывны, т.е. $\mathbf{B}_{n_1} = \mathbf{B}_{n_2}$.

1.6.1. Плоская волна на границе раздела двух однородных изотропных сред

Применим соотношения, которым удовлетворяют векторы электромагнитного поля на поверхностях, где физические свойства среды претерпевают разрыв, к исследованию распространения плоской волны, падающей на плоскую поверхность, разделяющую две однородные изотропные среды.

Если на границу раздела двух однородных сред с разными оптическими свойствами падает плоская волна, то она разделяется на

две волны: проходящую во вторую среду и отражённую. Существование двух волн определяется необходимостью соблюдения граничных условий прохождения электромагнитным полем поверхности раздела двух сред. Предположим, что эти волны также являются плоскими, для которых следует определить значения амплитуд и направлений распространения. Индексами i , r и t будем обозначать падающую, отражённую и проходящую (преломлённую) волны.

Плоская волна, распространяющаяся в направлении единичного вектора $\mathbf{s}^{(i)}$, полностью определена, если известно поведение возмущения во времени в одной точке пространства, поскольку, если $\mathbf{F}(t)$ представляет зависимость возмущения от времени в какой-то одной точке, то эта зависимость в другой точке, отстоящей от первой на расстоянии, определяемом вектором \mathbf{r} , будет $\mathbf{F}\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}}{V}\right)$.

Уравнение, определяющее напряжённость $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ электрического поля или индукцию $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ магнитного поля, представим в виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})],$$

где $\mathbf{A}_0 = \mathbf{a} \exp(i\varphi)$, при этом переменная часть фазового множителя в выражении, определяющем гармоническую электромагнитную плоскую волну, равна

$$\tau = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{V} \right),$$

где \mathbf{s} – единичный вектор направления распространения волны; V – скорость (фазовая) распространения волны.

На границе двух сред вторичные поля будут так же изменяться во времени, как и первичное поле падающей волны. Следовательно, если $\mathbf{s}^{(r)}$ и $\mathbf{s}^{(t)}$ – единичные векторы в направлении распространения отражённой и падающей волн, то, приравнявая аргументы трёх волновых функций в произвольной точке $\mathbf{r}(x, y, z)$ на поверхности раздела двух сред, получаем

$$\omega_i \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}}{V_1} \right) = \omega_r \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(r)}}{V_1} \right) = \omega_t \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(t)}}{V_2} \right),$$

где V_1 и V_2 – скорости распространения волн в первой и во второй средах. Чтобы граничные условия соблюдались в любой момент времени, коэффициенты при t в переменной части фазового множителя должны быть одинаковыми для всех трёх волн. Поэтому

частоты отражённой и преломлённой волн равны частоте ω_i падающей волны. При этом

$$t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}}{V_1} = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(r)}}{V_1} = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(t)}}{V_2}. \quad (1.124)$$

Выбрав в качестве поверхности раздела сред плоскость $z = 0$, соотношения (1.124) можно представить в виде:

$$\frac{x s_x^{(i)} + y s_y^{(i)}}{V_1} = \frac{x s_x^{(r)} + y s_y^{(r)}}{V_1} = \frac{x s_x^{(t)} + y s_y^{(t)}}{V_2}. \quad (1.125)$$

Равенства (1.125) должны выполняться для любых значений x и y на поверхности раздела, а поэтому

$$\frac{s_x^{(i)}}{V_1} = \frac{s_x^{(r)}}{V_1} = \frac{s_x^{(t)}}{V_2}, \quad \frac{s_y^{(i)}}{V_1} = \frac{s_y^{(r)}}{V_1} = \frac{s_y^{(t)}}{V_2}. \quad (1.126)$$

Плоскость, определяемая вектором $\mathbf{s}^{(i)}$ и нормалью к поверхности раздела, называется плоскостью падения. Из соотношений (1.126) следует, что и векторы $\mathbf{s}^{(r)}$ и $\mathbf{s}^{(t)}$ лежат в этой плоскости. Считая плоскость xz плоскостью падения и обозначая через θ_i , θ_r и θ_t углы, которые векторы $\mathbf{s}^{(i)}$, $\mathbf{s}^{(r)}$ и $\mathbf{s}^{(t)}$ образует с осью Oz , в соответствии с рис.1.11 имеем

$$\left. \begin{aligned} s_x^{(i)} &= \sin \theta_i, & s_y^{(i)} &= 0, & s_z^{(i)} &= \cos \theta_i; \\ s_x^{(r)} &= \sin \theta_r, & s_y^{(r)} &= 0, & s_z^{(r)} &= \cos \theta_r; \\ s_x^{(t)} &= \sin \theta_t, & s_y^{(t)} &= 0, & s_z^{(t)} &= \cos \theta_t. \end{aligned} \right\} \quad (1.127)$$

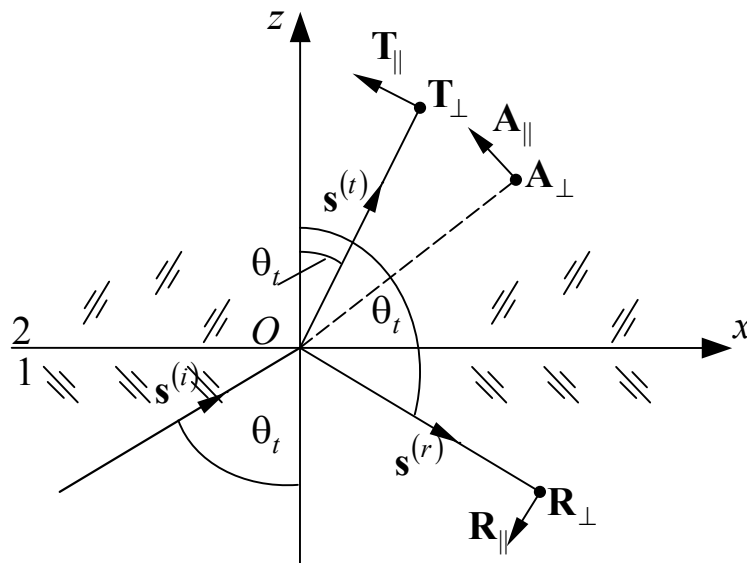


Рис.1.11. Плоская волна на границе раздела двух однородных изотропных сред

Если волна распространяется из первой среды во вторую, то проекция вектора \mathbf{s} на ось Oz положительна, а если в противоположном направлении – то отрицательна. Таким образом,

$$s_z^{(i)} = \cos \theta_i \geq 0, \quad s_z^{(r)} = \cos \theta_r \leq 0, \quad s_z^{(t)} = \cos \theta_t \geq 0. \quad (1.128)$$

