

Глава 5 СВЕТОТЕХНИКА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. Световая трубка

Пусть $P(\xi, \eta)$ – произвольная точка на некоторой излучающей поверхности S , отнесённая к некоторой криволинейной системе координат на этой поверхности. При этом световой поток (усреднённый по времени), излучаемый площадкой dS поверхности S в телесный угол $d\omega$ в направлении, определяемом полярными углами (α, β) , равен

$$d^2\Phi = L d\omega dS \cos \varepsilon, \quad (5.1)$$

где L – фотометрическая яркость излучения площадки dS в точке (ξ, η) в направлении (α, β) , т.е. в общем случае $L = L(\xi, \eta; \alpha, \beta)$; ε – угол между направлением (α, β) и нормалью к элементу поверхности, как показано на рис.5.1. Множитель $\cos \varepsilon$ в выражении (5.1) определяет тот факт, что физический смысл имеет не сам элемент поверхности dS , а его проекция на плоскость, перпендикулярную к направлению (α, β) .

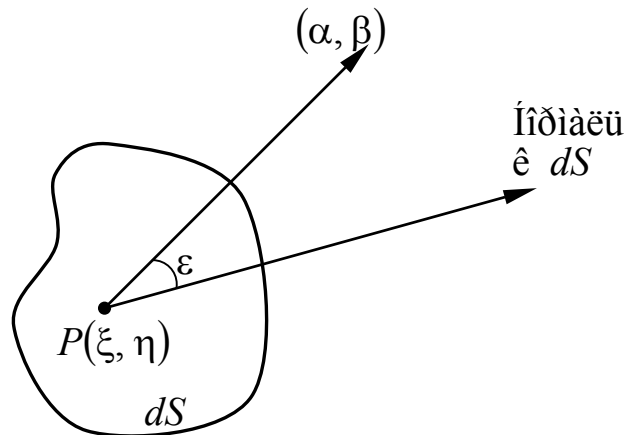


Рис.5.1. Световой поток, излучаемый площадкой dS

Пусть сечение телесного угла $d\omega$ наклонной плоскостью образует площадку dS_v на некотором расстоянии R от площадки dS вдоль оси телесного угла $d\omega$, нормаль к которой образует угол ε_v , как показано на рис.5.2. При этом

$$d^2\Phi = L \frac{dS_v \cos \varepsilon_v}{R^2} dS \cos \varepsilon = L d\omega_v dS_v \cos \varepsilon_v. \quad (5.2)$$

С другой стороны, световой поток, проходящий через площадку dS_v , равен

$$d^2\Phi_v = L_v d\omega_v dS_v \cos \varepsilon_v. \quad (5.3)$$

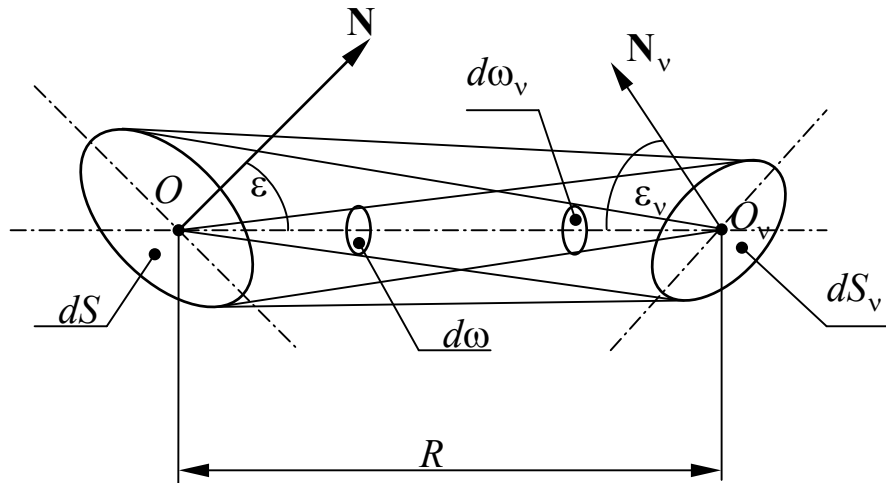


Рис.5.2. Формирование световой трубки

В общем случае $d^2\Phi_v = \tau d^2\Phi$,

где τ – коэффициент пропускания среды, разделяющей площадки dS и dS_v .

Поскольку в рассматриваемом случае нас интересуют лишь соотношения геометрических величин, среду будем считать абсолютно прозрачной, что эквивалентно равенству $\tau = 1$. При этом из сопоставления выражений (5.2) и (5.3) следует, что $L = L_v$. Полученное равенство позволяет интерпретировать величину L не только как яркость излучающей поверхности, но и как яркость излучения в плоском сечении светового пучка.

Совокупность геометрических лучей, заполняющих телесный угол $d\omega$, образует гомоцентрический пучок лучей, исходящих из точки излучающего элемента, опирающийся на освещаемый элемент. Совокупность геометрических лучей, проходящих через две произвольно расположенные площадки (диафрагмы), размеры которых значительно меньше расстояния между ними, образует совокупность геометрических пучков лучей, называемую физическим пучком, при этом поверхность, ограничивающую поперечные размеры физического пучка, принято называть световой трубкой.

Из сопоставления выражений (5.1) и (5.2) следует, что

$$d\omega dS \cos \epsilon = d\omega_v dS_v \cos \epsilon_v. \quad (5.4)$$

Величину $d^2G = d\omega dS \cos \epsilon$ называют геометрическим фактором пучка световых лучей. Инвариантность геометрического фактора d^2G относительно площадок dS и dS_v физического пучка, определяемая выражением (5.4), означает, что он является мерой множества геометрических лучей, составляющих физический пучок, не зависящей от того, какая из площадок является излучающей.

Вполне очевидно, что геометрический фактор элементарного физического пучка, ограниченного площадкой dS и площадкой dS_v , образованной сечением телесного угла $d\omega$ плоскостью не зависит от выбора расстояния R между ними, а, следовательно, не зависит от выбора расстояния R (при $\tau=1$) и величина светового потока, проходящего через площадки dS и dS_v , контуры которых образуют контуры световой трубки. При этом яркость излучения в каждом сечении телесного угла плоскостью остаётся неизменной. Поэтому яркость $L_v = L$ можно считать яркостью элементарного физического пучка. Понятие яркости пучка лучей, введённое в трудах академика Владимира Александровича Фока, Андрея Александровича Гершуна, Сергея Осиповича Майзеля и других, оказалось весьма удобным при исследовании объёмных источников излучения или рассеивающих излучение сред, например, неба, где исходное, и вполне естественное, определение яркости, строго говоря, вообще теряет смысл.

5.2. Инвариант Штраубеля

Пусть через некоторую элементарную площадку dS_{v1} в пределах телесного угла $d\omega_{v1}$ под углом ε_{v1} к нормали к площадке dS_{v1} проходит некоторый поток излучения. Будем считать, что площадка dS_v , образованная сечением телесного угла $d\omega_{v1}$ плоскостью, расположена на поверхности S_v , разделяющей среды, показатели преломления которых равны $n_v = n_{v1}$ и $n'_v = n_{v2}$. Ось телесного угла $d\omega_v$, вершина которого расположена в точке в пределах площадки dS_v , образует с нормалью к последней угол ε_v , а после преломления на границе раздела двух сред – угол ε'_v , как показано на рис.5.3. В соответствии с законом преломления

$$n_v \sin \varepsilon_v = n'_v \sin \varepsilon'_v.$$

Возведя в квадрат обе части этого равенства и дифференцируя, получаем

$$n_v^2 \sin \varepsilon_v \cos \varepsilon_v d\varepsilon_v = n_v'^2 \sin \varepsilon'_v \cos \varepsilon'_v d\varepsilon'_v. \quad (5.5)$$

Построим элементарный телесный угол $d\omega_v$, ограничив его четырьмя гранями пирамиды (частный случай конической поверхности), а, именно, двумя меридиональными плоскостями XOM и XON , образующими элементарный двугранный угол $d\phi$, и двумя плоскостями, проходящими через центр O сферы радиуса R и

