

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРЕДМЕТА СИСТЕМОЙ ОПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

3.1. Параксиальная оптика

Теоретические соотношения, полученные в предположении, что лучи, проходящие через оптически сопряжённые точки в пространстве предметов и изображений, расположены в непосредственной близости от оптической оси, принято называть параксиальной оптикой (от греч. *para* – возле, мимо, вне и лат. *axis* – ось) или оптикой Гаусса.

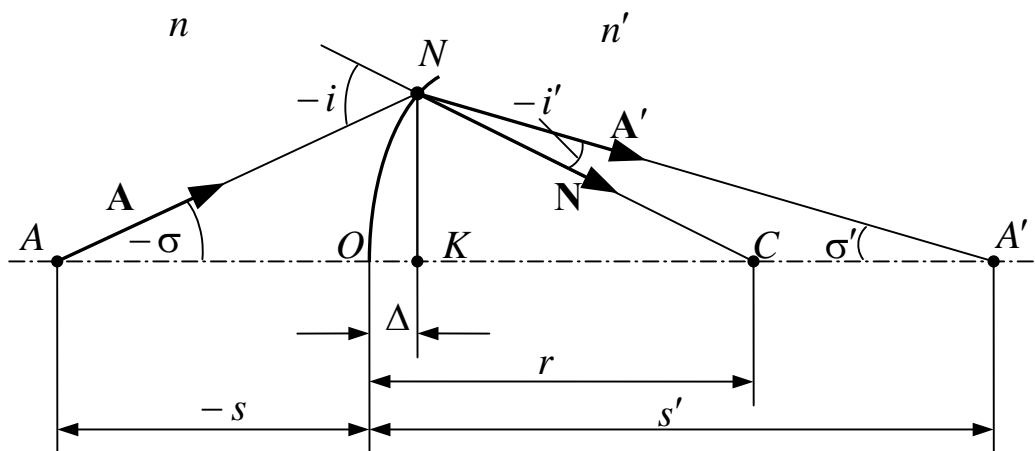


Рис.3.1. Преломление луча осевого пучка на сферической поверхности раздела двух однородных сред

Рассмотрим ход луча через одну преломляющую поверхность сферической формы, центр кривизны которой расположен в точке C , разделяющую однородные среды с показателями преломления n и n' , как показано на рис.3.1. Следует заметить, что в случае одной преломляющей поверхности сферической формы любая прямая, проведённая через центр её кривизны, может быть принята за оптическую ось. Однако, будем считать, что рассматриваемая преломляющая поверхность входит в состав некоторой центрированной системы оптических поверхностей, обладающей вполне определённым положением оптической оси, под которой понимаем линию, проходящую через центры кривизны всех поверхностей. Точку пересечения преломляющей поверхности с оптической осью (точку O) называют вершиной этой поверхности. Расстояние от вершины O поверхности до центра C её кривизны равно радиусу r кривизны поверхности. Если центр кривизны

поверхности расположен справа от её вершины, то величина радиуса считается положительной, в противном случае – отрицательной.

Пусть в среде с показателем преломления n на оптической оси расположена некоторая светящаяся точка A . Рассмотрим ход луча, исходящего из точки A под углом $-\sigma$ к оптической оси и падающего на преломляющую поверхность в точке N . Нормалью к преломляющей поверхности в точке падения луча служит прямая NC , а её направление от точки падения определяется ортом \mathbf{N} . Орт нормали \mathbf{N} направлен из среды с показателем преломления n в среду с показателем преломления n' . Направление луча AN определяется ортом \mathbf{A} . Этот луч с нормалью к поверхности в точке падения образует угол падения $-i$. Преломлённый в точке N поверхности луч проходит в среде с показателем преломления n' и пересекает оптическую ось в точке A' под углом σ' к ней. Направление луча NA' определяется ортом \mathbf{A}' . Этот луч с нормалью к поверхности в точке падения образует угол преломления $-i'$.