Подставив соотношения (1.127) в первую систему равенств (1.126), получаем

$$\frac{\sin \theta_i}{V_1} = \frac{\sin \theta_r}{V_1} = \frac{\sin \theta_t}{V_2}. \quad (1.129)$$

Отсюда следует, что $\sin \theta_r = \sin \theta_i$, при этом, как следует из соотношений (1.128), $\cos \theta_r = -\cos \theta_i$. Следовательно, $\theta_r = \pi - \theta_i$. Последнее соотношение вместе с утверждением, что нормаль $\mathbf{s}^{(r)}$ к отражённой волне лежит в плоскости падения, соответствует закон отражения плоской волны от плоской поверхности раздела двух сред.

Напомним, что в среде, характеризуемой величинами ε и μ , скорость распространения электромагнитной волны $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, где c –

скорость распространения волны в вакууме. Используя соотношение Максвелла, согласно которому показатель преломления среды $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, из соответствующего равенства (1.129) находим, что

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}. \quad (1.130)$$

Следующее отсюда соотношение

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

вместе с утверждением, что нормаль $\mathbf{s}^{(t)}$ к прошедшей волне лежит в плоскости падения, составляет закон преломления (закон Снеллиуса-Декарта) плоской волны на границе раздела двух сред.

Если $n_2 > n_1$, то $n_{12} > 1$. При этом говорят, что оптическая плотность второй среды больше, чем первой. В этом случае, учитывая выражение (1.130), имеем

$$\sin \theta_t = \frac{1}{n_{12}} \sin \theta_i \leq \sin \theta_i.$$

Однако, если вторая среда оптически менее плотная, чем первая (т.е. если $n_{12} < 1$), то угол θ_t приобретает вещественное значение при том условии, что

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{12}} \leq 1.$$

$$\text{При } \frac{\sin \theta_i}{n_{12}} > 1: \cos \theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{12}^2} - 1}.$$

Таким образом, при $n_{12} < 1$ угол θ_t приобретает вещественное значение лишь для таких углов падения θ_i , для которых $\sin \theta_i \leq n_{12}$. При $\sin \theta_i > n_{12}$ наблюдается так называемое полное внутреннее отражение.

1.6.2. Формулы Френеля

Определив направления распространения отражённой и преломлённой волн, определим их амплитуды.

Предположим, что обе среды (однородные и изотропные) обладают нулевой проводимостью и, следовательно, совершенно прозрачны (нет выделения джоулева тепла, а, следовательно, нет и потерь электромагнитной энергии). Их магнитные проницаемости фактически будут отличаться от единицы на пренебрежимо малые величины, а поэтому будем считать, что $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Пусть $\mathbf{E}_i = A \exp(-i\tau_i)$, где A – амплитуда вектора электрического поля падающей волны, которую будем считать комплексной величиной с фазой, равной постоянной части аргумента волновой функции. Переменная её часть имеет вид:

$$\tau_i = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}}{V_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{V_1} \right). \quad (1.131)$$

Разложим каждый вектор на составляющие компоненты: параллельный (с индексом \parallel) и перпендикулярный (с индексом \perp) плоскости падения. Выбор положительных направлений для параллельных и перпендикулярных составляющих компонентов вектора поля показан на рис.1.11. При этом составляющие вектора электрического поля падающей волны в левой системе координат можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(i)} &= -A_{\parallel} \cos \theta_i \exp(-i\tau_i), \\ E_y^{(i)} &= A_{\perp} \exp(-i\tau_i), \\ E_z^{(i)} &= A_{\parallel} \sin \theta_i \exp(-i\tau_i). \end{aligned} \right\} \quad (1.132)$$

Вектор магнитного поля определяется соотношением (1.44), которое при $\mu = 1$ можно представить в виде:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon} \mathbf{s} \times \mathbf{E}.$$

Выразив вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} через их проекции на координатные оси, получаем

$$H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k} = \sqrt{\varepsilon} (s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} + s_z \mathbf{k}) \times (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}).$$

При этом

$$H_x^{(i)} = \sqrt{\varepsilon_1} (s_y^{(i)} E_z^{(i)} - s_z^{(i)} E_y^{(i)}),$$

$$H_y^{(i)} = \sqrt{\varepsilon_1} (s_z^{(i)} E_x^{(i)} - s_x^{(i)} E_z^{(i)}),$$

$$H_z^{(i)} = \sqrt{\varepsilon_1} (s_x^{(i)} E_y^{(i)} - s_y^{(i)} E_x^{(i)}).$$

С учётом соотношений (1.127) и (1.132) находим, что составляющие вектора магнитного поля падающей волны в левой системе координат равны

$$H_x^{(i)} = -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} \exp(-i\tau_i),$$

$$H_y^{(i)} = -A_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} \exp(-i\tau_i),$$

$$H_z^{(i)} = A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} \exp(-i\tau_i).$$

Аналогично, если T и R – комплексные амплитуды прошедшей и отражённой волн, то соответствующие составляющие векторов электрического и магнитного полей равны следующим величинам.