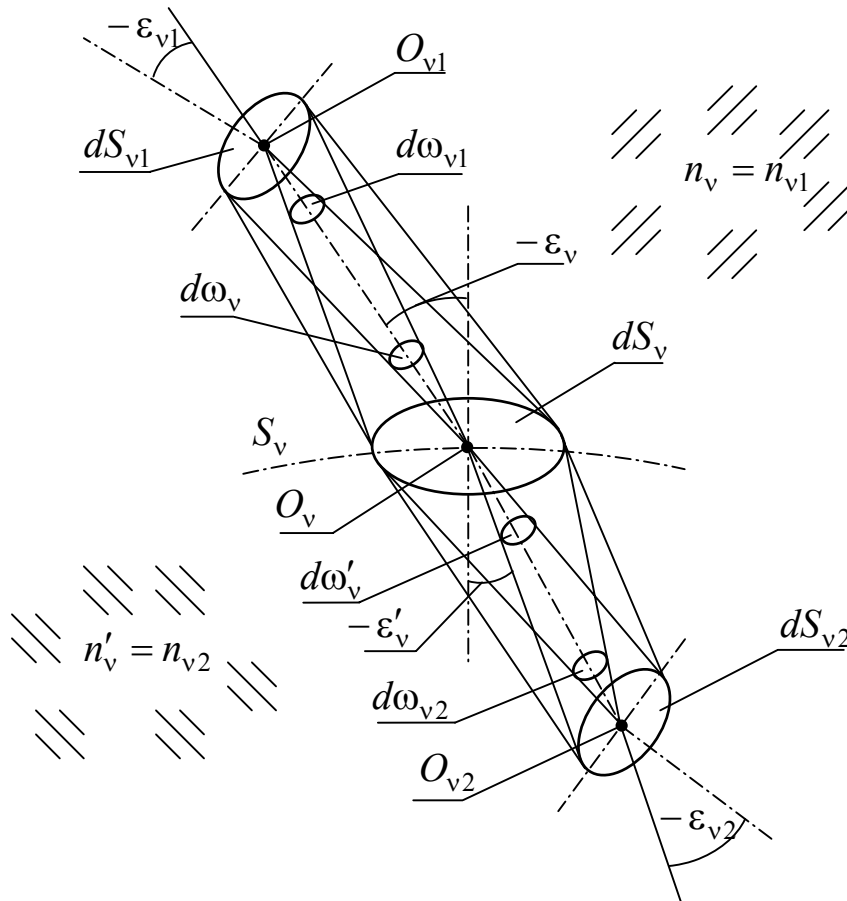


Рис.5.3. Преломление световой трубки на границе раздела двух сред через элементы дуг малых кругов на поверхности сферы, как показано на рис.5.4. Если элементарную площадку, вырезанную на поверхности сферы, принять в виду малости длин элементарных дуг меридиональных сечений, равных $Rd\varepsilon_v$, за прямоугольник, то площадь этого элемента поверхности определится произведением основания прямоугольника, длина которого равна $R \sin \varepsilon_v d\varphi$, на его высоту, равную $Rd\varepsilon_v$. При этом элементарный телесный угол $d\omega_v$, равный отношению $\frac{dS}{R^2}$, определится выражением

$$d\omega_v = \frac{dS}{R^2} = \frac{R \sin \varepsilon_v d\varphi R d\varepsilon_v}{R^2} = \sin \varepsilon_v d\varepsilon_v d\varphi. \quad (5.6)$$

После преломления пучка лучей на границе раздела двух сред телесный угол $d\omega'_v$ определится аналогичным выражением вида:

$$d\omega'_v = \sin \varepsilon'_v d\varepsilon'_v d\varphi, \quad (5.7)$$

где $d\varphi'$ равен углу $d\varphi$, так как согласно первой части формулировки закона преломления луч падающий, луч преломлённый и нормаль к

поверхности раздела двух сред в точке падения луча лежат в одной плоскости.

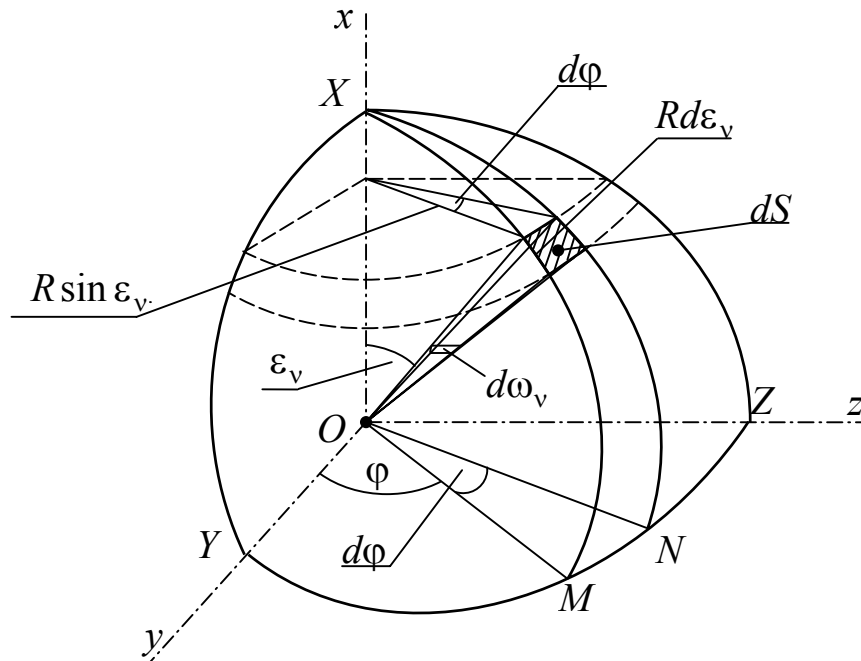


Рис.5.4. Элементарный телесный угол $d\omega_v$, ограниченный четырьмя гранями пирамиды (частный случай конической поверхности)

Сопоставив выражения (5.6) и (5.7) с выражением (5.5), получаем

$$n_v^2 \cos \epsilon_v d\omega_v = n_v'^2 \cos \epsilon_v' d\omega_v'. \quad (5.8)$$

Полученная формула определяет взаимосвязь телесных углов до и после преломления световой трубки на поверхности раздела двух сред.

Умножив обе части выражения (5.8) на величину dS_v , получаем

$$n_v^2 d\omega_v dS_v \cos \epsilon_v = n_v'^2 d\omega_v' dS_v \cos \epsilon_v'. \quad (5.9)$$

Учитывая свойство световой трубки, определяемое выражением (5.4), при $n_v = n_{v1}$ и $n_v' = n_{v2}$ имеем

$$\begin{aligned} n_v^2 d\omega_v dS_v \cos \epsilon_v &= n_{v1}^2 d\omega_{v1} dS_{v1} \cos \epsilon_{v1}; \\ n_v'^2 d\omega_v' dS_v' \cos \epsilon_v' &= n_{v2}^2 d\omega_{v2} dS_{v2} \cos \epsilon_{v2}, \end{aligned}$$

где, по сути дела, $dS_v' = dS_v$.

Учитывая выражение (5.9), получаем

$$\begin{aligned} n_{v1}^2 d\omega_{v1} dS_{v1} \cos \epsilon_{v1} &= n_v^2 d\omega_v dS_v \cos \epsilon_v = \\ &= n_v'^2 d\omega_v' dS_v' \cos \epsilon_v' = n_{v2}^2 d\omega_{v2} dS_{v2} \cos \epsilon_{v2}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Величину $n^2 d^2G = n^2 d\omega dS \cos \epsilon$ называют оптическим фактором.

Можно предположить, что площадка dS_{v1} расположена на преломляющей поверхности S_{v-1} , а площадка dS_{v2} – на поверхности S_{v+1} . Обобщая соотношение (5.10) на произвольное число преломляющих поверхностей, получаем

$$n^2 d^2 G = const. \quad (5.11)$$

Это соотношение определяет основной инвариант для световой трубки: произведение квадрата показателя преломления, проекции элементарной площадки, контур которой определяет контур световой трубки, на плоскость, перпендикулярную оси трубки, и элементарного телесного угла с вершиной в точке этой площадки остаётся инвариантным для элементарной световой трубки, претерпевающей преломления на каком угодно числе преломляющих поверхностей:

$$\begin{aligned} n_1^2 d\omega_1 dS_1 \cos \varepsilon_1 = K = n_v^2 d\omega_v dS_v \cos \varepsilon_v = K = \\ = n_p^2 d\omega_p dS_p \cos \varepsilon_p = d^2 J. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Эта формула была строго доказана в 1902 году Штраубелем и называется теоремой, или инвариантом, Штраубеля.

