

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

**А.В. Павлов**

# **ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ОПТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

**Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих  
преобразование Фурье и метод голографии**



**Санкт-Петербург**

**2010**

Павлов А.В. Обработка информации оптическими методами / Учебное пособие. Изд.2, дополненное. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 65 с.

В пособии представлены методические материалы по курсу «Обработка информации оптическими методами». Кратко изложены базовые сведения из области Фурье-оптики, голографии Фурье, вейвлет-анализа и методах обработки основанных на использовании преобразования Фурье и техники голографии, включая обработку информации с использованием хаоса в детерминированных системах.

Для студентов по направлению подготовки бакалавров и магистров 200600 «Фотоника и оптоинформатика» специальностей 200600.62 и 200600.68.02

«Оптические технологии передачи, записи и обработки информации», 200600.62 и 200600.68.03 «Компьютерная фотоника», 200600.62 и 200600.68.01 Материалы фотоники и оптоинформатики

Рекомендовано к печати ученым советом факультета фотоники и оптоинформатики СПбГУ ИТМО протоколом №4 от 14 декабря 2010 г.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2010

© Павлов А.В., 2010

### Список сокращений и обозначений

АКФ	Авто-корреляционная функция
ВКФ	Взаимно-корреляционная функция
ГМ АКФ	Глобальный максимум авто-корреляционной функции
ККФ	Кросс-корреляционная функция
$\lambda$	Длина волны
$\tau$	Пропускание
$\xi, \eta$	Координаты в частотной плоскости
$\nu_x, \nu_y$	Пространственные частоты
$j$	Мнимая единица

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Список сокращений	3
Т.1. Основы оптических информационных технологий, использующих преобразование Фурье и метод голографии	
<u>Тема 1.</u> Оптические информационные технологии, основанные на использовании преобразования Фурье и метода голографии. Базовые математические операции и их реализация оптическими методами.	5
<u>Тема 2.</u> Преобразование Фурье в оптике. Погрешности оптического преобразования Фурье.	17
<u>Тема 3.</u> Преобразования, реализуемые в оптике на основе преобразования Фурье.	35
<u>Тема 4.</u> Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений.	44
Т.2.	
<u>Тема 5.</u> Основы вейвлет-анализа.	5
<u>Тема 6.</u> Основы теории хаоса в детерминированных системах и его применения в задачах обработки информации.	23
<u>Тема 7.</u> Основания оптических логических вентилях и процессоров нечеткой логики	46

## **Тема 1. Преобразование Фурье в оптике и его применение в обработке информации оптическими методами.**

### **Базовые математические операции и их реализация оптическими методами.**

Комплексное представление гармонического сигнала. Известно, что гармонический сигнал может быть представлен в комплексной форме, что удобно с точки зрения формального описания. Это представление базируется на следующих соотношениях:

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0.5(\exp j\varphi + \exp -j\varphi) \\ j \sin \varphi = 0.5(\exp j\varphi - \exp -j\varphi) \end{cases}$$

Откуда

$$\exp j\varphi = \cos \varphi + j \sin \varphi \Rightarrow 2A \cos \varphi = A \operatorname{Re}(\exp j\varphi).$$

Плоская монохроматическая волна в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  может быть представлена в виде

$$s(x, y, z, t) = \nu(x, y, z)u(t),$$

где

$$\nu(x, y, z) = E \exp(j\mathbf{k}\mathbf{r}) \exp(-j\varphi) = E \exp\left[j(k_x x + k_y y + k_z z)\right] \exp(-j\varphi); \Sigma$$

$$u(t) = \exp(-j\omega t)$$

Здесь  $E$  - амплитуда колебаний электрического поля  $\mathbf{k}$  - волновой вектор, его модуль  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega n}{c}$ , где  $\lambda$  - длина волны,  $\omega$  - круговая частота,  $n$  - показатель преломления среды,  $\varphi$  - начальная фаза волны при  $t=0$ . При рассмотрении процессов взаимодействия когерентных полей зависимость от времени не важна и для описания поля достаточно члена

$$E \exp\left[j(k_x x + k_y y + k_z z)\right].$$

Напомним, что

*Комплексная форма записи волновых полей физического смысла не имеет!*

Операция Фурье-преобразования функции  $f(x)$ , удовлетворяющей следующим условиям:

1. Функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема;
2. Функция  $f(x)$  непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в любых конечных пределах;
3. Функция  $f(x)$  не имеет разрывов второго рода.

Фурье-образ функции  $f(x)$  определяется посредством следующего преобразования (преобразование Фурье функции  $f(x)$ )

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi\nu x) dx \quad (1.1)$$

здесь  $\nu$  - пространственная частота,  $\omega$  - круговая пространственная частота  $\omega = 2\pi\nu$ .

Обратное преобразование Фурье связывает Фурье-образ с его прообразом (самой функцией)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(j2\pi\nu x) d\nu \quad (1.2)$$

так как  $F(\nu) d\nu = F(\omega) d\omega$ ,

$$\text{то } F(\nu) = F(\omega) \frac{d\omega}{d\nu} = F(\omega) \frac{2\pi d\nu}{d\nu} = 2\pi F(\omega)$$

$$\text{отсюда } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx. \quad (1.3)$$

Обратим внимание, что формально прямое преобразование Фурье отличается от обратного только знаком под экспонентой. Выбор этого знака не принципиален и является предметом договоренности. Мы выбрали для прямого преобразования Фурье знак «-».

В оптике операция Фурье-преобразования реализуется тонкой положительной линзой – при помещении в ее переднюю фокальную плоскость транспаранта с изображением, освещаемого плоским волновым фронтом, в задней фокальной плоскости формируется Фурье-образ (пространственно-частотный спектр) этого изображения как поля комплексных амплитуд в плоскости изображения.

Прежде, чем перейти к обсуждению физического смысла и погрешности преобразования Фурье, осуществляемого тонкой линзой, рассмотрим ряд вопросов, а именно:

Фурье-преобразование функции двух независимых переменных.

Выше мы определили Фурье-преобразование для одномерной функции, в то время, как в оптике волновые поля (комплексные амплитуды), описываются функциями двух координат. Фурье-образ функции двух независимых переменных, удовлетворяющей вышеприведенным условиям, может быть определен аналогично (1.1), т.е. как функция двух независимых переменных  $\nu_x$  и  $\nu_y$ , называемых пространственными частотами.

$$F(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-j2\pi(v_x x + v_y y)) dx dy \quad (1.4)$$

Обратное преобразование определяется образом, аналогичным (1.2).

Нетрудно видеть, что свойства Фурье-преобразования, определенные для функции одной переменной, справедливы и для функции двух (и более) переменных. В то же время, в общем случае функция  $F(v_x, v_y)$  не сводима к ее сечениям по отдельным координатам, т.е. замена исследования функции двух переменных отдельным исследованием двух функций, каждая из которых функция одной переменной неправомерно. Однако, существуют частные случаи, когда упрощение аналитических выражений возможно – это функции с разделяющимися переменными.

Функцией с разделяющимися переменными (в определенной системе координат) называется такая функция двух независимых переменных, которая может быть представлена в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной. Например, в Декартовой системе координат для функции с разделяющимися переменными  $f(x, y) = f(x)f(y)$  нетрудно убедиться, что и Фурье-образ (спектр) также будет функцией с разделяющимися переменными  $F(v_x, v_y) = F(v_x)F(v_y)$ .

Функцией с осевой симметрией в цилиндрической системе координат называется такая функция с разделяющимися переменными  $f(\rho, \varphi) = f(\rho)f(\varphi)$ , значения которой определяются только радиус-вектором  $\rho$ .

Далее мы рассмотрим наиболее важные примеры Фурье-преобразований в предположении, что переменные в функции разделяются.

Прямоугольный импульс – здесь следует рассмотреть два случая:

1. Применительно к оптике прямоугольная функция от двух координат может рассматриваться как прямоугольная апертура. Таким образом, в данном случае преобразование Фурье описывает дифракцию Фраунгофера на прямоугольной апертуре. Нетрудно видеть, что прямоугольная апертура суть функция с разделяющимися в Декартовых координатах переменными т.е.

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq L_x, |y| \leq L_y \\ 0 & \text{при } |x| > L_x, |y| > L_y \end{cases} = A(x) \cdot A(y)$$

$$F(A(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp(-j\omega_x x) dx = \int_{-L}^L A(x) \exp(-j\omega_x x) dx =$$

$$= \frac{1}{-j\omega_x} \exp(-j\omega_x x) \Big|_{-L_x}^{L_x} = \frac{\exp(j\omega_x L_x) - \exp(-j\omega_x L_x)}{j\omega_x} = \frac{2 \text{Sin}(\omega_x L_x)}{\omega_x} = 2L_x \text{Sinc}(\omega_x L_x)$$

и, аналогично, для Фурье-образа  $F(A(y))$ , т.е. картина дифракции Фраунгофера на прямоугольной апертуре описывается выражением

$$F(A(x, y)) = 2L_x \text{Sinc}(\omega_x L_x) 2L_y \text{Sinc}(\omega_y L_y) \quad (1.5)$$

2. Дифракция Фраунгофера на круглой апертуре. В данном случае мы имеем дело с функцией, обладающей осевой симметрией в цилиндрической системе координат, т.е.  $A(\rho, \varphi) = A(\rho)$ .

$$F(A(\rho, \varphi)) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} A(\rho, \varphi) \exp(-j2\pi k\rho \cos(\varphi - \theta)) \rho d\rho =$$

$$2\pi \int_0^{\infty} A(\rho) \rho d\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi k\rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi$$

Поскольку внутренний интеграл в данном выражении есть функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(2\pi k\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2\pi k\rho \cos(\varphi - \theta)) d\varphi, \text{ то искомым Фурье-образ не}$$

зависит от фазового угла  $\theta$ , но лишь от пространственной частоты  $k$ , т.е.

$$F(k) = 2\pi \int_0^{\infty} A(\rho) J_0(2\pi k\rho) \rho d\rho. \quad (1.6)$$

Этот вид двумерного преобразования Фурье для осесимметричных функций известен также как преобразование Фурье-Бесселя или преобразование Ганкеля нулевого порядка.

$$\text{Если } A(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{if } \rho > \rho_0 \end{cases}, \text{ то } F(k) = 2\pi \int_0^{\rho_0} J_0(2\pi k\rho) \rho d\rho = \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(2\pi k\rho_0)}{2\pi k\rho_0}$$

Необходимо отметить, что, несмотря на внешнюю схожесть функций (1.5) и (2.6), замена одной функции другой, что, к сожалению, иногда встречается, ведет к существенным ошибкам в результатах. Для примера укажем лишь, что радиус первого нуля в картине дифракции Фраунгофера для прямоугольной апертуры  $r_0 = \lambda f/D$ , а для круглой -  $r_0 = 1.22 \lambda f/D$ .

Гармоническое колебание, промодулированное прямоугольным импульсом – дифракционная решетка с синусоидальным профилем штриха в прямоугольной апертуре. Здесь мы воспользуемся свойством делимости переменных и для упрощения выкладок рассмотрим одномерный случай

$$\cos(\omega_0 x) = \frac{1}{2} (\exp j\omega_0 x + \exp -j\omega_0 x)$$

$$F(A(x) \cos(\omega_0 x)) = \frac{1}{2} F(A(x) \exp j\omega_0 x) + \frac{1}{2} F(A(x) \exp(-j\omega_0 x)) = \quad (1.7)$$

$$= L \text{Sinc}(L(\omega + \omega_0)) + L \text{Sinc}(L(\omega - \omega_0))$$



Выражение (1.7) полезно с точки зрения перехода к следующему этапу – рассмотрению физического смысла преобразования Фурье, осуществляемого тонкой положительной линзой. Напомним, что изначально сам Фурье рассматривал предложенный им метод как сугубо абстрактный аппарат, не имеющий никакого физического смысла. Однако, сейчас мы увидим, что преобразование Фурье в оптике имеет очень простой и наглядный физический смысл.

Смысл разложения по Фурье (или гармонического анализа, разложения по гармоникам) заключается в представлении любой непрерывной на заданном интервале функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, в виде суммы гармонических колебаний различных частот. Применительно к оптической обработке информации это означает, что любое изображение, которое может быть аналитически представлено в виде функции пропускания (для транспаранта) или яркости (для объекта) от пространственных координат, может быть представлено в виде суммы дифракционных решеток с синусоидальным профилем штриха различных периодов и дифракционной эффективности. Поскольку угол дифракции на решетке зависит от ее периода (частоты решетки), то волна, дифрагировавшая на каждой такой решетке, в соответствии с (1.7) фокусируется в фокальной плоскости линзы в точках, отстоящих от главной оптической оси линзы на расстояние  $r = \lambda f \nu$ , где  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $\nu$  – пространственная частота решетки, измеряемая как правило в обратных линейных единицах, например, миллиметрах ( $\text{мм}^{-1}$ ) или линиях (штрихах) на миллиметр. Сумма этих дифракционных максимумов, образованных дифрагировавшими на каждой элементарной решетке волнами и описываемых (1.7), и образует Фурье-спектр (Фурье-образ) изображения.

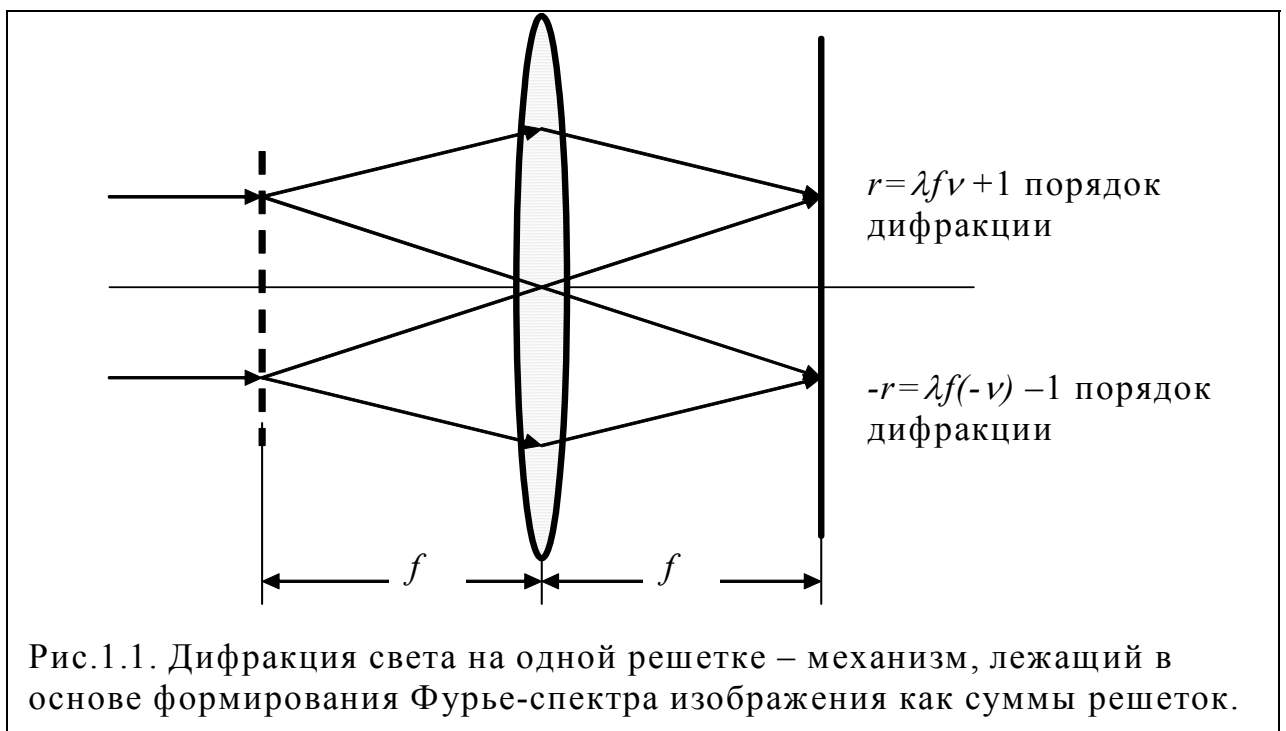


Рис.1.1. Дифракция света на одной решетке – механизм, лежащий в основе формирования Фурье-спектра изображения как суммы решеток.

Свойства Фурье-преобразования.

Свойство симметрии Фурье-образа

$$F(f^*(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \exp(-j\omega x) dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j(-\omega)x) dx \right)^* = F^*(-\omega)$$

Изменение масштаба аргумента функции (Рис.1.2.)

$$F(f(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) \exp(-j\omega x) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp(-j \frac{\xi \omega}{a}) d\xi = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (1.8)$$

Этот случай может быть проиллюстрирован дифракцией плоского волнового фронта на решетках с разными пространственными частотами – чем выше частота решетки, тем больше угол дифракции и, соответственно, тем дальше от оптической оси расположен соответствующий спектральный максимум.

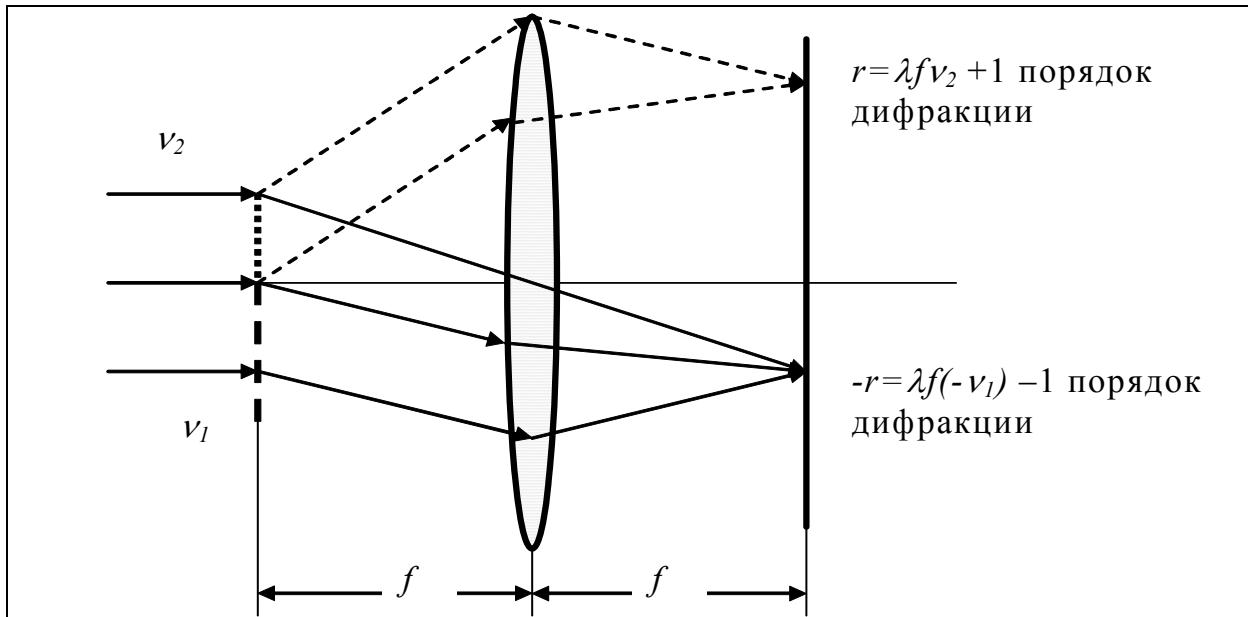
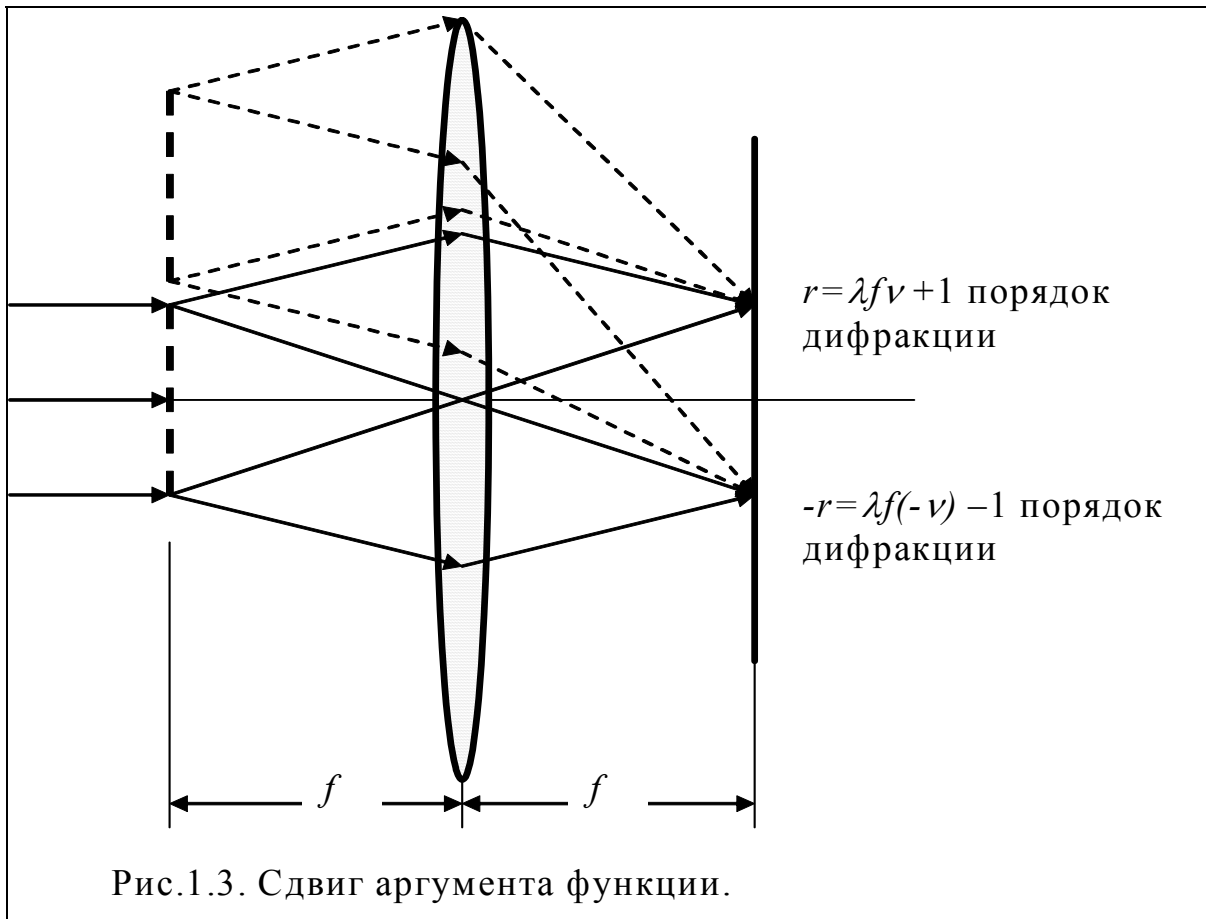


Рис.1.2. Изменение масштаба аргумента функции.