Поле прошедшей волны

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(t)} &= -T_{\parallel} \cos \theta_t \exp(-i\tau_t), \\ E_y^{(t)} &= T_{\perp} \exp(-i\tau_t), \\ E_z^{(t)} &= T_{\parallel} \sin \theta_t \exp(-i\tau_t); \\ H_x^{(t)} &= -T_{\perp} \cos \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} \exp(-i\tau_t), \\ H_y^{(t)} &= -T_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_2} \exp(-i\tau_t), \\ H_z^{(t)} &= T_{\perp} \sin \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} \exp(-i\tau_t), \end{aligned} \right\} \quad (1.133)$$

$$\text{где } \tau_t = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(t)}}{V_2} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_t + z \sin \theta_t}{V_2} \right). \quad (1.134)$$

Поле отражённой волны

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(r)} &= R_{\parallel} \cos \theta_r \exp(-i\tau_r), \\ E_y^{(r)} &= R_{\perp} \exp(-i\tau_r), \\ E_z^{(r)} &= -R_{\parallel} \sin \theta_r \exp(-i\tau_r); \\ H_x^{(r)} &= -R_{\perp} \cos \theta_r \sqrt{\varepsilon_1} \exp(-i\tau_r), \\ H_y^{(r)} &= R_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} \exp(-i\tau_r), \\ H_z^{(r)} &= R_{\perp} \sin \theta_r \sqrt{\varepsilon_1} \exp(-i\tau_r), \end{aligned} \right\} \quad (1.135)$$

$$\text{где } \tau_r = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(r)}}{V_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_r + z \sin \theta_r}{V_1} \right). \quad (1.136)$$

Граничные условия (1.121) и (1.123) требуют, чтобы на границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} были непрерывны. Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\left. \begin{aligned} E_x^{(i)} + E_x^{(r)} &= E_x^{(t)}, & H_x^{(i)} + H_x^{(r)} &= H_x^{(t)}, \\ E_y^{(i)} + E_y^{(r)} &= E_y^{(t)}, & H_y^{(i)} + H_y^{(r)} &= H_y^{(t)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.137)$$

при этом условия для нормальных составляющих векторов \mathbf{V} и \mathbf{D} , определяемые выражениями (1.113) и (1.117), естественным образом выполняются. Подставив в соотношения (1.137) соответствующие значения всех составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} и учитывая тот факт, что $\cos \theta_r = \cos(\pi - \theta_i) = -\cos \theta_i$, при $\tau_i = \tau_r = \tau_t$ получаем следующие четыре соотношения

$$\left. \begin{aligned} (A_{\parallel} + R_{\parallel}) \cos \theta_i &= T_{\parallel} \cos \theta_t, \\ A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp}, \\ \sqrt{\varepsilon_1} (A_{\perp} - R_{\perp}) \cos \theta_i &= \sqrt{\varepsilon_2} T_{\perp} \cos \theta_t, \\ \sqrt{\varepsilon_1} (A_{\parallel} - R_{\parallel}) &= \sqrt{\varepsilon_2} T_{\parallel}. \end{aligned} \right\} \quad (1.138)$$

Каждое из уравнений (1.138) содержит составляющие компоненты векторов поля одного типа. Следовательно, волны рассматриваемых двух типов независимы друг от друга. Выразим из уравнений (1.138) составляющие компоненты векторов поля отражённой и прошедшей волн через составляющие компоненты векторов поля падающей волны.

Используя соотношения Максвелла $n = \sqrt{\varepsilon}$ ($\mu = 1$), получаем

$$\left. \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\ T_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1.139)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1.140)$$

Используя полученные соотношения и материальные уравнения, легко убедиться в том, что граничные условия (1.113) и (1.117) для нормальных составляющих векторов поля соблюдаются.

Соотношения (1.139) и (1.140) называются формулами Френеля. В несколько ином менее общем виде эти формулы были получены Френелем в 1823 году.

Умножим числитель и знаменатель первого из уравнений (1.139) на $\sin \theta_t$:

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i \sin \theta_t}{n_2 \sin \theta_t \cos \theta_i + n_1 \sin \theta_t \cos \theta_t} A_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} A_{\parallel} = \\ &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_t \sin \theta_i (\sin \theta_i \cos \theta_t + \cos \theta_i \sin \theta_t) + \cos \theta_t \cos \theta_i (\sin \theta_i \cos \theta_t + \cos \theta_i \sin \theta_t)} \times \\ &\times A_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуется второе из уравнений (1.139).

Теперь умножим на $\sin \theta_t$ числитель и знаменатель первого из уравнений (1.140):

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{n_2 \sin \theta_t \cos \theta_i - n_1 \sin \theta_t \cos \theta_t}{n_2 \sin \theta_t \cos \theta_i + n_1 \sin \theta_t \cos \theta_t} A_{\parallel} = -\frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} A_{\parallel} = \\ &= \frac{\sin \theta_t \sin \theta_i (\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t) + \cos \theta_t \cos \theta_i (\cos \theta_t \sin \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \times \\ &\times A_{\parallel} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t) \cos(\theta_i + \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel} = -\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуется второе из уравнений (1.140). В результате преобразований уравнения (1.139) и (1.140) приобретают обычно принятую форму:

$$\left. \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel}, \\ T_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}; \end{aligned} \right\} \quad (1.141)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1.142)$$

Так как углы θ_i и θ_t вещественны (случай полного внутреннего отражения пока исключаем), то тригонометрические функции, стоящие в правой части уравнений (1.141) и (1.142), также вещественны. Следовательно, фаза каждого компонента отражённой и прошедшей волн либо равна фазе соответствующего компонента падающей волны, либо отличается от неё на π . Так как знаки T_{\parallel} и T_{\perp} совпадают со знаками A_{\parallel} и A_{\perp} , фаза прошедшей волны равна фазе падающей. При нормальном падении волны угол $\theta_i = 0$, а, следовательно, и угол $\theta_t = 0$. При этом соотношения (1.141) и (1.142) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2}{n+1} A_{\parallel}, \\ T_{\perp} &= \frac{2}{n+1} A_{\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (1.143)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{n-1}{n+1} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= -\frac{n-1}{n+1} A_{\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (1.144)$$

где $n = \frac{n_2}{n_1}$. При этом различие между параллельным и перпендикулярным компонентами исчезает. Из соотношений (1.134) следует, что фаза отражённой волны отличается от падающей на π . С другой стороны, в случае отражённой волны фаза зависит от относительных значений углов θ_i и θ_t . Если оптическая плотность второй среды больше, чем первой (т.е. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), то $\theta_t < \theta_i$. При этом, согласно соотношениям (1.142), знаки R_{\parallel} и R_{\perp} отличны от знаков A_{\parallel} и A_{\perp} , т.е. фазы падающей и отражённой волн отличаются на π . При тех же обстоятельствах значение $\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)$ положительно, но $\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)$ в знаменателе выражения, определяющего величину R_{\parallel} , при $\theta_i + \theta_t > \frac{\pi}{2}$ становится отрицательным; в этом случае фазы компонентов R_{\parallel} и A_{\parallel} совпадают. Заметим, что при $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ величина $R_{\parallel} = 0 \cdot A_{\parallel} = 0$.