При абсолютной прозрачности сред, разделяемых преломляющими поверхностями, в соответствии с законом сохранения энергии световой поток, проходящий через световую трубку, претерпевающую какое угодно число преломлений, в соответствии с выражением (5.3) равен

$$\begin{aligned} d^2 \Phi = L_1 d\omega_1 dS_1 \cos \varepsilon_1 = K = L_v d\omega_v dS_v \cos \varepsilon_v = K = \\ = L_p d\omega_p dS_p \cos \varepsilon_p. \end{aligned}$$

Разделив эти равенства почленно на инвариант Штраубеля, получаем

$$\frac{L_1}{n_1^2} = K = \frac{L_v}{n_v^2} = K = \frac{L_p}{n_p^2} = L_0,$$

где L_0 – так называемая редуцированная (или приведённая к вакууму) яркость.

В соответствии с рис.5.3 имеем

$$d\omega_v = \frac{dS_{v1} \cos \varepsilon_{v1}}{R_{v1}^2}; \quad d\omega'_v = \frac{dS_{v2} \cos \varepsilon_{v2}}{R_{v2}^2},$$

где R_{v1} и R_{v2} – расстояния от осевой точки O_v площадки dS_v до осевых точек O_{v1} и O_{v2} площадок dS_{v1} и dS_{v2} соответственно.

Эти соотношения позволяют выражение (5.9) представить в виде:

$$\frac{n_v^2 dS_v dS_{v1} \cos \varepsilon_v \cos \varepsilon_{v1}}{R_{v1}^2} = \frac{n_v'^2 dS_v dS_{v2} \cos \varepsilon_v' \cos \varepsilon_{v2}}{R_{v2}^2}. \quad (5.13)$$

Пусть в выражении (5.13) углы $\varepsilon_v = \varepsilon_{v1} = \varepsilon_v' = \varepsilon_{v2} = 0$, а площадки dS_v , dS_{v1} и dS_{v2} световых трубок имеют круглую форму. При этом площадь этих элементарных площадок равна

$$dS_{v1} = \pi(dl_{v1})^2; \quad dS_{v2} = \pi(dl_{v2})^2; \quad dS_v = \pi(dm_v)^2,$$

где dl_{v1} , dl_{v2} , dm_v – радиусы соответствующих площадок. Обозначим

$$\frac{dm_v}{R_{v1}} = d\sigma_{v1}; \quad \frac{dm_v}{R_{v2}} = d\sigma_{v2}.$$

Эти соотношения и принятые обозначения позволяют выражение (5.13) представить в виде:

$$n_v^2 (dl_{v1})^2 (d\sigma_{v1})^2 = n_v'^2 (dl_{v2})^2 (d\sigma_{v2})^2.$$

Применив полученное выражение к последовательности из p преломляющих поверхностей, получаем

$$n_1 d\sigma_1 dl_1 = n_2 d\sigma_2 dl_2 = K = n_v d\sigma_v dl_v = K = n_p d\sigma_p dl_p. \quad (5.14)$$

Для оптически сопряжённых отрезков, т.е. в том случае, когда отрезок dl_{v+1} является изображением отрезка dl_v , это выражение называется инвариантом Лагранжа-Гельмгольца и записывается в виде

$$n\alpha l = n'\alpha' l', \quad (5.15)$$

где l , l' – оптически сопряжённые малые отрезки, расположенные перпендикулярно оптической оси; α , α' – малые углы, образованные лучами светового пучка с оптической осью в пространстве предметов и изображений соответственно.

Отношение малых отрезков определяет величину поперечного увеличения:

$$V = \frac{l'}{l} = \frac{n\alpha}{n'\alpha'}. \quad (5.16)$$

Из малой величины поперечных размеров световой трубки следует, что инвариант Лагранжа-Гельмгольца справедлив для малых отрезков l и l' и для лучей, образующих малые углы α и α' с осью световой трубки, т.е. в параксиальной (от греч. *para'* – возле, мимо, вне и лат. *axis* – ось) области. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца является одним из основных соотношений параксиальной оптики.

5.3. Ограничение световых пучков лучей в оптической системе

Любая оптическая система состоит из элементов, имеющих ограниченные размеры, вследствие чего из всего светового потока, излучаемого каждой изображаемой точкой (точнее, малым элементом поверхности), через оптическую систему проходит только часть его. Вместе с тем ограничена и величина предмета (угловая или линейная), из каждой точки которого световой поток попадает в оптическую систему. Первое ограничение определяет освещённость изображения, а второе – угловую или линейную величину изображаемого предмета, называемую угловым или линейным полем системы.

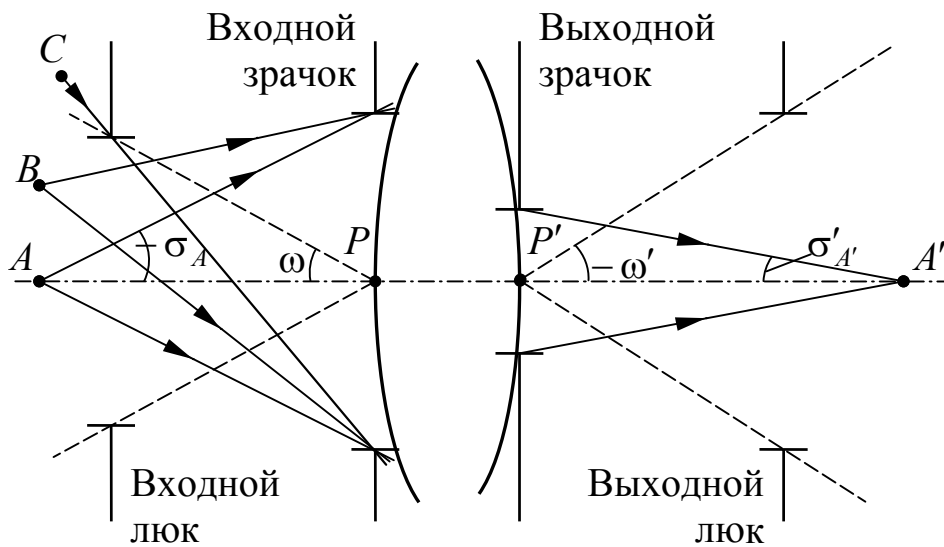


Рис.5.5. Ограничение световых пучков лучей в оптической системе

Оптическая система, как правило, содержит последовательность диафрагм, ограничивающих световые пучки лучей, формирующих изображение. Под диафрагмой будем понимать не только отверстие в непрозрачном экране, но и края линз и зеркал или края их оправ. Будем считать, что диафрагмы имеют круглую форму с центром на оптической оси системы. Найдём параксиальное изображение каждой диафрагмы в пространстве предметов, образованное предшествующей ей оптической системой. Изображение диафрагмы (в частном случае непосредственно диафрагма), которое видно из осевой точки предмета A под наименьшим углом $2\sigma_A$, как показано на рис.5.5, определяет максимальную угловую величину светового пучка лучей, проходящих через оптическую систему, и называется входным зрачком оптической системы. Реальная диафрагма, изображение которой (или сама диафрагма) является входным зрачком, называется апертурной диафрагмой. Изображение входного

зрачка, образованное всей системой поверхностей в пространстве изображений, называется выходным зрачком оптической системы. Угол σ_A , образованный с оптической осью лучом, выходящим из осевой точки A предмета в край входного зрачка, называется апертурным углом в пространстве предметов или передней угловой апертурой. Соответствующий угол σ'_A называется апертурным углом в пространстве изображений или задней угловой апертурой. Произведение синуса апертурного угла на показатель преломления среды соответствующего пространства называется числовой апертурой (соответственно передней или задней). Числовая апертура определяет предельное разрешение в дифракционной картине изображения двух точек, образованного идеальной оптической системой. Изображение диафрагмы (в частном случае сама диафрагма), которое из центра входного зрачка P видно под наименьшим углом 2ω , как показано на рис.5.5, ограничивает величину изображаемого предмета и называется входным люком, при этом угол 2ω называется угловым полем оптической системы в пространстве предметов, а угол ω – углом поля. Реальная диафрагма, изображение которой является входным люком, называется полевой диафрагмой. Изображение входного люка, образованное оптической системой в целом в пространстве изображений, называется выходным люком.