Угол падения i будем считать положительным, если для совмещения орта \mathbf{A} падающего луча с ортом нормали \mathbf{N} орт \mathbf{A} следует повернуть вокруг точки падения луча (вокруг точки N) против часовой стрелки; в противном случае угол будем считать отрицательным. Аналогично угол преломления луча i' будем считать положительным, если для совмещения орта \mathbf{A}' преломлённого луча с ортом нормали \mathbf{N} орт \mathbf{A}' необходимо повернуть вокруг точки N против часовой стрелки; в противном случае – отрицательным.

Положительным направлением оптической оси системы поверхностей принято считать направление слева направо. При этом угол σ будем считать положительным, если для совмещения орта \mathbf{A} с оптической осью его следует повернуть вокруг точки A против часовой стрелки; в противном случае – отрицательным. Аналогично угол σ' будем считать положительным, если для совмещения орта \mathbf{A}' с оптической осью его следует повернуть вокруг точки A' против часовой стрелки, а если по часовой стрелке, то отрицательным.

Обозначим отрезки $OA = -s$ и $OA' = s'$, при этом начало отрезков s и s' будем считать расположенным в вершине O преломляющей поверхности. В соответствии с рис.3.1 имеем

$$\frac{r}{\sin \sigma} = \frac{r-s}{\sin i}, \quad \frac{r}{\sin \sigma'} = \frac{r-s'}{\sin i'}.$$

Учитывая закон преломления в форме (2.46), из этих соотношений получаем

$$\frac{r - s'}{r - s} = \frac{\sin i' \sin \sigma}{\sin i \sin \sigma'} = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'}. \quad (3.1)$$

Из точки N на оптическую ось опустим перпендикуляр $NK = m$. Тогда в соответствии с рисунком имеем

$$\sin \sigma = -\frac{m}{NA} = -\frac{m}{\sqrt{m^2 + (\Delta - s)^2}},$$

$$\sin \sigma' = \frac{m}{NA'} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + (s' - \Delta)^2}}.$$

При этом

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'} = -\frac{\sqrt{m^2 + (s' - \Delta)^2}}{\sqrt{m^2 + (\Delta - s)^2}}. \quad (3.2)$$

Из рисунка следует, что $\Delta = r - \sqrt{r^2 - m^2}$. Вполне очевидно, что $\lim_{m \rightarrow 0} \Delta = 0$.

Будем считать, что в общем случае отрезки $s \neq 0$ и $s' \neq 0$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow 0} \sin \sigma = \lim_{m \rightarrow 0} \sigma = 0, \quad \lim_{m \rightarrow 0} \sin \sigma' = \lim_{m \rightarrow 0} \sigma' = 0.$$

При этом из соотношения (3.2) следует, что

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'} = -\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sqrt{m^2 + (s' - \Delta)^2}}{\sqrt{m^2 + (\Delta - s)^2}} = \frac{s'}{s_0}.$$

Полученный результат позволяет соотношение (3.2) представить в виде:

$$\frac{r - s'_0}{r - s_0} = \frac{ns'_0}{n's_0}. \quad (3.3)$$

Это соотношение легко преобразовать к виду:

$$n' \left(\frac{1}{s'_0} - \frac{1}{r} \right) = n \left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{r} \right). \quad (3.4)$$

В результате получили формулу, известную под названием формулы Аббе, хотя она была выведена ещё Ньютоном.

Формула (3.4) получена в предположении, что луч, выходящий из осевой точки A , пересекает преломляющую поверхность на высоте $m \rightarrow 0$. Такой луч принято называть параксиальным лучом. Вполне очевидно, что при этом формула (3.4) справедлива для любой преломляющей поверхности вращения несферической формы, если радиус кривизны в вершине поверхности $r_0 \neq 0$.