1.6.3. Коэффициенты отражения и пропускания света на границе раздела двух сред

Интенсивность света (плотность потока энергии электромагнитного поля) в соответствии с выражением (1.107) равна

$$G = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 = \frac{cn}{4\pi\mu} E^2.$$

Предположим, что обе среды (однородные и изотропные) обладают нулевой проводимостью и, следовательно, совершенно прозрачны. Их магнитные проницаемости практически будут отличаться от единицы на пренебрежимо малые величины, что позволяет принять $\mu_1 = \mu_2 = 1$. При этом интенсивность света равна

$$G = \frac{cn}{4\pi} E^2. \quad (1.145)$$

Поэтому световой поток падающей волны, который падает на единицу площади поверхности раздела сред за одну секунду, равен

$$J^{(i)} = G^{(i)} \cos \theta_i = \frac{cn_1}{4\pi} |A|^2 \cos \theta_i.$$

Световой поток отражённой и преломлённой волн, покидающей единицу площади поверхности раздела за одну секунду, определяется подобными же выражениями, а именно:

$$J^{(r)} = G^{(r)} \cos \theta_i = \frac{cn_1}{4\pi} |R|^2 \cos \theta_i;$$

$$J^{(t)} = G^{(t)} \cos \theta_t = \frac{cn_2}{4\pi} |T|^2 \cos \theta_t.$$

Отношения

$$\rho = \frac{J^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{|R|^2}{|A|^2} \quad (1.146)$$

и

$$\tau = \frac{J^{(t)}}{J^{(i)}} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \frac{|T|^2}{|A|^2} \quad (1.147)$$

называют коэффициентами отражения и пропускания соответственно.

Здесь $|A|^2 = |A_{\parallel}|^2 + |A_{\perp}|^2$, $|R|^2 = |R_{\parallel}|^2 + |R_{\perp}|^2$, $|T|^2 = |T_{\parallel}|^2 + |T_{\perp}|^2$.

Используя выражения (1.141) и (1.142), получаем

$$\begin{aligned}
 |A|^2(\rho + \tau) &= |R|^2 + \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |T|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)} |A_{\parallel}|^2 + \\
 &+ \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} |A_{\perp}|^2 + 4 \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \frac{\sin^2 \theta_t \cos^2 \theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} |A_{\parallel}|^2 + \\
 &+ 4 \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \frac{\sin^2 \theta_t \cos^2 \theta_i}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} |A_{\perp}|^2 = |A_{\parallel}|^2 + |A_{\perp}|^2.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\rho + \tau = 1$. Этот результат непосредственно следует и из закона сохранения энергии.

1.6.4. Поляризация света на поверхности раздела двух сред

Отражение и пропускание света на поверхности раздела двух сред зависит от поляризации падающей волны. Определим коэффициенты отражения и пропускания света, поляризованного параллельно и перпендикулярно плоскости падения.

Пусть вектор \mathbf{E} падающей волны образует с плоскостью падения угол α_i . Тогда

$$A_{\parallel} = A \cos \alpha_i, \quad A_{\perp} = A \sin \alpha_i.$$

Пусть, далее,

$$J_{\parallel}^{(i)} = \frac{cn_1}{4\pi} |A_{\parallel}|^2 \cos \theta_i = J^{(i)} \cos^2 \alpha_i,$$

$$J_{\perp}^{(i)} = \frac{cn_1}{4\pi} |A_{\perp}|^2 \cos \theta_i = J^{(i)} \sin^2 \alpha_i;$$

$$J_{\parallel}^{(r)} = \frac{cn_1}{4\pi} |R_{\parallel}|^2 \cos \theta_i,$$

$$J_{\perp}^{(r)} = \frac{cn_1}{4\pi} |R_{\perp}|^2 \cos \theta_i.$$

Тогда

$$\rho = \frac{J^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{J_{\parallel}^{(r)} + J_{\perp}^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{J_{\parallel}^{(r)}}{J_{\parallel}^{(i)}} \cos^2 \alpha_i + \frac{J_{\perp}^{(r)}}{J_{\perp}^{(i)}} \sin^2 \alpha_i = \quad (1.148)$$

$$= \rho_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha_i,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\parallel} &= \frac{J_{\parallel}^{(r)}}{J_{\parallel}^{(i)}} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)} \\ \rho_{\perp} &= \frac{J_{\perp}^{(r)}}{J_{\perp}^{(i)}} = \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.149)$$

Подобным же образом получаем

$$\tau = \frac{J^{(t)}}{J^{(i)}} = \tau_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \tau_{\perp} \sin^2 \alpha_i, \quad (1.150)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\parallel} &= \frac{J_{\parallel}^{(t)}}{J_{\parallel}^{(i)}} = \frac{n_2 \cos \theta_t |T_{\parallel}|^2}{n_1 \cos \theta_i |A_{\parallel}|^2} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} \\ \tau_{\perp} &= \frac{J_{\perp}^{(t)}}{J_{\perp}^{(i)}} = \frac{n_2 \cos \theta_t |T_{\perp}|^2}{n_1 \cos \theta_i |A_{\perp}|^2} = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.151)$$

Легко убедиться, что и в этом случае

$$\rho_{\parallel} + \tau_{\parallel} = 1, \quad \rho_{\perp} + \tau_{\perp} = 1.$$

При нормальном падении волны различие между параллельным и перпендикулярным компонентами исчезает, при этом, используя соотношения (1.143), (1.144), (1.146) и (1.147), получаем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \\ \tau &= \frac{4n}{(n+1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.152)$$

Заметим, что $\lim_{n \rightarrow 1} \rho = 0$, $\lim_{n \rightarrow 1} \tau = 1$. Вполне очевидно, что аналогичные результаты получаются и для предельных значений $R_{\parallel}, T_{\parallel}$ и R_{\perp}, T_{\perp} .