Как следует из рисунка, верхний крайний луч наклонного светового пучка, выходящего из точки B в плоскости предмета, проходит через верхние крайние точки входного люка и входного зрачка. Нижний крайний луч наклонного светового пучка, выходящего из точки C в плоскости предмета, проходит через верхнюю крайнюю точку входного люка и нижнюю крайнюю точку входного зрачка, то есть световой пучок полностью перекрывается экраном входного люка. Таким образом, для точек в плоскости предмета в промежутке между точками B и C происходит нарастающее срезание световых пучков от нулевого в точке B до полного в точке C . Такое срезание световых пучков называется виньетированием. Вполне очевидно, что если входной люк расположен в плоскости предмета (полевая диафрагма при этом может быть расположена в плоскости промежуточного или конечного изображения), то виньетирование световых пучков лучей отсутствует. Иногда при конструировании оптических устройств (при разработке оптических систем) эффект виньетирования применяют для устранения части пучка лучей, недопустимо нарушающих его

гомоцентричность. Кроме того, с помощью дополнительных диафрагм можно существенно уменьшить влияние на качество изображения света, рассеянного на торцах линз и поверхностях оправ линз, на стенках корпусов оптических устройств и т.п.

Пусть $2y_A$ – линейное поле оптической системы в пространстве предметов, а $2y'_{A'}$ – в пространстве изображений. При этом луч, выходящий из внеосевой точки предмета в направлении центра P входного зрачка, образует полевой угол ω , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{a_p - a},$$

где a – расстояние от передней главной точки H оптической системы до осевой точки A предмета; a_p – расстояние от передней главной точки до осевой точки P (центра) входного зрачка.

В пространстве изображений имеем аналогичное соотношение вида:

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{y'}{a'_{p'} - a'}.$$

Угловое увеличение W изображения, образованного оптической системой, определяется отношением

$$W = \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega}.$$

Луч, выходящий из внеосевой точки предмета и проходящий через центр входного зрачка, называется главным лучом. Если апертурная диафрагма расположена в задней фокальной плоскости той части оптической системы, которая предшествует этой диафрагме, то входной зрачок будет находиться в бесконечности и все главные лучи в пространстве предметов будут параллельны оптической оси. Такая оптическая система называется системой с телецентрическим ходом главных лучей в пространстве предметов или телецентрической со стороны предмета. Если апертурная диафрагма расположена в передней фокальной плоскости той части системы, которая следует за этой диафрагмой, то выходной зрачок будет находиться в бесконечности и все главные лучи в пространстве изображений будут параллельны оптической оси. В этом случае оптическая система называется телецентрической со стороны изображения. Плоскость, в которой расположены оптическая ось и главный луч, называется меридиональной плоскостью. Плоскость, перпендикулярная к меридиональной плоскости по главному лучу (в

которой расположен главный луч), называется сагиттальной плоскостью.

При анализе соотношений параксиальной оптики луч, проведённый из осевой точки предмета под произвольным углом α к оптической оси, будем называть нулевым лучом осевого пучка или просто осевым нулевым лучом; луч, проведённый из внеосевой точки предмета под углом β к оптической оси будем называть нулевым лучом внеосевого пучка или просто внеосевым нулевым лучом. Внеосевой нулевой луч, проведённый через центр входного зрачка, будем называть главным нулевым лучом.

Отношение тангенсов углов β'_p и β_p , образованных главным нулевым лучом с оптической осью в пространстве изображений и предметов соответственно, называется угловым увеличением изображения, образованного оптической системой, которое в принятых обозначениях в параксиальной оптике (в оптике Гаусса) определяется выражением

$$W = \frac{\beta'_p}{\beta_p}, \quad (5.17)$$

при этом поперечное (линейное) увеличение изображения входного зрачка (поперечное увеличение выходного зрачка) в соответствии с инвариантом Лагранжа-Гельмгольца определяется выражением

$$V_p = \frac{n\beta_p}{n'\beta'_p}. \quad (5.18)$$

Пусть точки пересечения главного нулевого луча с главными плоскостями оптической системы расположены на расстоянии H от оптической оси. При $\beta_p = \frac{H}{a_p}$, а $\beta'_p = \frac{H}{a'_p}$ поперечное увеличение

изображения входного зрачка равно

$$V_p = \frac{na'_p}{n'a_p}. \quad (5.19)$$

Как следует из выражений (5.17) и (5.18), взаимосвязь углового увеличения изображения предмета и поперечного увеличения изображения входного зрачка (то есть выходного зрачка) определяется соотношением

$$W = \frac{n}{n'} \frac{1}{V_p}. \quad (5.20)$$

Осевые точки оптически сопряжённых зрачков называются узловыми точками, если угловое увеличение изображения $W = 1^X$. Из выражения (5.20) следует, что если центр входного зрачка расположен в передней узловой точке, а центр выходного зрачка – в задней узловой точке, то поперечное увеличение в изображении зрачка $V_p = \frac{n}{n'}$. При этом в соответствии с выражением (5.19) расстояния от главных точек оптической системы до соответствующих узловых точек равны друг другу, т.е. $a_p = a'_p$.

Используя формулу отрезков, получаем

$$a_p = a'_p = \frac{n' - n}{n'} f'. \quad (5.21)$$

Отсюда следует, что если показатель преломления среды в пространстве предметов и в пространстве изображений один и тот же ($n = n'$), то узловые точки совпадают с главными точками оптической системы.

Фокусы, главные и узловые точки называются кардинальными точками оптической системы. В 1841 году в труде "Диоптрические исследования" немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) показал, что соотношения парааксиальной оптики могут быть получены, если предположить пропорциональность малых углов падения и преломления лучей на преломляющую поверхность. Им впервые были введены понятия кардинальных точек центрированной оптической системы и получена формула отрезков, названная впоследствии его именем.

Заметим, что величины α и β введены в оптику в 1911 году в ту пору сотрудником фирмы Герца в Германии М.Ланге.

5.4. Световой поток, проходящий через оптическую систему от излучающего элемента поверхности, расположенного на оптической оси перпендикулярно к ней

Элементарный световой поток $d^2\Phi$, излучаемый элементом dS , расположенным на оптической оси перпендикулярно к ней, и проходящий через элементарную площадку $d\Sigma$ входного зрачка оптической системы в пределах телесного угла $d\omega$, как показано на рис.5.6, определяется выражением (5.1) в виде:

$$d^2\Phi = L_\sigma d\omega dS \cos \sigma, \quad (5.22)$$

где L_σ – яркость излучающего элемента в направлении, образующем угол σ с оптической осью; $d\omega$ – элементарный телесный угол с вершиной в осевой точке площадки dS ; σ – угол между осью телесного угла $d\omega$ и оптической осью.

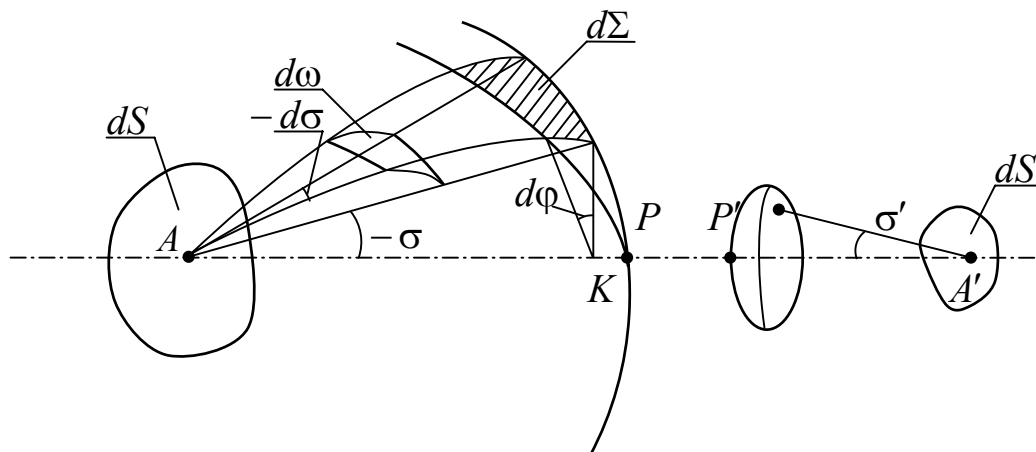


Рис.5.6. Элементарный световой поток, излучаемый осевым элементом поверхности предмета

Обозначив отрезок $AP = -R$, в соответствии с рисунком получаем

$$d\omega = \frac{d\Sigma}{R^2} = \frac{R \sin \sigma d\varphi R d\sigma}{R^2} = \sin \sigma d\sigma d\varphi. \quad (5.23)$$

При этом

$$d^2\Phi = L_\sigma dS \sin \sigma \cos \sigma d\sigma d\varphi, \quad (5.24)$$

где $d\varphi$ – элементарный двугранный угол между двумя меридиональными (проходящими через оптическую ось) плоскостями, как показано на рис.5.6, и составляющими боковые стенки телесного угла $d\omega$.