Если осевая точка предмета расположена на бесконечно большом расстоянии от вершины O преломляющей поверхности, т.е. если $s_0 = \infty$, то осевая точка изображения A'_0 займёт положение, называемое задним фокусом поверхности и обозначаемое через F'_0 , а отрезок s'_0 , называемый задним фокусным расстоянием f'_0 , в соответствии с формулой (3.4) определится соотношением

$$f'_0 = \frac{n'r}{n' - n}. \quad (3.5)$$

Вполне очевидно, что при $s'_0 = \infty$ точка A_0 займёт положение переднего фокуса F_0 , при этом переднее фокусное расстояние f_0 определится соотношением

$$f_0 = -\frac{nr}{n' - n}. \quad (3.6)$$

Из выражений (3.5) и (3.6) следует, что

$$\frac{f'_0}{f_0} = -\frac{n'}{n}. \quad (3.7)$$

3.2. Оптика нулевых лучей

Восстановим в вершине O преломляющей поверхности перпендикуляр к оптической оси. На этом перпендикуляре, на произвольном расстоянии от оптической оси, равно h , обозначим точку P . Проведём из точки P в точки A_0 и A'_0 линии, которые с оптической осью образуют углы $-\alpha$ и α' , как показано на рис.3.2, при этом отрезки OA_0 и OA'_0 соответственно равны $-s_0$ и s'_0 .

Перепишем формулу (3.4) в виде:

$$\frac{n'}{s'_0} - \frac{n}{s_0} = \frac{n' - n}{r}.$$

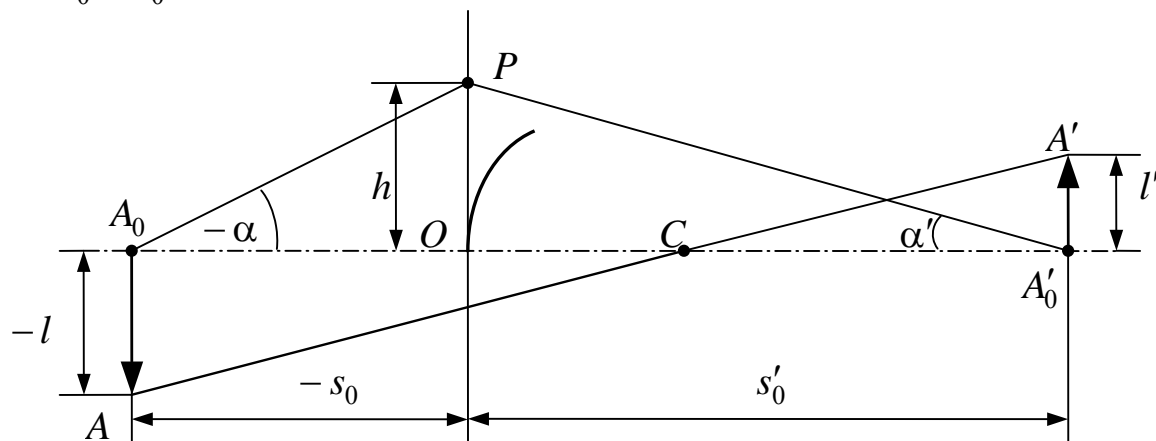


Рис.3.2. Построение хода нулевого луча

Умножим левую и правую части этой формулы на h . Тогда в соответствии с рис.3.2 получаем

$$n'tg\alpha' - ntg\alpha = h \frac{n' - n}{r}, \quad (3.8)$$

где $tg\alpha = \frac{h}{s_0}$, $tg\alpha' = \frac{h}{s'_0}$.

В вычислительной практике тангенсы углов обозначают просто углами. При этом полученное выражение можно представить в виде рекуррентной формулы для i -ой преломляющей поверхности:

$$n_{i+1}\alpha_{i+1} - n_i\alpha_i = h_i \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i}. \quad (3.9)$$

Эта формула справедлива для любой преломляющей поверхности, при этом для $i+1$ поверхности имеем

$$h_{i+1} = h_i - \alpha_{i+1}d_i, \quad (3.10)$$

где d_i – расстояние между вершинами i -ой и $i+1$ -ой поверхностей.

Плоскость, перпендикулярную оптической оси и проходящую через вершину поверхности будем называть главной плоскостью преломляющей поверхности. Линию $A_0HA'_0$ называют первым нулевым лучом. По сути дела правильнее было бы называть этот луч осевым фиктивным (фр. fictive < лат. fictio – вымысел) лучом.