Сдвиг аргумента функции (Рис.1.3.)

$$F(f(x - x_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) \exp(-j\omega x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) \exp(-j\omega(x_1 + x_0)) dx_1 = F(f(x_1)) \exp(-j\omega x_0) = F(\omega) \exp(-j\omega x_0) \quad (1.9)$$



Смещение Фурье-образа по шкале частот

$$\begin{aligned}
 F^{-1}(F(\nu + \nu_0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu + \nu_0) \exp(j(\omega)x) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_1) \exp(j(\omega_1 - \omega_0)x) d\omega_1 = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_1) \exp(j\omega_1 x) \exp(-j\omega_0 x) d\omega_1 = f(x) \exp(-j\omega_0 x)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Интегральные операции свертки и корреляции и их реализация через преобразование Фурье.

Операция свертки определяется следующим образом:

$$S(\Delta) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx \tag{1.11}$$

Операция корреляции определяется так:

$$K(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2^*(x - \Delta) dx \tag{1.12}$$

Обратим внимание, что иногда встречается другое определение функции взаимной корреляции двух функций, а именно:

$$K(\Delta) = f_1(x) \otimes f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x + \Delta) dx$$

При реализации операции корреляции голографическими методами принято выделять эталонное и объектное изображения (функции). Эталонное – то изображение, с которого записывается голограмма, а объектное – то, которым голограмма восстанавливается. Соответственно, в первом случае (1.12) эталонной является вторая функция, а первая – объектной, а во втором случае наоборот – первая функция является эталоном, а вторая – объектная. Это станет очевидным чуть позже, по рассмотрении «прямой теоремы корреляции».

Свойства операций свертки и корреляции.

Коммутативность свертки

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\Delta - x) f_2(x) dx = f_2(x) * f_1(x)$$

Прямая теорема свертки – Фурье-образ свертки двух функций равен произведению их Фурье-образов

$$\begin{aligned} F(f_1(x) * f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(\Delta - x) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z) dx \exp(-j\omega(z + x)) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) \exp(-j\omega z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \exp(-j\omega x) dx = F_2(\nu) F_1(\nu) \end{aligned}$$

Прямая теорема корреляции – Фурье-образ функции корреляции двух функций равен произведению Фурье-образа одной функции на комплексно сопряженный Фурье-образ другой функции.

$$\begin{aligned} F(f_1(x) \otimes f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2^*(x - \Delta) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta \Big|_{x-\Delta=z} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2^*(z) dx \exp(-j\omega(x - z)) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \exp(-j\omega x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2^*(z) \exp(j\omega z) dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \exp(-j\omega x) dx \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) \exp(-j\omega z) dz \right)^* = F_1(\nu) F_2^*(\nu) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Нетрудно видеть, что если использовать второй вариант определения операции корреляции, то

$$\begin{aligned}
F(f_1(x) \otimes f_2(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x + \Delta) dx \exp(-j\omega\Delta) d\Delta \Big|_{x+\Delta=z} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(z) dx \exp(j\omega(z-x)) dz = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) \exp(j\omega x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) \exp(-j\omega z) dz = \\
&= \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \exp(-j\omega x) dx \right)^* \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) \exp(-j\omega z) dz = F_1^*(\nu) F_2(\nu)
\end{aligned}$$

Именно эта теорема лежит в основе реализации операций свертки и корреляции голографическими методами. Устройства, реализующие операцию корреляции, называются корреляторами, а реализующие операцию свертки – конволверами. Рассмотрим этот метод подробнее, начав с аналитического описания 4f-схемы Фурье-голографии (Рис.1.4).

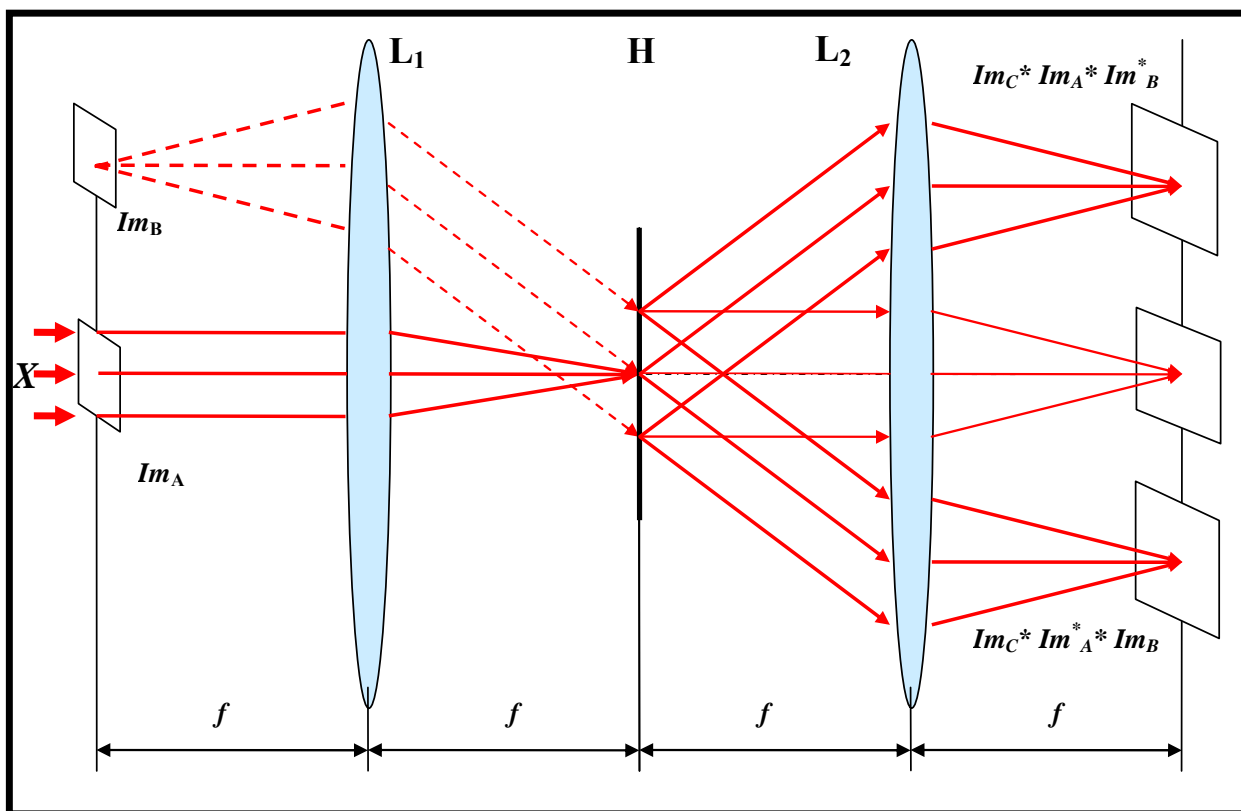


Рис.1.4. 4f- схема Фурье-голографии

Уравнение 4f - схемы Фурье-голографии.

Пусть во входной плоскости **In** рассматриваемой схемы рис.1.4. помещены два транспаранта, функции амплитудного пропускания которых описываются  $Im_A$  и  $Im_B$ . Будем считать изображение  $Im_A$  эталонным, а  $Im_B$  – опорным. (Обратим внимание, что терминология здесь несколько

отличается от принятой в других областях голографии. В частности, то, что в других областях голографии называется объектным изображением, в корреляционной обработке принято называть эталонным, а объектным – изображение, которым проявленная голограмма восстанавливается.) Плоскость  $\mathbf{In}$  - передняя фокальная плоскость первой Фурье-преобразующей линзы  $\mathbf{L}_1$ . Транспаранты освещаются плоским волновым фронтом  $X$ . Для простоты выражений примем, что амплитуда  $X$  равна 1. Тогда в задней фокальной плоскости линзы  $\mathbf{L}_1$  формируется поле

$$F(\text{Im}_A) + F(\text{Im}_B).$$

При помещении в эту плоскость регистрирующей среды  $\mathbf{H}$  на ней, после экспозиции и соответствующей обработки (проявлении), будет записано распределение

$$\eta \left( (F(\text{Im}_A) + F(\text{Im}_B))(F(\text{Im}_A) + F(\text{Im}_B))^* \right),$$

где  $\eta$  - оператор регистрирующей среды, а астериск обозначает комплексное сопряжение. При помещении проявленной голограммы в положение, соответствующее положению среды при записи, и помещении в плоскость  $\mathbf{In}$  вместо изображения  $\text{Im}_A$  (эталонного) изображения  $\text{Im}_C$  (объектное изображение), за голограммой получим

$$\begin{aligned} & F(\text{Im}_C) \eta \left( (F(\text{Im}_A) + F(\text{Im}_B))(F(\text{Im}_A) + F(\text{Im}_B))^* \right) = \\ & F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_B)^* \right) + \\ & + F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_A)^* \right) + F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_B)^* \right) \end{aligned}$$

Члены, входящие в это выражение, описывают компоненты дифрагировавшей на голограмме волны, распространяющиеся в разных направлениях, а именно члены:

$$F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right)$$

и

$$F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_B)^* \right)$$

распространяются по направлению распространения  $F(\text{Im}_C)$  и формируют нулевой порядок дифракции; член

$$F(\text{Im}_C) \eta \left( F(\text{Im}_A)^* F(\text{Im}_B) \right)$$

распространяется в направлении распространения  $F(\text{Im}_B)$  и формирует +1 порядок дифракции;

$$F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_A)F(\text{Im}_B)^*\right)$$

распространяется в направлении, комплексно сопряженном с направлением распространения  $F(\text{Im}_B)$  и формирует  $-1$  порядок дифракции.

Соответственно, в фокальной плоскости второй Фурье-преобразующей линзы  $L_2$  формируются три области – три порядка дифракции:

члены

$$F\left(F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_A)F(\text{Im}_A)^*\right)\right)$$

и

$$F\left(F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_B)F(\text{Im}_B)^*\right)\right)$$

формируют нулевой порядок дифракции, который в рамках нашего рассмотрения нас не интересует;

в  $+1$  порядке дифракции формируется распределение амплитуд

$$F\left(F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_A)^*F(\text{Im}_B)\right)\right), \quad (1.14)$$

а в  $-1$  порядке дифракции формируется распределение амплитуд

$$F\left(F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_A)F(\text{Im}_B)^*\right)\right). \quad (1.15)$$

Если оператор голографической регистрирующей среды  $\eta$  линеен, а  $\text{Im}_B = \delta$ , т.е. суть точечный источник (напомним, что Фурье-образ точечного источника – плоская волна), то к выражениям (1.14) и (1.15) можно применить теоремы корреляции и свертки, соответственно, что даст

$$F\left(F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_A)^*F(\text{Im}_B)\right)\right) = \text{Im}_C \otimes \text{Im}_A \quad (1.16)$$

$$F\left(F(\text{Im}_C)\eta\left(F(\text{Im}_A)F(\text{Im}_B)^*\right)\right) = \text{Im}_C * \text{Im}_A, \quad (1.17)$$

где символы  $\otimes$  и  $*$  обозначают операции корреляции и свертки. Такую 4f-схему Фурье-голографии, в которой используется только  $+1$  порядок дифракции называют также коррелятором Ван дер Люгта, а Фурье-голограмму – голографическим согласованным фильтром, поскольку передаточная характеристика голограммы Фурье согласована со спектром эталонного изображения  $\text{Im}_A$ .

Коррелятор совместного преобразования. Другой метод вычисления функции взаимной корреляции двух функций в 4-f схеме Фурье-голографии может быть реализован, если в выражениях (1.14) и (1.15) принять за  $\delta$ -функцию не

опорное изображение  $Im_B$ , а объектное (восстанавливающее голограмму)  $Im_C$ . В этом случае они примут вид

$$F\left(F(Im_C)\eta\left(F(Im_A)^* F(Im_B)\right)\right) = Im_B \otimes Im_A \quad (1.18)$$

$$F\left(F(Im_C)\eta\left(F(Im_A)F(Im_B)^*\right)\right) = Im_A \otimes Im_B, \quad (1.19)$$

т.е. в +1 и -1 порядках дифракции формируются функции взаимной корреляции изображений, с которых записана голограмма. Понятия опорного и сигнального (предметного) пучков в этом случае физического смысла не имеют. Поскольку на голограмме записываются совместно спектры (точнее - картина интерференции спектров) двух изображений, функция корреляции которых вычисляется, то такая схема, приведенная на рис.1.5., известна под названием коррелятора совместного преобразования (Joint Transform Correlator).

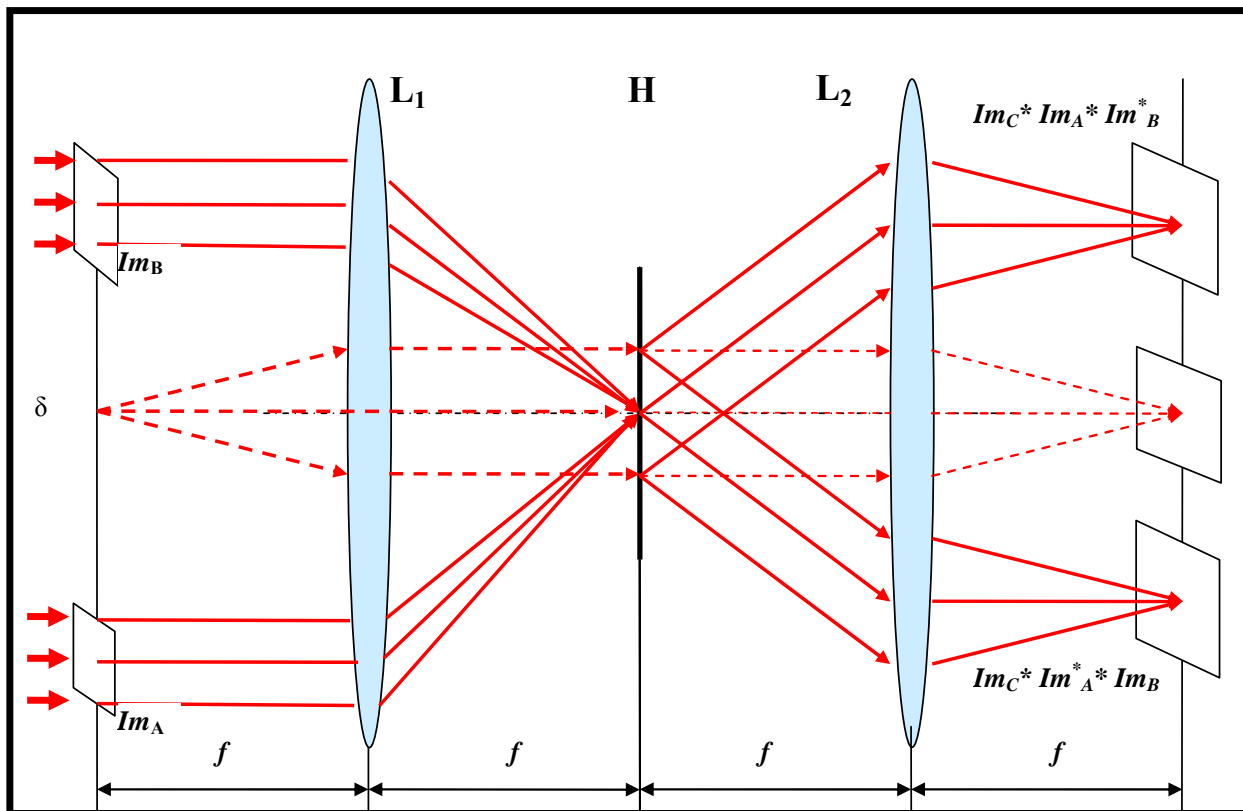


Рис.1.5. Схема голографического коррелятора совместного преобразования.

### Литература к Теме 1.

1. Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л., "Оптическая голография", М.Мир, 1973, 686с.
2. Василенко Г.И., Цибулькин Л.М., «Голографические распознающие устройства», М., Радио и связь, 1985. – 312с.
3. Мирошников М.М., «Теоретические основы оптико-электронных приборов», Л., Машиностроение, 1977.-600с.



## Тема 2. Погрешности оптического преобразования.

В первой лекции мы ознакомились с реализацией преобразования Фурье в оптике и узнали, что положительная линза в своей задней фокальной плоскости строит распределение амплитуд (комплексных), соответствующее Фурье-образу распределения амплитуд в передней фокальной плоскости линзы. Однако, это утверждение нуждается в ряде уточнений, которым и посвящена данная лекция.

Рассмотрим оптическую систему, изображенную на Рис.2.1., и состоящую из сферической линзы L. Плоскости  $P_1$  и  $P_2$  расположены перед линзой и за ней на расстояниях  $d$  и  $f$ , соответственно, где  $f$  - фокусное расстояние линзы (т.е.  $P_2$  – задняя фокальная плоскость линзы). Ось  $z$  совпадает с главной оптической осью линзы, в плоскости  $P_1$  координаты  $x, y$ , в плоскости  $P_2$  -  $v_x, v_y$ .

Пусть в плоскости  $P_1$  находится транспарант, амплитудное пропускание которого  $\tau(x, y)$  описывается выражением

$$\tau(x, y) = A(x, y) \exp j\varphi(x, y), \quad (2.1)$$

где  $j$  – мнимая единица.