Для определения светового потока $d\Phi$, излучаемого элементарной площадкой dS и заполняющего весь входной зрачок оптической системы, проинтегрируем выражение (5.24) по всей площади входного зрачка, т.е. в пределах изменения переменных $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и при круглой форме зрачка $0 \leq \sigma \leq \sigma_{\hat{E}D}$ где $\sigma_{\hat{E}}$ – значение угла σ , соответствующего краю входного зрачка, т.е. апертурный угол осевого пучка лучей в пространстве предметов.

Таким образом,

$$d\Phi = \int_0^{\sigma_{\hat{E}}} \int_0^{2\pi} L_\sigma dS \sin \sigma \cos \sigma d\sigma d\varphi. \quad (5.25)$$

Задача определения потока $d\Phi$ существенно упрощается, если предположить, что яркость $L_\sigma = L = const$, т.е. является величиной постоянной во всех точках излучающего элемента dS и не зависит от угла излучения σ (при этом говорят, что элемент dS излучает по закону Ламберта). При этом условии выражение (5.25) можно переписать в виде:

$$d\Phi = LdS \int_0^{\sigma \hat{E}} \int_0^{2\pi} \sin \sigma \cos \sigma d\sigma d\varphi. \quad (5.26)$$

В результате интегрирования выражение (5.26) принимает вид:

$$d\Phi = \pi LdS \sin^2 \sigma. \quad (5.27)$$

Этот световой поток проходит сквозь оптическую систему и падает на элементарную площадку dS' , которая становится изображением площадки dS , как показано на рис.5.6. Вполне очевидно, что световой поток $d\Phi'$, падающий на площадку dS' , определится аналогичным выражением вида:

$$d\Phi' = \pi L'dS' \sin^2 \sigma', \quad (5.28)$$

где σ' – апертурный угол осевого пучка лучей в пространстве изображений (или задний апертурный угол оптической системы).

Как было показано, $L = n^2 L_0$; $L' = n'^2 L_0$, где L_0 – редуцированная яркость; n и n' – показатели преломления сред в пространстве предметов и изображений соответственно.

Если принять во внимание тот факт, что в реальной оптической системе неизбежны потери светового потока (поглощение, френелево отражение на поверхностях), учитываемые коэффициентом пропускания τ ($\tau < 1$), то вместо светового потока $d\Phi$ из системы выходит поток $d\Phi' = \tau d\Phi$, а, следовательно, меньший потока $d\Phi$. При этом

$$d\Phi' = \tau \pi L'dS' \sin^2 \sigma', \quad (5.29)$$

где $L' = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 L$. При $n' = n$: $L' = L$.

Условие синусов Аббе

Учитывая выражение (5.27), получаем

$$d\Phi' = \tau \pi LdS \sin^2 \sigma. \quad (5.30)$$

Приравняв правые части выражений (5.29) и (5.30), находим, что

$$n^2 dS \sin^2 \sigma = n'^2 dS' \sin^2 \sigma'. \quad (5.31)$$

Учитывая геометрическое подобие оптически сопряжённых плоскостей фигур, одна из которых является предметом, а другая – его изображением, можно написать

$$\frac{dS'}{dS} = \left(\frac{dy'}{dy} \right)^2,$$

где dy и dy' – линейные отрезки оптически сопряжённых элементов площадок dS и dS' . При этом выражение (5.31) можно переписать в виде:

$$n^2 dy^2 \sin^2 \sigma = n'^2 dy'^2 \sin^2 \sigma'.$$

Извлекая, квадратный корень из обеих частей этого равенства, получаем инвариант вида:

$$n dy \sin \sigma = n' dy' \sin \sigma'. \quad (5.32)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{dy'}{dy} = V = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'}. \quad (5.33)$$

Это и есть известная формулировка закона синусов. Закон синусов впервые был получен немецким физиком, одним из основателей термодинамики, Рудольфом Юлиусом Эмануэлем Клаузиусом (1822–1888) в 1874 году и немецким физиком, математиком, физиологом и психологом Германом Людвигом Фердинандом Гельмгольцем (1821–1894) в 1874 году из термодинамических соображений. Однако, практическое значение этого условия было осознано лишь после того, как его сформулировал в 1879 году выдающийся немецкий физик – оптотехник Эрнст Аббе (1840–1905).

Из условия $V = V_0 = const$ следует так называемое условие синусов Аббе:

$$\frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'} = const. \quad (5.34)$$

Если в изображении A' осевой точки предмета A полностью устранена сферическая аберрация, то соблюдение условия (5.34) является необходимым и достаточным условием совершенного изображения элементарного отрезка dy , перпендикулярного оптической оси, а, следовательно, и всей элементарной площадки dS , проходящей через точку A и содержащей отрезок dy . При этом изображение формируют сколь угодно широкие пучки лучей, образующих углы σ и σ' с оптической осью любой величины.

Пусть расстояние от передней главной плоскости оптической системы до осевой точки предмета равно $-a$, а от задней главной плоскости до параксиального изображения этой точки равно a' . При этом поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой пучками лучей в параксиальной области, равно $V_0 = \frac{na'}{n'a}$.

При соблюдении условия синусов справедливо равенство

$$\frac{na'}{n'a} = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'}$$

Отсюда следует, что

$$a \sin \sigma = a' \sin \sigma'. \quad (5.35)$$

Но $a \sin \sigma = m$, а $a' \sin \sigma' = m'$, где m и m' – расстояния от оптической оси до точек пересечения крайних лучей, образующих углы σ и σ' с оптической осью, со сферами радиусов a и a' соответственно. Таким образом, применительно к реальным оптическим системам представления о главных плоскостях, справедливые в параксиальной области, для осевого пучка лучей в пределах конечного телесного угла должны быть заменены представлениями о главных сферах, понимая под последними сферы, которые проходят через главные точки оптической системы, а радиусы сфер равны a (передняя главная сфера) и a' (задняя главная сфера).

Заметим, что при $a \rightarrow \infty$ при $m = a \sin \sigma \neq 0$ угол $\sigma \rightarrow 0$. При этом расстояние a' стремится к величине f' , называемой задним фокусным расстоянием оптической системы. Как следует из выражения (5.35), при $a \rightarrow \infty$, а $\sigma \rightarrow 0$ имеем

$$f' = \frac{m}{\sin \sigma'}. \quad (5.36)$$

Условие синусов Аббе в этом случае определяется равенством $\frac{m}{\sin \sigma'} = \text{const}$. Следуя Аббе, назовём пару оптически сопряжённых точек A и A' на оси оптической системы, в изображении которых отсутствует сферическая абберация лучей широкого пучка и, кроме того, выполнено условие синусов, парой апланатических точек.

5.5. Освещённость в осевой точке изображения

При анализе свойств световых трубок по умолчанию предполагалось стигматичное отображение каждой точки элементарных площадок, при этом явления дифракции не учитывались. Результаты такого анализа дают практически важное представление об идеальном распределении светового потока в плоскости изображения. При этом освещённость в каждой точке изображения естественным образом определяется отношением элементарного светового потока к элементарной площадке, на которую он падает, т.е.

$$E_0 = \frac{d\Phi'}{dS'}$$

Используя формулу (5.24), находим, что освещённость E_0 в осевой точке изображения определяется выражением

$$E_0 = \tau\pi L' \sin^2 \sigma' \quad (5.37)$$

Это выражение можно переписать в виде:

$$E_0 = \tau\pi L_0 A'^2 \quad (5.38)$$

Величину $A' = n' \sin \sigma'$ в оптике называют числовой апертурой со стороны изображения или задней числовой апертурой, при этом редуцированная яркость излучения (пучка лучей) $L_0 = \frac{L'}{n'^2} = \frac{L}{n^2}$.

Пусть числовая апертура светового пучка лучей в пространстве предметов (передняя числовая апертура) $A = n \sin \sigma$. Тогда, учитывая формулу (5.33), при соблюдении условия (5.34) получаем

$$E_0 = \frac{\tau\pi}{V_0^2} L_0 A^2, \quad (5.39)$$

где V_0 – поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой.