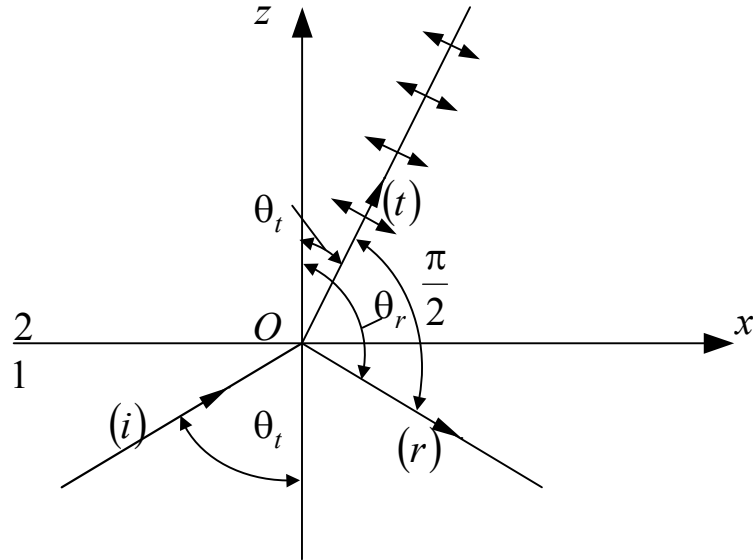


Рис.1.12. К определению угла полной поляризации (угла Брюстера)

Весьма важное явление наблюдается при $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\text{tg}(\theta_i + \theta_t) = \infty$, а, следовательно, в соответствии с первым из выражений (1.149), величина $\rho_{\parallel} = 0$. Как следует из рис.1.12, при $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ отражённый и преломлённый лучи перпендикулярны друг другу. Из закона преломления следует, что

$$n_2 \sin \theta_t = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i \right) = n_2 \cos \theta_i = n_1 \sin \theta_i.$$

При этом

$$\text{tg} \theta_i = n. \quad (1.153)$$

Угол θ_i , определяемый этим выражением, называется углом полной поляризации или углом Брюстера. Его важность впервые была отмечена Давидом Брюстером в 1815 году. Если свет падает под этим углом, электрический вектор отражённой волны не имеет составляющей в плоскости падения.

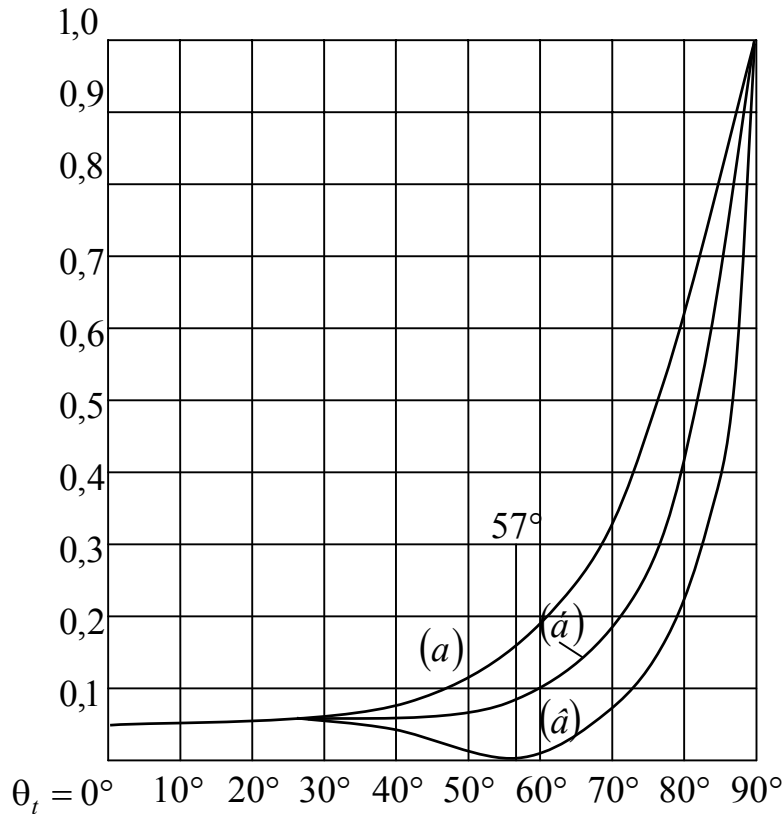


Рис.1.13. Зависимость отражательной способности от угла падения:

$$(a) - \rho_{\perp}; (\hat{b}) - \frac{1}{2}(\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}); (b) - \rho_{\parallel}$$

Зависимость коэффициента отражения света поверхностью стекла (стекло марки БК6 с показателем преломления $n_d = 1,53998$) от угла падения θ_i показана на рис.1.13. Здесь представлены кривые: (а) – $\rho_{\perp} = \rho_{\perp}(\theta_i)$, (б) – $\frac{1}{2}(\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}) = \rho_{\parallel+\perp}(\theta_i)$, (в) – $\rho_{\parallel} = \rho_{\parallel}(\theta_i)$. Значения соответствующих величин, вычисленные с использованием формул (1.149), приведены в таблице:

θ_i	0	20°	45°	57°	70°	80°	90°
Кривая (а)	0,045	0,053	0,101	0,165	0,316	0,554	1,000
Кривая (б)	0,045	0,045	0,056	0,083	0,178	0,394	1,000
Кривая (в)	0,045	0,038	0,010	0	0,041	0,234	1,000

Для кривой (б) имеем

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}) = \rho_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha_i = \rho_{\parallel} + (\rho_{\perp} - \rho_{\parallel}) \sin^2 \alpha_i.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}(\rho_{\perp} - \rho_{\parallel}) = (\rho_{\perp} - \rho_{\parallel}) \sin^2 \alpha_i.$$

При этом $\sin^2 \alpha_i = \frac{1}{2}$. Таким образом, кривая (б) на рис.1.13 соответствует углу $\alpha_i = 45^\circ$.