В плоскости, перпендикулярной оптической оси и проходящей через точку A_0 , т.е. в плоскости предмета, отложим отрезок $A_0A = -l$, как показано на рис.3.2. Луч, выходящий из точки A предмета, проходит через центр кривизны преломляющей поверхности без изменения направления и пересекает плоскость изображения в точке A' на расстоянии $A'_0A' = l'$ от оптической оси. При этом поперечное увеличение изображения, образованного преломляющей поверхностью, определяется отношением

$$V_0 = \frac{l'}{l} = \frac{s'_0 - r}{s_0 - r}. \quad (3.11)$$

Сопоставив левую и правую части соответственно выражений (3.3) и (3.11), получаем

$$V_0 = \frac{ns'_0}{n's_0}. \quad (3.12)$$

Но $\frac{s'_0}{s_0} = \frac{hs'_0}{hs_0} = \frac{\alpha}{\alpha'}$. Тогда из выражений (3.11) и (3.12) следует, что

$$nl\alpha = n'l'\alpha'.$$

Вполне очевидно, что это выражение справедливо для любой произвольной последовательности преломляющих поверхностей вращения. Записанное в виде:

$$n_i l_i \alpha_i = n_{i+1} l_{i+1} \alpha_{i+1}, \quad (3.13)$$

это выражение называется инвариантом Лагранжа-Гельмгольца.

Рассмотрим применение полученных соотношений для решения частных задач.

3.3. Кардинальные точки оптической системы

Оптическую систему из k сферических преломляющих поверхностей принято записывать в виде:

$$\begin{aligned} n_1 = & \\ r_1 = & \\ d_1 = & \quad n_2 = \\ r_2 = & \\ & \dots \\ r_{k-1} = & \\ d_{k-1} = & \quad n_k = \\ r_k = & \quad n_{k+1} = \end{aligned}$$

Из формулы (3.9) следует, что

$$\alpha_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \alpha_i + h_i \frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+1} r_i}. \quad (3.14)$$

Пусть расстояние от вершины первой поверхности до осевой точки предмета равно s_1 . Тогда высота $h_1 = s_1 \alpha_1$. Выбрав произвольно значение угла α_1 (или высоты h_1) и подставив в формулу (3.14), находим значение угла α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \alpha_1 + \frac{n_2 - n_1}{n_2 r_1} s_1 \alpha_1.$$

Затем находим высоту нулевого луча на главной плоскости второй поверхности:

$$h_2 = h_1 - \alpha_2 d_1.$$

Полученные значения угла α_2 и высоты h_2 позволяют вычислить значения угла α_3 и высоты h_3 . Продолжая подобные вычисления, находим высоту h_k на главной плоскости последней в системе поверхности и угол α_{k+1} . Положение изображения, образованного

рассматриваемой оптической системой, определится расстоянием s' от вершины k -ой поверхности до точки пересечения нулевого луча с оптической осью, равным

$$s' = \frac{h_k}{\alpha_{k+1}}.$$

Из инварианта (3.13) следует, что поперечное увеличение изображения, образованного системой оптических поверхностей, равно

$$V_0 = \frac{l_{k+1}}{l_1} = \frac{n_1 \alpha_1}{n_{k+1} \alpha_{k+1}}.$$

Таким образом, при известных значениях радиусов кривизны оптической системы, расстояний между вершинами поверхностей и показателей преломления разделяемых поверхностями сред расчёт первого нулевого (осевого фиктивного) луча позволяет определить положение изображения и его поперечное увеличение.