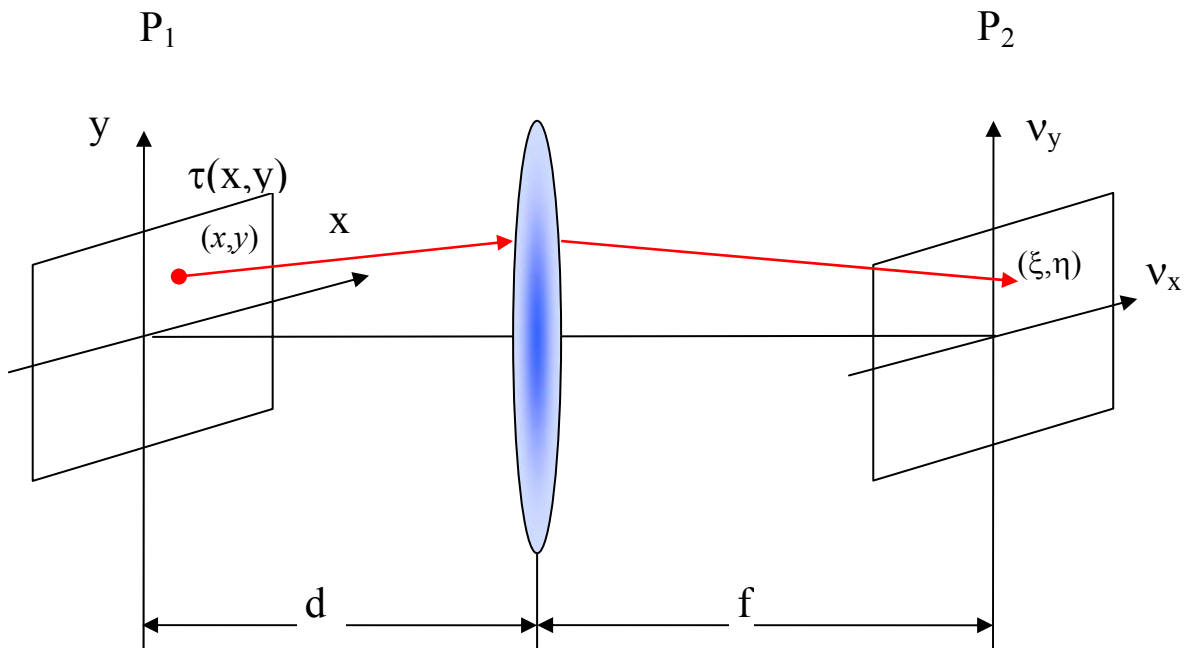


Рис.2.1. Схема, реализующая двумерное преобразование Фурье.

Пусть  $E(x, y)$  – распределение комплексных амплитуд света в плоскости  $P_1$ , а  $E(\xi, \eta, z)$  - распределение амплитуд в плоскости  $P_2$ , отстоящей от  $P_1$  на расстояние  $z$ . Если рассмотреть схему рис.2.1. в отсутствие линзы L. То выражение для связи комплексной амплитуды в плоскости  $P_2$  с амплитудой

в плоскости  $P_1$  дается хорошо известным из курса оптики дифракционным интегралом Френеля-Кирхгофа

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{j}{\lambda} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} \cos \theta dx dy, \quad (2.2)$$

где  $j$  – мнимая единица,  $r$  – расстояние от точки  $\xi, \eta$  плоскости  $P_2$  до точек плоскости  $P_1$ , дающих свой вклад в амплитуду в этой точке,  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\theta$  – угол между осью  $z$  и нормалью к плоскости  $P_1$  в точке  $x, y$ ,  $\cos \theta$  – коэффициент наклона, учитывающий различия в количестве света, излучаемого из плоскости  $P_1$  в разных направлениях. Нетрудно видеть, что если в схеме Рис.2.1. присутствует тонкая безабберационная положительная линза с бесконечной апертурой, то этот коэффициент не зависит от  $x$  и  $y$  и может быть представлен в виде

$$\cos \theta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \quad (2.3)$$

Тогда, с учетом (2.3), выражение (2.2) можно переписать в виде

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{jf}{\lambda \sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} dx dy \quad (2.4)$$

Таким образом, для определения амплитуды в точке  $(\xi, \eta)$  необходимо найти выражение для длины оптического пути  $r$  к этой точке от точек  $x, y$ . Обычно при выводе выражения, показывающего, что положительная линза реализует двумерное преобразование Фурье используют параксиальное приближение

$$r = -\frac{\xi}{f} x - \frac{\eta}{f} y, \quad (2.5)$$

подстановка которого в (2.4) и дает требуемое выражение.

Однако, точное выражение для  $r$  имеет следующий вид

$$r = R(\xi, \eta) - \alpha x - \beta y, \quad (2.6)$$

где  $R$  и коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются следующим образом

$$R(\xi, \eta) = \frac{f^2 + \xi^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}$$

$$\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}$$

$$\beta = \frac{\eta}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}$$
(2.7)

Эти выражения легко получить самостоятельно, если рассмотреть схему обратного распространения излучения из точки  $(\xi, \eta)$  в точку  $(x, y)$ , приведенную на рис.2.2., и решить треугольники, образованные исходя из соображений равенства длин оптических путей.

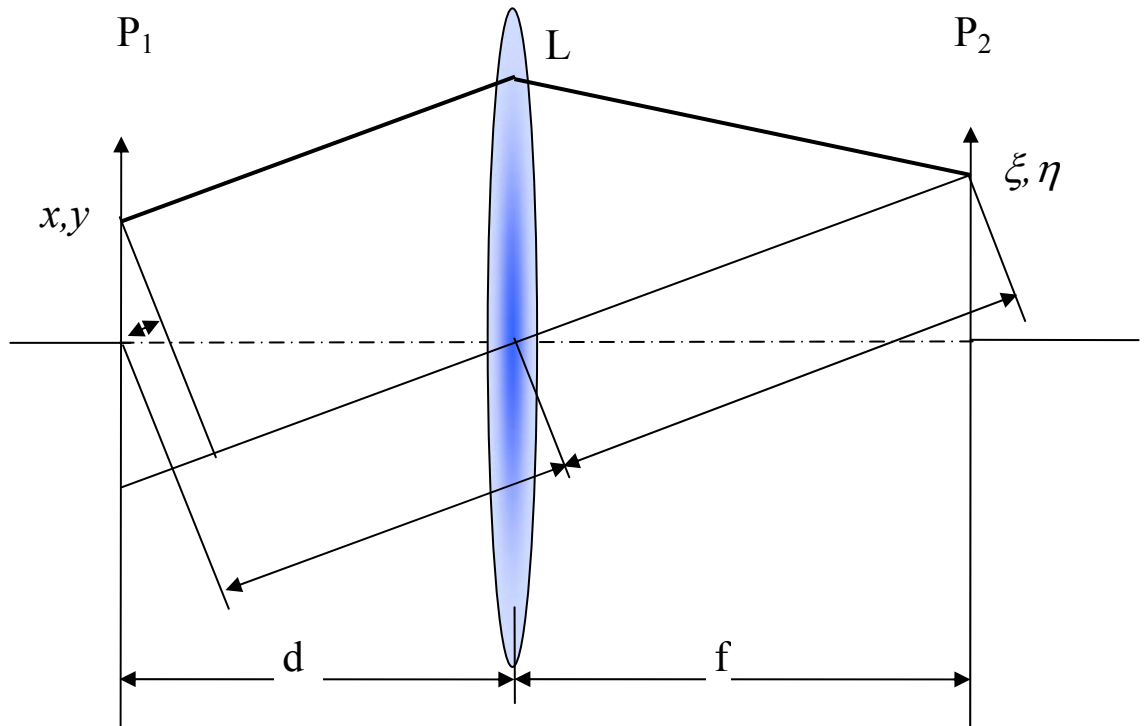


Рис.2.2. Схема для определения длины пути между точками  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$ .

Подстановка (2.6) и (2.7) в (2.4) дает

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{jf}{\lambda} \exp jkR(\xi, \eta) \iint \frac{E(x, y) \exp[j2k(\alpha x + \beta y)]}{f^2 + \xi^2 + \eta^2 + df - x\xi - y\eta} dx dy \quad (2.8)$$

Введем новые переменные, имеющие смысл пространственных частот:

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\xi}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \\ \mu_y &= \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Почему мы использовали здесь для обозначения пространственных частот букву  $\mu$ , а не привычную  $\nu$ , станет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Подставив (2.9) в (2.8), вынося при этом  $(f^2 + df)$  из под знака интеграла и проведя ряд элементарных преобразований, получим выражение, описывающее распределение комплексных амплитуд в плоскости  $P_2$

$$\begin{aligned}E(\xi, \eta) &= \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] dx dy - \\ &- \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \times \\ &\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\xi(\xi-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy\end{aligned}\quad (2.10)$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл в полученном выражении с точностью до фазового множителя равен Фурье-образу распределения  $E(x, y)$ . Второй же член выражения может рассматриваться как погрешность оптического преобразования Фурье, выполняемого идеальной положительной линзой. Если знаменатель подынтегрального выражения второго слагаемого существенно больше числителя, то и само второе слагаемое становится пренебрежимо малым. Для этого, как видно из (2.10), необходимо соответствующим образом подобрать соотношение максимальных значений  $x, y$  и  $\xi, \eta$ , т.е. апертуры в соответствующих плоскостях, и фокусное расстояние линзы.

Рассмотрим этот вопрос подробнее для того, чтобы получить количественную оценку погрешности оптического преобразования Фурье в зависимости от параметров оптической схемы. Для этого перепишем выражение (2.10) в виде

$$E(\xi, \eta) = \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\xi(\xi-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy \quad (2.11)$$

Сравним полученное выражение со строгим определением преобразования Фурье, введенном нами в первой лекции

$$E(\nu_x, \nu_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy \quad (2.12)$$

и проанализируем влияние отдельных членов, входящих в выражение (2.11) и отсутствующих в (2.12).

#### Частотная погрешность.

В (2.9) мы ввели новые переменные, имеющие смысл пространственных частот. Нетрудно видеть, что идеальная положительная линза формирует Фурье-образ не в своей фокальной плоскости, а на сфере радиуса  $f$ . Эта сфера касается фокальной плоскости только в точке ее пересечения главной оптической осью, а в фокальной плоскости формируется проекция Фурье-образа (сформированного на сфере). Соответственно, при измерениях в плоскости возникают систематические ошибки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Подставим (2.9) в строгое определение преобразования Фурье (2.12)

$$E\left(\frac{\xi}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}, \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}x + \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}y\right)\right] dx dy \quad (2.13)$$

Отличия полученного выражения от точного в том, что введенная нами пространственная частота  $\mu_x$  зависит не только от координаты  $\xi$ , но также и от координаты  $\eta$ . Последней зависимости в строгом определении преобразования Фурье быть не должно. Аналогично и для частоты  $\mu_y$ . Эта зависимость от «чужой» координаты и определяет частотную погрешность.

Преобразуем выражения (2.9) к виду

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\xi}{\lambda f} \left[ \sqrt{1 + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1} \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f} \left[ \sqrt{1 + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Разложим выражение в квадратных скобках в ряд

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\xi}{\lambda f} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right] \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right]\end{aligned}\tag{2.15}$$

Если ограничиться парааксиальным приближением, т.е. принять  $\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{f^2} \ll 1$ , то можно пренебречь всеми членами ряда (2.15), начиная со второго. Тогда получим линейное приближение

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\xi}{\lambda f} \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Подстановка (2.16) в (2.13) и ведет к точному выражению для преобразования Фурье

$$E\left(\frac{\xi}{\lambda f}, \frac{\eta}{\lambda f}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda f}x + \frac{\eta}{\lambda f}y\right)\right] dx dy.\tag{2.17}$$

Таким образом, линейная зависимость между пространственными координатами  $\xi$ ,  $\eta$  и пространственными частотами  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  имеет место только в парааксиальной области. Вне парааксиальной области масштаб оси частот с ростом частоты уменьшается.

Введем относительную частотную погрешность оптического преобразования Фурье при линейной аппроксимации оси частот следующим образом

$$\Delta_f = \frac{\xi / \lambda f}{\xi / \lambda \sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2}} - 1. \quad (2.18)$$

Определим рабочую апертуру в задней фокальной плоскости

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

в пределах которой проводятся измерения. Введем отношение

$$a = \frac{\rho}{f},$$

Тогда относительная частотная погрешность может быть переписана в виде

$$\Delta_f = \sqrt{1 + a^2} - 1. \quad (2.19)$$

В результате, зная допустимую относительную частотную погрешность, при заданном фокусном расстоянии можно определить радиус рабочей апертуры, в пределах которой заданная точность измерений будет гарантирована. Соответственно, можно определить и максимальную пространственную частоту, для которой погрешность еще не превышает заданную

$$v_{\max} = \frac{\rho_{\max}}{\lambda f} = \frac{a}{\lambda}. \quad (2.20)$$

Пользуясь формулами (2.19) и (2.20) нетрудно количественно оценить параметры оптической схемы, обеспечивающие проведение измерений с заданной погрешностью.

#### Амплитудная погрешность.

Амплитудная погрешность возникает в силу неточного учета длины оптического пути между точками  $x, y$  плоскости  $P_1$  и точками  $\xi, \eta$  плоскости  $P_2$ , а также коэффициента наклона для этих точек.

Вернемся к выражению (2.11)

$$E(\xi, \eta) = \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \times \\ \times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\xi(\xi-x) + \eta(\eta-y)}} \right\} dx dy$$

и сравним его с выражением для точного преобразования Фурье

$$E(v_x, v_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy.$$

Из сравнения этих выражений видно, что распределение комплексных амплитуд, описываемое выражением (2.11), отличается от точного преобразования Фурье вторым членом в фигурных скобках. Именно этот член и описывает влияние изменения оптического пути между точками плоскостей  $P_1$  и  $P_2$  и коэффициента наклона.

Определим относительную амплитудную погрешность через отношение второго члена в фигурных скобках к значению величины в фигурных скобках

$$\Delta_a = \frac{\left( \frac{\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta}{f^2 + df + \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta} \right)}{\left( \frac{f^2 + df}{f^2 + df + \xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta} \right)} = \frac{(\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta)}{f(f+d)}. \quad (2.21)$$

Введем в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$  полярные координаты  $r, \psi$  и  $\rho, \varphi$ , соответственно. Тогда, в полярных координатах

$$\Delta_a = \frac{[\rho^2 - \rho r \cos(\varphi - \psi)]}{f(f+d)}. \quad (2.22)$$

Очевидно, что амплитудная погрешность максимальна если  $\cos(\varphi - \psi) = -1$ . Для этого крайнего случая получим выражение для максимальной амплитудной погрешности

$$\Delta_{aMax} = \frac{(\rho^2 + \rho r)}{f(f+d)}. \quad (2.23)$$

Отсюда с очевидностью следует, что амплитудная погрешность зависит от радиусов как апертуры во входной плоскости  $P_1$ , так и плоскости Фурье  $P_2$ . При этом амплитудная погрешность более чувствительна к  $\rho$  - радиусу апертуры в частотной плоскости.



Введем относительные апертуры как отношения  $\frac{\rho}{f}$  и  $\frac{r}{f}$ .

Тогда максимальная амплитудная погрешность

$$\Delta_{aMax} = \frac{\left[ \left( \frac{\rho}{f} \right)^2 + \frac{\rho r}{f f} \right]}{\left[ 1 + \frac{d}{f} \right]} \quad (2.24)$$

Отсюда можно получить выражение для максимального значения относительной апертуры в частотной плоскости при заданном значении апертуры во входной плоскости и допустимой величине амплитудной погрешности:

$$(2.25)$$

Для того, чтобы определить связь радиусов  $r$  и  $\rho$  с радиусом апертуры линзы  $R_L$ , рассмотрим Рис.2.3.

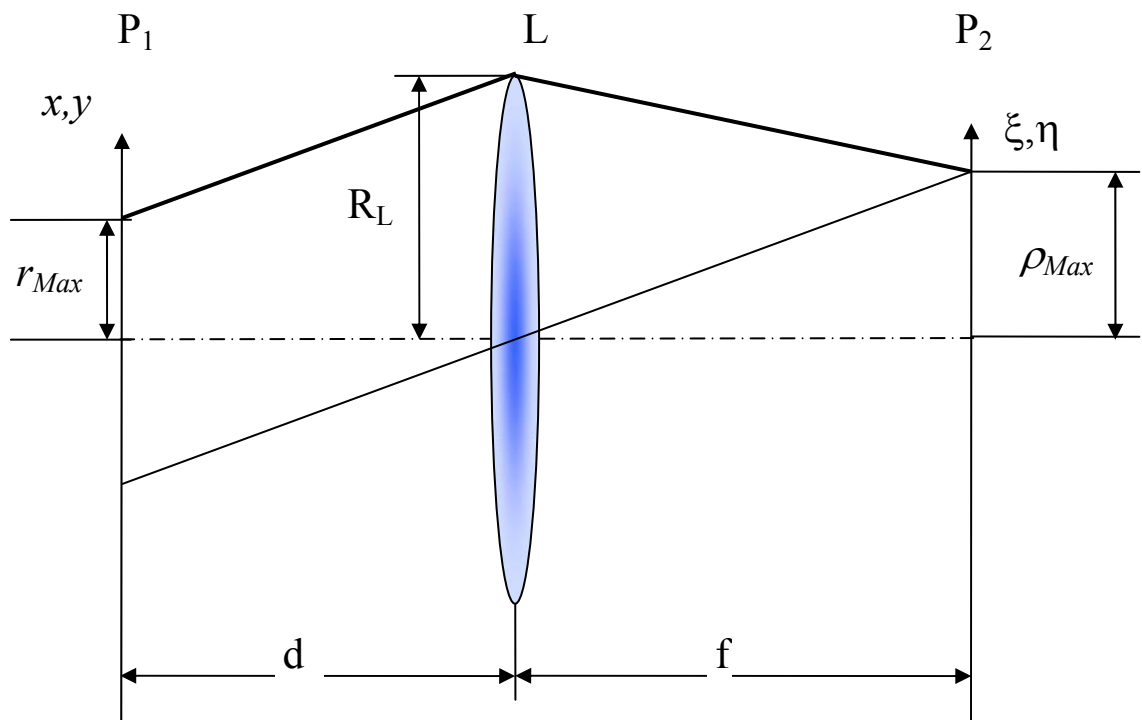


Рис.2.3. Схема, иллюстрирующая взаимную связь апертур во входной и выходной плоскостях с апертурой линзы при преобразовании Фурье.

Из простейшего геометрического построения, приведенного на Рис.2.3., очевидно следует соотношение

$$r_{Max} = R_L - d \frac{\rho_{Max}}{f} \quad (2.26)$$

Введем понятие относительного отверстия линзы  $O = \frac{2R_L}{f}$ , и перепишем (1.26) в виде

$$\frac{r_{Max}}{f} = \frac{R_L}{f} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{O}{2} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f} \quad (2.27)$$

И, аналогично, получим для апертуры в плоскости  $P_2$

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{\left[ \frac{R_L}{f} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}} = \frac{\left[ \frac{O}{2} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}} \quad (2.28)$$

Имея формулы (2.25), (2.27) и (2.28), можно рассчитать оптический анализатор Фурье, т.е. определить размеры апертур, обеспечивающие выполнение преобразования Фурье над изображением заданного размера с заданной погрешностью.

#### Фазовая погрешность.

Примем, что размеры апертур в плоскостях  $P_1$  и  $P_2$  схемы Рис.2.1. выбраны исходя из обеспечения требуемых частотной и амплитудной погрешностей. Тогда распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости линзы может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta) &= \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \iint E(x, y) \exp \left[ -j2\pi(\mu_x x + \mu_y y) \right] dx dy = \\ &= \frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} F(E(x, y)) \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $F$  – символ оператора преобразования Фурье.

Фазовая погрешность при выполнении преобразования Фурье обусловлена экспоненциальным членом  $\exp jkR(\xi, \eta)$  перед интегралом в выражении (2.29).