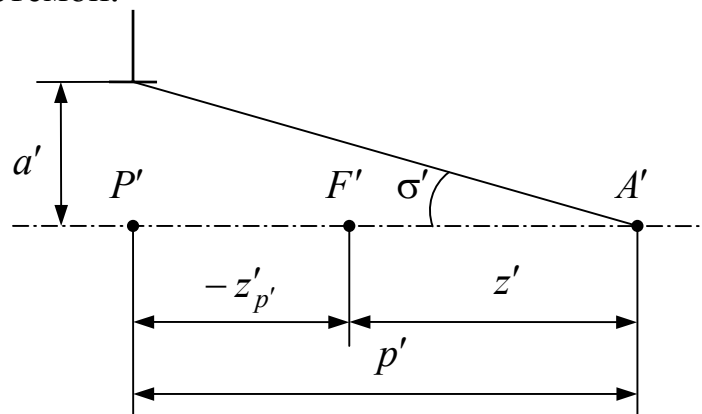


Рис.5.7. Формирование задней угловой апертуры осевого пучка лучей

Пусть радиус выходного зрачка оптической системы равен a' , а расстояние от центра выходного зрачка до осевой точки изображения $P'A' = p'$, как показано на рис.5.7. При этом в соответствии с рисунком имеем

$$\sin^2 \sigma' = \frac{a'^2}{a'^2 + p'^2} = \frac{a'^2}{p'^2} \frac{1}{1 + \frac{a'^2}{p'^2}}.$$

Подставив это соотношение в выражение (5.37), получаем

$$E_0 = \tau L' \frac{\pi a'^2}{p'^2} \frac{1}{1 + \frac{a'^2}{p'^2}}. \quad (5.40)$$

У большинства светосильных зеркальных и зеркально-линзовых систем выходной зрачок имеет форму кольца. Пусть a'_η – радиус экранируемой части зрачка. При этом освещённость в осевой точке изображения определится очевидным выражением вида:

$$E_0 = \tau \pi L' (\sin^2 \sigma'_H - \sin^2 \sigma'_{BH}), \quad (5.41)$$

где $\sin^2 \sigma'_H = \frac{a'^2}{a'^2 + p'^2}$; $\sin^2 \sigma'_{BH} = \frac{a'^2_\eta}{a'^2_\eta + p'^2}$.

Это выражение можно записать в виде

$$E_0 \approx \tau \pi L' (1 - \eta^2) \sin^2 \sigma', \quad (5.42)$$

где $\sigma' = \sigma'_H$; $\eta = \frac{a'_\eta}{a'}$ – коэффициент экранирования зрачка по диаметру (или коэффициент линейного экранирования).

Синус апертурного угла эквивалентной оптической системы, имеющей сплошной выходной зрачок круглой формы и создающей такую же освещённость в осевой точке изображения, равен

$$\sin \sigma'_{\hat{Y}EA} = \sqrt{\sin^2 \sigma'_i - \sin^2 \sigma'_{Ai}}.$$

В соответствии с рис.5.7 имеем

$$p' = z' - z'_{p'} = f' \left(\frac{z'}{f'} - \frac{z'_{p'}}{f'} \right),$$

где f' – фокусное расстояние оптической системы.

При этом

$$p' = f'(-V_0 + V_{0CD}), \quad (5.43)$$

где $V_0 = -\frac{z'}{f'}$ – поперечное увеличение изображения предмета, образованного оптической системой, а $V_{0\zeta D} = -\frac{z'_p}{f'}$ – поперечное увеличение изображения входного зрачка.

Пусть $D_{\zeta D} = 2a$ – диаметр входного зрачка, а $D'_{\zeta D} = 2a'$ – диаметр выходного зрачка. При этом

$$|V_{0\zeta D}| = \frac{a'}{a}. \quad (5.44)$$

Заметим, что при $p' \geq 10a'$ с погрешностью, не превышающей 1%, освещённость в изображении осевой точки определяется выражением

$$E_0 = \tau L' \frac{\pi a'^2}{p'^2}. \quad (5.45)$$

Подставив в это выражение соотношения (5.43) и (5.44), получаем

$$E_0 = \frac{1}{4} \tau \pi L' \left(\frac{2a}{f'} \right)^2 \frac{V_{0\zeta D}^2}{(V_{0\zeta D} - V_0)^2}, \quad (5.46)$$

где $\frac{2a}{f'} = \frac{D_{\zeta D}}{f'} = 2A$ – относительное отверстие оптической системы.

Величину $(2A)^2$ – называют геометрической светосилой оптической системы, а величину $\tau(2A)^2$ называют физической светосилой системы.

Если предмет расположен на весьма большом расстоянии от оптической системы, то величину z' можно считать достаточно малой, полагая $V_0 = -\frac{z'}{f'} \approx 0$. При этом формула (5.46) принимает вид:

$$E_0 = \frac{1}{4} \tau \pi L' \left(\frac{2a}{f'} \right)^2. \quad (5.47)$$

При увеличении изображения предмета $V_0 = -1^X$, а изображения входного зрачка $V_{0\zeta D} = 1^X$ формула (5.46) принимает вид:

$$E_0 = \frac{1}{16} \tau \pi L' \left(\frac{2a}{f'} \right)^2.$$

Формула Манжана-Чиколева

Рассмотрим важный в технике дальнего освещения (случай освещения прожектором) вопрос об освещённости бесконечно удалённого изображения.

Пусть источник света (предмет) расположен вблизи переднего фокуса F оптической системы. В этом случае его изображение окажется расположенным на весьма большом расстоянии p' от выходного зрачка оптической системы, как показано на рис.5.8, где оптическая система представлена бесконечно тонким компонентом φ , а источник света представлен элементом $dS = \pi y^2$, все точки которого обладают одинаковой яркостью и излучают равномерно во всех направлениях.

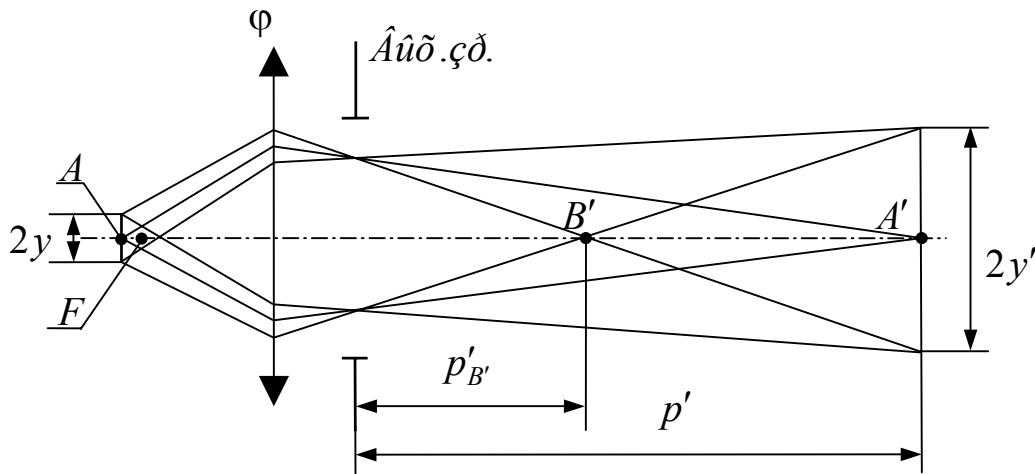


Рис.5.8. Освещённость удалённого изображения

Освещённость E_0 в точке A' , расположенной на оптической оси системы, определится формулой (5.37):

$$E_0 = \tau \pi L' \sin^2 \sigma'.$$

В рассматриваемом случае с достаточной степенью приближения можно считать, что $\sin \sigma' = \frac{a'}{p'}$, где радиус выходного зрачка системы

$$a' = \frac{1}{2} D'_{\zeta D}.$$

Пусть $S'_{\zeta D}$ – площадь выходного зрачка оптической системы. При этом имеем

$$E_0 = \frac{\tau L' S'_{\zeta D}}{p'^2}, \quad (5.48)$$

где $S'_{\zeta D} = \pi a'^2$.