Направление колебаний в естественном свете быстро изменяется беспорядочным, случайным образом. Соответствующее значение коэффициента отражения ρ можно получить путём усреднения по всем направлениям. Среднее значение функции $\sin^2 \alpha$ равно:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha_{cp} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha d\alpha = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} d(\cos \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Среднее значение функции $\cos^2 \alpha$ равно:

$$\cos^2 \alpha_{cp} = 1 - \sin^2 \alpha_{cp} = \frac{1}{2}.$$

Так как средние значения $\sin^2 \alpha$ и $\cos^2 \alpha$ равны $\frac{1}{2}$, то для средних значений $J_{\parallel}^{(i)}$ и $J_{\perp}^{(i)}$ получаем

$$\mathbf{J}_{\parallel}^{(i)} = \mathbf{J}_{\perp}^{(i)} = \frac{1}{2} J^{(i)}. \quad (1.154)$$

Однако, для отражённого света оба компонента в общем случае неодинаковы. Действительно, используя соотношения (1.154), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\parallel}^{(r)} &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{J}_{\parallel}^{(r)}}{\mathbf{J}_{\parallel}^{(i)}} J^{(i)} = \frac{1}{2} \rho_{\parallel} J^{(i)}, \\ \mathbf{J}_{\perp}^{(r)} &= \frac{1}{2} \frac{\mathbf{J}_{\perp}^{(r)}}{\mathbf{J}_{\perp}^{(i)}} J^{(i)} = \frac{1}{2} \rho_{\perp} J^{(i)}. \end{aligned}$$

При этом коэффициент отражения определится выражением вида:

$$\rho = \frac{\mathbf{J}^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{\mathbf{J}_{\parallel}^{(r)} + \mathbf{J}_{\perp}^{(r)}}{J^{(i)}} = \frac{1}{2} (\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}), \quad (1.155)$$

т.е. и в этом случае зависимость коэффициента отражения от угла θ_i будет описываться кривой (б) на рис.1.13.

В общем случае отражённый свет частично поляризован. Степень его поляризации P можно определить выражением вида:

$$P = \left| \frac{\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}}{\rho_{\parallel} + \rho_{\perp}} \right|.$$

Учитывая формулу (1.155), это выражение можно представить в виде:

$$P = \frac{1}{2\rho} \left\{ \left| \rho_{\parallel} - \rho_{\perp} \right| \right\}.$$

Выражением в фигурных скобках определяют иногда поляризованную часть отражённого света.

Аналогичные соотношения можно получить и для проходящего света. Можно показать, что для естественного света также справедливо равенство: $\rho + \tau = 1$.

В случае линейно поляризованного падающего света отражённый и прошедший свет остаётся линейно поляризованным, так как их фазы либо не изменяются, либо изменяются на π . Однако, направления колебаний в отражённом и проходящем свете изменяются относительно направления колебаний в падающем свете в противоположные стороны. Покажем это.

Угол α между плоскостью колебаний и плоскостью падения, называемый азимутом колебания, будем считать положительным, если плоскость колебаний поворачивается по часовой стрелке вокруг направления распространения, как показано на рис.1.14. Можно предположить, что азимут колебания изменяется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до

$\frac{\pi}{2}$. Для падающей, отражённой и прошедшей волн электрического поля имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}}, \operatorname{tg} \alpha_r = \frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}, \operatorname{tg} \alpha_t = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}.$$

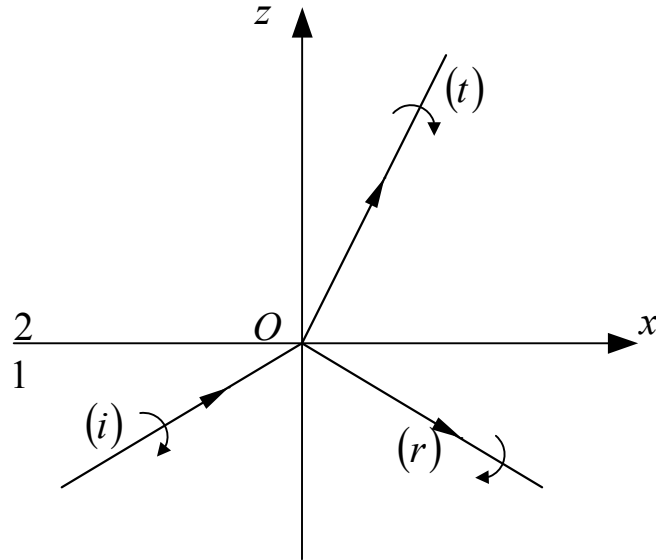


Рис.1.14. К определению знаков азимутальных углов

Используя формулы Френеля (1.141) и (1.42), получаем

$$tg\alpha_r = \frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} tg\alpha_i, \quad (1.156)$$

$$tg\alpha_t = \cos(\theta_i - \theta_t) tg\alpha_i. \quad (1.157)$$

Так как $0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta_t < \frac{\pi}{2}$ (при $n > 1$), то

$$|tg\alpha_r| \geq |tg\alpha_i|, \quad (1.158)$$

$$|tg\alpha_t| \leq |tg\alpha_i|. \quad (1.159)$$

Знак равенства в соотношении (1.156) справедлив лишь при нормальном или скользющем падении света ($\theta_i = \theta_t = 0$ или $\theta_i = \frac{\pi}{2}$), а в соотношении (1.157) – лишь при нормальном падении. Из неравенств (1.156) и (1.157) следует, что при отражении угол между плоскостью колебаний и плоскостью падения увеличивается, а при преломлении он уменьшается.

В том случае, когда угол падения равен углу Брюстера, т.е. при $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, в соответствии с формулой (1.156) $tg\alpha_r = \infty$ при любом значении угла α_i . Из закона Брюстера следует, что свет поляризуется при падении его на границу раздела двух сред под углом Брюстера. Однако, доля отражённого при этом света сравнительно мала. Поляризовать падающий свет без изменения направления его распространения можно с помощью стопы тонких плоскопараллельных пластинок.