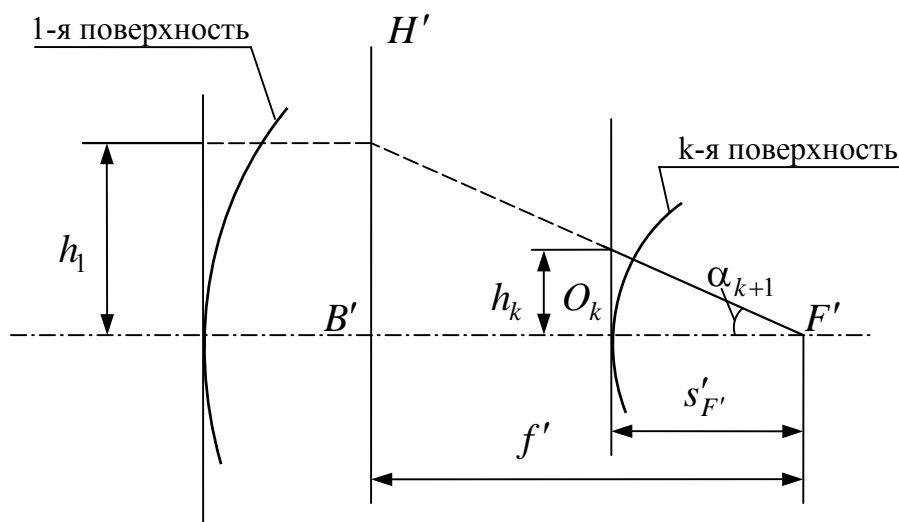


Рис.3.3. Кардинальные точки оптической системы

Если предмет расположен на бесконечно большом расстоянии от оптической системы, то в этом случае угол $\alpha_1 = 0$. Выбрав при этом любое значение высоты h_1 , в результате расчёта хода нулевого луча находим высоту h_k на главной плоскости последней поверхности и последний угол α_{k+1} , образованный нулевым лучом с осью, как показано на рис.3.3. Точка пересечения луча с осью определяет положение изображения бесконечно удалённой осевой точки и называется задним фокусом F' оптической системы. Плоскость, перпендикулярная к оптической оси и проведённая через точку F' , называется задней фокальной плоскостью. Положение фокуса F'

относительно последней поверхности системы определяется задним фокальным отрезком $s'_{F'}$, в соответствии с рис.3.3 равным:

$$s'_{F'} = \frac{h_k}{\alpha_{k+1}}. \quad (3.15)$$

Плоскость H' , нормальная к оптической оси и содержащая точку пересечения падающего луча с продолжением выходящего, называется задней главной плоскостью; точка пересечения главной плоскости с оптической осью (точка B') называется задней главной точкой. При этом заднее фокусное расстояние, равное расстоянию от задней главной точки до заднего фокуса определяется соотношением:

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_{k+1}}. \quad (3.16)$$

При некотором положении осевой точки предмета её изображение, образованное оптической системой, расположено на бесконечно большом расстоянии. Эта точка F называется передним фокусом оптической системы, а плоскость, нормальная к оптической оси и проходящая через передний фокус, называется передней фокальной плоскостью. Положение переднего фокуса относительно вершины первой поверхности определяется передним фокальным отрезком s_F .

Плоскость H , нормальная к оптической оси и содержащая точку пересечения продолжения луча, проходящего через передний фокус F оптической системы, с продолжением выходящего из оптической системы луча при $\alpha_{k+1} = 0$, называется передней главной плоскостью, а точка пересечения передней главной плоскости с оптической осью (точка B) называется передней главной точкой. Расстояние от передней главной точки до переднего фокуса называется передним фокусным расстоянием. Переднее фокусное расстояние и передний фокальный отрезок можно вычислить в результате расчёта обратного хода нулевого луча.

Главные точки B и B' и фокусы F и F' называются кардинальными точками оптической системы.

3.4. Геометрическое построение изображения и основные оптические формулы

Обратимся к рис.3.4, на котором оптическая система представлена главными плоскостями H и H' и, соответственно, главными точками B и B' , и определено положение фокусов F и F' . Кроме того, на рисунке показано некоторое положение предмета

$l = A_0A$. Требуется построить изображение этого предмета. Для этого достаточно построить изображение A' одной лишь точки A . Опустив из точки A' перпендикуляр на оптическую ось, получим изображение A'_0A' всего отрезка A_0A .

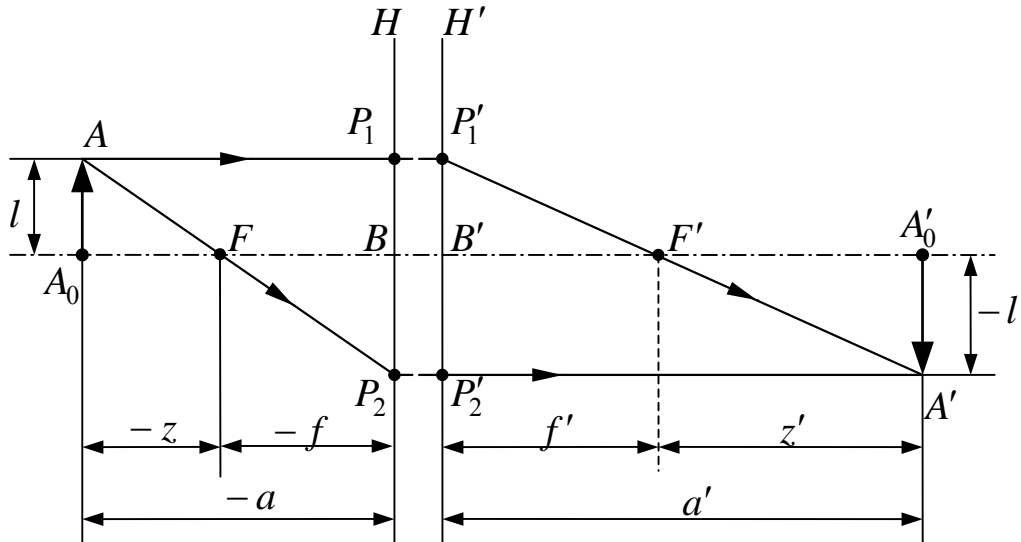


Рис.3.4. Геометрическое построение изображения

Чтобы найти изображение точки A , достаточно определить ход двух лучей, исходящих из точки A , и найти точку их пересечения в пространстве изображений. Один луч, исходящий из точки A , направим параллельно оптической оси. При этом выходящий из оптической системы луч должен пройти через задний фокус F' и пересечься с лучом падающим в точке P_1' на задней главной плоскости на расстоянии $B'P_1' = l$ от оптической оси. Таким образом, положение луча $P_1'F'$ определено.

Второй луч, исходящий из точки A , направим в передний фокус F оптической системы. Этот луч должен пересечься с выходящим из оптической системы параллельно её оптической оси лучом в точке P_2 на передней главной плоскости на расстоянии $BP_2 = -l'$ от неё. Построенные в пространстве изображений лучи $P_1'F'$ и P_2A' пересекаются в точке A' , которая, следовательно, оптически сопряжена, с точкой A . Перпендикуляр $A'A_0$, опущенный на оптическую ось из точки A' , определяет изображение отрезка A_0A .

Для получения основных аналитических соотношений, необходимых в практике расчёта оптических систем, обратимся вновь к рис.3.4. На рисунке введены обозначения: $l = A_0A$, $l' = -A'_0A'$, $f = -BF$, $f' = B'F'$. В оптике принято считать, что свет распространяется слева направо. Для отрезков, лежащих на

оптической оси, принято следующее правило знаков: если направление отсчёта отрезка совпадает с направлением движения света (слева направо), отрезок считается положительным, в противном случае – отрицательным.

Для отрезков, перпендикулярных к оптической оси, один конец которых лежит на оси, действует следующее правило знаков: если отрезок лежит выше оси, он положителен (например, отрезок A_0A), в противном случае он считается отрицательным (например, отрезок A'_0A').