Сопоставив полученное соотношение с формулой (4.17):
 $dE_n = \frac{dI}{r^2}$, можно сделать вывод о том, что рассматриваемая
 оптическая система с источником излучения dS в отношении
 светового действия эквивалентна излучателю с осевой силой света

$$I_0 = \tilde{L}' S'_{\text{CD}},$$

где яркость $\tilde{L}' = \tau L' = \tau \left(\frac{n'}{n} \right)^2 L$; L – яркость источника света. При этом
 выражение (5.48) можно представить в виде:

$$E_0 = \frac{I_0}{p'^2}. \quad (5.49)$$

При $n' = n = 1$:

$$I_0 = \tau L S'_{\text{CD}}. \quad (5.50)$$

Полученную формулу, т.е. выражение (5.49), называют формулой
 Манжена-Чиколева.

Как следует из рис.5.8, эта формула справедлива для всех точек
 на оптической оси в пространстве изображений, расположенных не
 ближе точки B' , так как для более близких точек действующей будет
 не вся световая поверхность выходного зрачка, а только часть её.

В соответствии с рис.5.8 имеем

$$\frac{2y'}{p' - p'_{B'}} = \frac{D'_{\text{CD}}}{p'_{B'}},$$

где D'_{CD} – диаметр выходного зрачка.

При этом

$$p'_{B'} \geq p' \frac{D'_{\text{CD}}}{D'_{\text{CD}} + 2y'}.$$

Обозначим $2y = d$. При этом $2y' = \frac{z'}{f'} d$.

При $z' \approx p' - f'$ получаем

$$p'_{B'} \geq p' \frac{f' D'_{\text{CD}}}{f' D'_{\text{CD}} + (p' - f') d}. \quad (5.51)$$

При $p' = \infty$:

$$p'_{B'(\infty)} \geq f' \frac{D'_{\text{CD}}}{d}.$$

Формула Манжена-Чиколева может быть применена и в тех
 случаях, когда выходной зрачок имеет не только форму круга, но и

более сложную форму, например, в проекционных системах, когда источник света в виде нитей или спирали лампы накаливания изображается конденсором в плоскость входного зрачка проекционного объектива.

Полученные соотношения позволяют весьма просто оценить эффективность применения оптической системы в составе осветительного устройства. Пусть источник излучения имеет площадь $dS_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}}$ и яркость L . Его сила света $I_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}}$ в направлении нормали к поверхности будет равна

$$I_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}} = LdS_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}}.$$

В соответствии с формулой (5.50) осевая сила света источника в сочетании с оптической системой равна

$$I_0 = \tau LS'_{\zeta D}.$$

Отношение рассматриваемых величин силы света называется коэффициентом усиления оптической системы:

$$m = \frac{I_0}{I_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}}} = \tau \frac{S'_{\zeta D}}{dS_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}}}. \quad (5.52)$$

Коэффициент m определяет "выигрыш в силе света", обеспечиваемый применением оптической системы.

Пусть диаметр выходного зрачка оптической системы равен $D'_{\zeta D}$, а диаметр источника излучения равен d . Так как $S'_{\zeta D} = \frac{1}{4}\pi D'^2_{\zeta D}$, а

$dS_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}} = \frac{1}{4}\pi d^2$, имеем

$$m = \tau \left(\frac{D'_{\zeta D}}{d} \right)^2. \quad (5.53)$$

В некоторых системах (например, в прожекторах) коэффициент усиления m может достигать величины 10 000 и даже более.

5.6. Световой поток, проходящий через оптическую систему от излучающего элемента поверхности, расположенного вне оптической оси

Определим световой поток, падающий на элементарную площадку dS' в плоскости изображения оптической системы, содержащую точку A' , расположенную вне оптической оси, как показано на рис.5.9. Предположим при этом, что световой поток, выходящий из системы, заполняет её выходной зрачок, имеющий

форму круга, и что яркость излучения в пределах всего пучка лучей остаётся постоянной и равной L' .

Разобьём выходной зрачок системы на элементарные кольца бесконечно близкими concentрическими окружностями. Выделим элемент площади $d\Sigma'$ одного из колец, ограниченный окружностями, радиусы которых равны r' и $r'+dr'$, и углом $d\varphi$ между двумя меридиональными плоскостями, одна из которых образует некоторый угол φ с осью Y . Площадь этого элемента зрачка равна $r'dr'd\varphi$. При

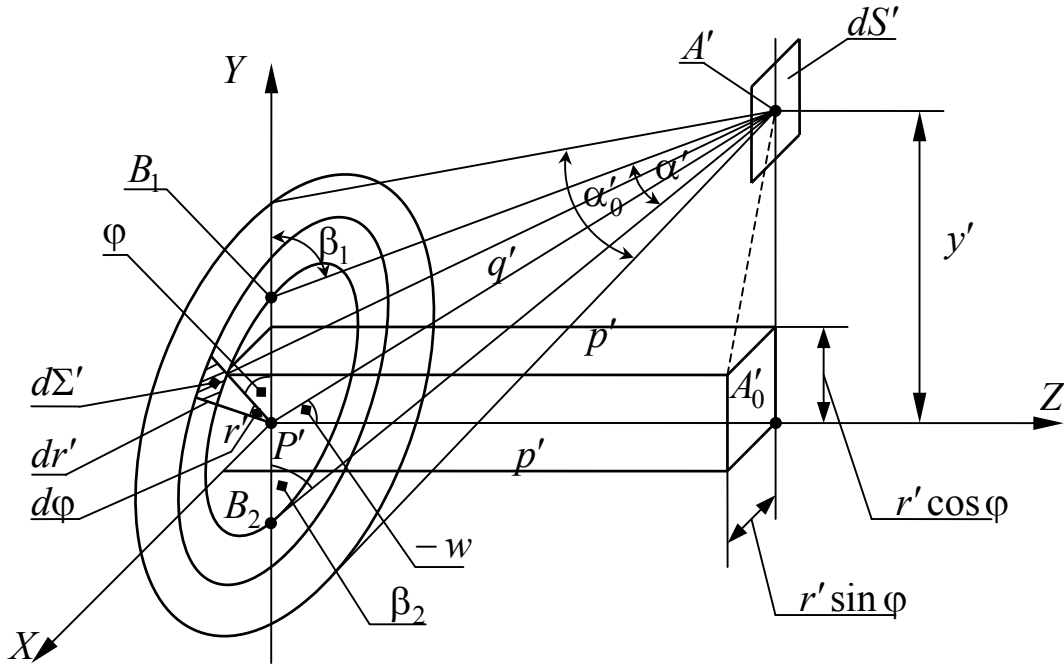


Рис.5.9. Определение светового потока, падающего на элементарную площадку dS' в плоскости изображения оптической системы

этом световой поток, проходящий через элементарную световую трубку, образованную двумя площадками (сечениями) $d\Sigma' = r'dr'd\varphi$ и dS' , равен

$$d^2\Phi' = \frac{L'dS'r'dr'd\varphi \cos^2(q', Z)}{q'^2}, \quad (5.54)$$

где q' – расстояние от элемента $d\Sigma'$ кольца с координатами $(r' \sin \varphi; r' \cos \varphi; 0)$ до элемента dS' с координатами $(0; y'; p')$. В соответствии с рис.5.9 имеем

$$\begin{aligned} \cos(q', Z) &= \frac{p'}{q'}; \\ q'^2 &= p'^2 + (y' - r' \cos \varphi)^2 + r'^2 \sin^2 \varphi = \\ &= p'^2 + y'^2 + r'^2 - 2r'y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Поток $d\Phi'$, проходящий через элемент изображения dS' , находим, выполняя интегрирование по всей площади выходного зрачка круглой формы радиуса a' :

$$d\Phi' = L'p'^2 dS' \int_0^{a'} r' dr' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(p'^2 + y'^2 + r'^2 - 2r'y' \cos \varphi)^2}. \quad (5.56)$$

Представим это выражение в виде:

$$d\Phi' = L'p'^2 dS' \int_0^{a'} r' dr' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}.$$

Первое интегрирование выполняем по формуле

$$\int \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} = \frac{A \sin \varphi}{a + b \cos \varphi} + B \int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi},$$

где $A = \frac{b}{b^2 - a^2}$ и $B = \frac{a}{a^2 - b^2}$. При этом

$$\int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right), \text{ при условии, что } a > b.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} &= \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^{\pi} + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} [\operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-\infty)] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Кроме того, $A \frac{\sin \varphi}{a + b \cos \varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2} = \frac{a}{a^2 - b^2} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

При этом выражение (5.56) принимает вид

$$d\Phi = 2\pi L'p'^2 dS' \int_0^{a'} \frac{(p'^2 + r'^2 + y'^2) r' dr'}{\left[(p'^2 + r'^2 + y'^2)^2 - 4y'^2 r'^2 \right]^{3/2}}. \quad (5.57)$$

Для выполнения интегрирования в выражении (5.57) введём новую переменную α' – угол между лучами B_1A' и B_2A' , проведёнными из точки A' к концам диаметра B_1B_2 элементарного кольца в меридиональной плоскости. Как следует из рис.5.9,

$$\alpha' = \beta_1 - \beta_2,$$

где β_1 и β_2 – углы с осью Y лучей B_1A' и B_2A' .

Так как $\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{p'}{y' - r'}$, а $\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{p'}{y' + r'}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\beta_2}{1 + \operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{tg}\beta_2} = p' \frac{y' + r' - y' + r'}{y'^2 - r'^2} \left(1 + \frac{p'^2}{y'^2 - r'^2} \right)^{-1} = \frac{2p'r'}{p'^2 + y'^2 - r'^2};$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha' &= (1 + \operatorname{tg}^2\alpha')^{-1/2} = \frac{p'^2 + y'^2 - r'^2}{\sqrt{(p'^2 + y'^2 - r'^2)^2 + 4p'^2 r'^2}} = \\ &= \frac{p'^2 + y'^2 - r'^2}{\sqrt{(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4r'^2(p'^2 + y'^2 + r'^2) + 4r'^4 + 4p'^2 r'^2}} = \\ &= \frac{p'^2 + y'^2 - r'^2}{\sqrt{(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4r'^2(r'^2 + p'^2) + 4r'^2(r'^2 + p'^2) - 4y'^2 r'^2}} = \\ &= \frac{p'^2 + y'^2 - r'^2}{\sqrt{(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2}}. \end{aligned}$$

Продифференцируем последнее выражение:

$$\begin{aligned} -\sin\alpha d\alpha &= -\frac{2r'dr'}{\sqrt{(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2}} - \\ &= -(p'^2 + y'^2 + r'^2) \frac{2(p'^2 + y'^2 + r'^2)2r' - 8y'^2 r'}{2[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2]^{3/2}} dr' = \\ &= -2r'dr' \frac{(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2 + (p'^2 + y'^2 - r'^2)(p'^2 - y'^2 + r'^2)}{[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2]^{3/2}} = \\ &= -2r'dr' \frac{(p'^2 + y'^2 + r'^2)(p'^2 + y'^2 + r'^2 + p'^2 + y'^2 - r'^2) - 4y'^2 r'^2}{[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2y'^2(p'^2 + y'^2 - r'^2)}{\left[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2 \right]^{3/2}} = \\
& = -2r'dr' \frac{2(p'^2 + y'^2 + r'^2)(p'^2 + y'^2) - 2y'^2(p'^2 + y'^2 + r'^2)}{\left[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2 \right]^{3/2}} = \\
& = -4p'^2 \frac{p'^2 + y'^2 + r'^2}{\left[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2 \right]^{3/2}} r'dr'.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\sin \alpha' d\alpha' = 4p'^2 \frac{p'^2 + y'^2 + r'^2}{\left[(p'^2 + y'^2 + r'^2)^2 - 4y'^2 r'^2 \right]^{3/2}} r'dr'. \quad (5.58)$$

Сопоставив выражения (5.57) и (5.58), получаем

$$d\Phi' = \frac{1}{2} \pi L' dS' \int_0^{\alpha'_0} \sin \alpha' d\alpha', \quad (5.59)$$

где α_0 – угол между лучами, выходящими из крайних точек выходного зрачка, лежащих в меридиональной плоскости, и пересекающихся в точке A' в плоскости изображения. В результате интегрирования в выражении (5.59) получаем

$$d\Phi' = \frac{1}{2} \pi L' dS' (1 - \cos \alpha'_0) = \pi L' dS' \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0, \quad (5.60)$$

$$\text{где } \cos \alpha'_0 = \frac{p'^2 + y'^2 - a'^2}{\sqrt{(p'^2 + y'^2 + a'^2)^2 - 4y'^2 a'^2}}.$$

Заметим, что для точки A'_0 , расположенной на оптической оси системы, $y' = 0$, а, следовательно,

$$\cos \alpha_0 = \frac{p'^2 - a'^2}{p'^2 + a'^2}. \text{ При этом}$$

$$d\Phi' = \frac{1}{2} \pi L' dS' \frac{p'^2 + a'^2 - p'^2 + a'^2}{p'^2 + a'^2} = \pi L' dS' \frac{a'^2}{p'^2 + a'^2} = \pi L' dS' \sin^2 \sigma',$$

где σ' – апертурный угол оптической системы в пространстве изображений. В этом случае формула (5.60) естественным образом переходит в формулу (5.28).

В реальной оптической системе выходящий световой поток $d\Phi'$ меньше входящего потока $d\Phi$ и равен $d\Phi' = \tau d\Phi$, где τ – коэффициент пропускания оптической системы.

5.7. Освещённость элемента изображения, расположенного вне оптической оси системы

Освещённость в некоторой точке, расположенной вне оптической оси в плоскости изображения, определяется отношением потока $d\Phi'$ к площади элемента изображения dS' , содержащего эту точку. В соответствии с формулой (5.60) это отношение равно:

$$E = \pi\tau L' \sin^2 \frac{1}{2} \alpha'_0. \quad (5.61)$$

Полагая заднюю апертуру наклонного пучка лучей сравнительно малой, что справедливо для подавляющего большинства применяемых систем, формулу (5.61) можно преобразовать к более удобному виду. Действительно, если величина $\sin \frac{1}{2} \alpha'_0$ сравнительно невелика, то можно принять, что

$$\sin \frac{1}{2} \alpha'_0 \approx \frac{a' \cos w'}{P'A'},$$

где в соответствии с рис.5.9 $P'A'$ – отрезок, соединяющий центр выходного зрачка P' с рассматриваемой точкой A' ; a' – радиус кругового сечения наклонного пучка лучей, сходящихся в точке A' , плоскостью выходного зрачка.

В соответствии с рисунком $P'A' = \frac{p'}{\cos w'}$. При этом $\sin \frac{1}{2} \alpha'_0 \approx \frac{a'}{p'} \cos^2 w'$.

Последнее соотношение позволяет выражение (5.61) представить в виде:

$$E = \pi\tau L' \frac{a'^2}{p'^2} \cos^4 w'. \quad (5.62)$$

Положив в формуле (5.37) $\sin \sigma' = \frac{a'}{p'}$, получаем

$$E_0 = \pi\tau L' \frac{a'^2}{p'^2}. \quad (5.63)$$

Из сопоставления соотношений (5.62) и (5.63) следует, что

$$E = E_0 \cos^4 w'. \quad (5.64)$$

При выводе формулы (5.64) предполагалось, что оптическая система образует безаберрационное изображение предмета и апертурной диафрагмы. В случае реальной оптической системы формулу (5.63) удобно переписать в виде:

$$E_0 = \frac{d\Phi'}{dS'_0} = \tau\pi L' \frac{a_0'^2}{p'^2}, \quad (5.65)$$

а формулу (5.62) удобно представить в таком виде:

$$E = \frac{d\Phi'}{dS'_0} \frac{dS'_0}{dS'} = \frac{dS'_0}{dS'} \tau\pi L' \frac{a_0'^2}{p'^2} \cos^4 w'. \quad (5.66)$$

Из сопоставления формул (5.65) и (5.66) следует, что

$$E = \frac{a'^2}{a_0'^2} \frac{dS'_0}{dS'} E_0 \cos^4 w'. \quad (5.67)$$

Вполне очевидно, что aberrации в изображении апертурной диафрагмы, образованном следующей за ней частью оптической системы, определяют неравенство $\frac{a'^2}{a_0'^2} \neq 1$, а неравенство $\frac{dS'_0}{dS'} \neq 1$

определяется дисторсией в изображении предмета.

Назовём произведение рассматриваемых отношений aberrационным коэффициентом Русинова (коэффициентом aberrационного виньетирования) и обозначим его через $P_{\acute{O}\tilde{N}}(w')$:

$$P_{\acute{O}\tilde{N}}(w') = \frac{a'^2}{a_0'^2} \frac{dS'_0}{dS'}. \quad (5.68)$$

При этом формулу (5.62) можно представить в виде:

$$E = P_{\acute{O}\tilde{N}}(w') E_0 \cos^4 w'. \quad (5.69)$$