Поскольку все приемники являются «квадратичными», т.е. регистрируют не комплексную амплитуду волновых полей, а интенсивность, то при непосредственных измерениях в частотной плоскости этот член не регистрируется, поскольку обращается в единицу при умножении на комплексно сопряженный множитель

$$E(\xi, \eta)E^*(\xi, \eta) = \frac{j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} \left( \frac{j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} \right)^* (F(E(x, y)))^2 = (F(E(x, y)))^2$$

Однако, при записи голограммы Фурье этот экспоненциальный множитель регистрируется на голограмме и, тем самым, в зависимости от схемы может оказывать влияние на результаты обработки и измерений. Рассмотрим схему записи голограммы Фурье с внеосевым опорным источником (Рис.2.4)

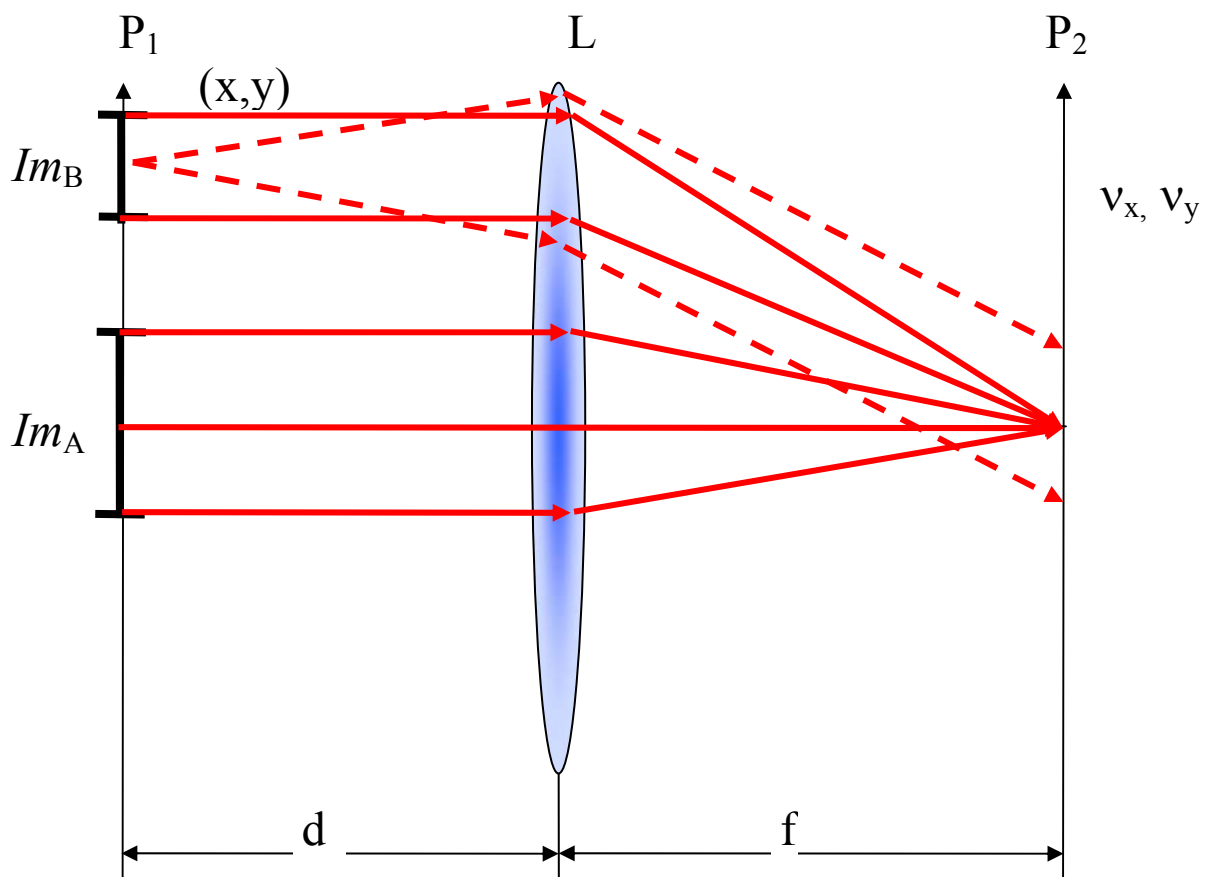


Рис.2.4. Схема записи голограммы Фурье.

При записи голограммы Фурье эталонного изображения  $Im_A$  с опорным изображением  $Im_B$ , на голограмме, в предположении линейной записи, будет записано распределение

$$\begin{aligned}
H(v_x, v_y) &= \left( \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) + \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) \right) \times \\
&\times \left( \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) + \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) \right)^* = \\
&\left( \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) - \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) - \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) - \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) - \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) = \\
&\left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + \left( \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) - \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \left( \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) - \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \left( F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_B)^* \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Соответственно, при восстановлении обработанной (проявленной) голограммы объектным изображением  $\text{Im}_C$ , поле сразу за голограммой описывается выражением

$$\begin{aligned}
&\frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) H(v_x, v_y) = \\
&\frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \left( \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A) - \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B)^* \right) + \\
&+ \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \left( \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_B) - \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
&+ \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(\text{Im}_C) \left( F(\text{Im}_B) F(\text{Im}_B)^* \right)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Если в качестве опорного источника  $Im_B$  используется дифракционно ограниченный точечный источник (т.е. голограмма записывается по схеме с внеосевым плоским опорным пучком, показанным пунктиром на Рис.2.4), то выражение (2.31) можно упростить

$$\begin{aligned}
& \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) H(v_x, v_y) = \\
& \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) \left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
& + \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(\text{Im}_A) + \quad . \quad (2.32) \\
& + \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C) \frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(\text{Im}_A)^* + \\
& + \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d_C)} F(\text{Im}_C)
\end{aligned}$$

Здесь, для упрощения выкладок, мы опустили постоянные коэффициенты. Если объектное изображение помещено в то же положение, что и эталонное при записи голограммы, то возможно дальнейшее упрощение выражения

$$\begin{aligned}
& \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) H(v_x, v_y) = \\
& \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) \left( F(\text{Im}_A) F(\text{Im}_A)^* \right) + \\
& + \frac{j \exp jk \left( R(\xi_C, \eta_C) + R(\xi_A, \eta_A) \right)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) F(\text{Im}_A) + \quad . \quad (2.33) \\
& + \frac{j \exp jk \left( R(\xi_C, \eta_C) - R(\xi_A, \eta_A) \right)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C) F(\text{Im}_A)^* + \\
& + \frac{j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f + d)} F(\text{Im}_C)
\end{aligned}$$

Из (2.33) видно, что, строго говоря, фазовая погрешность несущественна при голографическом методе обработки информации только при работе в +1 порядке дифракции (третье слагаемое в (2.33))  $4f$  схемы голографии Фурье в случае, если объектное изображение находится в том же положении, что и эталонное при записи голограммы, т.е.

$$d_C = d_A.$$

Условие

$$(\xi_C, \eta_C) \leq (\xi_A, \eta_A)$$

выполняется автоматически, поскольку физический размер голограммы не превосходит  $(\xi_A, \eta_A)$  (с учетом ограничений, обусловленный ограниченностью динамического диапазона регистрирующей среды).

Обратим внимание, что при выводе (2.33) мы рассмотрели только запись голограммы.  $4f$  схемы голографии Фурье предполагает также и второе преобразование Фурье, выполняемое над дифрагировавшим на голограмме пучком. Это преобразование мы здесь еще не рассмотрели. Если схема используется как коррелятор или конволвер, то в задней фокальной плоскости второй Фурье-преобразующей линзы регистрируется интенсивность, т.е. возникающая при втором преобразовании фазовая погрешность незначительна. Если же голографическая схема входит в состав более сложной схемы, то эта погрешность, в зависимости от схемы, может оказаться существенной.

Оговоренные выше условия имеют силу для коррелятора Ван дер Люгта, поскольку функция взаимной корреляции формируется в +1 порядке дифракции. При работе в -1 порядке дифракции (второе слагаемое) в (2.33) фазовые погрешности складываются.

Оценим величину фазовой погрешности. Величина множителя  $\frac{j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)}$  зависит от величины  $R(\xi, \eta)$ , которая, в свою очередь, в соответствии с (2.7) зависит от  $(\xi, \eta)$ , т.е. от  $\rho$  - радиуса апертуры в частотной плоскости  $P_2$ . Обычно полагают, что в пределах  $\rho_{Max}$  изменения  $\xi$  и  $\eta$  достаточно малы для того, чтобы экспоненциальный множитель  $\exp jkR(\xi, \eta)$  в выражении (2.29) можно было считать постоянным. Вернемся к точному выражению для  $R(\xi, \eta)$  (2.7) и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta) &= \frac{f^2 + \xi^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} = \frac{f^2 + \rho^2 + df}{\sqrt{f^2 + \rho^2}} = \\ &= (f+d) - (f-d) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} \right) + 2f \left( \frac{\left( 1 - \frac{\rho^2}{2f^2} \right)}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Если разложить второе и третье слагаемые в степенной ряд, ограничившись первым приближением, то (2.34) после несложных преобразований примет вид:

$$R(\xi, \eta) = (f + d) + \frac{1}{2}(f - d)\frac{\rho^2}{f^2} + \frac{1}{2}f\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2. \quad (2.35)$$

Подставив (2.35) в выражение для экспоненциального множителя, определяющего фазовую погрешность, получим

$$\begin{aligned} \frac{j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f + d)} &= \\ &= \frac{j}{\lambda(f + d)} \exp jk(f + d) \exp\left(\frac{1}{2}jk(f - d)\frac{\rho^2}{f^2}\right) \exp\left(\frac{1}{2}jkf\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Принятая при разложении (2.34) в степенной ряд аппроксимация только первыми членами допустима в определенных пределах. Например, если выполняется условие

$$\rho \leq 0.14f,$$

то погрешности, определенные (2.36) и (2.34) различаются не более, чем на 2%.

Из (2.36) наглядно видно, почему при реализации преобразования Фурье линзой транспарант с преобразуемым изображением обычно помещается в переднюю фокальную плоскость, т.е. выполняется условие

$$d = f \quad (2.37)$$

Действительно, в этом случае второй сомножитель в (2.36) становится равным единице и фазовая погрешность минимизируется

$$\frac{j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f + d)} = \frac{j}{2\lambda f} \exp jk2f \exp\left(\frac{1}{2}jkf\left(\frac{\rho^2}{f^2}\right)^2\right) \quad (2.38)$$

#### Влияние фазовой погрешности на результат обработки изображения оптической схемой.

Выше мы упомянули, что при измерениях в спектральной плоскости, выполняемых квадратичным приемником, фазовый член, определяющий фазовую погрешность, исчезает (поскольку квадратичный приемник измеряет не комплексную амплитуду, а интенсивность). Однако, в более сложных системах эта погрешность может вносить существенный вклад в результат обработки. Рассмотрим простейшую систему, состоящую из двух

положительных линз, задняя и передняя фокальные плоскости которых совпадают (Рис.2.5.)

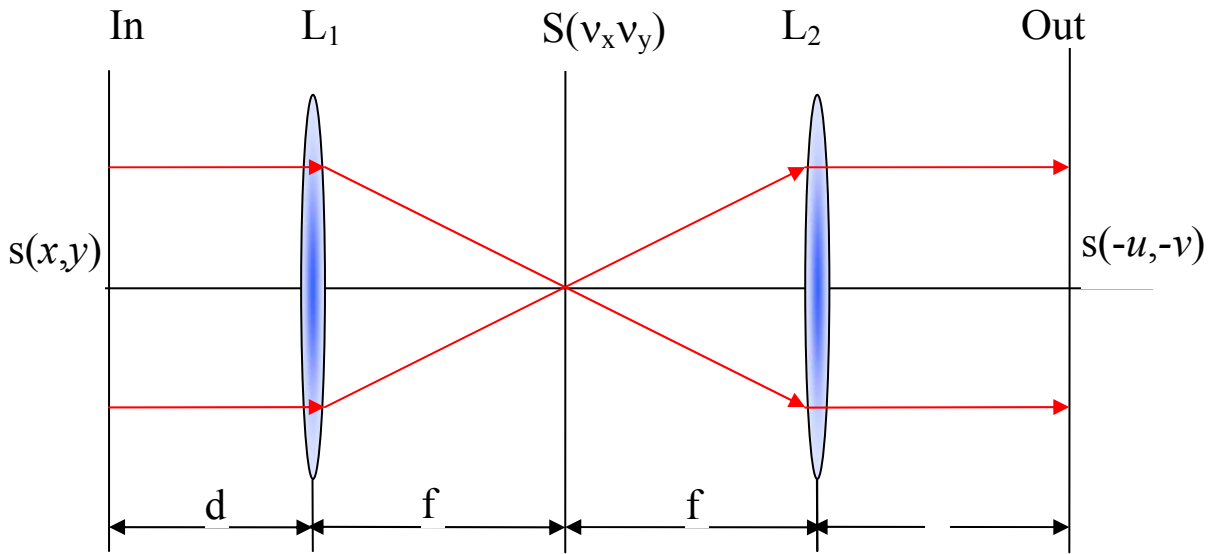


Рис.2.5. Схема двойного оптического преобразования Фурье.

Поскольку в системе выполняется последовательно два преобразования (2.29), то, в предположении, что входная плоскость совпадает с передней фокальной плоскостью первой линзы ( $d=f$ ), в в задней фокальной плоскости первой линзы  $L_1$  распределение амплитуд  $S(\xi, \eta)$  описывается выражением выходной плоскости Out распределение амплитуд описывается выражением

$$\begin{aligned}
 S(\xi, \eta) &= \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp \left( \frac{1}{2} jkf_1 \left( \frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) \times \\
 &\times \iint E(x, y) \exp \left[ -j2\pi(v_x x + v_y y) \right] dx dy = \quad , \quad (2.39) \\
 &= \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp \left( \frac{1}{2} jkf_1 \left( \frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) S(v_x, v_y)
 \end{aligned}$$

где  $S(v_x, v_y)$  – Фурье-образ распределения амплитуд во входной плоскости. Вторая линза  $L_2$  выполняет второе преобразование над этим распределением



$$\begin{aligned}
Out(u, v) &= \frac{j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp \left( \frac{1}{2} jkf_2 \left( \frac{\rho_2^2}{f_2^2} \right)^2 \right) \times \\
&\times \iint S(\xi, \eta) \exp \left[ -j2\pi(v_x u + v_y v) \right] dv_x dv_y = \\
&= \frac{j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp \left( \frac{1}{2} jkf_2 \left( \frac{\rho_2^2}{f_2^2} \right)^2 \right) \frac{j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \times \\
&\times \iint \exp \left( \frac{1}{2} jkf_1 \left( \frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) S(v_x, v_y) \exp \left[ -j2\pi(v_x u + v_y v) \right] dv_x dv_y
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Для оценки влияния экспоненциального фазового множителя (2.36) на результат преобразования, выполняемого системой Рис.2.5., рассмотрим прохождение через неё гармонического сигнала, представленного в передней фокальной плоскости линзы  $L_1$

$$s(x) = A_0 + B \cos 2\pi\nu_0 x. \tag{2.41}$$

Примем для упрощения выражений  $d=f_1=f_2=f$  и обозначим множители, стоящие перед интегралом,  $C_1$  и  $C_2$ , соответственно. Тогда, в спектральной плоскости для гармонического сигнала (2.41) получим распределение

$$S(v_x, v_y) = C_1 \left[ A_0 \delta(v_x) + \frac{B}{2} (\delta(v_x - \nu_0) + \delta(v_x + \nu_0)) \right], \tag{2.42}$$

где для упрощения выражений символом  $\delta(\dots)$  мы обозначили распределение амплитуд в дифракционном максимуме. Отсюда, распределение комплексных амплитуд в выходной плоскости

$$Out(u, v) = C_3 \left[ A_0 + B \exp \left( \frac{jkf(\lambda\nu_0)^4}{2} \right) \cos 2\pi\nu_0 u \right], \tag{2.43}$$

где  $C_3$  определяется из (2.39), (2.40).

Для преобразования без фазовой погрешности распределение амплитуд в выходной плоскости должно описываться выражением

$$Out_{ideal}(u, v) = C_3 (A_0 + B \cos 2\pi\nu_0 u). \tag{2.44}$$

Из сравнения (2.43) и (2.44) видно, что фазовая погрешность оптического преобразования Фурье для рассматриваемой схемы Рис.2.5. выражается экспоненциальным множителем перед сигнальным членом  $B \cos 2\pi\nu_0 u$ .

Перейдем от амплитуд в выходной плоскости к интенсивности, тогда выражения (2.43) и (2.44) примут вид, соответственно

$$\langle Out(u, \nu) \rangle^2 = |C_3|^2 \left[ A_0^2 + 2A_0B \cos\left(\frac{kf(\lambda\nu_0)^4}{2}\right) \cos 2\pi\nu_0 u + B^2 \cos^2 2\pi\nu_0 u \right] \quad (2.45)$$

$$\langle Out_{ideal}(u, \nu) \rangle^2 = |C_3|^2 (A_0^2 + 2A_0B \cos 2\pi\nu_0 u + B^2 \cos^2 2\pi\nu_0 u) \quad (2.46)$$

Из сравнения этих выражений видно, что интенсивность гармоники  $\nu_0$  (сигнала) ослаблена, это ослабление выражается коэффициентом

$$M = \cos\left(\frac{kf(\lambda\nu_0)^4}{2}\right). \quad (2.47)$$

Соответственно, для сложного изображения этот коэффициент является функцией частоты

$$M(\nu) = \cos\left(\frac{kf(\lambda\nu)^4}{2}\right). \quad (2.48)$$

Таким образом, в области низких пространственных частот влияние фазовой погрешности минимально, так как при малых  $\nu$ , как следует из (2.48),  $M(\nu) \approx 1$ . С ростом частоты величина  $M(\nu)$  уменьшается. Напомним, что пространственная частота связана с пространственной координатой в частотной плоскости соотношением

$$\nu_x = \frac{\xi}{\lambda f}.$$

Литература к Теме 2.

1. Кольер Р., Беркхарт Л., Лин Л., "Оптическая голография", М.Мир, 1973, 686с.
2. Василенко Г.И., Цибулькин Л.М., «Голографические распознающие устройства», М., Радио и связь, 1985. – 312с.
3. Мирошников М.М., «Теоретические основы оптико-электронных приборов», Л., Машиностроение, 1977.-600с.
4. С.Б.Гуревич В.Б.Константинов, В.К.Соколов, Д.Ф.Черных, Передача и обработка информации голографическими методами, М.Сов.Радио. 1978 – 304с.

### **Тема 3. Преобразования, реализуемые в оптике, на основе преобразования Фурье.**

В первой лекции мы ознакомились с интегральными преобразованиями типа свертки – функциями свертки двух функций и функцией корреляции двух функций. Эти интегральные преобразования реализуются оптическими методами с использованием двух последовательных преобразований Фурье. Поскольку Фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексная функция, то для реализации этих преобразований необходима голографическая технологий – единственная технология, обеспечивающая запись и восстановление комплексных функций.

В этом разделе мы ознакомимся с рядом других преобразований, применяемых при обработке информации, и реализуемых оптическими методами.

#### 1.3.1. Дифференцирование функций.

Операция дифференцирования может быть реализована в оптике двумя методами. Первый из них основан на следующем равенстве

$$F[E^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F[E(x)], \quad (3.1)$$

где  $E^{(n)}(x)$  -  $n$ -ая производная функции  $E(x)$ . Отсюда следует формула для оптической реализации  $n$ -ой производной от функции  $E(x)$

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = F^{-1}[(j\omega)^n F(E(x))] \quad (3.2)$$

Таким образом, для того, чтобы реализовать операцию дифференцирования, необходимо в спектральной плоскости ввести амплитудный фильтр, функция амплитудного пропускания которого описывается выражением

$$H(\omega) = \omega^n. \quad (3.3)$$

Напомним, что в силу нереализуемости в оптике обратного преобразования Фурье, вместо обратного используется повторное прямое преобразование Фурье с инверсией координат в выходной плоскости.

Такой способ оптического дифференцирования изображений применяется в задаче распознавания образов в том случае, если образ, подлежащий распознаванию (эталон) и образ-помеха имеют отчасти сходную форму. Классический пример, используемый для иллюстрации эффекта оптического дифференцирования – корреляционное распознавание печатного текста. Рассмотрим две буквы I и E. Эти буквы отчасти сходны между собой.