Используя выражения (1.151), находим, что отношение интенсивности двух компонент волны после прохождения через обе поверхности пластинки определяется формулой вида:

$$\left(\frac{\tau_{\perp}}{\tau_{\parallel}}\right)^2 = \cos^4(\theta_i - \theta_t) < 1.$$

Таким образом, при выходе из пластинки параллельный компонент преобладает над перпендикулярным, причём степень поляризации тем больше чем больше угол θ_i . Если угол θ_i равен углу

Брюстера, то $\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_i$, а $\operatorname{tg}\theta_i = n$; при этом получаем

$$\left(\frac{\tau_{\perp}}{\tau_{\parallel}}\right)^2 = \sin^4 2\theta_i = \left(\frac{2\operatorname{tg}\theta_i}{1 + \operatorname{tg}^2\theta_i}\right)^4 = \left(\frac{2n}{1 + n^2}\right)^4.$$

При $n_d = 1,56889$ (стекло марки BK10) получаем $\left(\frac{\tau_{\perp}}{\tau_{\parallel}}\right)^2 \cong 0,675$.

Следовательно, если свет проходит, например, через пять пластинок, то это отношение равно $0,675^5 \cong 0,14$.

История открытия поляризованного света весьма интересна. Двойное лучепреломление, которое возникает при прохождении света через кристалл исландского шпата, впервые наблюдал датчанин Эразм Бартолини в 1669 году. Х.Гюйгенс подробно исследовал это явление и описал его закономерности с помощью весьма остроумной, хотя и формальной, теории в 1690 году. Первое в истории науки феноменологическое определение поляризации света дал И.Ньютон. Он же ввёл понятие обыкновенного и необыкновенного лучей. Сам термин "поляризация света" был введён французским физиком Э.Малюсом, который более столетия спустя после работ Х.Гюйгенса открыл явление поляризации света при отражении от поверхности стекла и воды.

Двойное преломление света в кристаллах можно использовать для превращения естественного света в поляризованный. Сами расщепившиеся в кристалле компоненты линейно поляризованы. Для разделения образовавшихся пучков лучей В.Николь впервые предложил остроумное устройство, использующее различие показателей преломления для этих лучей. Оно получило название призмы Николя. Сегодня различных поляризационных призм существует довольно много. Однако, призма Николя сыграла в оптике

большую роль и стала настолько популярной, что сегодня "Николь" и "поляризационная призма" – синонимы.

В настоящее время наиболее удобный метод получения поляризованного света заключается в использовании так называемых поляроидных плёнок. Их действие основано на свойстве, известном как дихроизм. Вещества, обладающие этим свойством, имеют различные коэффициенты поглощения для света, поляризованного в различных направлениях. Например, можно изготовить плёнки из поливинилового спирта с внедрённым иодом, которые пропускают почти 80% света, поляризованного в одной плоскости, и менее 1% света, поляризованного в перпендикулярном направлении.

1.6.5. Полное внутреннее отражение

При распространении света из оптически более плотной среды в среду с меньшей оптической плотностью, т.е. когда

$$n = n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} < 1,$$

$\sin \theta_t = 1$ при $\sin \theta_i = n_{12}$, при этом $\theta_t = 90^\circ$, а направление распространения света совпадает с касательной к поверхности раздела. Если величина угла θ_i превышает предельное значение ($\sin \theta_i > n_{12}$), то свет не входит во вторую среду. Весь падающий свет отражается обратно в первую среду, т.е. в этом случае наблюдается полное внутреннее отражение. Таким образом, поток энергии через границу раздела двух сред отсутствует, однако, тем не менее, электромагнитное поле во второй среде не равно нулю. Действительно, если в фазовом множителе прошедшей волны, определяемом выражением (1.134), положить

$$\sin \theta_t = \frac{1}{n} \sin \theta_i, \quad \cos \theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1}, \quad (1.160)$$

то получим

$$\exp(-i\tau_t) = \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x \sin \theta_i}{nV_2}\right)\right] \exp\left[\mu \frac{\omega z}{V_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1}\right],$$

где $n = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$.

В результате имеем

$$E^{(t)} = T \exp(-i\tau_t) = \tilde{T} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{x \sin \theta_i}{nV_2}\right)\right], \quad (1.161)$$

где $\tilde{T} = T \exp\left[\mu \frac{\omega z}{V_2} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n^2} - 1}\right]$ при $n < 1$.

Выражение (1.161) описывает неоднородную волну, которая распространяется вдоль поверхности раздела сред в плоскости падения (т.е. в направлении оси x) и меняется экспоненциально с изменением расстояния z от этой поверхности. Напомним, что волна называется неоднородной, если поверхности постоянной амплитуды не совпадают с поверхностями постоянной фазы.

При положительном знаке перед корнем в выражении (1.161) при увеличении расстояния z от поверхности амплитуда росла бы неограниченно, что противоречит опыту. При отрицательном знаке амплитуда очень быстро уменьшается с глубиной проникновения z , причём $\frac{\omega z}{V_2} = 2\pi\nu \frac{n}{c} z = 2\pi \frac{n}{\lambda_0} z = 2\pi \frac{z}{\lambda}$, т.е. эффективная глубина проникновения порядка длины волны.

Экспериментальная проверка наличия возмущения во второй (менее плотной) среде представляет довольно трудную задачу, поскольку любое устройство, используемое для обнаружения возмущения, будет нарушать граничные условия. Грубое подтверждение можно получить, если поместить вторую преломляющую среду на расстоянии около четверти длины волны от поверхности раздела, на которой происходит полное внутреннее отражение, и наблюдать проникновение излучения во вторую среду. И, тем не менее, проникновение поля во вторую (менее плотную) среду наблюдалось в очень тонких опытах Л.И.Мандельштама ещё 1914 году.

Чтобы применить формулы Френеля (1.142) к случаю полного внутреннего отражения, перепишем их в виде:

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= -\frac{\sin \theta_i \cos \theta_t - \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_i \cos \theta_t + \sin \theta_t \cos \theta_i} A_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1.162)$$

Подставив в эти выражения значения величин, определяемых формулами (1.160) (при положительном знаке перед квадратным корнем), получаем

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= -\frac{n^2 \cos \theta_i - i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i + i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} A_{\parallel}, \\ R_{\perp} &= \frac{\cos \theta_i - i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i + i\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} A_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (1.163)$$

Следовательно,

$$|R_{\parallel}| = |A_{\parallel}|, \quad |R_{\perp}| = |A_{\perp}|, \quad (1.164)$$

т.е. для каждого компонента интенсивность света, отражённого при полном внутреннем отражении, равна интенсивности падающего света. Таким образом, хотя во второй среде поле отлично от нуля, но поток энергии через поверхность отсутствует.