Для последующего вывода необходимых соотношений введём отрезки на оптической оси, начала которых лежат в точках F и F' , а концы – в оптически сопряжённых точках A_0 и A'_0 соответственно: $-z = FA_0$ и $z' = F'A'_0$. Из подобия треугольников FA_0A и FBP_2 получаем:

$$-\frac{l'}{l} = \frac{-f}{-z}. \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой, равно

$$V_0 = \frac{l'}{l} = -\frac{f}{z}. \quad (3.18)$$

Из подобия треугольников $F'A'_0A'$ и $F'B'P'_1$ получаем

$$\frac{-l'}{l} = \frac{z'}{f'}. \quad (3.19)$$

В этом случае поперечное увеличение изображения равно

$$V_0 = \frac{l'}{l} = -\frac{z'}{f'}. \quad (3.20)$$

Приравнивая правые части соотношений (3.18) и (3.20), получаем формулу Ньютона в виде:

$$zz' = ff'. \quad (3.21)$$

Заметим, что положение главной точки B в оптической системе определяется отрезком $z = -f$. При этом в соответствии с формулой Ньютона отрезок $z' = -f'$, что соответствует положению главной точки B' , т.е. задняя главная плоскость является изображением передней главной плоскости и, следовательно, точки P_1 и P'_1 и P_2 и P'_2 являются оптически сопряжёнными. Кроме того, как следует из выражений (3.18) и (3.20), при $z = -f$ и $z' = -f'$ поперечное увеличение в изображении главных плоскостей $V_0 = 1^X$. Таким

образом, произведение отрезков z и z' для оптической системы постоянно и равно произведению её фокусных расстояний.

Введём отрезки $-a = BA_0$ и $a' = B'A'_0$. Начало этих отрезков считаем лежащими в точках B и B' . В соответствии с рисунком имеем

$$\left. \begin{aligned} z &= a - f, \\ z' &= a' - f'. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Подставив эти значения величин z и z' в формулу Ньютона, получаем

$$f'a + fa' = aa'.$$

Поделив это выражение почленно на aa' , приводим его к виду:

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1. \quad (3.23)$$

Эту формулу называют формулой отрезков или оптической формулой.

Используя равенства (3.22), находим:

$$\frac{a'}{a} = \frac{f' + z'}{f + z}. \quad (3.24)$$

Из формулы (3.21) следует, что

$$z' = \frac{ff'}{z}.$$

Подставив это значение z' в выражение (3.24), получаем

$$\frac{a'}{a} = \frac{f'z + f}{zf + z} = \frac{f'}{z}. \quad (3.25)$$

В соответствии с формулой Ньютона имеем:

$$\frac{f'}{z} = \frac{z'}{f}. \quad (3.26)$$

При этом

$$\frac{a'}{a} = \frac{f'}{z} = \frac{z'}{f}. \quad (3.27)$$

Умножив эти соотношения на $-\frac{f}{f'}$ и учитывая соотношения (3.18) и (3.20), получаем

$$V_0 = -\frac{f}{f'} \frac{a'}{a}. \quad (3.28)$$

Заметим, что $\frac{a'}{a} = \frac{ha'}{ha} = \frac{\alpha}{\alpha'}$. При этом

$$V_0 = \frac{l'}{l} = -\frac{f}{f'} \frac{\alpha}{\alpha'}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что

$$f\alpha l = -f'\alpha'l'. \quad (3.30)$$

Применив инвариант Лагранжа-Гельмгольца в форме (3.13) последовательно ко всем поверхностям системы, получаем

$$n_1\alpha_1 l_1 = n_{k+1}\alpha_{k+1} l_{k+1}$$

или

$$n\alpha l = n'\alpha'l'. \quad (3.31)$$

Сопоставив соотношения (3.29) и (3.30), имеем

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \quad (3.32)$$

Таким образом, для оптической системы в воздухе, т.е. при $n = n' = 1$, формулы (3.21), (3.23) и (3.29) принимают вид:

$$zz' = -f'^2 \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \quad (3.34)$$

$$V_0 = \frac{\alpha}{\alpha'}. \quad (3.35)$$

Умножив формулу отрезков (3.34) на h и учитывая, что $\frac{h}{a} = \alpha$, а

$\frac{h'}{a'} = \alpha'$, получаем

$$\alpha' - \alpha = h\varphi, \quad (3.36)$$

где φ – оптическая сила системы поверхностей, при этом $\varphi = \frac{1}{f'}$.