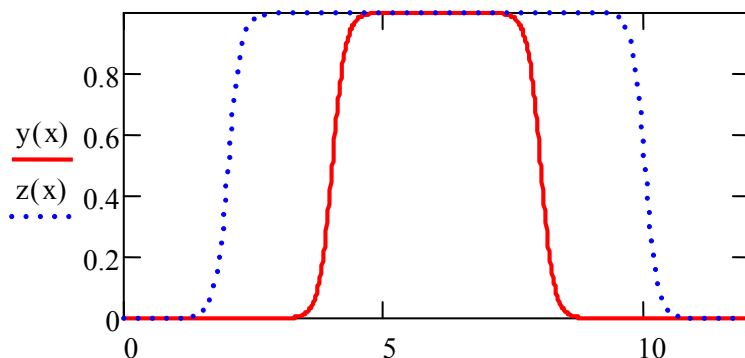


Рис.3.1. Пример одинаковых фигур, отличающихся только размером.

Аналогичная ситуация имеет место при распознавании фигур одинаковой формы, но разного размера. Пример приведен на Рис.3.1. – сечения двух фигур, например, прямоугольников, отличаются только размером.

Этот пример можно рассматривать как сечения букв I (сплошная линия) и E (пунктир) по оси  $x$ .

Если поставлена задача распознать букву I, то буква E будет помехой. Рис.3.2. приведены сечения по оси  $x$  функций автокорреляции буквы I и кросс-корреляции букв I и E, т.е. сигнала-помехи. Энергия кросс-корреляционного отклика (площадь под кривой) больше для помехи, соответственно, будет принято неправильное решение – буква E будет распознана как буква I.

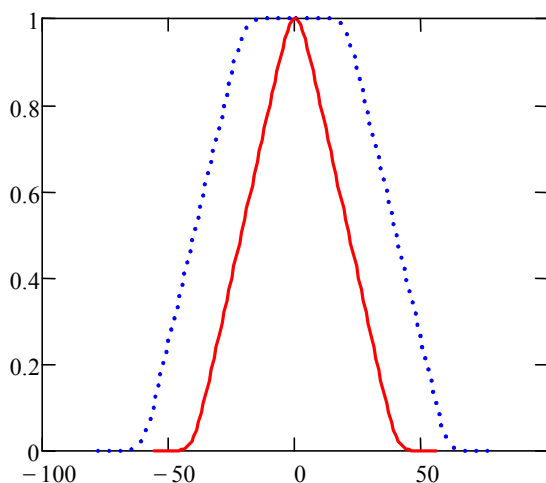


Рис.3.2. Функции автокорреляции (сплошная кривая) и кросскорреляции (пунктир)

Введем операцию дифференцирования, тогда производные сечения по оси  $x$  будут иметь вид, показанный на рис. 3.3., а авто- и кросс-корреляция, на рис.3.4.

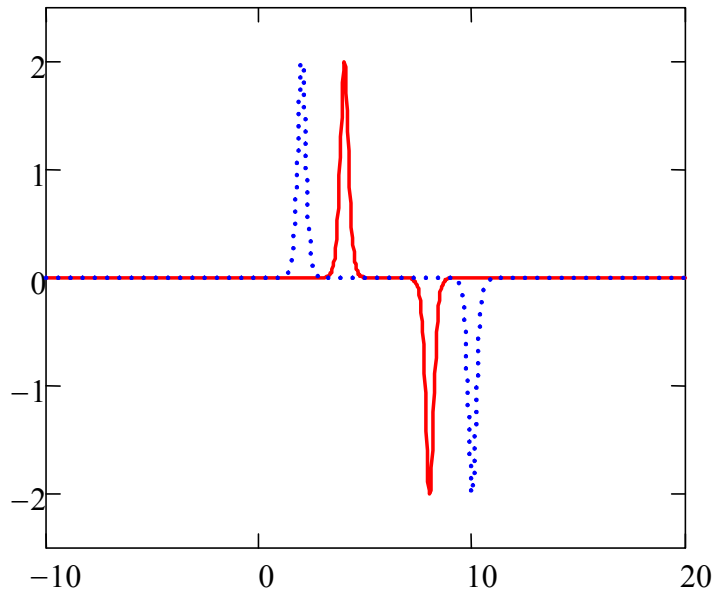


Рис.3.3. Производные функций, представленных на Рис.3.1.

Как видно из Рис.3.4., при работе не с самими изображениями, а с их производными распознавание произойдет правильно, так как глобальный максимум автокорреляционной функции по амплитуде в два раза превосходит боковые максимумы функции кросс-корреляции (пунктирная кривая). При измерениях квадратичным приемником отношение сигнал-помеха оставит уже 4:1.

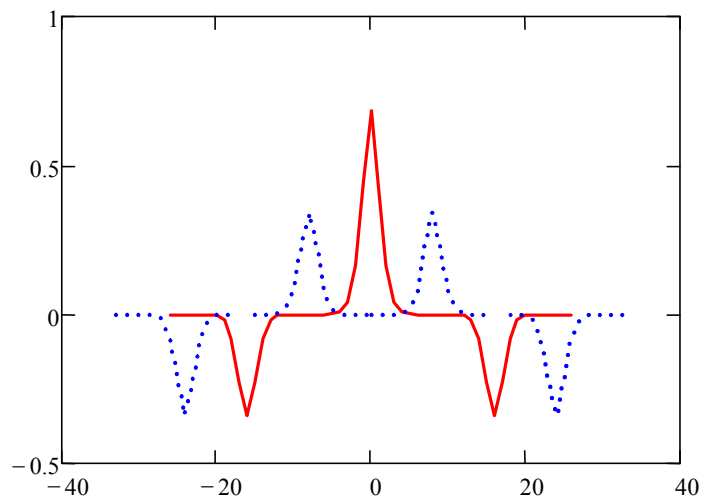


Рис.3.4. Функции автокорреляции (сплошная кривая) и кросс-корреляции дифференцированных изображений

Заметим, что дифференцирование изображений реализуется методом пространственной фильтрации в частотной плоскости.

Второй способ оптического дифференцирования функций основан на использовании фильтрующего свойства  $\delta$ -функции и её производных, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \delta^{(n)}(x - \xi) d\xi = (-1)^n E^{(n)}(x), \quad (3.4)$$

Где  $\delta^{(n)}(x - \xi)$  -  $n$ -ая производная  $\delta$ -функции. Отсюда получим окончательное выражение

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = (-1)^n E(x) * \delta^{(n)}(x). \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что полученные выражения применимы и к функциям двух переменных. В частности, частная производная порядка  $n+m$  будет описываться выражением

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) (-1)^{n+m} \delta^{(n)}(x - \xi) \delta^{(m)}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (3.6)$$

Следовательно, для реализации оператора дифференцирования первого порядка по одной координате  $\frac{\partial}{\partial x} E(x, y)$  необходима весовая функция  $-\delta'(x)\delta(y)$ , а по двум координатам  $\frac{\partial}{\partial x \partial y} E(x, y)$  весовая функция  $\delta'(x)\delta'(y)$ .

### 1.3.2. Оператор Лапласа.

Из (3.5), следует, что для реализации оператора Лапласа

$$\nabla^2 E(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y)$$

необходима весовая функция

$$\delta''(x)\delta(y) + \delta(x)\delta''(y). \quad (3.7)$$

Возможна также и реализация оператора Лапласа методом преобразования Фурье – из (3.2) следует, что для этого необходимо Фурье-образ функции  $E(x)$  умножить на функцию

$$-(\omega_x^2 + \omega_y^2). \quad (3.8)$$

### 1.3.3. Интегрирование функций.

Интегрирование функции может рассматриваться как вычисление её Фурье-образа в точке  $\nu = 0$ .

Другой подход к интегрированию функций возможен через её свертку с функцией, тождественно равной единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x) dx = E(x) * 1(x). \quad (3.9)$$

### 1.3.4. Вычисление моментов.

Вычисление моментов функций

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n E(x) dx \quad (3.10)$$

реализуется через операции преобразования Фурье и дифференцирование.

Если разложить экспоненциальное ядро в выражении для преобразования Фурье в степенной ряд, то

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \left[ 1 - j\omega x + (j\omega x)^2 - (j\omega x)^3 + \dots \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (-j\omega)^n, \quad (3.11)$$

откуда получим

$$m_n = (-j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(0). \quad (3.12)$$

Таким образом,  $n$ -кратное дифференцирование Фурье-образа анализируемой функции в точке  $\nu = 0$  позволяет вычислить соответствующие моменты.

### 1.3.5. Преобразование Френеля.

Преобразование Френеля определяется следующим образом:

$$\Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j(2\pi\nu + x)^2) dx. \quad (3.13)$$

Введем  $\mu = 2\nu$ , тогда

$$\begin{aligned}\Phi(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j2\pi\mu x) \exp(-j2\pi\nu^2) \exp(-jx^2) dx = \\ &= \exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} [E(x) \exp(-jx^2)] \exp(-j2\pi\mu x) dx\end{aligned}\quad (3.14)$$

Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Френеля функции  $E(x)$ , её необходимо умножить на  $\exp(-jx^2)$ , выполнить преобразование Фурье и полученный Фурье-образ  $F(\mu)$  умножить на  $\exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right)$ .

Другой метод реализации преобразования Френеля основан на использовании теоремы Бореля о свертке и табличном значении

$$F\left(\exp(-jx^2)\right) = j\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{j(2\pi\nu)^2}{4}\right). \quad (3.15)$$

Отсюда получим выражение для преобразования Френеля через свертку Фурье-образа с экспоненциальной функцией:

$$\Phi(\nu) = j\sqrt{\pi} \exp\left[j\left((2\pi\nu)^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right] F(2\nu) * \exp(j\nu^2). \quad (3.16)$$

### 1.3.6. Преобразование Меллина.

Преобразование Меллина мы вкратце упоминали в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», когда говорили о проблеме распознавания образов, инвариантном к изменению масштаба. Двумерное преобразование Меллина функции  $E(x, y)$  определяется следующим образом:

$$M(ju, jv) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(x, y) x^{-ju-1} y^{-jv-1} dx dy \quad (3.17)$$

Нетрудно видеть, что преобразование Меллина функции  $E(x, y)$  может быть представлено как преобразование Фурье функции  $E(\exp(\xi), \exp(\eta))$ , т.е.

$$M(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\exp(\xi), \exp(\eta)) \exp(-j2\pi(\xi u + \eta v)) d\xi d\eta. \quad (3.18)$$



Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Меллина функции  $E(x, y)$ , необходимо выполнить логарифмическое преобразование её координат, а затем преобразование Фурье. Логарифмическое преобразование координат легко выполнить в тракте ввода компьютерными методами.

Преобразование Меллина представляет интерес в силу того, что оно, в отличие от преобразования Фурье, инвариантно к изменению масштаба. Действительно, если имеем две функции, одна из которых представляет собой масштабированную версию другой  $E(x, y)$  и  $E(ax, by)$ , то из определения (3.16) следует, что

$$M(E(ax, by)) = a^{-ju-jv} M(E(x, y)). \quad (3.19)$$

### 1.3.7. Преобразование Радона.

Преобразование Радона используется в томографии для получения информации о строении трехмерного объекта по совокупности его проекций. Преобразование Радона ставит в соответствие функции  $E(r, \varphi)$ , заданной в полярных координатах, функцию  $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$ , при этом значение  $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$  в точке  $(l, \Theta)$  обозначается  $[\mathfrak{R}_E](l, \Theta)$ . Радоновский образ функции  $E(r, \varphi)$  определяется следующим образом:

$$[\mathfrak{R}_E](l, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\sqrt{l^2 + z^2}, \Theta + \arctg\left(\frac{z}{l}\right)\right] dz. \quad (3.20)$$

При  $l = 0$  радоновский образ имеет вид

$$[\mathfrak{R}_E](0, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[z, \Theta + \frac{\pi}{2}\right] dz. \quad (3.21)$$

Радоновский образ представляет собой интеграл от функции  $E(r, \varphi)$  вдоль некоторой прямой  $L$ , расположенной на расстоянии  $l$  от начала координат и образующей угол  $\Theta$  с положительным направлением оси  $y$ .

Для того, чтобы установить связь между преобразованием Радона и преобразованием Фурье, используется теорема о проекциях, непосредственно следующая из определения этих преобразований. Введем двумерное преобразование Фурье в полярных координатах:

$$[F_{EP}](R, \Phi) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |r| E(r, \varphi) \exp[-2\pi jrR \cos(\Phi - \varphi)] dr d\varphi. \quad (3.22)$$

Введем одномерное преобразование Фурье функции двух переменных вдоль линии  $L$ , которое обозначим  $F_{EL}$ , тогда нетрудно видеть, что

$$F_p = F_L \mathfrak{R}. \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что для того, чтобы выполнить преобразование Радона, достаточно выполнить двумерное и одномерное преобразования Фурье.

### 1.3.8. Вычитание изображений.

Как мы уже изучали ранее, при записи голограммы Фурье изображения  $E_1(x)$  с плоской внеосевой опорной волной, формируемой точечным источником, находящимся в передней фокальной плоскости Фурье-преобразующей линзы в точке  $x_0$ , в предположении линейного оператора голографической регистрирующей среды, голограмма описывается выражением

$$\begin{aligned} H_1(\nu) &= [\exp(j2\pi\nu x_0) + F_1(\nu)] [\exp(j2\pi\nu x_0) + F_1(\nu)]^* = \\ &= 1 + F_1(\nu) F_1^*(\nu) + F_1(\nu) \exp(-j2\pi\nu x_0) + F_1^*(\nu) \exp(j2\pi\nu x_0) \end{aligned}, \quad (3.24)$$

где астериск обозначает комплексное сопряжение, а  $F_1(\nu)$  - Фурье-образ. Запишем вторую голограмму Фурье  $H_2(\nu)$  с опорной волной, имеющей сдвиг фазы  $i\pi$  по сравнению с опорной волной, использованной при записи первой голограммы

$$\begin{aligned} H_2(\nu) &= [\exp(j2\pi\nu x_0 + i\pi) + F_2(\nu)] [\exp(j2\pi\nu x_0 + i\pi) + F_2(\nu)]^* = \\ &= 1 + F_2(\nu) F_2^*(\nu) + F_2(\nu) \exp(-j2\pi\nu x_0 - i\pi) + F_2^*(\nu) \exp(j2\pi\nu x_0 + i\pi) = \\ &= 1 + F_2(\nu) F_2^*(\nu) - F_2(\nu) \exp(-j2\pi\nu x_0) - F_2^*(\nu) \exp(j2\pi\nu x_0) \end{aligned}. \quad (3.25)$$

Сложим эти голограммы, используя, например, метод записи наложенных голограмм

$$\begin{aligned} H_1(\nu) + H_2(\nu) &= 2 + |F_1(\nu)|^2 + |F_2(\nu)|^2 + \\ &+ (F_1(\nu) - F_2(\nu)) \exp(-j2\pi\nu x_0) + (F_1^*(\nu) - F_2^*(\nu)) \exp(j2\pi\nu x_0) \end{aligned}. \quad (3.26)$$

Осветив голограмму (3.25) плоской волной и выполнив преобразование Фурье дифрагировавших волн, получим

$$\begin{aligned} F(H_1(\nu) + H_2(\nu)) &= 2\delta(x) + F(F_1(\nu) F_1^*(\nu)) + F(F_2(\nu) F_2^*(\nu)) + \\ &+ (E_1(x) - E_2(x)) * \delta(x - x_0) + (E_1^*(x) - E_2^*(x)) * \delta(x + x_0) \end{aligned}, \quad (3.27)$$

Где символ \* обозначает свертку. Первое слагаемое в полученном выражении представляет собой дифракционно-ограниченное изображение точечного источника, расположенное в точке  $x=0$  (в предположении, что восстанавливающий голограмму пучок формируется точечным источником, расположенным на главной оптической оси). Второй и третий члены – автокорреляционные функции изображений  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$ , симметричные относительно главной оптической оси, а четвертый и пятый слагаемые – результаты вычитания функций  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$ , расположенные симметрично относительно главной оптической оси на расстояниях  $x_0$  от неё.

Вычитание изображений имеет большое практическое значение. Например, при грамотной маскировке объектов на местности активные методы поиска таких объектов очень часто оказываются неэффективными. Сравнение же двух одновременных изображений одного и того же участка местности с использованием метода вычитания изображений позволяет сразу же обнаружить происшедшие изменения и, соответственно, принять меры к их более детальной разведке.

Литература к Теме 3.

1. Г.И.Василенко, Л.М.Цибулькин, Голографические распознающие устройства, М.: Радио и связь, 1985.

## Тема 4. Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений.

В предыдущих лекциях, а также в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», говоря о применении корреляционного алгоритма в задаче распознавания образов и, в частности, о голографических корреляторах, мы упоминали такое понятие как отношение сигнал/помеха в корреляционной плоскости, но не определяли его строго и не исследовали факторы, влияющие на величину этого отношения. В данной теме мы рассмотрим это понятие более детально.

Говоря о корреляционном алгоритме распознавания образов в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», мы выяснили, что решение о распознавании принимается на основании вычисления функции взаимной корреляции объектного (предъявляемого) и эталонного изображений. Если эти изображения идентичны, то функция из взаимной корреляции (ВКФ) является автокорреляционной функцией (АКФ) и, в общем случае, для сложных изображений имеет вид, представленный на Рис.3.1. сплошной кривой. Центральный пик на этом рисунке называется глобальным максимумом автокорреляционной функции (ГМ АКФ) и именно он служит сигналом распознавания. Для сравнения на рис.4.1. пунктиром приведена АКФ прямоугольного импульса (в оптике эта функция используется для описания функции зрачка или апертуры).

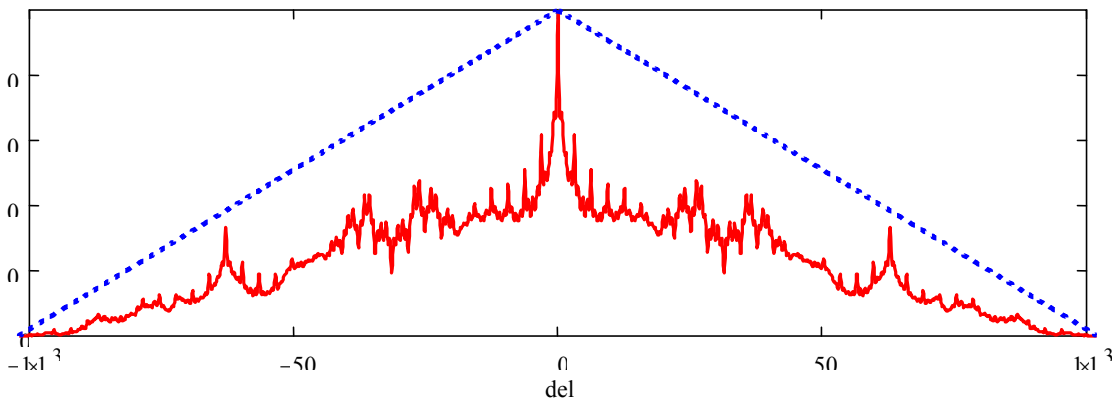


Рис.4.1. Автокорреляционные функции сложного сигнала (сплошная кривая) и прямоугольного импульса (штриховая линия).

Если ВКФ строится голографическим коррелятором (Рис.4.2.), то ГМ АКФ может рассматриваться как восстановленное голограммой изображение точечного опорного источника  $\delta$ , использованного при записи голограммы Фурье эталонного изображения.

Из рисунка 4.1. видно, что кроме ГМ АКФ присутствуют также и другие пики, меньшей амплитуды – боковые максимумы АКФ. Если сравниваются не полностью идентичные изображения, а лишь отчасти похожие, то их

корреляционное распределение состоит, условно говоря, из двух – АКФ идентичных частей и ВКФ различных. ВКФ различных изображений иногда называют кросс-корреляционной функцией, которая, в отличие от АКФ, в общем случае не имеет ГМ.