Можно показать, что хотя в общем случае компонент вектора Умова-Пойнтинга в направлении, нормальном к границе, конечен, его значение, усреднённое по времени, равно нулю. Это означает, что не существует постоянного потока во вторую среду, а энергия течёт туда и обратно.

И, наконец, определим изменение фаз компонент отражённой и падающей волн. На основании соотношений (1.164) можно принять, что

$$\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}} = \exp(i\delta_{\parallel}), \quad \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}} = \exp(i\delta_{\perp}).$$

Согласно соотношениям (1.163) каждое из отношений $\frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}$ и $\frac{R_{\perp}}{A_{\perp}}$

определяется выражением, имеющим форму $\psi(\psi^*)^{-1}$. Следовательно, если α – аргумент ψ (т.е. $\psi = a \exp(i\alpha)$, где a и α вещественны), то $\exp(i\delta) = \psi(\psi^*)^{-1} = \exp(2i\alpha)$, т.е. $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{tg} \alpha$, а поэтому

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\parallel} &= -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{n^2 \cos \theta_i}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\perp} &= -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\cos \theta_i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.165)$$

Отсюда следует, что оба компонента испытывают скачок фазы разной величины. Вследствие этого линейно поляризованный свет при полном внутреннем отражении оказывается поляризованным

эллиптически. При этом для относительной разности фаз $\delta = \delta_{\perp} - \delta_{\parallel}$ имеем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\perp} - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\parallel}}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\perp} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\parallel}}.$$

Подставив в это выражение соотношения (1.165) и преобразовав, получаем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{\cos \theta_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}}{\sin^2 \theta_i}. \quad (1.166)$$

Это выражение обращается в нуль при скользющем падении ($\theta_i = \frac{\pi}{2}$) и при падении света под критическим углом $\tilde{\theta}_i$ ($\sin \tilde{\theta}_i = n$).

Между этими двумя углами лежит угол, соответствующий максимуму относительной разности фаз. Он определяется уравнением:

$$\frac{d}{d \theta_i} \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta \right) = \frac{2n^2 - (1+n^2) \sin^2 \theta_i}{\sin^3 \theta_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} = 0.$$

Положив числитель дроби равным нулю, получаем

$$\sin^2 \theta_i = \frac{2n^2}{1+n^2}. \quad (1.167)$$

Подставив это соотношение в выражение (1.166), получаем формулу, определяющую максимальную величину δ_m относительной разности фаз, в виде:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_m = \frac{1-n^2}{2n}. \quad (1.168)$$

Ещё Френелем было показано, что при полном внутреннем отражении можно из линейно поляризованного света получить свет, поляризованный по кругу. Выбирая направление поляризации падающей волны под углом 45° к плоскости падения (т.е. $\alpha_i = 45^\circ$), получаем равные амплитуды компонент: $|A_{\parallel}| = |A_{\perp}|$. Тогда в соответствии с равенствами (1.164) имеем: $|R_{\parallel}| = |R_{\perp}|$. Затем подбираем величины n и θ_i таким образом, чтобы относительная разность фаз δ была равна 90° . Для получения такого значения δ при одном отражении необходимо, чтобы в соответствии с соотношением (1.168)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 = \frac{1-n^2}{2n}.$$

При этом $n = \sqrt{2} - 1 = 0,414$. Отсюда следует, что показатель преломления $n_{21} = \frac{1}{n}$ более плотной среды относительно менее плотной должен быть, по крайней мере, не менее 2,41. Это значение показателя преломления довольно велико, хотя непоглощающие вещества, показатель преломления которых приближается или даже превышает его, существуют.

Френель использовал два полных внутренних отражения в стекле. Когда $n_{21} = 1,51$, то, согласно соотношениям (1.167) и (1.168), максимальная относительная разность фаз $\delta_m = 45^\circ 56'$ получается при угле падения θ_i , равном $51^\circ 20'$. Поэтому в соответствии с уравнением (1.166) значение $\delta = 45^\circ$ можно получить при одном из следующих углов падения:

$$\theta_i = 48^\circ 37', \theta_i = 54^\circ 37'.$$

При этом разность фаз в 90° возникает в результате двух последовательных полных внутренних отражений при любом из приведённых углов. Для получения такой разности фаз применяется стеклянный блок, известный как ромб Френеля, главное сечение которого показано на рис.1.15.

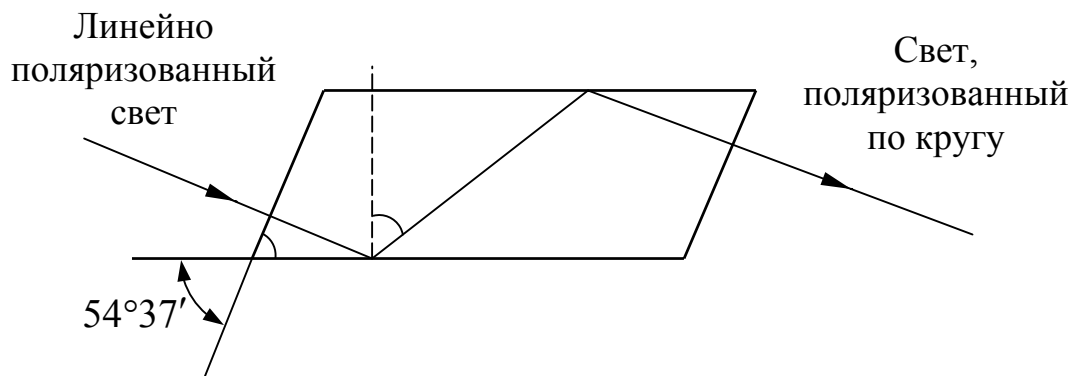


Рис.1.15. Ромб Френеля

Вполне очевидно, что ромб Френеля можно использовать для получения эллиптически поляризованного света. В этом случае азимут падающего (линейно поляризованного) света должен отличаться от 45° . Можно также с помощью ромба Френеля получить линейно поляризованный свет из света, поляризованного эллиптически.

Измерение предельного (критического) значения угла θ_i позволяет удобно и достаточно точно определять показатель преломления, используя равенство $n = \sin \theta_i$. Приборы, используемые для этой цели, называются рефрактометрами.