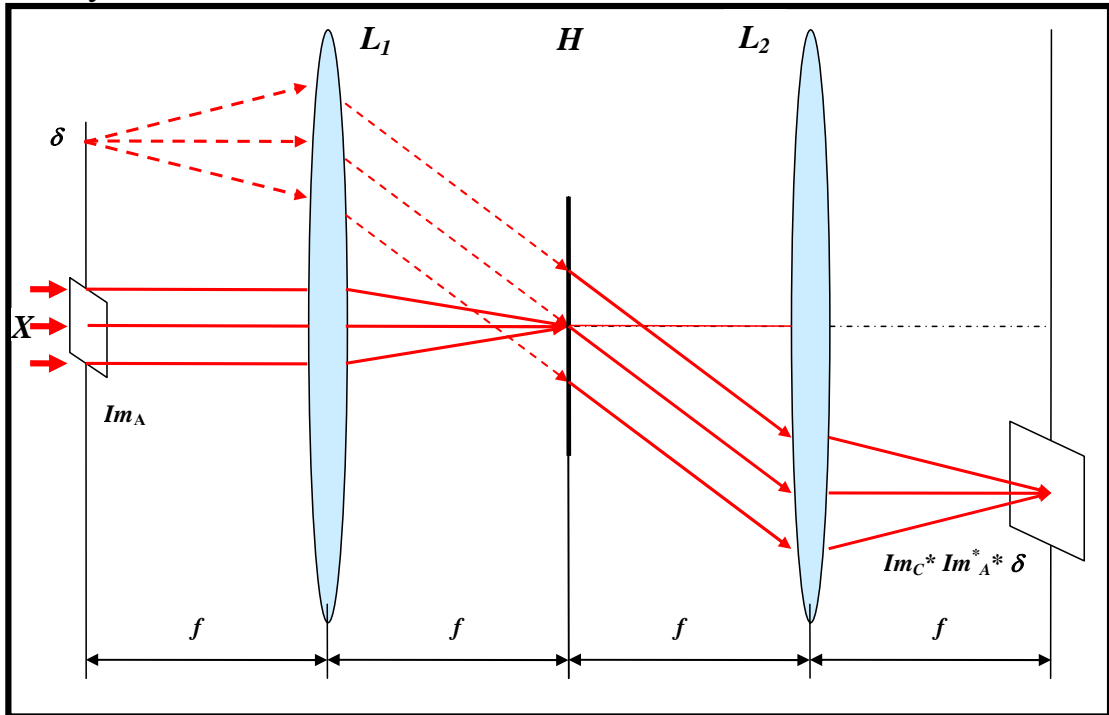


Рис.4.2. Схема голографического коррелятора Ван дер Люгта.

Если амплитуды боковых максимумов АКФ и/или ВКФ сравнимы с амплитудой ГМ АКФ, или превосходят ее, то эти боковые максимумы являются помехой. Для примера, на Рис.4.3. приведены АКФ (сплошная линия) и ВКФ (пунктир) двух различных функций. Видно, что в случае ВКФ ГМ отсутствует. Чем больше отличие объектного изображения от эталонного, тем больше амплитуды боковых максимумов и ниже амплитуда ГМ АКФ. Поэтому необходимо оценить отношение этих амплитуд.

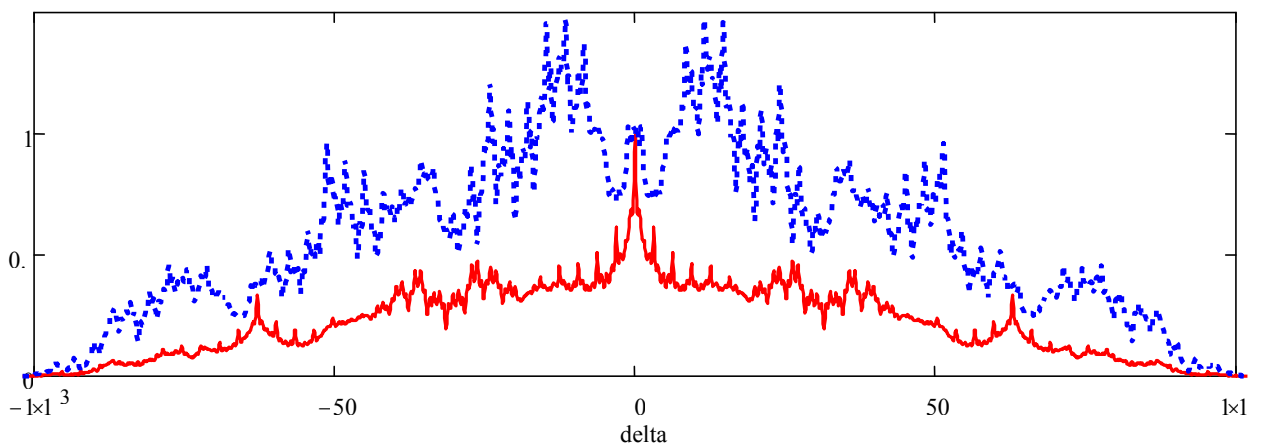


Рис.4.3. АКФ (сплошная линия) и ВКФ (пунктир)

Важное замечание. Иногда в литературе боковые максимумы АКФ и ВКФ трактуются как шум и, соответственно, используется термин отношение сигнал/шум. Такая трактовка некорректна, так как боковые максимумы АКФ и ВКФ несут в себе информацию и сравниваемых изображениях (функциях). В курсе ОТИИ, в теме «Линейный предсказатель случайных процессов» мы изучили, что именно боковые максимумы АКФ и ВКФ используются для реализации модели линейного предсказателя. В то же время. Эти боковые максимумы являются помехой в рамках задачи детектирования ГМ АКФ.

Пусть распределение амплитуд во входной плоскости коррелятора (изображение)  $E(x, y)$  описывается моделью двумерного изотропного случайного поля с функцией корреляции (авто-корреляции)

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \rho(r), \quad (4.1)$$

где  $\sigma^2$  - дисперсия и  $\rho(r)$  - коэффициент корреляции,  $r$  - радиус корреляции. Будем считать поле  $E(x, y)$  статистически однородным так, чтобы можно было осуществить нормировку первого и второго моментов. Введем функцию апертуры (кадрового окна)  $c(x, y)$ , вырезающую из поля  $E(x, y)$  обрабатываемую коррелятором часть  $c(x, y)E(x, y)$ . Голограмма записана с эталонного фрагмента поля  $c(x, y)E_R(x, y)$ .

Опознавание осуществляется на основании вычисления функции взаимной корреляции (для упрощения выражений примем, что функции, описывающие изображения, действительные)

$$K(\Delta_x, \Delta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) E_R(x, y) E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) dx dy, \quad (4.2)$$

при этом, поскольку измерения проводятся квадратичным приемником, нас интересует средняя величина отношения сигнал/помеха по энергии

$$V_0 = \frac{\langle K(0,0) \rangle^2}{\mu^2}, \quad (4.3)$$

где  $\langle K(0,0) \rangle^2$  - среднее значение сигнальной функции, в качестве которой выступает ГМ АКФ, а  $\mu^2$  - средний квадрат помехи. Под помехой мы будем понимать взаимную корреляцию (или кросс-корреляцию) опознаваемого и всех остальных участков поля.

Математическое ожидание функции взаимной корреляции (4.2) по множеству реализаций случайного поля определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle K(\Delta_x, \Delta_y) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \langle E_R(x, y) E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) \rangle dx dy = \\ &= R(\Delta_x, \Delta_y) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = S_R R(\Delta_x, \Delta_y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $S_R$  - площадь опознаваемого изображения в предположении, что функция апертюры равномерна, т.е.  $c(x, y) = Const$  в пределах кадрового окна и  $c(x, y) = 0$  вне его. Из (4.4) ясно видно, что форма сигнальной функции на выходе коррелятора повторяет авто-корреляционную функцию поля  $R(\Delta_x, \Delta_y)$ , а её максимальное значение в среднем описывается выражением

$$\langle K(0, 0) \rangle = R(0, 0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = \sigma^2 S_R = W, \quad (4.5)$$

Здесь  $W$  - энергия опознаваемого изображения.

Средний по ансамблю квадрат помехи может быть определен следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) E_R(x_1, y_1) E_R(x_2, y_2) \overline{E}_R(x_1 + \Delta_x, y_1 + \Delta_y) \overline{E}_R(x_2 + \Delta_x, y_2 + \Delta_y) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) R^2(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x, \Delta_y) R_c(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\overline{E}_R(x, y)$  - часть поля, играющая роль помехи, т.е. часть поля, не записанная на голограмме Фурье, а  $R_c(\Delta_x, \Delta_y)$  - функция автокорреляции кадрового окна. Нетрудно видеть, что если радиус корреляции поля  $r$  много меньше размера опознаваемого изображения, то функция автокорреляции кадрового окна  $R_c(\Delta_x, \Delta_y)$  мало меняется по сравнению с функцией автокорреляции поля  $R_R(\Delta_x, \Delta_y)$ . Это положение иллюстрирует Рис.4.1. – приведенная пунктиром АКФ окна  $R_c(\Delta_x, \Delta_y)$  имеет треугольную форму, в то время, как АКФ поля  $R_R(\Delta_x, \Delta_y)$  меняется быстро. Тогда, выражение (4.6) можно упростить и представить в виде

$$\begin{aligned} \mu^2 &\approx R_c(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_R(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(x,y) dx dy \int_0^{\infty} r R^2(r) dr = \\ &= 2\pi S_R \sigma^4 \int_0^{\infty} r \rho^2(r) dr = 2\pi k S_R \sigma^4 r^2 = 2kW^2 \frac{S_k}{S_R} \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $S_R$  - площадь опознаваемого изображения (эталоны),  $S_k = \pi r^2$  - площадь корреляции, а  $k$  - коэффициент, зависящий от функции корреляции поля.

Из (4.7) ясно видно, что среднее квадратичное значение помехи прямо пропорционально энергии опознаваемого изображения и обратно пропорционально отношению размера изображения к радиусу корреляции поля.

Используя (4.5) и (4.7), получим оценку отношения сигнал/помеха

$$V_0 \approx \frac{1}{2k} \frac{S_R}{S_k}. \quad (4.8)$$

Таким образом, отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений прямо пропорционально числу зон корреляции поля в площади опознаваемого изображения (эталоны). Отсюда следует практический вывод, о котором мы «на пальцах» говорили в курсе ОТИИ – для повышения величины отношения сигнал/помеха есть два пути – увеличение размера эталона и уменьшение радиуса корреляции поля. Последнее может быть достигнуто посредством введения дополнительной фильтрации в частотной плоскости, ослабляющей низкочастотные компоненты в спектре изображения.

Рассмотрим более подробно ряд практически важных случаев.

### 1. Строчный коррелятор.

Под строчным коррелятором мы будем понимать коррелятор, производящий вычисление ВКФ только по одной координате. В этом случае функция кадрового окна описывается функцией

$$c(x) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L}\right), \quad (4.9)$$

где  $L$  – длина опознаваемой строки. Функция автокорреляции кадрового окна имеет вид, представленный на Рис.4.1. пунктиром и описывается выражением

$$R_c(\Delta_x) = 2L\Lambda\left(\frac{\Delta_x}{2L}\right), \quad (4.10)$$

где  $\Lambda$  - треугольная функция.



Максимальное значение сигнальной функции (ГМ АКФ)

$$\langle K(0) \rangle = 2L\sigma^2 = W. \quad (4.11)$$

Средний квадрат помехи

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x) R_c(\Delta_x) d\Delta_x = 4L \int_0^{\infty} R^2(\Delta_x) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L}\right) d\Delta_x. \quad (4.12)$$

При экспоненциальной корреляционной функции поля, т.е.

$$R(\Delta_x) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\Delta_x}{r}\right). \quad (4.13)$$

Выражение для среднего квадрата помехи примет вид

$$\mu^2 = 2L\sigma^4 r \left(1 - \frac{r}{4L}\right) = \frac{W^2 r}{2L} \left(1 - \frac{r}{4L}\right), \quad (4.14)$$

А отношение сигнал/помеха

$$V_0 = 2 \frac{L}{r} \left(1 - \frac{r}{4L}\right)^{-1}. \quad (4.15)$$

Таким образом, при достаточно большой величине отношения  $\frac{L}{r}$ , отношение сигнал/помеха будет пропорционально числу радиусов корреляции поля в длине эталона.

2. Площадной коррелятор, прямоугольная апертура размером  $2L_x \times 2L_y$ .

Прямоугольное кадровое окно используется чаще всего. Оно может быть описано функцией

$$c(x, y) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L_x}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{2L_y}\right). \quad (4.16)$$

Максимальное значение сигнальной функции

$$\langle K(0,0) \rangle = 4L_x L_y \sigma^2 = W, \quad (4.17)$$

А средний квадрат помехи

$$\mu^2 = 16L_xL_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x, \Delta_y) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left(1 - \frac{\Delta_y}{2L_y}\right) d\Delta_x d\Delta_y. \quad (4.18)$$

При экспоненциальной функции автокорреляции

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}{r}\right)$$

Выражение для среднего квадрата помехи примет вид (мы воспользуемся табличными значениями, приведенными в [2])

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 16L_xL_y\sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[ \int_{\Delta_x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2 - \Delta_x}} \exp\left(-\frac{2y}{2}\right) dy - \int_{\frac{2\Delta_x}{r}}^{\infty} y \exp(-y) dy \right] d\Delta_x = \\ &= 16L_xL_y\sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[ \Delta_x K_1\left(\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r^2}{8L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r\Delta_x}{4L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) \right] d\Delta_x = \quad (4.19) \\ &= 16L_xL_y\sigma^4 \left[ \frac{r}{4} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{r^3}{8L_y} \Gamma(2) \Gamma(1) - \frac{r^2}{8L_x} + \frac{3r^4}{64L_xL_y} \right] = \\ &= 2\pi L_xL_y\sigma^4 r^2 \left[ 1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_xL_y} \right] = W^2 \frac{S_K}{S_R} \left[ 1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_xL_y} \right] \end{aligned}$$

где  $K_1(x)$  - цилиндрическая функция мнимого аргумента, а  $\Gamma(x)$  - гамма-функция. В результате, величина отношения сигнал/помеха будет описываться выражением

$$V_0 = 2 \frac{S_R}{S_K} \left[ 1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_xL_y} \right]^{-1}. \quad (4.20)$$

Здесь мы снова видим, что величина отношения сигнал/помеха пропорциональна числу зон корреляции, укладывающихся в эталонном изображении, т.е. величине отношения  $\frac{S_R}{S_c}$  или, что эквивалентно (с учетом формы кадрового окна), отношению размера изображения к радиусу корреляции  $\frac{L}{r}$ . Аналогичные результаты были получены и для других форм кадрового окна (круглого) и других функций автокорреляции поля –

величины отношения сигнал/помеха во всех случаях пропорциональны числу зон корреляции в эталонном изображении, различия лишь в коэффициентах. Для иллюстрации, на Рис.3.4. приведены в логарифмических координатах зависимости величин отношения сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов. Пунктиром показаны прямо-пропорциональные зависимости, к которым стремятся величины отношения при увеличении числа радиусов корреляции в размере изображения.

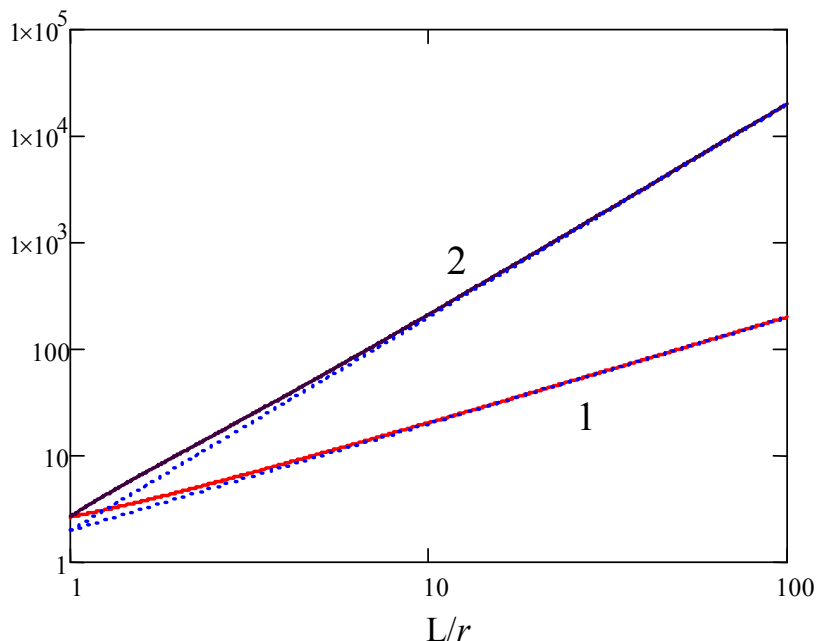


Рис.4.4. Зависимости величин отношения сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов.

Отсюда следует важный практический вывод – для увеличения отношения сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений можно использовать два способа:

1. Увеличить размер обрабатываемых изображений;
2. Уменьшить радиус корреляции эталонного изображения.

Поскольку АКФ связана со спектром Винера обрабатываемого изображения преобразованием Фурье, то изменение радиуса корреляции возможно методом пространственной фильтрации в спектральной плоскости – ослаблением, вплоть до полного подавления низких пространственных частот в спектре. При этом, как следует из формулы (4.20), по мере ослабления низких частот величина отношения сигнал/помеха в корреляционной плоскости должна возрастать. На этом основано применение так называемых инверсных голографических фильтров, т.е. голограмм, передаточная функция которых, в отличие от голографического

согласованного фильтра, описывается не  $H(\nu) = S^*(\nu)$ , где  $S(\nu)$  - спектр эталона, а выражением  $H(\nu) = \frac{1}{S(\nu)}$ .

Казалось бы, логика, основанная на зависимости (4.20), может быть продолжена до бесконечности – чем меньше радиус корреляции, тем выше отношение сигнал/помеха. Однако, рост отношения сигнал/помеха происходит только до определенного предела, а затем происходит его резкое снижение. Для объяснения этого феномена вспомним, что информация отличается от шума наличием внутренней связности, т.е. внутренней коррелированностью. В отличие от информации, белый (или серый) шум дельта-коррелирован, т.е. составляющие этого процесса никак не связаны друг с другом. Соответственно, по мере уменьшения радиуса корреляции, ГМ АКФ все более и более приближается к  $\delta$ -функции, что означает разрушение внутренней связности процесса (изображения) и превращение информации в шум.

В связи с тем, что радиус корреляции может быть изменен посредством пространственной фильтрации в спектральной плоскости, вспомним, что в схеме голографии Фурье голограмма – это зарегистрированная картина интерференции плоского опорного пучка с Фурье-образом (спектром) эталонного изображения. Рассмотрим процесс записи голограммы Фурье с плоским опорным пучком подробнее.

На рис.4.5. изображены сечения распределения амплитуд по одной из координат сигнального (спектра Фурье  $S_R(\nu)$ , аппроксимированного функцией Гаусса) и опорного  $R(\nu) = Const$  пучков.

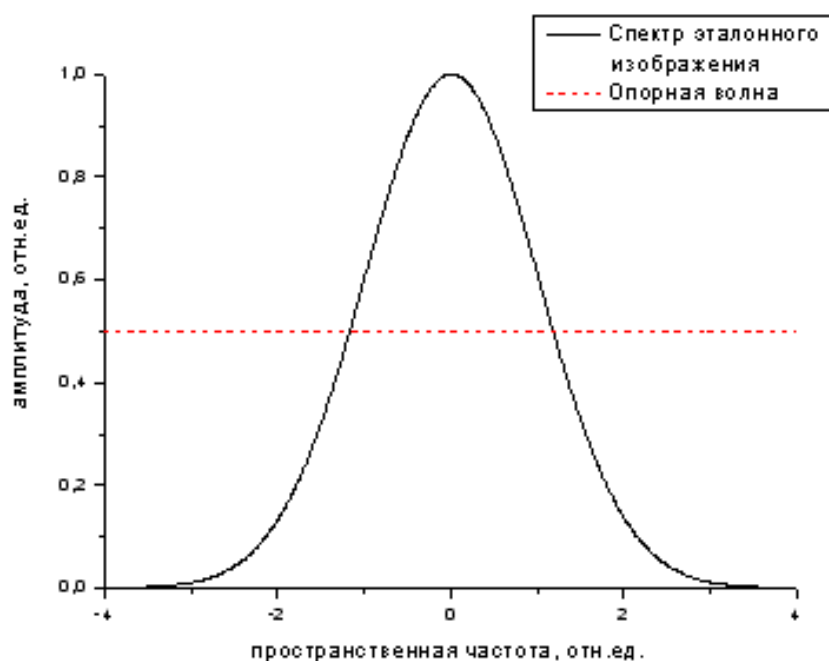


Рис.4.5. Соотношение амплитуд сигнального (сплошная линия) и опорного (штрих) пучков при записи голограммы.

На рис.4.6. приведено распределение амплитуд, возникающее при интерференции этих двух пучков, а также показана видность сформированной интерференционной картины.

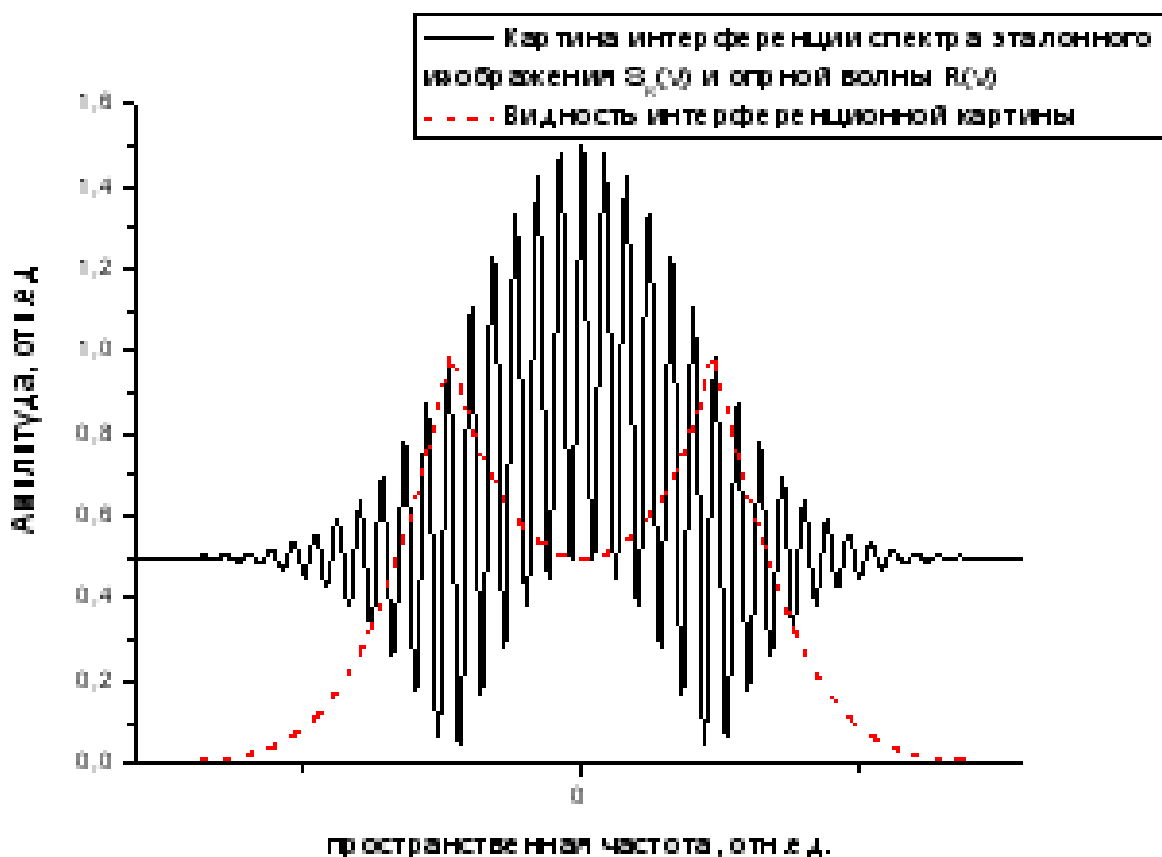


Рис.4.6. Картина интерференции сигнального и опорного пучков. Штриховая линия показывает распределение видности интерференционной картины по пространственным частотам.

Эта интерференционная картина, видность которой равна 1 только на частоте равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков, записывается на регистрирующей среде. Примем для простоты, что регистрирующая среда амплитудная, т.е. модулируемым параметром является пропускание (амплитудное). Для большинства регистрирующих сред, относящихся к классу негативных, характерна зависимость пропускания от экспозиции, приведенная на рис.4.7. Традиционно, выделяют три участка экспозиционной характеристики рис.4.7. – недоэкспозиции а), квазилинейный, часто называемый просто линейным, б) и переэкспозиции в).

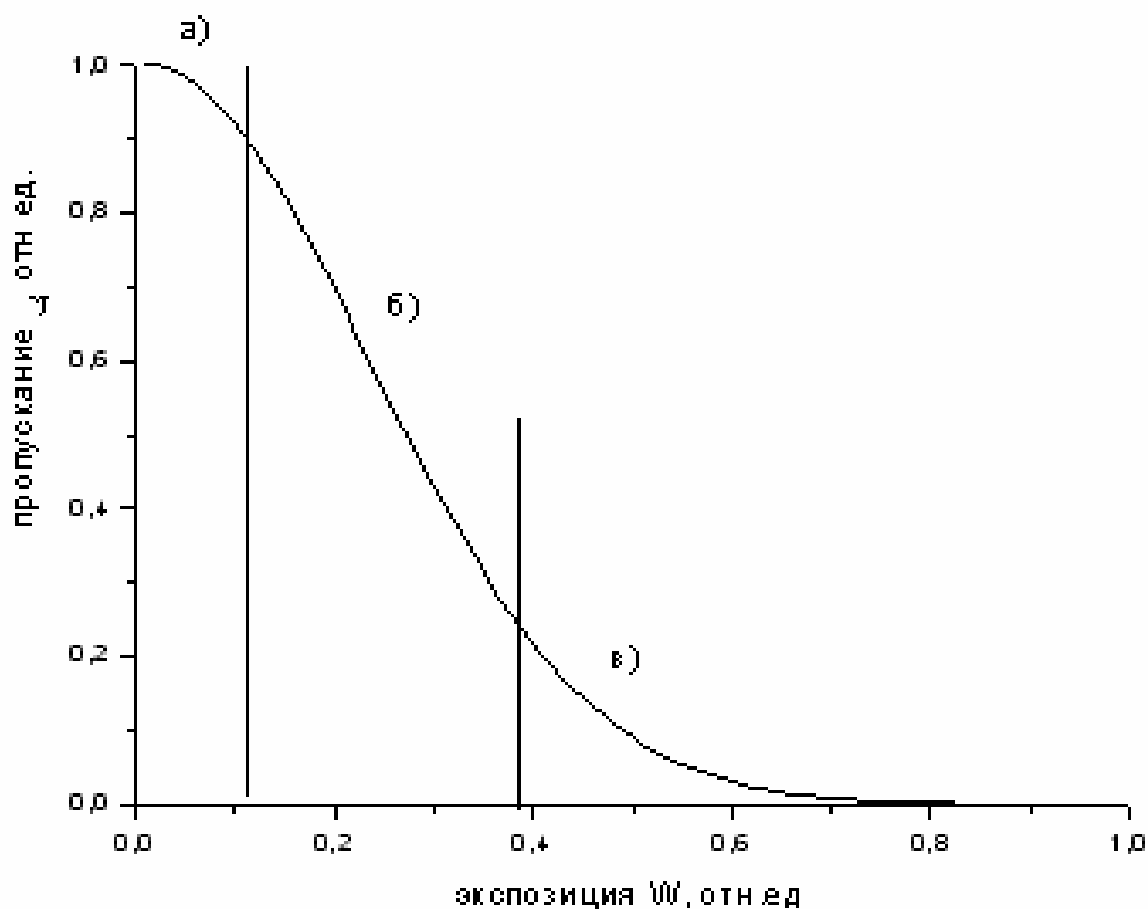


Рис.4.7. Типичная для негативных регистрирующих сред зависимость пропускания от экспозиции.

Голограмма, представляющая собой дифракционную решетку, формируется в результате записи интерференционной картины рис.4.6. на регистрирующей среде с экспозиционной характеристикой рис.4.7. – схематически это изображено на рис.4.8. Квазилинейный участок экспозиционной характеристики для наглядности выделен жирной прямой линией.

Фрагменты интерференционных полос, не попавшие в квазилинейный диапазон, запишутся на регистрирующей среде нелинейно. На рис.4.9. приведена зависимость пропускания записанной голограммы от частоты. Серая область в нижней части – поглощение, обусловленное засветкой от части опорного пучка, немодулированной интерференционной картиной.

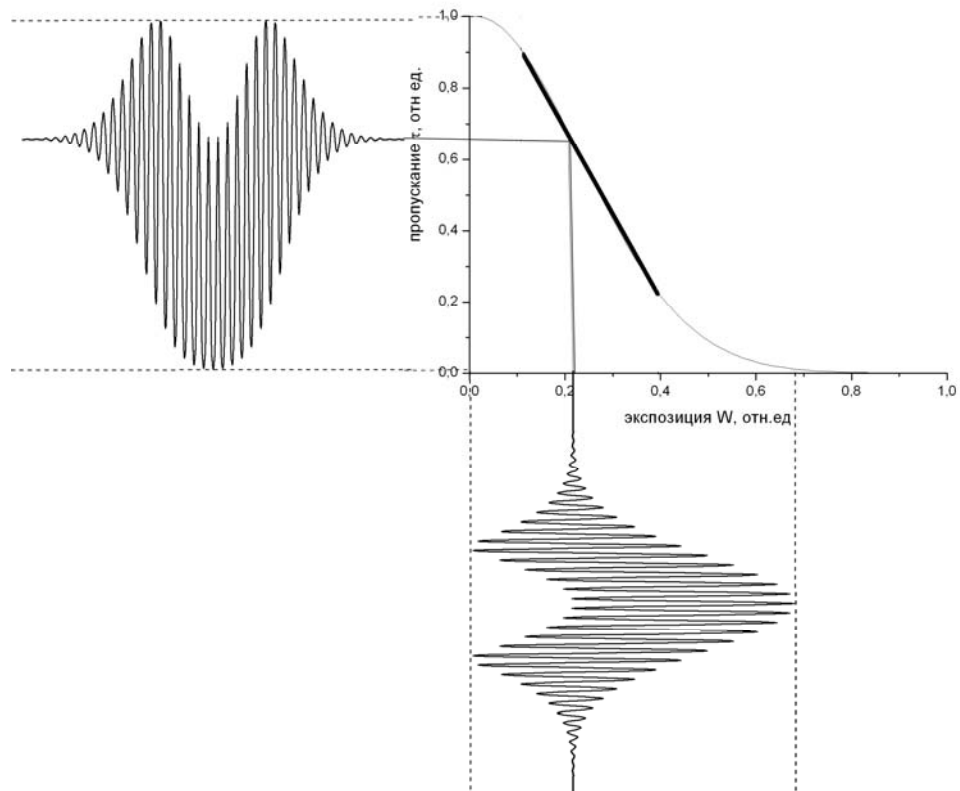


Рис.4.8. Формирование голограммы как дифракционной решетки в результате записи интерференционной картины рис.4.6. на регистрирующей среде с экспозиционной характеристикой рис.4.7.

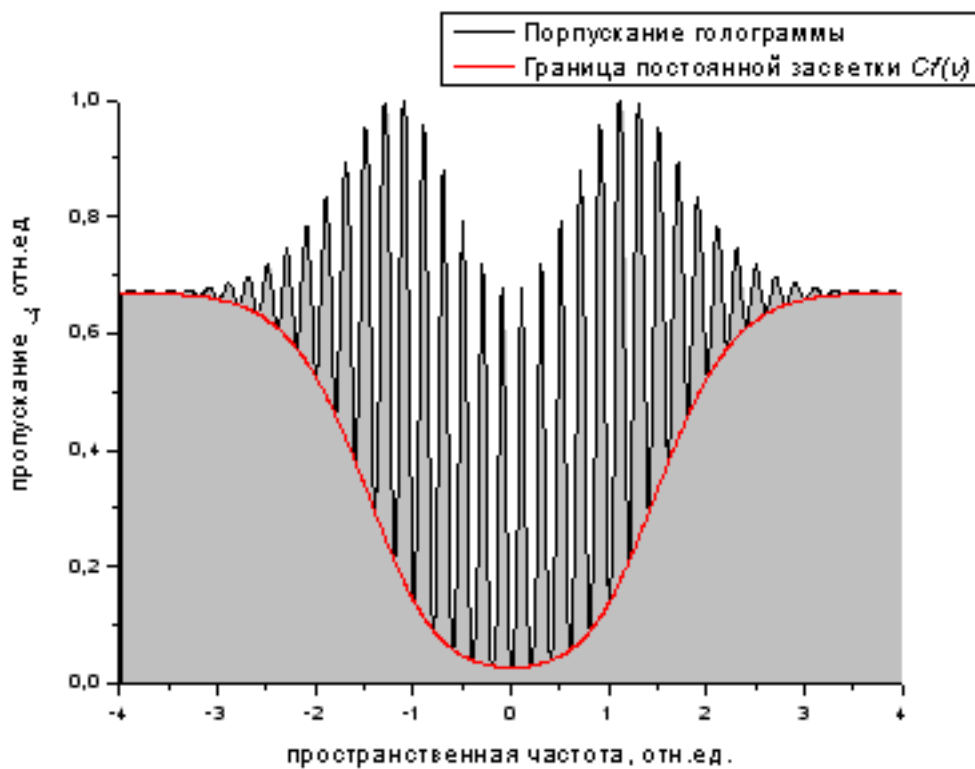


Рис.4.9. Зависимость пропускания от частоты при записи голограммы Фурье.

Рассмотрим, что произойдет при восстановлении такой голограммы плоским опорным пучком постоянной по сечению амплитуды  $P(\nu) = Const$ . Для удобства учета поглощения в серой области рис.4.9. изменим условия задачи и представим, что голограмма не имеет этой области поглощения, а освещается (восстанавливается) пучком с профилем амплитуды  $P'(\nu) = P(\nu) - Cf(\nu)$ , где  $Cf(\nu)$  описывает эту область поглощения (рис.4.10).

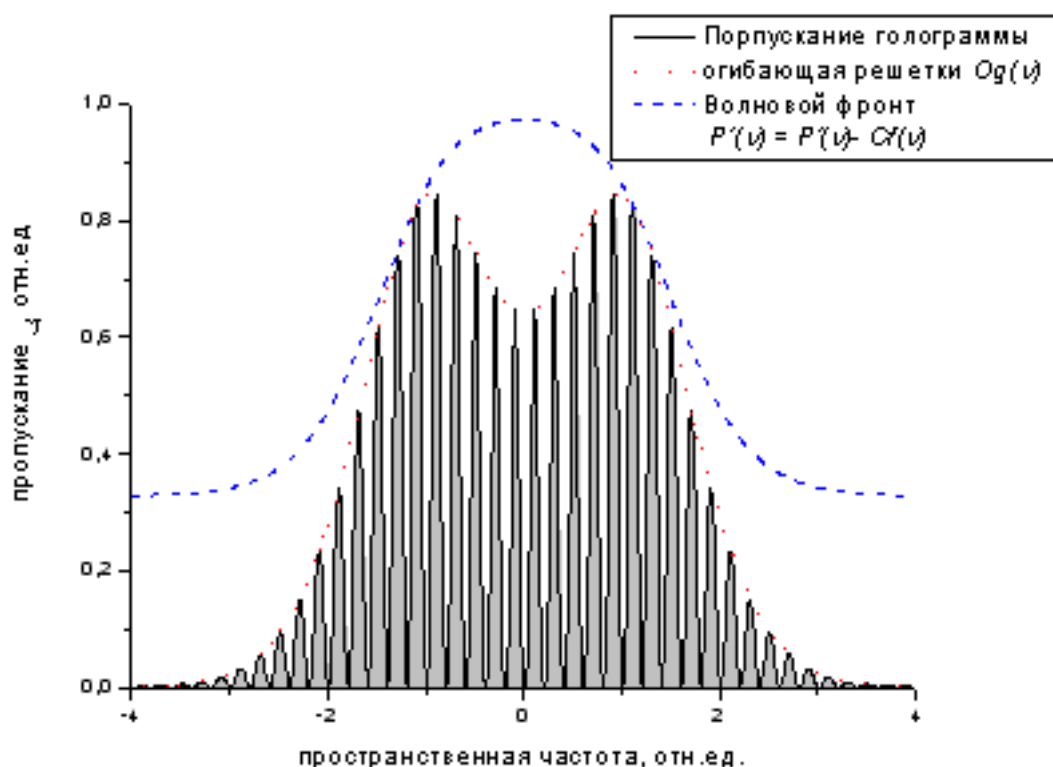


Рис.4.10. Схема восстановления голограммы плоским пучком с распределением амплитуд  $P'(\nu) = P(\nu) - Cf(\nu)$ .

Воспользуемся методом гармонической линеаризации и примем, что решетка имеет синусоидальный профиль пропускания  $\tau(\nu) = t_0 - m \cos(\omega\nu)$ , где  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  - частота решетки,  $m \leq 1$ , т.е.

$$\tau'(\nu) = Og(\nu)\tau(\nu) = Og(\nu)t_0 + Og(\nu)m \cos(\omega\nu)$$

, где  $Og(\nu)$  – огибающая решетки.

Решение задачи дифракции волны  $P'(\nu)$  на решетке  $\tau'(\nu)$  Хорошо известно [2]:



$$H(\nu) = P'(\nu)\tau'(\nu) = P'(\nu)Og(\nu)t_0 + P'(\nu)Og(\nu)\frac{m}{2}\exp(i\omega\nu) + P'(\nu)Og(\nu)\frac{m}{2}\exp(-i\omega\nu)$$
, где  $P'(\nu)Og(\nu)t_0$  – 0-й порядок дифракции,  $P'(\nu)Og(\nu)\frac{m}{2}\exp(i\omega\nu)$  – 1-й порядок,  $P'(\nu)Og(\nu)\frac{m}{2}\exp(-i\omega\nu)$  – +1-й порядок.

Интересующая нас зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты для +1 порядка дифракции приведена на рис.4.11.

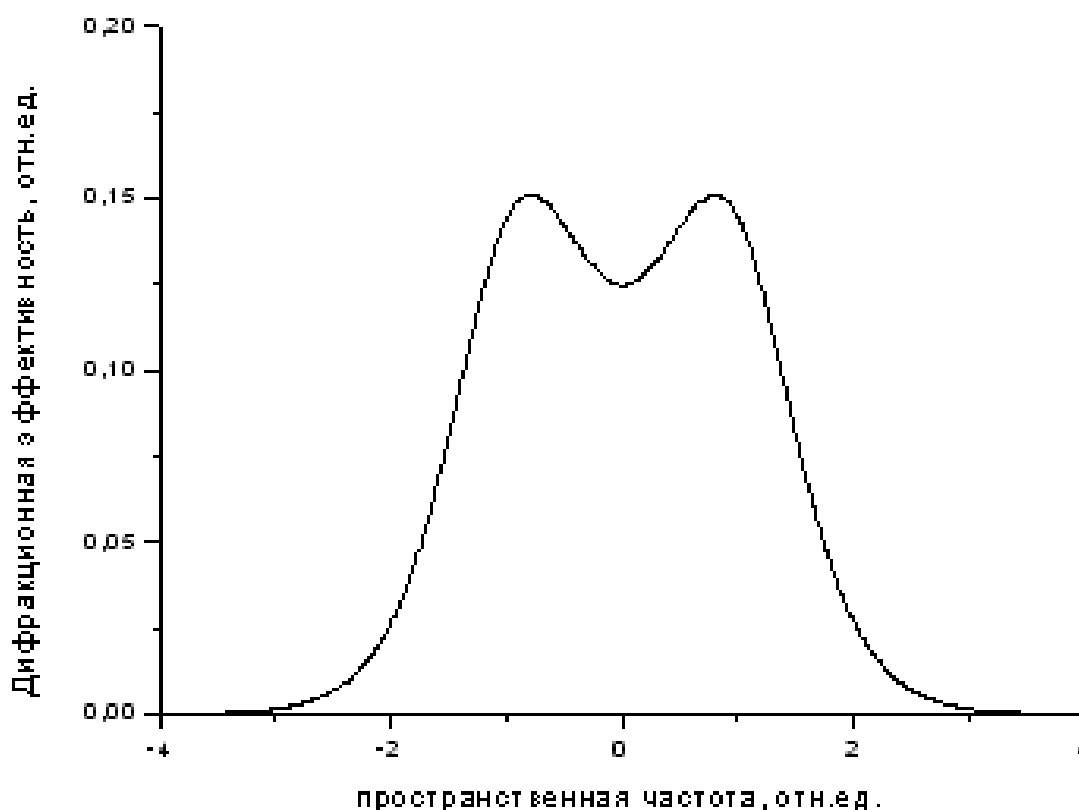


Рис.4.11. Зависимость локальной дифракционной эффективности от частоты в +1 порядке дифракции для решетки с пропусканием  $\tau'(\nu)$ .

Чтобы найти аналогичную зависимость для исследуемой голограммы как дифракционной решетки, необходимо помножить дифракционную эффективность решетки с синусоидальным профилем штриха на коэффициент  $K$ , равный отношению на общей частоте  $\nu'$  Фурье-спектров функций пропускания исследуемой решетки  $g_{Enorm}(\nu)$  и решетки с синусоидальным профилем штриха  $\tau_{Enorm}'(\nu)$ , нормированных по энергии

$$K = \frac{F\{g_{Enorm}(v)\}}{F\{\tau_{Enorm}'(v)\}}$$

Отсюда получим локальную зависимость дифракционной эффективности голограммы от частоты, приведенную на рис.4.12. Несколько большая по сравнению с рис.4.11. величина дифракционной эффективности обусловлена увеличением дифракционной эффективности при нелинейной записи.

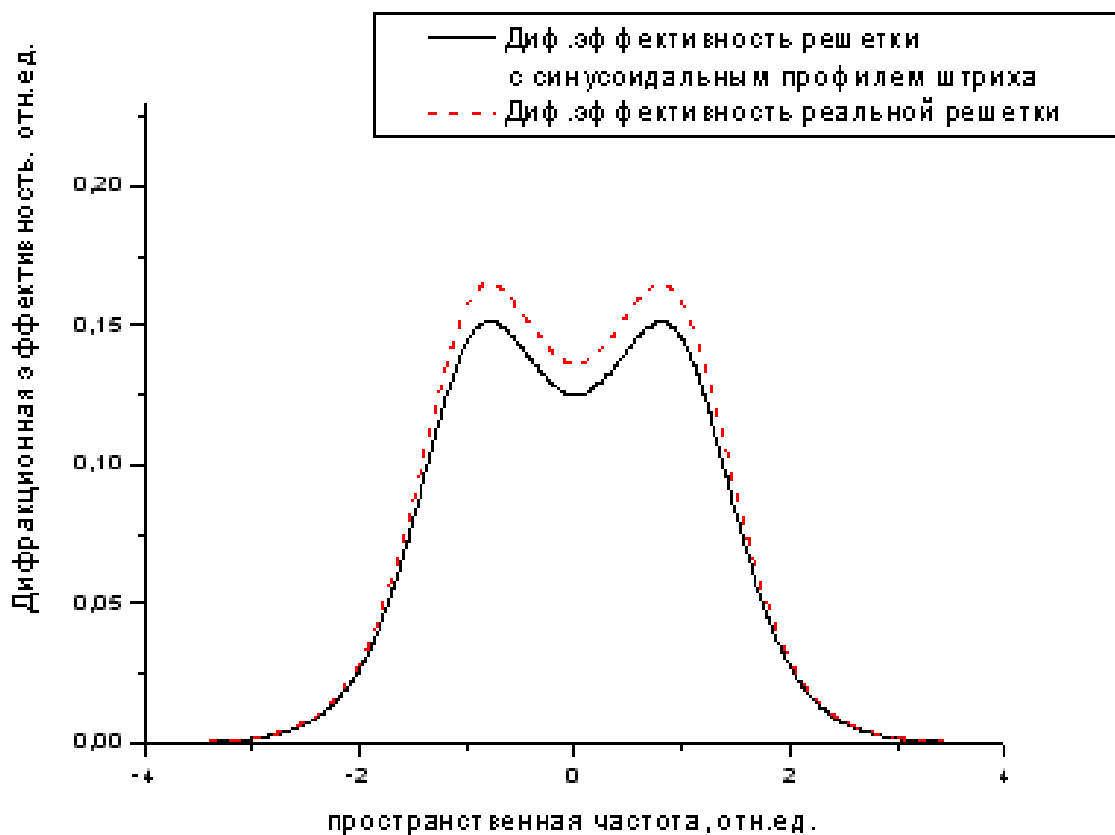


Рис.4.12. Зависимости локальной дифракционной эффективности голограммы, записанной при отношениях амплитуд пучков, приведенных на рис.4.5, от частоты для дифракционной решетки с синусоидальным профилем штриха (сплошная кривая) и реальной с учетом нелинейности записи голограммы (пунктир).

Поскольку мы использовали классическую экспозиционную характеристику регистрирующих сред — зависимость пропускания от экспозиции (рис.4.7.), а физическим механизмом работы голограммы является дифракция, то представляет интерес зависимость дифракционной эффективности, т.е. отношения амплитуды (или интенсивности) волны, дифрагировавшей в интересующий нас порядок дифракции, к амплитуде (или, соответственно, интенсивности) восстанавливающей голограмму волны от условий записи. Соответствующие кривые приведены на рис.4.13 и 4.14.

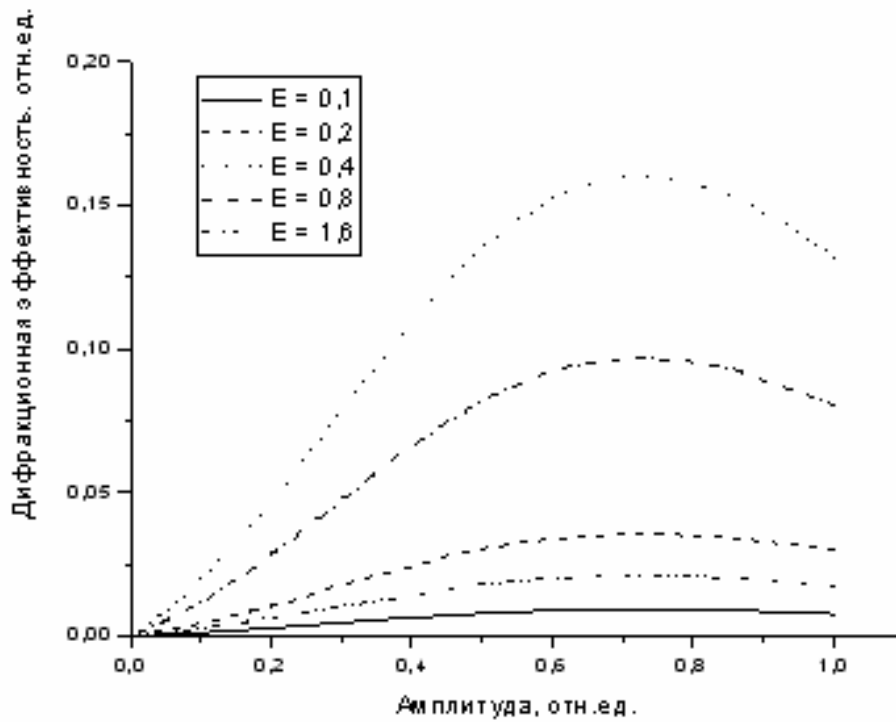


Рис.4.13 Зависимость дифракционной эффективности голограммы от спектра эталонного изображения при различных экспозициях.

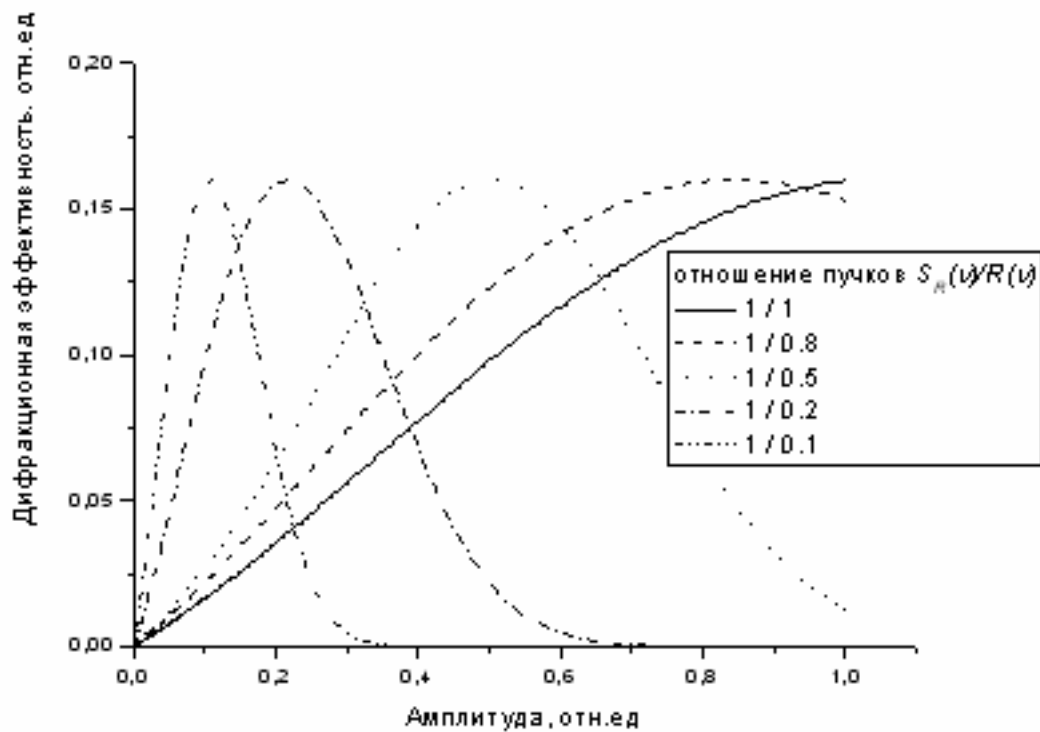


Рис.4.14 Зависимость дифракционной эффективности голограммы от амплитуды спектра эталона при различных отношениях  $\frac{S_R(\nu)}{R(\nu)}$

Обратим внимание, что приведенная на рис.4.12 зависимость локальной дифракционной эффективности голограммы от частоты является передаточной характеристикой схемы голографии Фурье для +1 порядка дифракции. Напомним, что модель голографического коррелятора Ван дер Люгта предполагает, что голограмма Фурье описывается выражением

$$H(v_x, v_y) \propto S_R^*(v_x, v_y),$$

т.е. её зависимость локальной дифракционной эффективности от частоты теоретически пропорциональна спектру Фурье эталонного изображения. Как видно из рис.4.62, это имеет место только для ограниченного диапазона пространственных частот, выше частоты равенства амплитуд опорного и сигнального пучков при записи голограммы. В области частот ниже частоты равенства амплитуд зависимость видности интерференционной картины от частоты не пропорциональна спектру эталона. Если диапазон частот, в котором видность интерференционной картины пропорциональна спектру (согласована со спектром) попадает в квазилинейный участок зависимости пропускания от экспозиции на рис.4.7., то он записывается квазилинейно. В области частот ниже частоты равенства имеет место переэкспозиция и, как следствие, сначала насыщение (кривая на рис.4.12 становится более пологой), а потом и т.н. «провал» дифракционной эффективности в области низких пространственных частот.

Зависимость, приведенная на рис.4.12., характерна для голограмм Фурье, условно называемых высокочастотными (рис.4.15), поскольку в диапазоне низких пространственных частот такая голограмма во-первых не согласована, а во-вторых, -частоты «не прописаны». Повторим, что при записи «высокочастотной» голограммы Фурье необходимо выбирать условия записи таким образом, чтобы «правой» границе квазилинейного участка на рис. 4.7. соответствовала точка равенства амплитуд сигнального и опорного пучков.

Если частота равенства локальных амплитуд сигнального и опорного пучков достаточно низка для того, чтобы участок насыщения не перешел в «провал» дифракционной эффективности, или даже был неявно выражен, вплоть до полного отсутствия, то такие голограммы, характеризующиеся отсутствием «провала» дифракционной эффективности в области нулевых пространственных частот, условно называются низкочастотными. Для таких голограмм, в силу ограниченности динамического диапазона регистрирующих сред, область высоких пространственных частот попадает в диапазон недоэкспозиции и, соответственно, на голограмме не «прописывается».

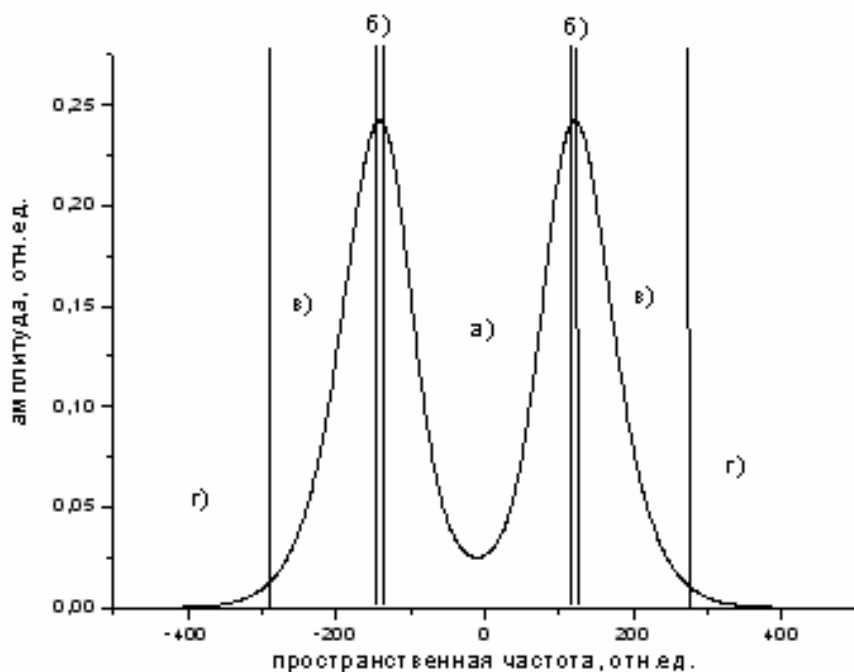


Рис. 4.15. Зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты. «Высокочастотная» голограммы. Субдиапазоны: а) переэкспозиции и инверсный; б) насыщения; в) согласованный; г) недоэкспозиции.

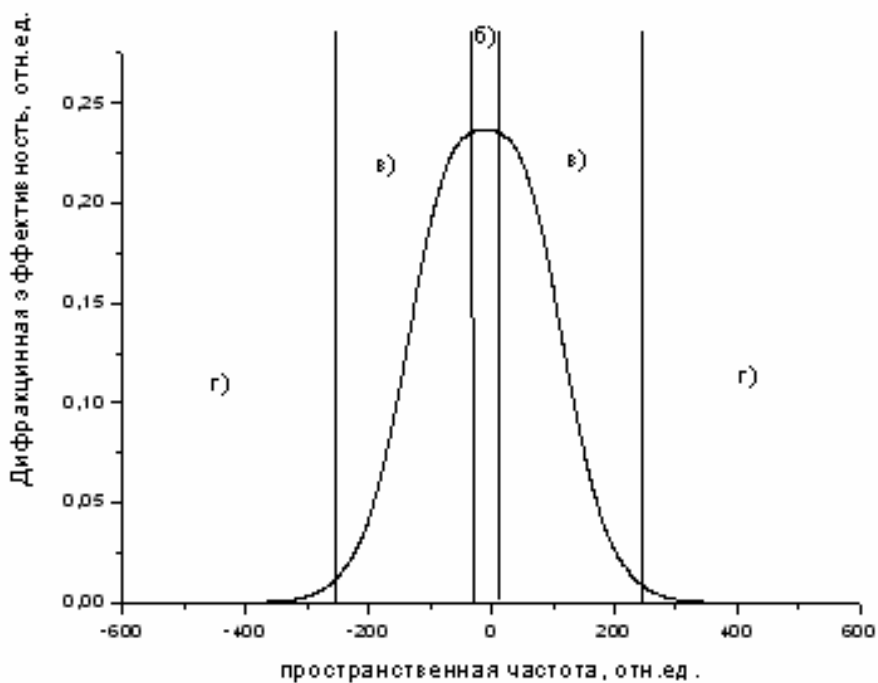


Рис. 4.16. Зависимость дифракционной эффективности от пространственной частоты. «Низкочастотная» голограммы. Субдиапазоны: б) насыщения; в) согласованный; г) недоэкспозиции.

Таким образом, в силу свойства ограниченности динамического диапазона регистрирующих сред, в том числе, голографических, при записи реальной голограммы Фурье неизбежно возникает дополнительная полосовая фильтрация. В результате, голограмма оказывается согласованной со спектром эталонного изображения только в ограниченном частотном диапазоне. Этот механизм и может быть использован для оптимизации величины отношения сигнал-помеха в корреляционной плоскости.

Литература к Теме 4.

1. Е.И.Шубников, Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений. Оптика и спектроскопия, 1987, т.62., вып.2., стр.450 – 456.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

---

## КАФЕДРА ФОТОНИКИ И ОПТОИНФОРМАТИКИ

<http://phoi.ifmo.ru>

Заведующий – профессор, д.ф.-м.н., лауреат премии Ленинского Комсомола С. А. Козлов

Основное направление работы кафедры определено ее названием и связано с развитием нового поколения информационно-телекоммуникационных систем, основанных на оптических технологиях.

Кафедра готовит бакалавров и магистров по направлению 554600 «Фотоника и оптоинформатика». Подготовка специалистов ведется в тесном сотрудничестве с компаниями, работающими в области фотоники и оптоинформатики. Со второго курса студенты получают возможность участвовать в работе этих компаний, а также в научно-исследовательских и опытно конструкторских проектах Университета ИТМО, других научно-инновационных центров Санкт-Петербурга, проводимых по госзаказу Министерства РФ, российским и международным грантам и контрактам.

Лекционные курсы, которые читают ведущие специалисты кафедры, включают изучение физических основ и техники оптической записи, обработки и передачи информации; знакомят студентов с аналоговыми и цифровыми оптическими вычислениями, оптическими технологиями искусственного интеллекта, квантовой информатикой. Значительное внимание уделяется современным технологиям программирования и инновационному менеджменту.

На кафедре разработаны и действуют уникальные лабораторные практикумы по изучению лазерных систем, голографических технологий записи, преобразования и воспроизведения информации, цифровых оптических вычислений и оптических процессоров нечёткой логики для

систем искусственного интеллекта, а также по фемтосекундной оптике и фемтотехнологиям.

Научным консультантом кафедры по направлениям «Голография» и «Оптоинформатика» долгое время был академик РАН Ю.Н.Денисюк.

Студенты кафедры участвуют в Международных конференциях, публикуют свои работы в ведущих мировых изданиях, являются членами Российских и Международных научных обществ. Среди студентов и аспирантов кафедры – стипендиаты Президента и Правительства Российской Федерации, победители конкурсов научных работ, проводимых Российской Академией наук, крупнейшими мировыми научными обществами, такими как INTAS (Фонд научно-исследовательских работ Европейского сообщества), SPIE (Международное общество инженеров-оптиков), CRDF (Американский фонд гражданских исследований и развития), OSA (Оптическое общество Америки). Студент проходит ступени квалификации бакалавр, магистр. Далее может поступить в аспирантуру и защитить кандидатскую диссертацию.

В феврале этого года, Президент Российской Федерации Дмитрий Анатольевич Медведев, вручил ведущему научному сотруднику кафедры Павлу Александровичу Белову за разработку метаматериалов для обработки и передачи изображений со сверхразрешением премию Президента РФ для молодых ученых за 2009 год.



Александр Владимирович Павлов

«Обработка информации оптическими методами»

Учебное пособие. Т.1.

Издание второе, дополненное

В авторской редакции

Дизайн

А.В. Павлов

Верстка

А.В. Павлов

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати \_\_.\_\_.\_\_

Заказ № \_\_\_\_\_

Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе