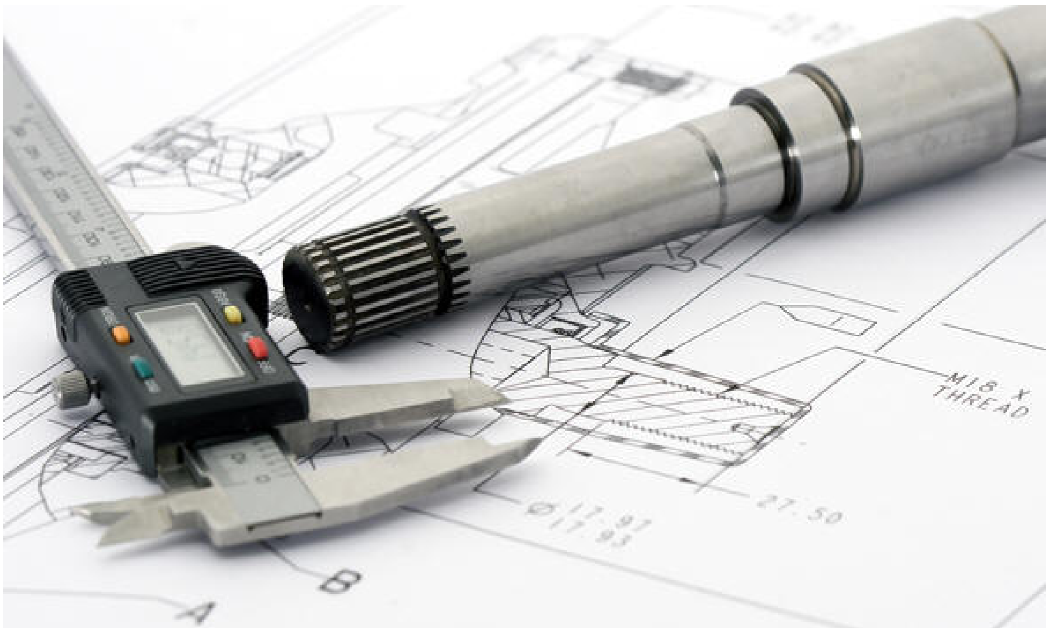
В. Л. Ткалич
Р. Я. Лабковская

Обработка результатов технических измерений



Санкт-Петербург
2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

В. Л. Ткалич, Р. Я. Лабковская

Обработка результатов технических измерений

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2011

УДК 389.001

Ткалич В.Л., Лабковская Р.Я. «Обработка результатов технических измерений». Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 72 с.

В учебном пособии рассмотрены основные понятия метрологии. Теория воспроизведения единиц физических величин и передача их размеров, теория погрешностей, обработка результатов измерений и средства измерений.

Предназначено для обучения студентов в рамках общепрофессиональных дисциплин ОПД.Ф.05 «Метрология, стандартизация и сертификация», ОПД.Ф.05.01 «Метрология, стандартизация и технические измерения» и ОПД.Ф.06 «Метрология и электрорадиоизмерения» учебного плана подготовки специалистов по направлениям 090104 – «Комплексная защита объектов информатизации» и 210202 – «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств».

Печатается по решению Совета факультета КТиУ СПбГУ ИТМО от 16.11.10 (протокол № 15).

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие разработано в рамках общепрофессиональной дисциплин ОПД.Ф.05 «Метрология, стандартизация и сертификация», ОПД.Ф.05.01 «Метрология, стандартизация и технические измерения» и ОПД.Ф.06 «Метрология и электрорадиоизмерения» учебного плана по ряду специальностей и направлений подготовки дипломированных специалистов и подготовки бакалавров и магистров в соответствии с требованиями Государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования.

Задачей дисциплины является формирование у студентов достаточных знаний в области основ метрологии, стандартизации и сертификации, позволяющих использовать современные измерительные технологии, которые представляют собой последовательность действий, направленных на получение измерительной информации требуемого качества.

Важную роль в подготовке специалистов по метрологии и управлению качеством играют нормативные документы метрологических органов. В настоящем пособии активно используются нормативные материалы Госстандарта.

Измерения – один из важнейших путей познания природы человеком. Они играют огромную роль в современном обществе. Наука, техника и промышленность не могут существовать без них. Каждую секунду в мире производятся многие миллиарды измерительных операций, результаты которых используются для обеспечения надлежащего качества и технического уровня выпускаемой продукции, обеспечения безопасной и безаварийной работы транспорта, для медицинских и экологических диагнозов и других важных целей. Практически нет ни одной сферы деятельности человека, где бы интенсивно не использовались результаты измерений, испытаний и контроля.

Диапазон измеряемых величин и их количество постоянно растет. С ростом диапазона измеряемых величин возрастает и сложность измерений. Они, по сути дела, перестали быть одноактным действием и превратились в сложную процедуру подготовки и проведения измерительного эксперимента, обработки и интерпретации полученной информации. Поэтому следует говорить об измерительных технологиях, понимаемых как последовательность действий, направленных на получение измерительной информации требуемого качества.

Другой фактор, подтверждающий важность измерений, их значимость. Основой любой формы управления, анализа, прогнозирования, планирования, контроля или регулирования является достоверная исходная информация, которая может быть получена только путем измерения требуемых физических величин, параметров и показателей. Естественно, что только высокая и гарантированная точность результатов измерений обеспечивает правильность принимаемых решений. Сотрудничество с зарубежными странами, совместная разработка научно-технических программ требуют взаимного доверия к измерительной информации. Ее высокое качество, точность и достоверность, единообразие принципов и способов оценки точности результатов измерений имеют первостепенное значение.

Настоящее учебное пособие распространяется на методы обработки результатов прямых измерений с многократными наблюдениями. Единая методика нахождения результата и параметров его погрешности для измерений с многократными наблюдениями обеспечивает возможность сопоставления результатов, получаемых при измерении в разных лабораториях. Для этой цели учебное пособие рекомендует унифицированный выбор доверительной вероятности и уровня значимости, выбор методов проверки нормальности распределения результатов наблюдений, оценку анормальности результатов наблюдений, нахождение доверительных границ систематических и случайных погрешностей и т.д.

Рекомендуемая методика обработки экспериментальных данных распространяется на большинство случаев производимых измерений, результаты наблюдений которых распределены нормально. При составлении учебного пособия принимались во внимание только стандартизованные методы обработки результатов измерений. Поэтому в учебном пособии используются основные положения проекта стандарта на методы обработки результатов прямых измерений с многократными наблюдениями.

Учебное пособие предназначается для применения как в учебном процессе, так и при выполнении научно-исследовательских работ.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

1.1. Сущность измерений

Измерение представляет собой информационный процесс, результатом которого является получение измерительной информации. Измерительная информация представляется в числовой форме и в дальнейшем используется оператором или автоматизированной системой.

Объектом измерения является физическая величина, например масса, расстояние, давление, сила, перемещение, ускорение и т.п.

Для получения измерительной информации необходимо сравнить измеряемую величину с физически однородной ей величиной известного размера. Для числового представления результата сравнения используется единица измерения.

1.2. Классификация измерений

Измерения классифицируют по нескольким признакам, наиболее важные из которых отражены на рис. 1.1.

По первому классификационному признаку измерения подразделяют на: статические, при которых измеряемая величина остается постоянной во времени в процессе измерения, и динамические, при которых измеряемая величина изменяется в процессе измерения.

Классификация по второму признаку является в большой степени условной, однако широко применяется в измерительной технике. Ею определяются сложившиеся совокупности родственных по природе или применению в отдельных областях науки или техники физических величин.

По третьему признаку измерения подразделяют на три класса.

Измерения максимально возможной точности, достижимой при современном уровне техники. Это измерения, связанные с созданием и воспроизведением эталонов, а также измерения универсальных физических констант.

Контрольно-проверочные измерения, погрешности которых не должны превышать заданного значения. Такие измерения осуществляются в основном государственными и ведомственными метрологическими службами.

Технические измерения, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений. Технические измерения являются наиболее распространенными и выполняются во всех отраслях хозяйства и науки. К ним, в частности, относятся и технологические измерения.

Четвертым классификационным признаком служит число измерений (наблюдений при измерении или просто наблюдений), выполняемых для получения результата.

По пятому признаку измерения в зависимости от вида функциональной связи между искомой и непосредственно измеряемой величинами и от способа получения числового значения измеряемой величины все измерения разделяются на: прямые, косвенные, совокупные и совместные.

Прямым называется измерение, при котором искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных. Примерами прямых измерений являются измерение сопротивления омметром, измерение мощности ваттметром, измерение давления манометром и т.д.

Косвенным называется измерение, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям. При этом числовое значение искомой величины определяется по формуле:

$$z = F(a_1, a_2, ..., a_m),$$

где z – значение искомой величины, a_1, a_2, …, a_m – значения непосредственно измеряемых величин.

Примеры косвенных измерений: определение значения активного сопротивления R резистора на основе прямых измерений силы тока I через резистор и падения напряжения U на нем по формуле $R = U / I$.

К совокупным относятся производимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомые значения величин находят решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин.

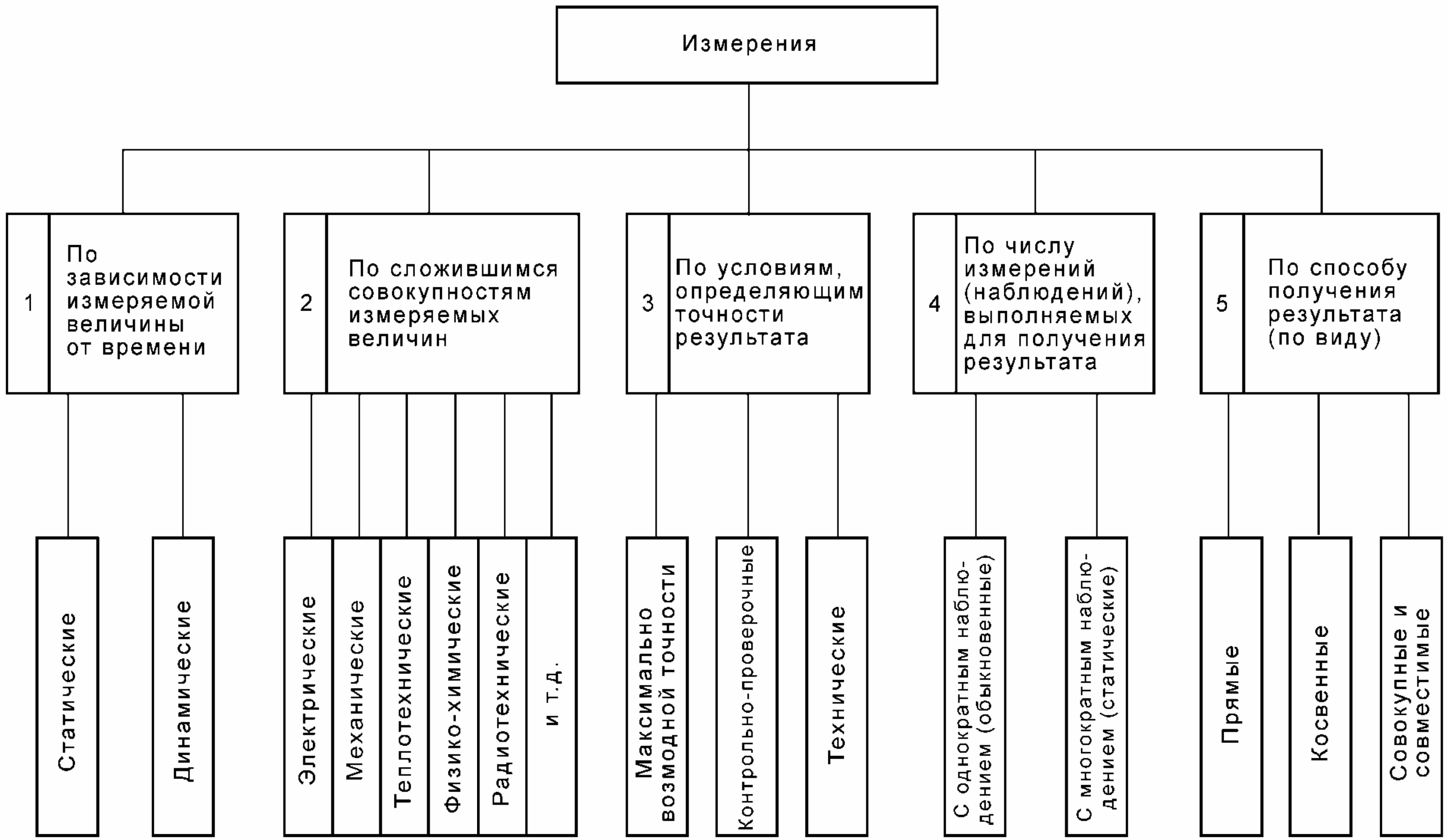


Рис. 1.1. Классификация измерений

Совместные измерения – это производимые одновременно измерения двух или нескольких неодноименных величин для нахождения зависимости между ними.

Числовые значения искомых величин при совокупных и совместных измерениях определяются из системы уравнений, связывающих значения искомых величин со значениями величин, измеренных прямым (или косвенным) способом.

Чтобы определить числовые значения искомых величин необходимо получить, по крайней мере, столько уравнений, сколько имеется этих величин, хотя в общем случае число прямых измерений может быть и больше минимально необходимого.

В качестве примера рассмотрим задачу экспериментального определения зависимости сопротивления резисто ра от температуры. Предположим, что эта зависимость имеет вид:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t + \beta t^2),$$

где R_0 и R_t – значения сопротивлений резистора при нулевой температуре и температуре t соответственно; α и β – постоянные температурные коэффициенты.

Требуется определить значения величин R_0, α и β. Очевидно, ни прямыми, ни косвенными измерениями здесь задачу не решить. Поступим следующим образом. При различных (известных) значениях температуры (она может быть измерена прямо или косвенно) t_1, t_2 и t_3 измеряем (прямо или косвенно) значения R_{t1}, R_{t2} и R_{t3} и записываем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} R_{t_1} &= R_0(1 + \alpha t_1 + \beta t_1^2); \\ R_{t_2} &= R_0(1 + \alpha t_2 + \beta t_2^2); \\ R_{t_3} &= R_0(1 + \alpha t_3 + \beta t_3^2). \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно R_0, α и β, получаем значения искомых величин. Это пример совместных измерений.

1.3. Методы измерений

С учетом того, что метод измерений представляет собой совокупность приемов использования принципов и средств измерений, различают два метода измерений: метод непосредственной оценки и метод сравнения с мерой.

Классификационным признаком в таком разделении методов измерений является наличие или отсутствие при измерениях меры.

Для удобства изложения в дальнейшем используется классификация методов измерений, приведенная на рис. 1.2.

Метод непосредственной оценки (отсчета) – метод измерений, в котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия.

Прибор прямого действия – измерительный прибор, в котором сигнал измерительной информации движется в одном направлении, а именно с входа на выход.

Метод сравнения с мерой – метод измерения, в котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой.

Методы сравнения в зависимости от наличия или отсутствия при сравнении разности между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, подразделяют на нулевой и дифференциальный.

Нулевой метод – это метод сравнения с мерой, в котором результирующий эффект воздействия величин на прибор сравнения доводят до нуля (прибор сравнения, или компаратор, - измерительный прибор, предназначенный для сравнения измеряемой величины с величиной, значение которой известно).

Дифференциальный метод – это метод сравнения с мерой, в котором на измерительный прибор воздействует разность измеряемой величины и известной величины, воспроизводимой мерой. Этот метод позволяет получать результаты измерений с высокой точностью даже в случае применения относительно неточных измерительных приборов, если с большой точностью воспроизводится известная величина.

Метод противопоставления – метод сравнения с мерой, в котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействует на прибор сравнения, с помощью которого устанавливается соотношение между этими величинами.

Методом замещения называется метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают известной величиной, воспроизводимой мерой. Это, например, взвешивание с поочередным помещением массы и гирь на одну и ту же чашку весов. Метод замещения можно рассматривать как разновидность диф-

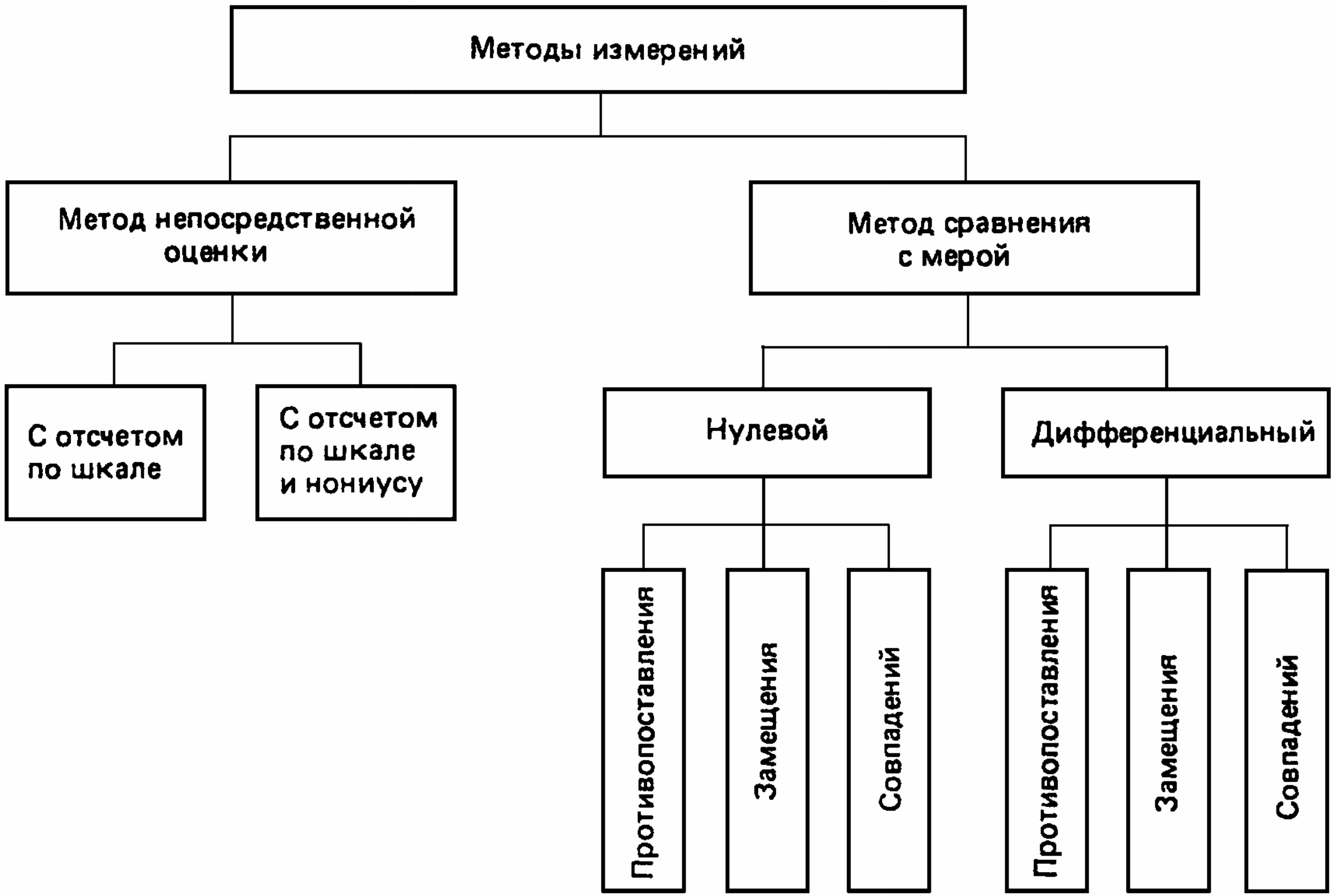


Рис. 1.2. Классификация методов измерений

ференциального или нулевого метода, отличающуюся тем, что сравнение измеряемой величины с мерой производится разновременно.

1.4. Средства измерений

Классификация средств измерений представлена на рис. 1.3.

Самым многочисленным видом средств измерений являются измерительные устройства, применяемые самостоятельно или в составе измерительных установок и измерительных систем.

Описанные выше различия в методах сравнения измеряемой величины с мерой находят свое отражение и в принципах построения измерительных приборов.

В измерительном приборе прямого действия предусмотрено одно или несколько преобразований сигнала измерительной информации в одном направлении, т.е. без применения обратной связи. Так, например, на рис. 1.4 (а) приведена структура электронного вольтметра переменного и постоянного тока, которая содержит выпрямитель В, усилитель постоянного тока УПТ и измерительный механизм ИМ. В этом приборе преобразование сигнала измерительной информации идет только в одном направлении.

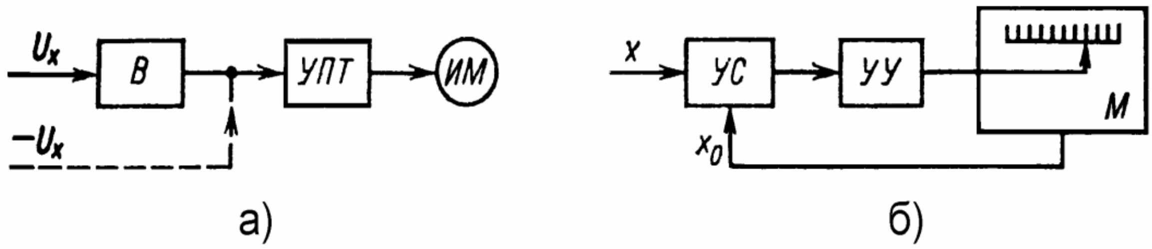


Рис. 1.4. Структурные схемы прибора

Характерной особенностью приборов прямого действия является потребление энергии от объекта измерения. Однако это не исключает возможности применения приборов прямого действия для измерения, например, электрического сопротивления или емкости, но для этого необходимо использовать вспомогательный источник энергии.

Измерительный прибор сравнения предназначен для непосредственного сравнения измеряемой величины с величиной, значение которой известно.

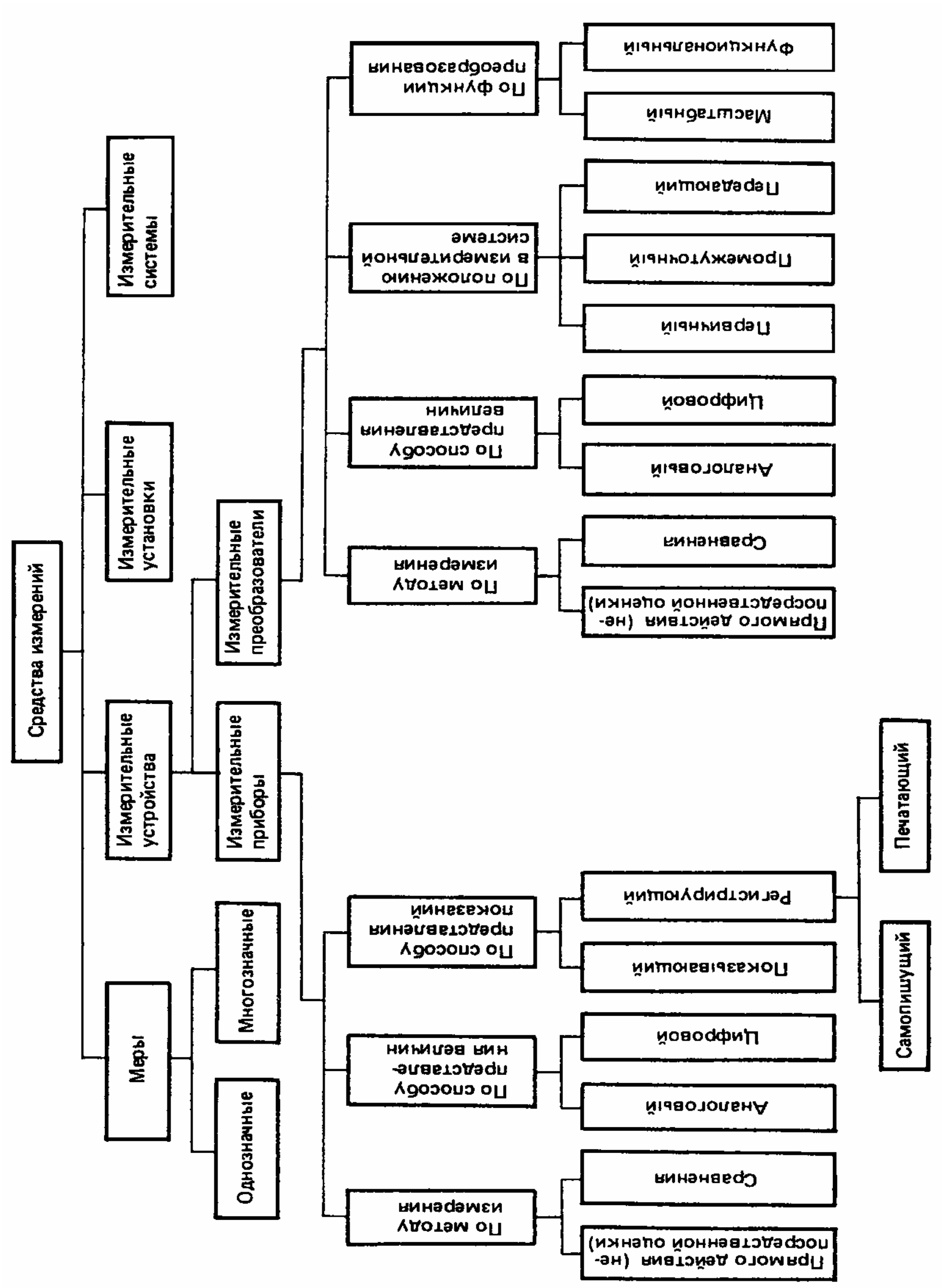


Рис. 1.3. Классификация средств измерений

На рис. 1.4 (б) приведена структурная схема автоматического прибора сравнения, содержащая устройство сравнения УС, устройство управления УУ и изменяемую (регулируемую) меру М с отсчетным устройством.

Измеряемая величина x и однородная с ней величина x_0 подаются на входы устройства сравнения УС. Величина x_0 получается от регулируемой меры М. В зависимости от результата сравнения x с x_0 устройство управления УУ воздействует на меру М таким образом, чтобы величина $|x — x_0|$ уменьшалась. Процесс уравновешивания заканчивается, когда $x_0 = x$. При этом значение измеряемой величины отсчитывается по шкале регулируемой меры. Если в устройстве сравнения происходит вычитание величин x и x_0, то в данном приборе реализуется сравнение измеряемой величины с мерой нулевым методом.

Очевидно, что любой измерительный прибор сравнения должен иметь цепь обратной связи и замкнутую структуру.

Обратная связь может применяться и в приборах прямого действия, однако в них она всегда охватывает не весь процесс преобразования, а только его часть. Например, в структурной схеме на рис. 1.4 (а) усилитель постоянного тока может быть охвачен обратной связью. В измерительных приборах сравнения в цепи обратной связи всегда формируется физическая величина, однородная с измеряемой, которая подается на вход прибора.

Следует отметить, что сравнение измеряемой величины с мерой в приборах сравнения может осуществляться либо одновременно (нулевой метод), либо разновременно (метод замещения).

Аналоговые измерительные приборы (АИП) характеризуются тем, что их показания являются непрерывными функциями изменений измеряемых величин. Все многообразие АИП можно свести к трем структурным схемам, показанным на рис. 1.5.

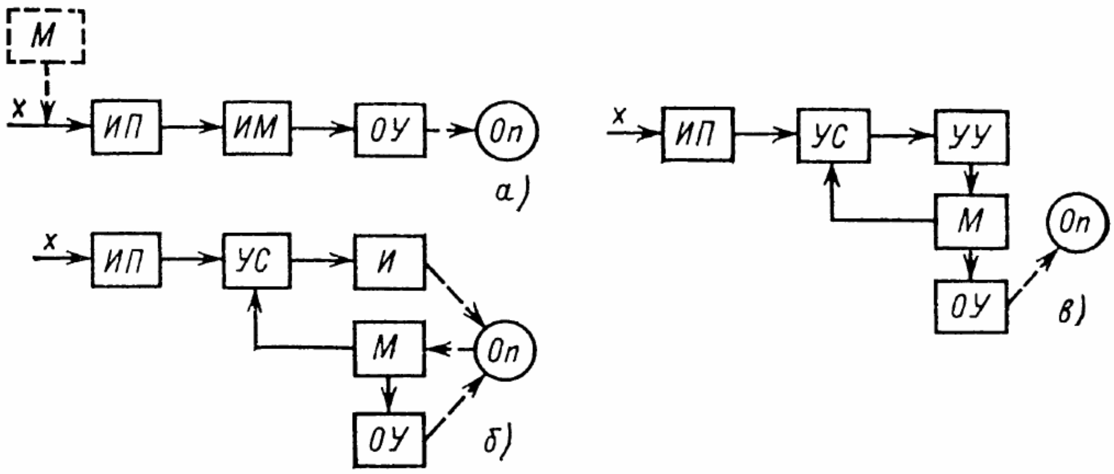


Рис. 1.5. Структурные схемы АИП

Структурная схема, приведенная на рис. 1.5 (а), соответствует АИП прямого действия. В данных АИП преобразование измерительной информации осуществляется только в одном направлении от входа к выходу. Измеряемая величина х с помощью измерительного преобразователя ИП преобразуется в напряжение или ток, который воздействует на электромеханический измерительный механизм ИМ, взывая перемещение его подвижной части и связанного с ней указателя отсчетного устройства ОУ.

Отсчетное устройство содержит оцифрованную шкалу, с помощью которой оператор Оп получает количественный результат измерения. Градуировка шкалы прибора производится путем подачи на его вход ряда известных значений измеряемой величины, реализуемых многозначной образцовой мерой М. Таким образом, сравнение измеряемой величины с единицей измерения в данном случае осуществляется косвенно, а мера М в процессе измерения непосредственного участия не принимает.

На рис. 1.5 (б) изображена структура АИП сравнения. Эти приборы предназначены для непосредственного сравнения измеряемой величины с величиной, значение которой известно. Устройство сравнения УС сравнивает значения преобразованной с помощью ИП измеряемой величины и образцовой величины, реализуемой регулируемой мерой М. Оператор Оп с помощью индикатора И оценивает результат сравнения и регулирующее значение величины, воспроизводимой мерой М, до достижения равенства величин на входах УС. Значение величины, воспроизводимой мерой М, отображается отсчетным устройством ОУ, которое может быть отградуировано в единицах измеряемой величины.

При отсутствии ИП на входе АИП осуществляется непосредственное сравнение измеряемой величины с физи-

чески однородной ей величиной, воспроизводимой мерой.

Обобщенная структура автоматического АИП сравнения приведена на рис. 1.5 (в). Принцип действия аналогичен описанному выше, но мера М регулируется автоматически с помощью устройства управления УУ.

В АИП применяются различные ИМ, предназначенные для преобразования электрической энергии в механическую энергию перемещения подвижной части относительно неподвижной (рис. 1.6).

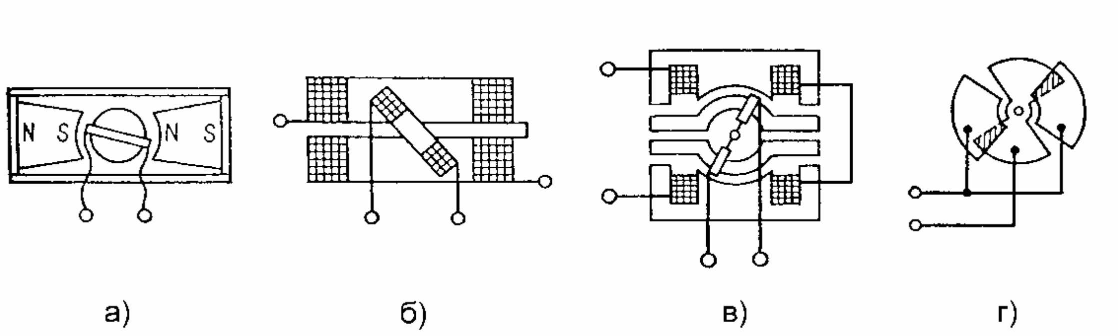


Рис. 1.6. Схемы магнитоэлектрического (а), электродинамического (б), ферродинамического (в) и электростатического (г) ИМ

В магнитоэлектрическом ИМ (рис. 1.6, а) рамка подвижной части перемещается в магнитном поле воздушного зазора. На рамку действует вращающий момент:

$$M_{вр} = B \cdot S \cdot \omega \cdot I,$$

где B – магнитная индукция в рабочем зазоре, S – активная площадь рамки, ω – число витков обмотки рамки, I – измеряемый ток.

Кроме вращающего момента на подвижную часть ИМ действует противодействующий момент, создаваемый обычно пружиной:

$$M_{пр} = \alpha \cdot W,$$

где α – угол поворота подвижной части, W – удельный противодействующий момент. Рамка жестко соединена со стрелкой. Движение подвижной части происходит до тех пор, пока $M_{вр} = M_{пр}$.

В этом положении стрелки производят отсчет показаний по отсчетному устройству ОУ (обычно шкала).

Магнитоэлектрические ИМ применяются в амперметрах, вольтметрах, гальванометрах, омметрах и обеспечивают высокую точность (класс 0,05), равномерную шкалу, высокую чувствительность, малое собственное потребление мощности, большой диапазон измерений. Однако они имеют сложную конструкцию, показания зависят от температуры и пригодны для измерения только в цепях постоянного тока.

В электродинамических ИМ вращающий момент создается при взаимодействии тока, проходящего по рамке подвижной части, с магнитным потоком, создаваемым током, проходящим через неподвижные катушки возбуждения (рис. 1.6, б). К их достоинствам относятся возможность использования в цепях как постоянного, так и переменного тока, стабильность показаний во времени. Однако шкала неравномерна, чувствительность невысокая, показания зависят от частоты сигнала, температуры, внешних магнитных полей, боятся тряски, вибраций, сложны по конструкции. Применяются в амперметрах, вольтметрах, ваттметрах, частотомерах, фазометрах классов точности 0,5; 0,2; 0,1.

Ферродинамические ИМ отличаются от электродинамических тем, что неподвижная катушка расположена на сердечнике из ферромагнитного материала (рис. 1.6, в), что приводит к значительному увеличению $M_{вр}$ и уменьшению влияния внешних магнитных полей. Однако про этом снижается точность за счет наличия потерь на гистерезис и вихревые токи. Поэтому их применение ограничено цепями переменного тока до 1,5 кГц в качестве амперметров, вольтметров, ваттметров. Промышленность выпускает тряско-, вибро- и ударопрочные ферродинамические приборы классов точности 1,5 и 2,5, переносные класса 0,5, щитовые классов 0,2 и 0,5. В цепях постоянного тока практически не используются из-за потерь на гистерезис.

В электростатических ИМ (рис. 1.6, г) для перемещения подвижной части используется взаимодействие двух или нескольких электрически заряженных проводников. Измеряемое напряжение приложено к неподвижным и подвижным электродам из алюминия и создает между ними электростатическое поле и вращающий момент $M_{вр}$, поворачивающий подвижный электрод. Используются в цепях постоянного и переменного тока (до 10 МГц), показания не зависят от частоты и формы измеряемого напряжения, от внешних магнитных полей, имеют большой диапазон измеряемых напряжений (сотни кВ). Однако имеют малую чувствительность, показания зависят от внешних электрических полей, классы точности 0,5, 1,0, 1,5.

В практике измерений широко применяются выпрямительные приборы, представляющие собой сочетание диодного выпрямителя и магнитоэлектрического ИМ. Такая комбинация обеспечивает измерение как постоянных, так и переменных токов в широком диапазоне частот (до 20 кГц). Промышленно выпускается в виде авометров.

Для измерений токов высокой частоты (до сотен МГц) используются термоэлектрические приборы – сочетание магнитоэлектрического ИМ и термоэлектрического преобразователя, выполненного в виде термопары и нагревателя (допустимая температура 600..800 °С). Измеряемый ток протекает через нагреватель (проволока из вольфрама, нихрома и константана), температура которого определяется величиной этого тока. Термо-ЭДС термопары, пропорциональная величине тока, измеряется магнитоэлектрическим ИМ. Класс точности 0,5 и 1,0, диапазоны измерения 100 мА … 10 А, 0,75 … 50 В. Однако показания приборов зависят от температуры окружающей среды, входное сопротивление низкое (200 … 300 Ом/В), малая чувствительность. Применяются в качестве амперметров, вольтметров, ваттметров.

Электронные АИП представляют собой сочетание электронной части (выпрямитель, усилитель) и магнитоэлектрического ИМ. Отличаются большим диапазоном измеряемых величин и быстродействием. Применяются в качестве вольтметров, частотомеров, измерителей емкости, сопротивления, индуктивности, параметров транзисторов, интегральных схем и др.

Цифровые измерительные приборы (ЦИП) осуществляют автоматическое преобразование входной измеряемой величины в код. Показания ЦИП представлены в цифровой форме. В отличие от АИП в ЦИП обязательно выполняются операции квантования измеряемой величины по уровню, дискретизации её по времени и кодирование (рис. 1.7).

Измеряемая аналоговая величина $x(t)$ поступает на унифицирующий измерительный преобразователь (УИП), содержащий делители, усилители, выпрямители, фильтры, преобразователи линеаризации и т.п. Нормализованный аналоговый сигнал *y(t)* поступает на вход аналого-цифрового преобразователя (АЦП), который выполняет операции квантования по уровню и по времени *x(t)*, сравнения *x(t)* с мерой М и кодирование результатов.

При этом на выходе формируется дискретный сигнал ДС, который преобразуется в цифровом средстве отображения информации (ЦСОП) в цифровой отсчет N или в виде кода передается на ЭВМ. Устройство управления (УУ) реализует необходимый алгоритм измерения.

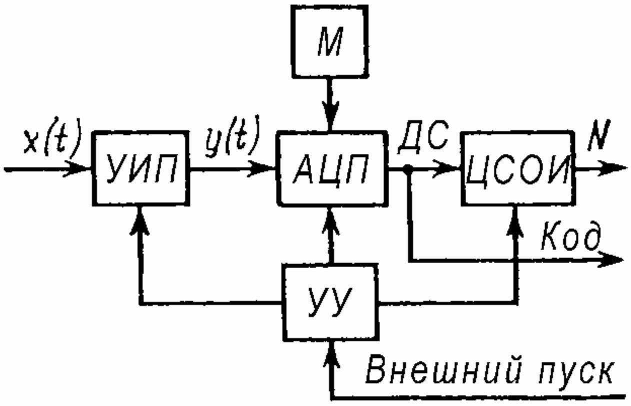


Рис. 1.7. Обобщенная структурная схема ЦИП

Преимуществами ЦИП перед АИП являются:

- удобство и объективность отсчета;
- высокая точность результатов измерения, практически недостижимая для АИП;
- широкий динамический диапазон при высокой разрешающей способности;
- высокое быстродействие за счет отсутствия подвижных электромеханических элементов;
- возможность автоматизации процесса измерения, включая такие операции, как автоматический выбор полярности и пределов измерения;
- высокая устойчивость к внешним механическим и климатическим воздействиям, помехозащищенность;
- возможность использования новейших достижений микроэлектронной технологии при конструировании и изготовлении;
- возможность сочетания с вычислительными и другими автоматическими устройствами.

Промышленно выпускаются в виде цифровых вольтметров, частотомеров, фазометров, омметров, осциллографов и т.д.

В соответствии с определением измерительные преобразователи формируют сигнал измерительной информации, удобный для дальнейшего преобразования, хранения, передачи, обработки. Как видно из рис. 1.3. они могут быть классифицированы в зависимости от используемого метода измерения и способа представления величины аналогично измерительным приборам. Кроме того, принято различать измерительные преобразователи по расположению в измерительной системе и виду функции преобразования.

1.5. Погрешности средств измерений

При любом измерении имеется погрешность, представляющая собой отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. На рис. 1.8. приведена классификация погрешностей средств измерений по ряду признаков.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. По характеру проявления систематические погрешности разделяются на постоянные и переменные. Переменные в свою очередь могут быть прогрессирующими, периодическими и изменяющимися по сложному закону.

Для исключения систематической погрешности наибольшее распространение в практике получил метод поправок.

Случайная составляющая погрешности при повторных измерениях одной и той же величины изменяется случайным образом. Обычно она является следствием одновременного действия многих независимых причин, каждая из которых в отдельности мало влияет на результат измерения. Случайные погрешности не могут быть исключены из результата измерения, но теория вероятности и математическая статистика позволяют оценить результат измерения при наличии случайных погрешностей. Они характеризуются свойствами, которые формулируют двумя аксиомами:

Аксиома случайности — при очень большом числе измерений случайные погрешности, равные по величине и различные по знаку, встречаются одинаково часто. Число отрицательных погрешностей равно числу положительных.

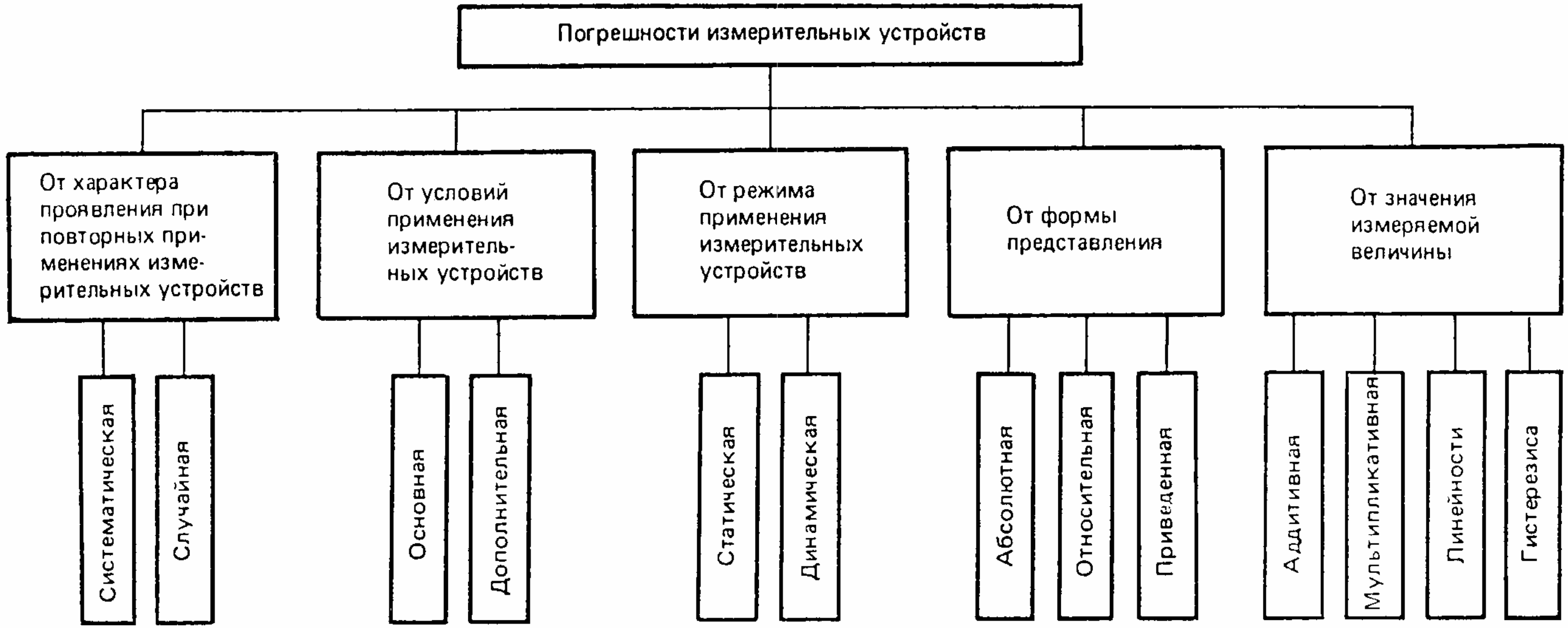


Рис. 1.8. Классификация погрешностей измерительных устройств

Аксиома распределения — малые погрешности встречаются чаще, чем большие. Очень большие погрешности не встречаются.

Случайные погрешности рассматриваются как случайные величины, подчиняющиеся некоторому симметричному закону распределения.

Основной погрешностью называют погрешность при использовании средства измерений в нормальных условиях.

Нормальными условиями применения средств измерений называют условия, при которых влияющие величины имеют номинальные значения или находятся в пределах нормальной области значений. Нормальные условия применения указываются в стандартах или технических условиях на средства измерений. При использовании средств измерений в нормальных условиях считают, что влияющие на них величины практически никак не изменяют их характеристики.

Дополнительной погрешностью измерительного преобразователя (или изменением показаний измерительного прибора) называют изменение его погрешности, вызванной отклонением одной из влияющих величин от ее нормативного значения или выходом ее за пределы нормальной области значений. Дополнительная погрешность может быть вызвана изменением сразу нескольких влияющих величин.

Изменение погрешности, как и других характеристик и параметров измерительных устройств под действием влияющих величин, описывается функциями влияния.

Иными словами, дополнительная погрешность – это часть погрешности, которая добавляется (имеется в виду алгебраическое сложение) к основной в случаях, когда измерительное устройство применяется в рабочих условиях. Рабочие условия обычно таковы, что изменения значений влияющих величин для них существенно больше, чем для нормальных условий, т. е. область рабочих (часть этой области называют расширенной областью) условий включает в себя область нормальных условий.

В некоторых случаях основная погрешность измерительных устройств определяется для рабочей области изменения значений влияющих величин. В этих случаях понятие дополнительной погрешности теряет смысл.

В зависимости от режима применения различают статическую и динамическую погрешности измерительных устройств.

По форме представления принято различать абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерительных устройств. У измерительных приборов имеется шкала, отградуированная в единицах входной величины, либо шкала, отградуированная в условных единицах с известным множителем шкалы, поэтому результат измерения представляется в единицах входной величины. Это обусловливает простоту определения погрешности измерительных приборов.

Абсолютной погрешностью измерительного прибора Δ называют разность показаний прибора $X_П$ и истинного (действительного) $X_Д$ значения измеряемой величины:

$$\Delta = X_П - X_Д$$

Действительное значение определяется с помощью образцового прибора или воспроизводится мерой.

Относительной погрешностью измерительного прибора называют отношение абсолютной погрешности измерительного прибора к действительному значению измеряемой величины. Относительную погрешность выражают в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_Д} \cdot 100\% .$$

Так как $\Delta \ll X_Д$ или $X_П$, то в вышеприведенном выражении вместо значения $X_Д$ может быть использовано значение $X_П$.

Приведенной погрешностью измерительного прибора называют отношение абсолютной погрешности измерительного прибора к нормирующему значению X_N. Приведенную погрешность также выражают в процентах:

$$\gamma = \frac{\Delta X}{X_N} \cdot 100\% .$$

В качестве нормирующего значения используется верхний предел измерений, диапазон измерений и др., т. е.

$$\gamma = \frac{\Delta X}{X_N} \cdot 100\% .$$

Средства измерений могут использоваться в статическом или динамическом режиме работы. В статическом режиме измеряемая величина не изменяется во времени, а отсчет выполняется тогда, когда практически окончены переходные процессы, вызванные подключением измеряемой величины ко входу средства измерений. В динамическом режиме измеряемая величина изменяется во времени. В соответствии с этим различают статическую погрешность средства измерений и погрешность средства измерений в динамическом режиме.

Очевидно, что погрешность средства измерений в динамическом режиме включает в себя статическую погрешность и погрешность, обусловленную инерционностью средства измерений. Последняя погрешность носит название динамической погрешности средства измерений и определяйся как разность между погрешностью средства измерений в динамическом режиме и его статической погрешностью, соответствующей значению величины в данный момент времени.

При анализе погрешностей средств измерений и выборе способов их уменьшения весьма важным является разделение погрешностей по их зависимости от значения измеряемой (преобразуемой) величины. По этому признаку, погрешности делятся на аддитивные, мультипликативные, линейности и гистерезиса.

Аддитивную погрешность иногда называют погрешностью нуля, а мультипликативную – погрешностью чувствительности. Реально погрешность средства измерений включает в себя обе указанные составляющие.

Кроме того, номинальная функция преобразования средства измерений – это в большинстве случаев более простая функция (обычно линейная), чем градуировочная характеристика.

Графически образование перечисленных погрешностей показано на рис. 1.9.

Аддитивная погрешность постоянна при всех значениях измеряемой величины (рис. 1.9, а). На рисунке видно, что реальная функция преобразования $Y = f_р(X)$ несколько смещена относительно номинальной $Y = f_н(X)$, т. е. выходной сигнал измерительного устройства при всех значениях измеряемой величины X будет больше (или меньше) на одну и ту же величину, чем он должен быть, в соответствии с номинальной функцией преобразования.

Если аддитивная погрешность является систематической, то она может быть устранена. Для этого в измерительных устройствах обычно имеется специальный настроечный узел (корректор) нулевого значения выходного сигнала.

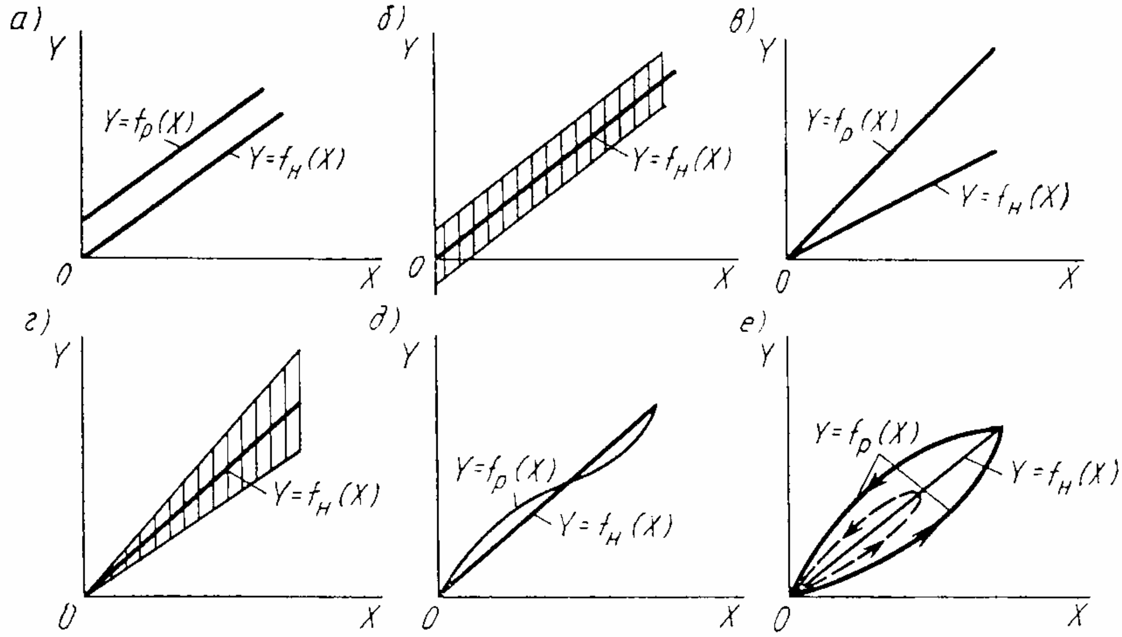


Рис. 1.9. Реальные функции преобразования измерительных устройств

Если аддитивная погрешность является случайной, то ее нельзя исключить, а реальная функция преобразования смещается по отношению к номинальной во времени произвольным образом. При этом для реальной функции преобразования можно определить некоторую полосу (рис. 1.9, б), ширина которой остается постоянной при всех значениях измеряемой величины.

Возникновение случайной аддитивной погрешности обычно вызвано трением в опорах, контактными сопротивлениями, дрейфом нуля, шумом и фоном измерительного устройства.

Мультипликативной (получаемой путем умножения), или погрешностью чувствительности измерительных устройств, называют погрешность, которая линейно возрастает (или убывает) с увеличением измеряемой величины.

Графически появление мультипликативной погрешности интерпретируется поворотом реальной функции преобразования относительно номинальной (рис. 1.9, в). Если мультипликативная погрешность является случайной, то реальная функция преобразования представляется полосой, показанной на рис. 1.9 (г). Причиной возникновения мультипликативной погрешности обычно является изменение коэффициентов преобразования отдельных элементов и узлов измерительных устройств.

На рис. 1.9 (д) показано взаимное расположение номинальной и реальной функций преобразования измерительного устройства в случае, когда отличие этих функций вызвано нелинейными эффектами. Если номинальная функция преобразования линейная, то вызванную таким расположением реальной функции преобразования систематическую погрешность называют погрешностью линейности. Причинами данной погрешности могут быть конструкция (схема) измерительного устройства и нелинейные искажения функции преобразования, связанные с несовершенством технологии производства.

Зависимость вход-выход измерительных приборов без учета гистерезиса и ухода нуля может быть представлена в виде:

$$y_{вых} = (a_0 + a_1 x_{вх} + a_2 x_{вх}^2 + ... + a_n x_{вх}^n) \cdot x_{вх},$$

где $x_{вх}$ – измеряемая (входная) величина, $y_{вых}$ – выходная величина, a_0, a_1,…, a_n – градуировочные коэффициенты.

Реальная функция преобразования может быть представлена линией, примыкающей к прямой $a_0x_{вх}$ (номинальная функция преобразования) (рис. 1.10).

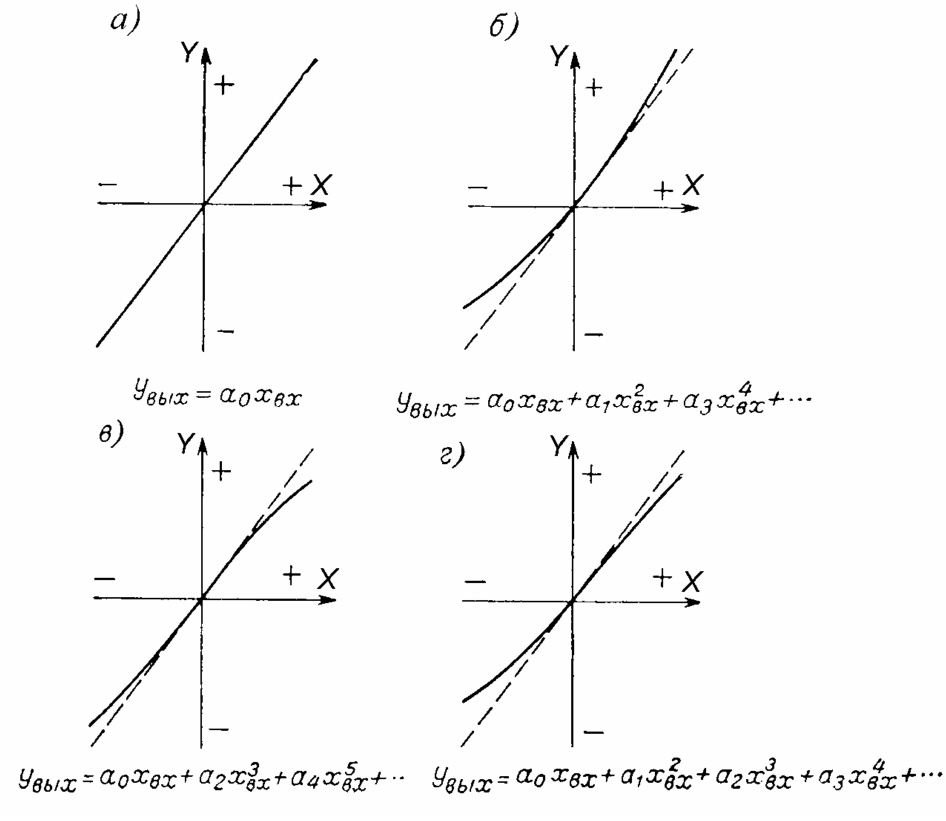


Рис. 1.10. Типичные градуировочные кривые: а – линейная; б – нелинейная при наличии в уравнении преобразования четных степеней $x_{вх}$; в - нелинейная при наличии в уравнении преобразования нечетных степеней $x_{вх}$; г – нелинейная при наличии в уравнении преобразования четных и нечетных степеней $x_{вх}$.

Симметричная кривая (рис. 1.10, в), описываемая уравнением с нечетными степенями $x_{вх}$, наиболее желательна с точки зрения линейности. Как будет показано ниже, нелинейные, но симметричные кривые двух чувствительных элементов, включенных дифференциально, дают улучшение линейности путем исключения членов $x_{вх}$ с четными степенями.

Наиболее существенной и трудноустранимой систематической погрешностью измерительных устройств является погрешность гистерезиса (от греч. hysteresis – запаздывание), или погрешность обратного хода, выражающаяся в несовпадении реальной функции преобразования измерительного устройства при увеличении (прямой ход) и уменьшении (обратный ход) измеряемой величины (рис. 1.9, е). Причинами гистерезиса являются: люфт и сухое трение в механических передающих элементах, гистерезисный эффект в ферромагнитных материалах, внутреннее трение в материалах пружин, явление упругого последействия в упругих чувствительных элементах, явление поляризации в электрических, пьезоэлектрических и электрохимических элементах и др. Существенным при этом является тот факт, что форма получаемой петли реальной функции преобразования зависит от предыстории, а именно от значения измеряемой величины, при котором после постепенного увеличения последней начинается ее уменьшение (на рис. 1.9, е, это показано пунктирными линиями).

В цифровых (ЦИП) квантование по уровню и времени осуществляется путем замены через время Δt (шаг квантования) значений непрерывной функции ближайшим дискретным уровнем с шагом Q. При этом максимальная погрешность от квантования составит $\Delta_{кв} = \pm Q/2$.

Приведенная погрешность определяется по формуле:

$$\gamma = \frac{\Delta_{кв}}{ПД} \cdot 100\ \%,$$

где ПД – полный диапазон измеряемой величины.

$$ПД = Q \cdot N,$$

где N – число уровней квантования (интервалов).

$$\gamma = \frac{Q \cdot 100\%}{2 \cdot Q \cdot N} = \frac{50}{N}\%.$$

Например, измеряет напряжение в диапазоне 0…150В с $\gamma = 0{,}1\%$. Для определения шага квантования запишем:

$$Q = \frac{\gamma \cdot 2 \cdot ПД}{100} = \frac{0{,}1 \cdot 150}{50} = 0{,}3\ В.$$

1.6. Методы повышения точности измерений

Для технологических измерений повышение точности измерений особенно важно в связи с широким применением АСУ ТП. Для решения этой задачи применяются различные методы (рис. 1.11).

Уменьшения случайной составляющей погрешности измерений увеличивают число наблюдений (рис. 1.10). Оценку среднеквадратического отклонения результата измерения, которая определяет собой случайную погрешность, теоретически можно сделать как угодно малой, увеличив число наблюдений n. Однако на практике в большинстве случаев трудно обеспечить постоянство самого объекта измерений в течение длительного времени, а это может при увеличении числа наблюдений n привести к увеличению погрешности, а не к ее уменьшению.

Другим методом повышения точности измерений за счет уменьшения случайной составляющей погрешности является использование параллельных одновременных измерений одной и той же физической величины. Для этого необходимо использовать сразу несколько средств измерений. Результаты наблюдений, полученных при этих измерениях, обрабатывают совместно. Теоретическая основа этого метода та же, что и предыдущего метода.

Ранее были рассмотрены основные методы исключения систематической погрешности, а именно: методы, основывающиеся на устранении источников систематической погрешности до начала измерений и методы исключения систематических погрешностей по окончании измерений. К числу последних относятся не только применение поправок и поправочных множителей, но и учет дополнительных погрешностей средств измерений.

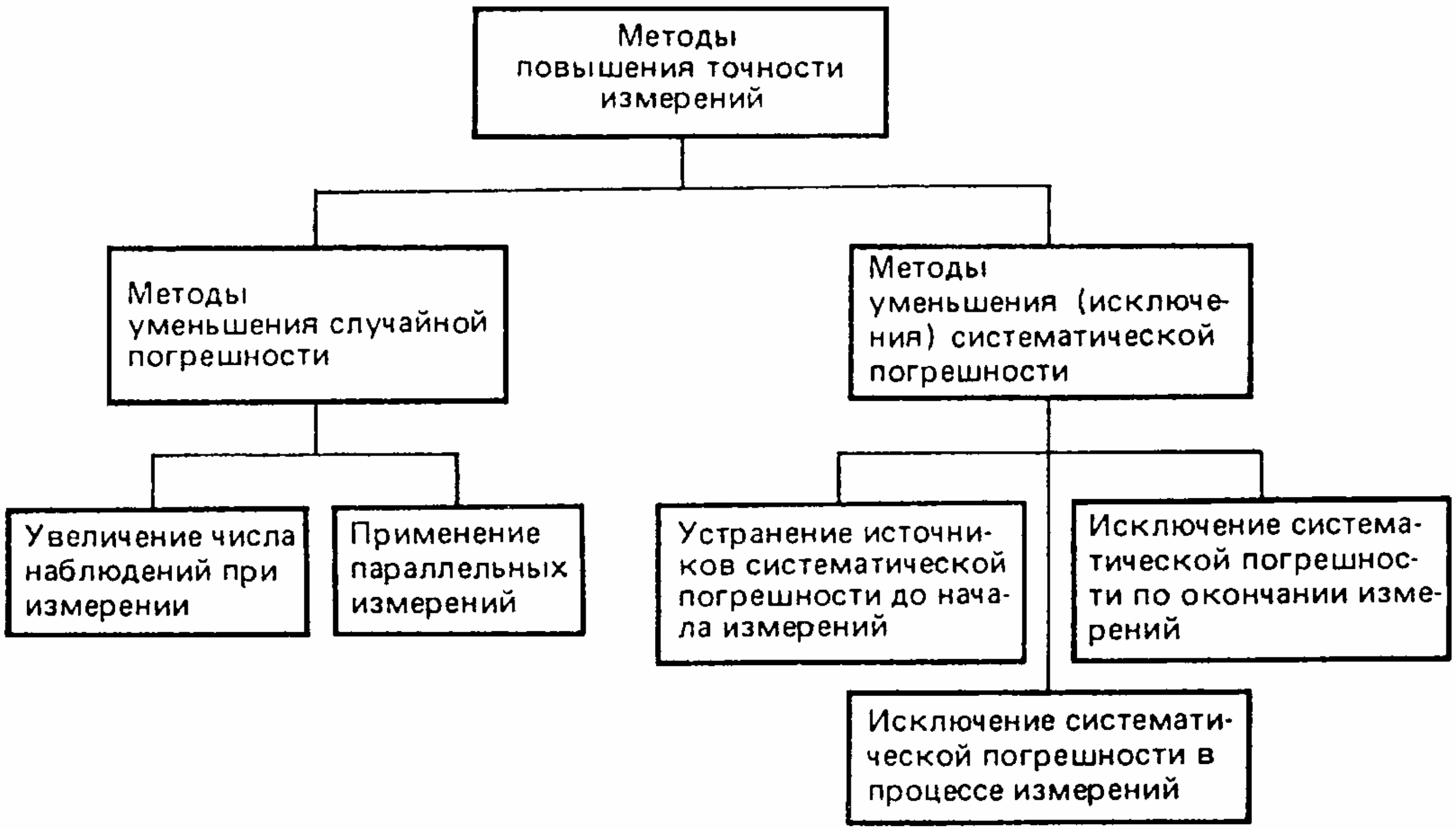


Рис. 1.11. Классификация методов повышения точности измерений

Кроме этих методов применяют методы, позволяющие определять и исключать систематическую погрешность в процессе измерений. Последние основываются на такой организации процесса измерений и обработки получаемой измерительной информации, которые обеспечивают исключение погрешности или ее определение. Причем применение таких методов возможно и целесообразно в тех случаях, когда известна природа исключаемой систематической погрешности. К числу этих методов относятся: метод замещения, метод компенсации погрешности по знаку и различные методы, базирующиеся на совместных или совокупных измерениях.

При использовании метода компенсации погрешности по знаку процесс измерения организуется таким образом, что известная систематическая погрешность входит в результат каждого из двух повторных измерений с противоположным знаком. Это позволяет после определения среднего арифметического значения исключить систематическую погрешность.

Сущность методов, базирующихся на совместных или совокупных измерениях применительно к уменьшению систематических погрешностей, состоит в том, что в процессе этих измерений изменяют параметр, отвечающий за возникновение систематической погрешности, или осуществляют измерение физической величины совместно и последовательно с несколькими вспомогательными мерами. В результате получают систему независимых уравнений, из решения которой определяют значения измеряемой физической величины уже с учетом систематической погрешности.

Одним из наиболее радикальных путей повышения точности измерений при прочих равных условиях является использование более точных средств измерений. Появление и развитие микроэлектронной техники и микропроцессоров, обеспечивающие возможность практически полной автоматизации самых сложных измерительных процессов, позволили использовать для увеличения точности средств измерений рассмотренные выше методы повышения точности измерений. Наряду с этими методами для повышения точности средств измерений применяется ряд традиционных методов, классификация которых приведена на рис. 1.12.

Метод многократных наблюдений используется для уменьшения случайной составляющей погрешности средства измерений и состоит в том, что: за некоторый постоянный интервал времени, отведенный для измерения, выполняют несколько

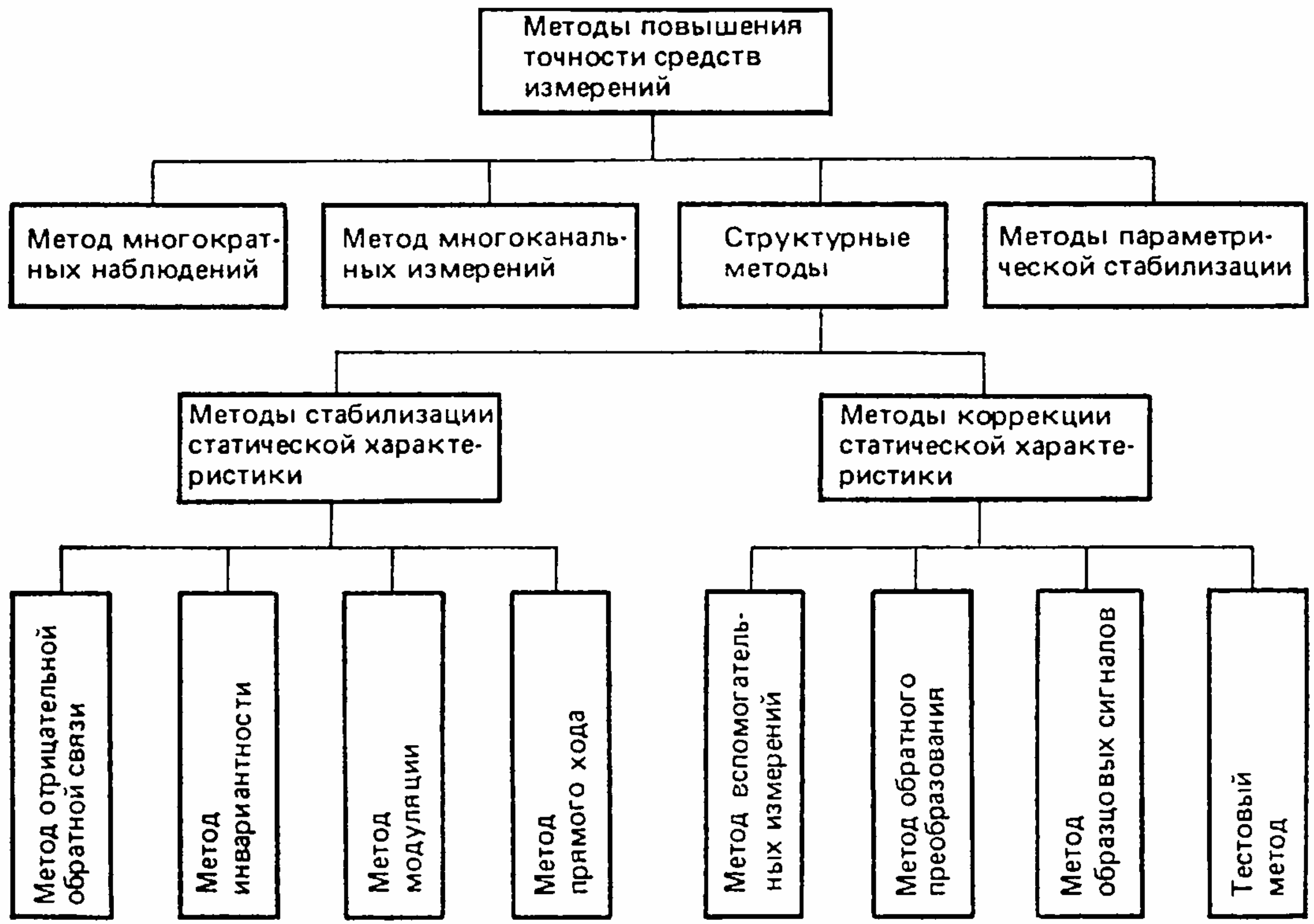


Рис. 1.12. Классификация методов повышения точности средств измерений

наблюдений, затем с помощью вычислительного устройства, входящего в состав данного средства измерений, вычисляют среднее арифметическое значение измеряемой величины и оценку среднеквадратического отклонения результата измерения.

Метод многоканальных измерений аналогичен рассмотренному методу параллельных измерений (рис. 1.12). Средства измерений, с помощью которых реализуется данный метод, содержат несколько идентичных по характеристикам параллельных измерительных цепей (каналов) и вычислительное устройство. Последнее, получая измерительную информацию по этим каналам, вычисляет среднее арифметическое значение измеряемой величины и оценку среднеквадратического отклонения результата измерения. Такой метод позволяет уменьшить случайную составляющую погрешности средства измерений.

Метод параметрической стабилизации, называемый еще конструктивно-технологическим, состоит в стабилизации статической характеристики средств измерений. Параметрическая стабилизация реализуется путем изготовления средств измерений из точных и стабильных элементов, параметры которых мало подвержены внешним влияниям; термостабилизации; стабилизации параметров питания средств измерений; экранировки средств измерений от магнитных и электрических полей и т. п. Данный метод уменьшает систематическую и случайную погрешности средств измерений. Он является классическим в приборостроении. На основе этого метода до сих пор строится современный парк средств измерений.

Структурные методы основаны на том, что в состав средств измерений включаются дополнительные узлы, элементы и меры, обеспечивающие повышение точности этих средств измерений за счет информации, полученной с их помощью. Структурные методы повышения точности средств измерений подразделяют на методы, обеспечивающие стабилизацию статической характеристики средства измерений, и методы, основанные на коррекции этой характеристики.

Структурные методы стабилизации статической характеристики средств измерений (рис. 1.12).

Метод отрицательной обратной связи реализуем только при наличии преобразовательных элементов или преобразователей, способных осуществлять преобразование выходного сигнала средства измерений во входной (обратный преобразователь). Создание таких преобразователей – часто сложная техническая задача. Применение данного метода обеспечивает уменьшение мультипликативной погрешности и погрешности нелинейности, а относительная аддитивная погрешность при этом не изменяется. В то же время использование метода приводит к уменьшению чувствительности средства измерения. Данный метод повышает точность средств измерения и наряду с методом параметрической стабилизации является наиболее распространенным.

Метод инвариантности состоит в том, что в средстве измерений помимо измерительной цепи (канала) имеется сравнительная цепь (канал), к которой не подается входной сигнал, но которая, как и измерительная цепь, находится под воздействием некоторой влияющей величины. Причем параметры сравнительной цепи подобраны так, что изменение ее сигнала под действием влияющей величины идентично изменению сигнала измерительной цепи под действием этой величины, т. е. возмущения, вызванные влияющей величиной, поступают в средство измерений по двум каналам (принцип двухканальности). Использование разности сигналов измерительной и сравнительной цепей (при дифференциальном включении этих цепей) обеспечивает независимость (инвариантность) результирующего сигнала от названной влияющей величины, т. е. метод обеспечивает исключение дополнительной погрешности, вызванной изменениями некоторой, как правило, основной влияющей величины.

Метод модуляции состоит в том, что сигнал, поступающий на вход средства измерений, или параметры этого средства измерений подвергаются принудительным периодическим изменениям (модуляции) с частотой, не совпадающей (обычно более высокой) с областью частот измеряемого сигнала. Использование метода модуляции позволяет уменьшить погрешности от сил трения, явлений поляризации и гистерезиса.

Метод прямого хода состоит в том, что измеряемый сигнал поступает к чувствительному элементу средства измерений через ключ, с помощью которого осуществляется периодическое во времени отключение измеряемого сигнала от чувствительного элемента и подача к последнему сигнала, значение которого равно нулю. Это обеспечивает работу средства измерений на восходящей ветви (прямой ход) статической характеристики при всех значениях измеряемого сигнала, что исключает наиболее существенную погрешность многих средств измерений – погрешность от вариации.

Структурные методы коррекции статической характеристики (методы коррекции погрешности средств измерений). Перечень их приведен на рис. 1.12.

Метод вспомогательных измерений заключается в автоматизации процесса учета дополнительной погрешности средства измерений по известным функциям влияния ряда влияющих величин. Для этого осуществляется измерение значений этих величин и с помощью вычислительного устройства, построенного с учетом названных функций влияния, автоматически корректируется выходной сигнал средства измерений.

Метод обратного преобразования (итерационный метод) базируется на использовании дополнительно в составе средства измерений кроме прямой измерительной цепи (прямого преобразователя), цепи, способной осуществлять обратное преобразование выходного сигнала (обратный преобразователь), имеющей существенно большую точность, чем цепь прямого преобразования. Результат измерения получают путем итераций. В процессе каждой итерации последовательно осуществляются: прямое преобразование измеряемой величины и запоминание результата, обратное преобразование запомненного значения этой величины, прямое преобразование сигнала обратного преобразователя, соответствующего запомненному значению измеряемой величины, и сравнение результатов этих двух преобразований, на основе которого формируется корректирующий сигнал. Обратный преобразователь в данном методе играет роль как бы многозначной меры, по которой корректируется статическая характеристика прямого преобразователя. Метод обратного преобразования позволяет уменьшать в зависимости от используемого алгоритма коррекции аддитивную и мультипликативную погрешности средств измерений.

Метод образцовых сигналов (образцовых мер) состоит в определении в каждом цикле измерения реальной функции преобразования средства измерений с помощью образцовых сигналов (мер), т. е. метод состоит в автоматической градуировке средства измерений в каждом цикле. Цикл включает в себя измерение физической величины, поступающей на вход средства измерения, поочередное измерение одной или нескольких мер, подключаемых вместо измеряемой физической величины на вход средства измерений, и решение системы уравнений с помощью вычислительного устройства, из которого определяется значение измеряемой физической величины. В этом решении уже учтены изменения реальной статической характеристики, т. е. данный метод сводится к совокупному измерению. Он позволяет уменьшить аддитивную и мультипликативную погрешность, а также погрешность нелинейности.

Тестовый метод сводится к проведению совокупных измерений. В отличие от метода образцовых сигналов в тестовом методе в каждом цикле работы средства измерений кроме измерения физической величины, поступающей на вход средства измерений, осуществляют измерение величин-тестов, каждая из которых формируется из меры и измеряемой величины. Значение измеряемой величины определяется из системы уравнений, решаемой с помощью вычислительного устройства. По существу данный метод является развитием метода образцовых сигналов.

Глава 2

РАБОТА С РЕЗУЛЬТАТАМИ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Результат измерения и оценка его среднего квадратичного отклонения

Оценка резко отклоняющихся (анормальных) результатов наблюдений производится с целью обнаружения и исключения из обрабатываемого ряда результатов наблюдений промахов.

При оценке анормальности результатов наблюдений следует рассмотреть альтернативу:

- резко отклоняющийся результат наблюдения получен в тех условиях, что и остальная группа наблюдений, но вероятность получения его мала;
- резко отклоняющийся результат наблюдения вполне мог бы быть следствием случайных нарушений нормальных условий или грубых ошибок при расчете.

Тогда в первом случае оцениваемый результат наблюдения не следует исключать, а во втором случае он может быть исключен из общего ряда результатов наблюдений.

Когда не удается исправить резко отклоняющийся результат наблюдения, полученный под воздействием факторов, не свойственных для нормальных условий, обращаются к методам статистической оценки.

Критерии оценки анормальности (Приложение 1) применяются в соответствии в указанием ГОСТ 11.002-73, если результаты наблюдений можно считать принадлежащими к нормальному распределению.

За результат изменения принимают среднее арифметическое результатов наблюдений, из которых исключены систематические погрешности, т.е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

где n – число наблюдений; $x_i = (U_i – \lambda_i)$ – исправленный результат наблюдения U_i, из которого исключена систематическая погрешность λ_i.

Примечание. Если во всех результатах наблюдений содержится постоянная систематическая погрешность, то допускается исключить ее после вычисления арифметического среднего неисправленных результатов наблюдений, т.е. вычисляют сначала $\overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} U_i$, а затем $\overline{x} = \overline{U} - \lambda$.

Оценка среднего квадратичного отклонения результатов определяется по формуле:

$$S_i = M_k S,$$

где значение S определяется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} .$$

Значения коэффициента M_k даны в таблице 2.1., где $k = n – 1$.

Таблица 2.1.

k	M_k	*k*	M_k	*k*	M_k	*K*	M_k
1	1,253	5	1,051	9	1,029	40	1,006
2	1,128	6	1,042	10	1,025	50	1,005
3	1,085	7	1,036	20	1,013	60	1,004
4	1,064	8	1,032	30	1,008		

При числе наблюдений более 60 (n > 60) оценка для среднего квадратичного отклонения σ находится по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} .$$

Оценку среднего квадратичного отклонения результата измерения находят по формуле:

$$S_{\overline{x}} = M_k\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \text{ или } S_{\overline{x}} = \frac{M_k S}{\sqrt{n}} .$$

Пример. Пример обработки результатов измерений сопротивления одноомной (по номиналу) катушки сопротивления. Значения R_i даны в омах, а для всех других величин за единицу измерения принята $1 \cdot 10^{-6}$ Ом:

R_i	$(R_i - \overline{R}) \cdot 10^{-6}$	$(R_i - \overline{R})^2 \cdot 10^{-12}$	R_i	$(R_i - \overline{R}) \cdot 10^{-6}$	$(R_i - \overline{R})^2 \cdot 10^{-12}$
1,000390	-2	4	396	4	16
391	-1	1	388	-4	16
395	3	9	389	-3	9
392	0	0	393	1	1
389	-3	9	394	2	4

$\overline{R} \approx 1{,}000392$; $S \approx 2{,}8 \cdot 10^{-6}$; $S_{\overline{R}} \approx 0{,}88 \cdot 10^{-6}$;

2.2. Проверка нормальности распределения результатов наблюдений

Проверку нормальности распределения результатов наблюдений производят с помощью критериев математической статистики.

Если результаты наблюдений представлены в виде гистограммы, то при n > 50 для проверки принадлежности их к нормальному распределению предпочтительным является критерий Пирсона χ^2; если результат наблюдений представлен в виде данных предпочтительным является критерий Мизеса-Смирнова ω^2. Порядок вычислений по критериям χ^2 и ω^2 приведен в Приложении 1, Приложении 9.

При числе результатов наблюдений $50 > n > 15$ для проверки принадлежности их к нормальному распределению предпочтительным является составной критерий, приведенный в Приложении 2.

При числе результатов наблюдений $n < 15$ проверку принадлежности их к нормальному распределению можно не производить, однако должно быть известно, что при примененном методе измерений распределение результатов наблюдений можно считать нормальным.

2.3. Доверительные границы случайной погрешности результата измерений

Доверительные границы случайной погрешности ε результата измерения, если известно, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, находят по формуле:

$$\varepsilon = \pm t S_x ,$$

где t - коэффициент Стьюдента.

Коэффициент t в зависимости от доверительной вероятности P и числа результатов наблюдений n находят по таблице 2.2.

Таблица 2.2.

K	*P=0,95*	*P=0,99*	*K*	*P=0,95*	*P=0,99*
1	12,706	63,657	14	2,145	2,997
2	4,303	9,925	16	2,120	2,921
3	3,182	5,841	18	2,101	2,878
4	2,776	4,604	20	2,086	2,845
5	2,571	4,032	22	2,074	2,819
6	2,447	3,707	24	2,064	2,797
7	2,365	2,998	26	2,056	2,779
8	2,306	3,355	28	2,048	2,763
9	2,262	3.250	30	2,043	2,750
10	2,228	3,169		1,960	2,576
12	2,179	3,055			

При n > 30 следует использовать последнюю строку таблицы (для n = ∞) или таблицу функции Лапласа (Приложение 4)

При нормальном распределении наблюдений истинное значение измеряемой величины A с доверительной вероятностью P находится внутри интервала:

$$\left[\bar{x} - tS_{\bar{x}} ; \bar{x} + tS_{\bar{x}}\right],$$

где $\bar{x}$ – результат измерений.

Пример. По десяти наблюдениям было вычислено значение массы эталона килограмма, полученное в результате сличения с килограммом в №9. Результаты вычисления следующие:

$\bar{x}$ = 999,998721г, S = $17 \cdot 10^{-6}$ г, $S_{\bar{x}}$ = $5 \cdot 10^{-6}$ г.

Найдем доверительный интервал для n = 10 при выбранной нами доверительной вероятности P = 0,99. Число степеней свободы:

$$k = 10 - 1 = 9.$$

Уровень значимости в процентах $q = (1 - 0{,}99) \cdot 100 = 1\%$

Из таблицы 2.2. для указанных k и q находим t = 3,25 = 2.68. Следовательно,

$$tS_{\bar{x}} = 3{,}25 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 16 \cdot 10^{-6}\text{г}.$$

Истинное значение измеряемой величины с вероятностью 0,99 лежит в интервале

$$999{,}998705\text{г} < A < 999{,}998737\text{г}.$$

2.4. Доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата измерений

Необходимо стремиться к тому, чтобы погрешность метода измерений была пренебрежимо мала по систематической погрешности результата измерений или устранена путем введения поправки, найденной на основании предварительного изучения метода измерения.

Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенная систематическая погрешность средств измерений и неисключенная систематическая погрешность, вызванная другими источниками.

В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых погрешностей средств измерений, пределы дополнительных погрешностей.

Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенная систематическая погрешность средств измерений и неисключенная систематическая погрешность, вызванная другими источниками.

В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых погрешностей средств измерений, пределы дополнительных погрешностей.

Границы неисключенной систематической погрешности результата Θ вычисляются путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы рекомендуется вычислять по формуле:

$$\Theta = \pm k \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Theta_i^2} ,$$

где k – коэффициент; Θ_i – граница *i-й* неисключенной систематической погрешности.

Коэффициент k принимается равным 1,1 при доверительной вероятности P = *0,95*. При доверительной вероятности P = *0,99* коэффициент k принимают равным 1,45, если число суммируемых неисключенных погрешностей более четырех ($m > 4$).Если же число суммируемых погрешностей равно четырем или менее четырех ($m < 4$), то коэффициент k определяют по графику, приведенному на рисунке.

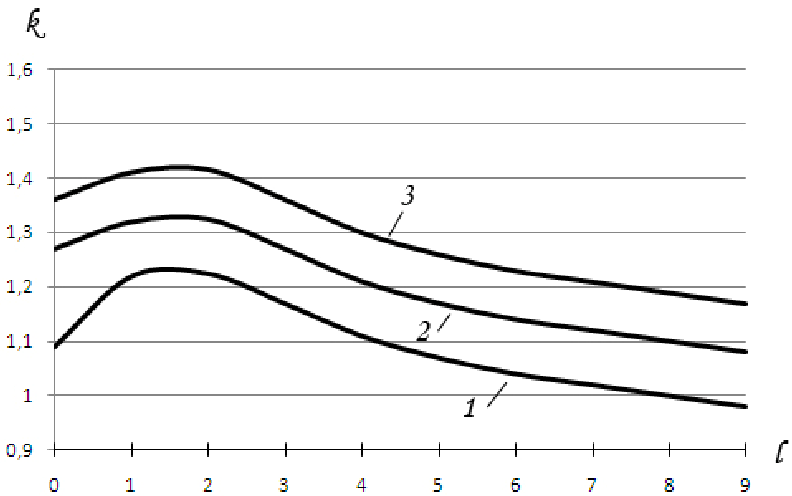


Рис. 2.1. График зависимости $k = f(m,l)$*: m – число суммируемых погрешностей; l – отношение длины интервала, на котором равномерно распределена наибольшая составляющая, к длине интервала, на котором распределена каждая из остальных погрешностей;*

$1 - m = 2$;

$2 - m = 3$;

$3 - m = 4$.

2.5. Доверительные границы погрешности результата измерений

Неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными можно пренебречь и принять, что граница погрешности результата равна $\Delta = \varepsilon$, если $\dfrac{\Theta}{S_{\bar{x}}} < 0{,}8$.

Случайной погрешностью по сравнению с систематической можно пренебречь и принять, что граница погрешности результата $\Delta=0$, если $\dfrac{\Theta}{S_{\bar{x}}} > 0{,}8$.

Отсюда следует, что число наблюдений целесообразно увеличить до тех пор, пока доверительные границы погрешности результата измерений не будут определяться только систематической погрешностью. Тогда максимальное число наблюдений n_{max} можно найти по формуле:

$$n_{\max} = 64\left(\frac{S_{\bar{x}}}{\Theta}\right)^2$$

Границы погрешности результата измерений можно найти путем построения композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматриваемых как случайные величины, если приведенные выше неравенства не выполняются. Граница погрешности результата измерений Δ в этом случае вычисляется по формуле:

$$\Delta = t_{\sum} S_{\sum},$$

где $t_{\sum}$ - коэффициент; $S_{\sum}$ - суммарное среднее квадратичное отклонение результата измерений.

Коэффициент t_Σ вычисляется по формуле:

$$t_\Sigma = \frac{|\varepsilon| + \Theta}{S_{\bar{x}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{\varepsilon}}} .$$

Суммарное среднее квадратичное отклонение результата измерения находится по формуле

$$S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{\varepsilon} + S_{\bar{x}}^2} \; . !$$

Пример. Обработка наблюдений, полученных при калибровке образцовой многогранной призмы, дала следующие результаты для отклонения одного из углов от номинального значения: $\bar{x} = 1{,}98''; \Theta = 0{,}03'', S_{\bar{x}} = 0{,}05'', n = 20$

Так как $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{0{,}03}{0{,}05} = 0{,}6 < 0{,}8$, то результат измерения может быть представлен в виде:

1) $\bar{x} = 1{,}98''; S_{\bar{x}} = 0{,}05'', n = 20$;

2) А=1,98"±0,10" (0,95).

Последнее означает, что с вероятностью 0,95 истинное значение измеряемой величины лежит в доверительном интервале $[1{,}98''-0{,}10'';1{,}98''+0{,}10'']$.

Погрешность Δ=±0,10" вычислена следующим образом. При $P = 0{,}95$ из таблицы 2.2. находим $t = 2{,}09$ и $tS_{\bar{x}} = 2{,}09 \bullet 0{,}05 \approx 0{,}10''$.

Если в приведенном примере границы неисключенного остатка систематических погрешностей были бы больше, например, $\Theta = 0{,}17''$, то запись результата должна быть иной.

Так как $\frac{\Theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{0{,}17}{0{,}05} = 3{,}4 > 0{,}8$:

1) $\bar{x} = 1{,}98''; \Theta = 0{,}17'', S_{\bar{x}} = 0{,}05'', n = 20$;

2) А=1,98"±0,20" (0,95).

Погрешность Δ=±0,20" вычислена следующим образом. При $P = 0{,}95$ из таблицы 2.2. находим $t = 2{,}09$ и $tS_{\bar{x}} = 2{,}09 \bullet 0{,}05 \approx 0{,}10''$.

Поскольку граница неисключенных остатков систематических погрешностей определена нестатическими методами, то, полагая, что в границах ± Δ погрешность распределена равновероятно, и принимая $t_\sum S_\sum = \Delta$, вычисляют:

$$t_\Sigma = \frac{0{,}17 + 0{,}10}{0{,}05 + \frac{0{,}17}{1{,}73}} = \frac{0{,}27}{0{,}15} = 1{,}8$$

$$S_\Sigma = \sqrt{0{,}0025 + 0{,}01} = 0{,}11''$$

$\Delta = 180 \cdot 0{,}11 = 0{,}20''$

Глава 3

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим подробный порядок операций, выполняемых при обработке результатов измерений. Содержание всех описываемых действий рассмотрено в предыдущих разделах. Проводимые расчеты основываются на предположении о нормальном распределении погрешностей, когда систематические погрешности уже учтены на предыдущих этапах работы с экспериментальными данными.

3.1. Прямые многократные измерения

1. По результатам эксперимента вычислить среднее значение измеряемой величины. Использовать $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
2. Найти стандартное отклонение результатов отдельных измерений от среднего. Использовать $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.
3. Отбросить измерения, в которых отклонение результатов от среднего значения превышает утроенное стандартное отклонение.
4. Повторить вычисления пунктов 1 и 2 для оставшихся результатов.
5. Оценить среднее квадратичное отклонение окончательного результата. Использовать $S_{\bar{x}} = M_k \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.
6. Определить коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности a=0,68 и вычислить границы доверительного интервала. Использовать $\varepsilon = \pm t\, S_x$.
7. Для вычисления полной погрешности окончательного результата учесть приборную погрешность.
8. Записать окончательный результат в стандартной форме, предварительно проведя его округление.

3.2. Косвенные измерения

1. Рассчитать и записать в стандартной форме окончательные результаты прямых измерений величин, необходимых для нахождения искомой величины. Пользоваться доверительной вероятностью $\alpha = 0{,}68$.
2. На основании данных, полученных в пункте 1, и исходных данных найти среднее значение искомой величины. Использовать $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ...)$.
3. Вывести формулу для расчета погрешности результата косвенного измерения и вычислить значение погрешности. Использовать

$$\Delta f = \sqrt{\left(\Delta f_x^2 + \Delta f_y^2 + \Delta f_z^2 + ...\right)} = \sqrt{\left(\left(f_x'\right)^2 \Delta x^2 + \left(f_y'\right)^2 \Delta y^2 + \left(f_z'\right)^2 \Delta z^2 + ...\right)}$$

4. Привести окончательный результат косвенного измерения к стандартной форме записи.

3.3. Форма записи результата измерения

Запись результата производится в соответствии с ГОСТ 8.011-72, в котором приведены различные формы записи результата измерения.

Из всех возможных форм представления результата измерения рекомендуются следующие формы записи, которые наиболее полно удовлетворяют большинству конкретных случаев, встречающихся в измерительной практике.

Если в дальнейшем предполагается исследование и сопоставление результатов с анализом погрешностей, результат измерения рекомендуется представлять в форме

$$A,\ S_{\bar{x}},\ n,\ \Theta,$$

где A - результат измерения; $S_{\bar{x}}$ - оценка среднего квадратичного отклонения результата, n – число результатов наблюдений в группе.

Если границы неисключенной систематической погрешности вычислены путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей, то рекомендуется дополнительно указать доверительную вероятность *P*, с которой рассчитана граница систематической погрешности Θ.

Если надо указать доверительную погрешность результата измерения Δ, его представляют в одной из следующих форм:

А±Δ, *Р* – при симметричной доверительной погрешности результата измерения;

А, Δ от Δ_{max} до Δ_{min}, *Р* – при ассиметричной доверительной погрешности результата измерения.

Примечание: Погрешность Δ во втором случае может быть выражена в абсолютной и относительной формах.

3.4. Правила округлений

Точность результатов наблюдений и последующих вычислений при обработке должна быть согласована с необходимой точностью результата измерений.

Погрешность результата измерений следует выражать не более чем двумя значащими цифрами. Две значащие цифры следует удерживать: при точных измерениях и в том случае, когда погрешность выражена числом с цифрой старшего разряда, равной или менее 3.

Число цифр в результатах промежуточных расчетов обычно должно быть на единицу или две больше, чем в окончательном результате. Погрешности при промежуточных вычислениях должны быть выражены не более чем тремя значащими цифрами.

Округлять результат измерения следует так, чтобы он оканчивался цифрой то же разряда, что и значение погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерения оканчивается нулями, то нули отбрасывают только до того разряда, который соответствует разряду погрешности.

Если руководствоваться этими правилами округления, то количество значащих цифр в числовом значении результата измерений дает возможность ориентировочно судить о точности измерения. Это связано с тем, что предельная погрешность, обусловленная округлением, равна половине единицы последнего разряда числового значения результата измерения.

Пример: Число 999,99872142 при погрешности ±0,000005 следует округлять до 999,998521

Если первая (слева направо) из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр менее 5, то остающиеся цифры не изменяют. Лишние цифры в целых числах заменяют нулями, а в десятичных дробях - отбрасывают.

Пример: При сохранении четырех значащих цифр число 283435 должно быть округлено до 283400; число 384,435 – до 384,4.

Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр равна 5, а за ней не следует никаких цифр или идут нули, то округление производят до ближайшего четного числа, т.е. четную последнюю цифру или нуль оставляют без изменения, нечетную – увеличивают на единицу.

Пример: При сохранении трех значащих цифр число 264,50 округляют до 264; число 645,5 - до 646.

Если первая из заменяемых нулями или отбрасываемых цифр более или равна 5, но за ней следует отличная от нуля цифра, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу.

Пример: При сохранении трех значащих цифр число 17,58 округляют до 17,6; число 18598 – до 18600; число 352,521 – до 353.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Критерий оценки анормальности результатов наблюдений при неизвестном генеральном среднем квадратичном отклонении σ

Для упорядоченного ряда результатов наблюдений случайной величины $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$ подсчитывают среднее арифметическое

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

и оценку среднего квадратичного отклонения

$$S = \left\{ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Чтобы оценить принадлежит y_n или y_1 к данной нормальной совокупности и принять решение об исключении или оставлении $y_n(y_1)$ в составе ряда результатов наблюдений, находят отношение

$$U_n = \frac{y_n - \bar{y}}{S} \quad \text{или} \quad U_1 = \frac{\bar{y} - y_1}{S}$$

Результат сравнивают с величиной β, взятой из таблицы 2.1. для данных n и уровня значимости q. Если $U_n \ge \beta$, то подозреваемый в анормальности результат наблюдения анормален и исключается, в противном случае он оставляется. Оценка анормальности результата наблюдения y_1 производится аналогично.

Пример. Получены следующие данные наблюдений при измерении силы тока (в миллиамперах): 10,07; 10,10; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40; 10,13; 10,12; 10,08. Проверяем, не является ли седьмое наблюдение (10,40 мА) промахом:

$$\bar{y} = \frac{101{,}58}{10} = 10{,}16;\ S^2 = 0{,}0089\,\text{мА};\ S = 0{,}094\,\text{мА};$$

$$U_n = \frac{10{,}40 - 10{,}16}{0{,}094} = 2{,}55.$$

Примем q = 0,050. По таблицы 1. находим, что для n=10 и q = 0,050 значение β = 2,18. Так как $U_n > \beta$, то это наблюдение следует отбросить.

Таблица 1

Пределы значения β для случая $q = \text{Вер}\left(\frac{\text{y}_\text{n} - \bar{y}}{\text{S}} > \beta\right)$

Число наблюд.	Предельное значение при уровне значимости			Число наблюд.	Предельное значение при уровне значимости		
	0,100	0,050	0,025		0,100	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	12	2,13	2,19	2,41
4	1,42	1,46	1,48	13	2,17	2,33	2,47
5	1,60	1,67	1,72	14	2,21	2,37	2,50
6	1,73	1,82	1,89	15	2,25	2,41	2,55
7	1,83	1,94	2,02	16	2,28	2,44	2,58
8	1,91	2,03	2,13	17	2,31	2,48	2,62
9	1,98	2,11	2,21	18	2,34	2,50	2,66
10	2,03	2,18	2,29	19	2,36	2,53	2,68
11	2,09	2,23	2,36	20	2,38	2,56	2,71

Равноценный критерий оценки анормальности результатов наблюдений

В равноценном критерии вычисляют

$$U_n^{'} = \frac{\text{y}_\text{n} - \bar{y}_{n-1}}{\text{S}_\text{n-1}}$$

В котором

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} y_i \ ,$$

$$S_{n-1} = \left\{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_i - \bar{y}_{n-1}\right)^2\right\},$$

т.е. $\bar{y}_{n-1}$ и S_{n-1} подсчитывают по всем результатам без подозреваемого в анормальности. Полученная величина $U_n^{'}$ сравнивается со значением β, полученным для заданных n и q.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Критерии математической статистики, применяемые для проверки нормальности распределения результатов наблюдений

Критерий χ^2. Для проверки нормальности распределения используют критерий χ^2, когда число наблюдений случайной величины более 100. Результаты наблюдений случайной величины x располагают в порядке возрастания:

$$x_1 \le x_2 \le ... \le x_n .$$

Вычисляют размах $x_n - x_1$ и образуют r равных интервалов шириной

$$h = \frac{(x_n - x_1)}{r} .$$

Число интервалов выбирают в зависимости от числа наблюдений:

при 100 < n < 200	r=15ч18
при n = 200	r=15ч18
при n = 400	r=15ч18

Результаты наблюдений x_j группируют по интервалам, подсчитывают частоты m_j величин x_j, попавшие в j-е интервалы, вычисляют среднее арифметическое значение и среднее квадратическое отклонение

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\left(j - \frac{1}{2}\right)m_j , \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{r}\left\{\left(j - \frac{1}{2}\right) - \bar{x}\right\}^2 m_j} .$$

Вычисляют величины

$$y_i = \frac{\left(j - \frac{1}{2}\right) - \bar{x}}{S} .$$

Вероятности попадания опытных данных в j-й интервал p_j вычисляют как

$$p_1 = F(y_1),\ p_j = F(y_j) - F(y_j - 1), j = 2, \ldots, r.$$

Значения функции проверяемого теоретического распределения $F(y_j)$ берутся из специальных таблиц. Полученные выше данные позволяют вычислить χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{j-1}^{r} \frac{(m_j - np_j)^2}{np}$$

Все данные, необходимые для проверки согласия опытного и теоретического распределений, сводятся в табл. 2. Задаются доверительной вероятностью $P = \text{Вер}\{\ \chi^2 \le (\ \chi^*)^2\}$ того, что величина χ^2, полученная вследствие случайных отклонений частей опытного распространения от соответствующих вероятностей теоретического распределения, будет меньше значения $(\chi^*)^2$, установленного для доверительной вероятности P. В табл. 3 для доверительной вероятности и числа степеней свободы $k = r - 1$ находят величину $(\chi^*)^2/k$, вычисляют $(\chi^*)^2$ и сравнивают с ним вычисленную по данным табл. 2 величину χ^2. Если χ^2 окажется меньше $(\chi^*)^2$, то дл принятой доверительной вероятности гипотеза о согласии опытного и теоретического распределений принимается, в противном случае – отвергается.

Таблица 2

j	m_j	$\left(j - \frac{1}{2}\right)m_j$	$\left\{\left(j - \frac{1}{2}\right) - \bar{x}\right\}m_j$	y_i	$F(y_i)$	P_j	np_j	$m_j - np_j$	$(m_j - np_j)^2$	$\frac{(m_j - np_j)^2}{np_j}$
1 *2* *3* . . . *r*										

$$n = \sum_{j=1}^{r} m_j$$

Критерий ω^2. Критерий ω^2 может быть применён, если число наблюдений $50 < n < 200$. При числе наблюдений более 200 его применение рекомендуется в случаях, когда результаты проверки по другим критериям не позволяют сделать безусловный вывод о согласии опытного и теоретического распределения. Критерий ω^2 является более мощным, чем критерий χ^2, но его применение требует выполнение большого количества вычислительных операций. Вычисление по критерию ω^2 проводят в следующем порядке.

Вычисляют значение величины Ω^2 по формуле:

$$\Omega^2 = -n - 2\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2n} \ln F(x_j) + \left(1 - \frac{2j-1}{2n}\right) \ln\left[1 - F(x_j)\right]\right\},$$

где x_j (j=1, 2, …, n) – результат наблюдений, имеющий j-й номер в вариационном ряду $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$; $F(x_j)$ – значение функции теоретического распределения при значении аргумента, равном x_j.

Вычисления по приведённой формуле рекомендуется сводить по табл. 4. Рекомендуется проводить вычисления с точностью до пяти значащих цифр, округляя окончательный результат до двухзначных цифр.

В табл. 5 находят значение функции a, соответствующее вычисленному значению. Функция a представляет собой функцию распределения величины. Необходимо задать уровень значимости q. Если $a \ge (1 - q)$, то гипотезу о согласии эмпирического и теоретического распределений отвергают, если $a < (1 - q)$, то гипотезу принимают.

Таблица 3

k	Квантилии χ^2 распределения $(\chi^*)^2/k$ при доверительной вероятности P			
	0,9	0,95	0,975	0,99
15	1,49	1,67	1,83	2,04
16	1,47	1,64	1,80	2,00
17	1,46	1,62	1,78	1,97
18	1,44	1,60	1,75	1,93
19	1,43	1,59	1,73	1,90
20	1,42	1,57	1,71	1,88
22	1,40	1,54	1,67	1,83
24	1,38	1,52	1,54	1,79
26	1,37	1,50	1,61	1,76
28	1,35	1,48	1,59	1,72
30	1,34	1,46	1,57	1,70
35	1,32	1,42	1,52	1,64
40	1,30	1,39	1,48	1,59
45	1,28	1,37	1,45	1,55
50	1,26	1,35	1,43	1,52

Составной критерий

При числе результатов наблюдений n < 50 проверка нормальности их распределения выполняется с помощью составного критерия.

Критерий 1. Вычисляют значение $\tilde{d}$ среднего арифметического отклонения результатов наблюдений по абсолютной величине к смещённой оценке среднего квадратического отклонения по формуле:

$$\tilde{d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{nS^*},$$

где S^* - смещённая оценка среднего квадратического отклонения, вычисленная по формуле

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

Примечание. Цифры в скобках в заголовке таблицы означают номера граф, из которых надо брать числа для вычисления; например (3) означает, что надо вычислить натуральный логарифм числа, содержащегося в графе 3.

Таблица 4

Номер наблюд. в вариационном ряду	$\frac{2j-1}{2n}$	$F(x_j)$	ln(3)	(2) * (4)	1 – (2)	1 – (3)
1	2	3	4	5	6	7
1 2 . . . j . . n	$\frac{2j-1}{2n}$	$F(x_j)$	$\ln F(x_j)$	$\frac{2j-1}{2n}\ln F(x_j)$	$1-\frac{2j-1}{2n}$	$1-F(x_j)$

Продолжение Таблицы 4

Номер наблюд. в вариацион-ном ряду	ln(7)	(6) * (8)	(5) + (9)
1	8	9	10
1 2 . . . j . . n	$\ln[1-F(x_j)]$	$\left(1-\frac{2j-1}{2n}\right)\ln[1-F(x_j)]$	$\frac{2j-1}{2n}\ln F(x_j)+$ $+\left(1-\frac{2j-1}{2n}\right)\ln[1-F(x_j)]$

Значения, занесённые в графу 10 табл. 4, суммируются и затем вычисляют по приведённой формуле значение величины Ω_n^2.

Распределение результатов наблюдений группы не противоречит нормальному распределению, если

$$d_{1-\frac{q}{2}} < \tilde{d} \le d_{\frac{q}{2}},$$

где $d_{1-\frac{q}{2}}$ и $d_{\frac{q}{2}}$ – процентные точки распределения d, которые находят из табл. 6 по n, $\frac{q}{2}$ и $\left(1-\frac{q}{2}\right)$, причём q – выбранный заранее уровень значимости критерия.

Примечание. Цифры в скобках в заголовке таблицы означают номера граф, из которых надо брать числа для вычисления; например (3) означает, что надо вычислить натуральный логарифм числа, содержащегося в графе 3.

Значения, занесённые в графу 10 табл. 4, суммируются и затем вычисляют по приведённой формуле значение величины Ω_n^2.

Распределение результатов наблюдений группы не противоречит нормальному распределению, если

$$d_{1-\frac{q}{2}} < \tilde{d} \le d_{\frac{q}{2}},$$

где $d_{1-\frac{q}{2}}$ и $d_{\frac{q}{2}}$ – процентные точки распределения d, которые находят из табл. 6 по n, $\frac{q}{2}$ и $\left(1-\frac{q}{2}\right)$, причём q – выбранный заранее уровень значимости критерия.

Таблица 5

Значение Ω_n^2	Значение функции a (Ω_n^2) при втором знаке после запятой значения Ω_n^2									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,002	0,003	0,005	0,007
0,3	0,010	0,013	0,016	0,020	0,025	0,030	0,035	0,041	0,048	0,055
0,4	0,062	0,070	0,078	0,086	0,095	0,104	0,113	0,122	0,132	0,141
0,5	0,151	0,161	0,171	0,181	0,192	0,202	0,212	0,222	0,233	0,243
0,6	0,352	0,361	0,371	0,380	0,389	0,398	0,407	0,416	0,424	0,433
0,7	0,441	0,449	0,458	0,046	0,474	0,482	0,489	0,497	0,504	0,512
0,8	0,519	0,526	0,533	0,540	0,547	0,554	0,560	0,567	0,573	0,580
0,9	0,586	0,592	0,598	0,604	0,610	0,615	0,021	0,627	0,632	0,637
1,0	0,643	0,648	0,653	0,658	0,663	0,668	0,673	0,677	0,682	0,687
1,1	0,691	0,696	0,700	0,704	0,709	0,713	0,717	0,721	0,725	0,729
1,2	0,732	0,736	0,740	0,744	0,747	0,751	0,754	0,758	0,761	0,764
1,3	0,768	0,771	0,774	0,777	0,780	0,783	0,786	0,789	0,792	0,795
1,4	0,798	0,800	0,803	0,806	0,809	0,811	0,814	0,816	0,819	0,821
1,5	0,824	0,826	0,828	0,831	0,833	0,835	0,837	0,839	0,842	0,844
1,6	0,846	0,848	0,850	0,852	0,854	0,856	0,858	0,859	0,861	0,863
1,7	0,865	0,867	0,868	0,870	0,872	0,873	0,875	0,877	0,878	0,880
1,8	0,881	0,883	0,884	0,886	0,887	0,889	0,890	0,892	0,893	0,894
1,9	0,896	0,897	0,898	0,900	0,901	0,902	0,903	0,905	0,906	0,907
2,0	0,908	0,909	0,910	0,912	0,913	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918
2,1	0,919	0,920	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926	0,927	0,928
2,2	0,929	0,929	0,930	0,931	0,932	0,933	0,934	0,934	0,935	0,936
2,3	0,937	0,938	0,938	0,939	0,940	0,941	0,941	0,942	0,943	0,943
2,4	0,944	0,945	0,945	0,946	0,947	0,947	0,948	0,949	0,949	0,950

Таблица 6

Статистика $\widetilde{d} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{nS^*}$,

Объем выборки	$\frac{q}{2}$ *100%		$\left(1-\frac{q}{2}\right)$*100%	
	1%	5%	95%	99%
11	0,9359	0,9073	0,7153	0,6675
16	9137	8884	7236	6829
21	9001	8768	7304	6950
26	8901	8686	7360	7040
31	8826	8625	7404	7110
36	8769	8578	7440	7167
41	8722	8540	7470	7216
47	8682	8508	7496	7156
51	8648	8481	7518	7291
61	0,8592	0,8434	0,7554	0,7341
71	8549	8403	7583	7393
81	8515	8376	7607	7430
91	8484	8353	7626	7460
101	8460	8344	7644	7487

Критерий 2. Распределение результатов наблюдений группы не противоречит нормальному, если не более m разностей $(x_i - \bar{x})$ превзошли значение $Z_{\frac{P}{2}}S$, где S – среднее квадратическое отклонение, вычисляемое по формуле

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$Z_{\frac{P}{2}}$ – верхняя квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающая вероятности $P/2$. Значение P определяется из табл. 7 по выбранному уровню значимости q_2, числу результатов наблюдений n и разностей m.

При уровне значимости, отличном от предусмотренных в табл. 7, значение P находят путём линейной интерполяции.

Если при проверке нормальности распределения результатов наблюдений группы для критерия 1 выбран уровень значимости q_1, а для критерия 2 – q_2, то уровень значимости составного критерия

$$q \le q_1 + q_2 .$$

Если хотя бы один из критериев не соблюдается, то считают, что распределение результатов наблюдений группы не соответствует нормальному.

Таблица 7

Значение *P* для вычисления $Z_{p/2}$

n	*m*	*Q*		
		0,01	0,02	0,05
10	1	0,98	0,98	0,96
11 -14	1	0,99	0,98	0,97
15 - 20	1	0,99	0,99	0,98
21 - 22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,09
24 - 27	2	0,98	0,98	0,97
28 - 32	2	0,99	0,98	0,98
33 – 35	2	0,99	0,98	0,98
36 – 49	2	0,99	0,99	0,98

Пример. В табл. 8 приведены результаты наблюдений, полученные при измерении напряжения исследуемого источника с помощью потенциометра.

Таблица 8

i	x_i	$(x_i - \bar{x})*10^4$	$(x_i - \bar{x})^2*10^8$	i	x_i	$(x_i - \bar{x})*10^4$	$(x_i - \bar{x})^2*10^8$
1	2	3	4	1	2	3	4
1	2,7997	+3	9	19	2,7988	-6	36
2	7991	-3	9	20	7999	+5	25
3	7990	-4	16	21	7998	+4	16
4	7997	+3	9	22	7996	+2	4
5	7992	-2	4	23	7992	-2	4
6	7976	-18	324	24	8000	+6	36
7	7984	-10	100	25	7993	-1	1
8	7999	+5	25	26	7988	-6	36
9	7990	-4	16	27	7993	-1	1
10	7989	-5	25	28	7982	-12	144
11	7997	+3	9	29	7999	+5	25
12	7993	-1	1	30	7997	+3	9
13	8000	+6	36	31	7999	+5	25
14	8006	+12	144	32	7992	-2	4
15	7998	+4	16	33	7999	+5	25
16	7995	+1	1	34	7989	-5	25
17	7992	-2	4	35	7994	0	0
18	8011	+17	289	36	7999	+5	25

Проверим, можно ли считать, что приведённые данные принадлежат совокупности, распределённой нормально.

1. Найдём оценки характеристик группы наблюдений

$$\bar{x} = \frac{1}{36}\sum_{1}^{36} x_i = 2{,}799\,B$$

$$S = \frac{1}{35}\sum_{1}^{36}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sqrt{\frac{1478\cdot 10^{-8}}{35}} = 6{,}52\cdot 10^{-4}\,B$$

$$S* = \sqrt{\frac{1}{36}\sum_{1}^{36}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1478\cdot 10^{-8}}{36}} = 6{,}41\cdot 10^{-4}\,B$$

2. Применим критерий 1. Для этого вычислим оценку параметра *d*, пользуясь формулой:

$$\tilde{d} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{nS*} = 174\cdot\frac{10^{-4}}{36\cdot 6{,}41\cdot 10^{-4}} = 0{,}754\,,$$

где $\sum_{1}^{36}\left(x_i - \bar{x}\right) = 174\cdot 10^{-4}$.

Выбрав уровень значимости q_1 = 2%, из табл. 6 находим $d_{1\%} = 0{,}877$ и $d_{99\%}$ = 0,717. Так как $0{,}717 < 0{,}754 < 0{,}877$, то критерий 1 выполняется.

3. Применим критерий 2. Выбрав уровень значимости $q_2 = 0{,}05$, для числа наблюдений n = 36 из табл. 7 находим P = 0,98. Из таблицы нормированной функции Лапласа находим $Z_{\frac{P}{2}} = 2{,}33$, тогда $Z_{\frac{P}{2}}S = 6{,}52\cdot 10^{-4}\cdot 2{,}33 = 15{,}3\cdot 10^{-4}$. Согласно критерию 2, не более двух разностей (x_i – x) могут превзойти $15{,}3\cdot 10^{-4}$. По данным табл. 8 видим, что только для наблюдений i = 6 и i = 18 разности (x_i – x) превосходят. Следовательно, гипотеза о нормальности согласуется с данными наблюдений.

Уровень значимости составного критерия $q \le 0{,}02 + 0{,}05 = 0{,}07$, т.е. гипотеза о нормальности согласуется с данными наблюдений с вероятностью не менее 0,93.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Дифференциальная функция нормированного нормального распределения $p(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2t^2}}$

t	P(t)	T	P(t)
0	0.3989	2	0.054
0.1	0.397	2.1	0.044
0.2	0.391	2.2	0.0355
0.3	0.3814	2.3	0.0283
0.4	0.3683	2.4	0.0224
0.5	0.3831	2.5	0.0175
0.6	0.3838	2.6	0.0136
0.7	0.3133	2.7	0.0104
0.8	0.3897	2.8	0.0079
0.9	0.8661	2.9	0.0006
1	0.43	3	0.0044
1.1	0.8179	3.1	0.0033
1.2	0.1948	3.2	0.0024
1.3	0.1714	3.3	0.0017
1.4	0.1497	3.4	0.0012
1.5	0.1896	3.5	0.0009
1.6	0.1109	3.6	0.0006
1.7	0.094	3.7	0.0004
1.8	0.079	3.8	0.0003
1.9	0.0666	3.9	0.0002

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Значения функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{t^2}{2}} dt$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,004	0,008	0,012	0,016	0,019	0,023	0,027	0,031	0,035
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2702	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4986									
3,5	4998									
4,0	4999									

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Z	0,08	0,06	0,04	0,02	0
-3,5	0,00017	0,00019	0,0002	0,00022	0,00023
-3,4	0,00025	0,00027	0,00029	0,00031	0,00034
-3,3	0,00036	0,00039	0,00042	0,00045	0,00048
-3,2	0,00052	0,00056	0,0006	0,00064	0,00069
-3,1	0,00074	0,00079	0,00085	0,0009	0,00097
-3	0,00104	0,00111	0,00118	0,00126	0,00135
-2,9	0,0014	0,0015	0,0016	0,0017	0,0019
-2,8	0,002	0,0021	0,0023	0,0024	0,0026
-2,7	0,0027	0,0029	0,0031	0,0033	0,0035
-2,6	0,0037	0,0039	0,0041	0,0044	0,0047
-2,5	0,0049	0,0052	0,0055	0,0059	0,0062
-2,4	0,0066	0,0069	0,0073	0,0078	0,0082
-2,3	0,0087	0,0091	0,0096	0,0102	0,0107
-2,2	0,0113	0,0119	0,0125	0,0132	0,0139
-2,1	0,0146	0,0154	0,0162	0,017	0,0179
-2	0,0188	0,0197	0,0207	0,0217	0,0228
-1,9	0,0239	0,025	0,0262	0,0274	0,0287
-1,8	0,0301	0,0314	0,0329	0,0344	0,0359
-1,7	0,0375	0,0392	0,0409	0,0427	0,0446
-1,6	0,0465	0,0485	0,0505	0,0526	0,0548
-1,5	0,0571	0,0594	0,0618	0,0643	0,0668
-1,4	0,0694	0,0721	0,0749	0,0778	0,0808
-1,3	0,0838	0,0869	0,0901	0,0934	0,0968
-1,2	0,1003	0,1038	0,1075	0,1112	0,1151
-1,1	0,119	0,123	0,1271	0,1314	0,1357
-1	0,1401	0,1446	0,1492	0,1539	0,1587
-0,9	0,1635	0,1685	0,1736	0,1788	0,1841
-0,8	0,1894	0,1949	0,2005	0,2061	0,2119
-0,7	0,2177	0,2236	0,2297	0,2358	0,242
-0,6	0,2483	0,2546	0,2611	0,2676	0,2743
-0,5	0,281	0,2877	0,2946	0,3015	0,3085
-0,4	0,3156	0,3228	0,33	0,3372	0,3446
-0,3	0,352	0,3594	0,3669	0,3745	0,3821
-0,2	0,3897	0,3974	0,4052	0,4129	0,4207
-0,1	0,4286	0,4364	0,4443	0,4522	0,4602
0	0,4681	0,4761	0,484	0,492	0,5

Продолжение таблицы

Z	0	0,02	0,04	0,06	0,08
0	0,5	0,508	0,516	0,5239	0,5319
0,1	0,5398	0,5478	0,5557	0,5636	0,5714
0,2	0,5793	0,5871	0,5948	0,6026	0,6103
0,3	0,6179	0,6225	0,6331	0,6406	0,648
0,4	0,6554	0,6628	0,67	0,6772	0,6844
0,5	0,6915	0,6985	0,7054	0,7123	0,719
0,6	0,7257	0,7324	0,7389	0,7454	0,7517
0,7	0,758	0,7642	0,7704	0,7764	0,7823
0,8	0,7881	0,7939	0,7995	0,8051	0,8106
0,9	0,8159	0,8212	0,8264	0,8315	0,8365
1	0,8413	0,8461	0,8505	0,8554	0,8599
1,1	0,8643	0,8686	0,8729	0,877	0,881
1,2	0,8849	0,8888	0,8925	0,8962	0,8997
1,3	0,9032	0,9066	0,9099	0,9131	0,9162
1,4	0,9192	0,9222	0,9251	0,9279	0,9306
1,5	0,9332	0,9357	0,9382	0,9406	0,9429
1,6	0,9452	0,9474	0,9495	0,9515	0,9535
1,7	0,9554	0,9573	0,9591	0,9608	0,9625
1,8	0,9641	0,9656	0,9671	0,9686	0,9699
1,9	0,9713	0,9726	0,9738	0,975	0,9761
2	0,9773	0,9783	0,9793	0,9803	0,9812
2,1	0,9821	0,983	0,9838	0,9846	0,9854
2,2	0,9861	0,9868	0,9875	0,9881	0,9887
2,3	0,9893	0,9898	0,9904	0,9909	0,9913
2,4	0,9918	0,9922	0,9927	0,9931	0,9934
2,5	0,9938	0,9941	0,9945	0,9943	0,9951
2,6	0,9953	0,9956	0,9959	0,9961	0,9963
2,7	0,9965	0,9967	0,9969	0,9971	0,9973
2,8	0,9974	0,9976	0,9977	0,9979	0,998
2,9	0,9981	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986
3	0,99865	0,99874	0,99882	0,99889	0,99896
3,1	0,99903	0,9991	0,99915	0,99921	0,99926
3,2	0,99931	0,99936	0,9994	0,99954	0,99948
3,3	0,99952	0,99955	0,99958	0,99961	0,99964
3,4	0,99966	0,99969	0,99971	0,99973	0,99975
3,5	0,99977	0,99978	0,9998	0,99981	0,99983

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_p\} = 2\int_0^{t_p} S(t;k)dt$

Значение коэффициента t_p для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с k = n – 1 степенями свободы

k	P											
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,543	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,129	0,260	0,396	0,540	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,1256	0,2534	0,3853	0,5244	0,6745	0,8416	1,03643	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Распределение Стьюдента

Значение $P\{|t| < t_p\} = 2\int_0^{t_p} S(t;k)dt$ **для различных** $\mathbf{t_p}$

k	t_p				k	t_p			
	2,0	2,5	3	3,5		2,0	2,5	3	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8229	12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276	13	0,9392	0,9737	0,9898	0,9960
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606	14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752	15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828	16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872	17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9872
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900	18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920	19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932	20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942	∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950					

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Значения υ_p при различных числах измерения n

n	*q = 1 – P*				n	*q = 1 – P*			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	14	2,297	2,461	2,602	2,759
4	1,645	1,686	1,710	1,723	15	2,326	2,493	2,638	2,808
5	1,731	1,896	1,917	1,955	16	2,354	2,523	2,670	2,837
6	1,834	1,996	2,067	2,130	17	2,380	2,551	2,701	2,871
7	1,974	2,093	2,182	2,265	18	2,404	2,557	2,728	2,903
8	2,041	2,172	2,273	2,374	19	2,426	2,600	2,754	2,932
9	2,097	2,237	2,349	2,464	20	2,447	2,623	2,778	2,959
10	2,146	2,294	2,414	2,540	21	2,467	2,644	2,801	2,984
11	2,190	2,383	2,470	2,606	22	2,486	2,664	2,823	3,008
12	2,229	2,387	2,519	2,663	23	2,504	2,683	2,843	3,030
13	2,264	2,426	2,562	2,714	24	2,520	2,701	2,862	3,051
					25	2,537	2,717	2,880	3,071

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Интегральная функция χ^2 – распределения Пирсона
Значение $\chi^2_{k;P}$ для различных k и P

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,00015	0,00062	0,0039	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,61	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	2,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,982	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	34,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,072	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,44	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	12,716	15,352	18,338	21,869	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,587	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,455	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,484	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,196	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,319	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

ИСТОРИЯ КАФЕДРЫ

Кафедра проектирования компьютерных систем

1945–1966 РЛПУ (кафедра радиолокационных приборов и устройств). Решением Советского правительства в августе 1945 г. в ЛИТМО был открыт факультет электроприборостроения. Приказом по институту от 17 сентября 1945 г. на этом факультете была организована кафедра радиолокационных приборов и устройств, которая стала готовить инженеров, специализирующихся в новых направлениях радиоэлектронной техники, таких как радиолокация, радиоуправление, теленаведение и др. Организатором и первым заведующим кафедрой был д. т. н., профессор С. И. Зилитинкевич (до 1951 г.). Выпускникам кафедры присваивалась квалификация инженер-радиомеханик, а с 1956 г. - радиоинженер (специальность 0705).

В разные годы кафедрой заведовали доцент Б. С. Мишин, доцент И. П. Захаров, доцент А. Н. Иванов.

1966–1970 КиПРЭА (кафедра конструирования и производства радиоэлектронной аппаратуры). Каждый учебный план специальности 0705 коренным образом отличался от предыдущих планов радиотехнической специальности своей четко выраженной конструкторско-технологической направленностью. Оканчивающим институт по этой специальности присваивалась квалификация инженер-конструктор-технолог РЭА.

Заведовал кафедрой доцент А. Н. Иванов.

1970–1988 КиПЭВА (кафедра конструирования и производства электронной вычислительной аппаратуры). Бурное развитие электронной вычислительной техники и внедрение ее во все отрасли народного хозяйства потребовали от отечественной радиоэлектронной промышленности решения новых ответственных задач. Кафедра стала готовить инженеров по специальности 0648. Подготовка проводилась по двум направлениям - автоматизация конструирования ЭВА и технология микроэлектронных устройств ЭВА.

Заведовали кафедрой: д. т. н., проф. В. В.Новиков (до 1976 г.), затем проф. Г. А. Петухов.

1988–1997 МАП (кафедра микроэлектроники и автоматизации проектирования). Кафедра выпускала инженеров, конструкторов, технологов по микроэлектронике и автома тизации проектирования вычислительных средств (специальность 2205). Выпускники этой кафедры имеют хорошую технологическую подготовку и успешно работают как в производстве полупроводниковых интегральных микросхем, так и при их проектировании, используя современные методы автоматизации проектирования. Инженеры специальности 2205 требуются микроэлектронной промышленности и предприятиям-разработчикам вычислительных систем.

Кафедрой с 1988 г. по 1992 г. руководил проф.С. А. Арустамов, затем снова проф. Г. А. Петухов.

С 1997 ПКС (кафедра проектирования компьютерных систем). Кафедра выпускает инженеров по специальности 210202 «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств». Область профессиональной деятельности выпускников включает в себя проектирование, конструирование и технологию электронных средств, отвечающих целям их функционирования, требованиям надежности, проекта и условиям эксплуатации. Кроме того, кафедра готовит специалистов по защите информации, специальность 090104 «Комплексная защита объектов информатизации». Объектами профессиональной деятельности специалиста по защите информации являются методы, средства и системы обеспечения защиты информации на объектах информатизации.

С 1996 г. кафедрой заведует д. т. н., профессор Ю.А. Гатчин. За время своего существования кафедра выпустила 4364 инженеров. На кафедре защищено 65 кандидатских и семь докторских диссертаций.

На кафедре Проектирования Компьютерных систем осуществляется магистраторская подготовка по направлению 210200.05 «Информационные технологии и проектирование электронных средств».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефедов В.И., Сигов А.С. Метрология, стандартизация и технические измерения. – Издательство: Высшая школа, 2008. – 624с.

2. Марусина М.Я., Ткалич В.Л., Воронцов Е.А., Скалецкая Н.Д. Основы метрологии, стандартизации и сертификации. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. – 164 с.

3. Агапьев Б.Д., Белов В.Н., Козловский В.В., Марков С.И.

   Обработка экспериментальных данных. Учебное пособие. – СПб.: СПбГТУ, 2001. – 51 с.

4. Канке А.А., Кошевая И.П. Метрология, стандартизация и сертификация. Учебник, ВУЗ. – Издательство: Форум, Инфра-М, 2010. – 416 с.

5. Гугелев А.В. Стандартизация, метрология и сертификация. Учебное пособие, ВУЗ. – Издательство: Дашков и К, 2009. – 272 с.

6. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология. Карманная энциклопедия студента: Учебное пособие для студентов высших и средних специальных учебных заведений. – М.: Логос, 2001. – 376 с.: ил.

7. ГОСТ 16263-70 «Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения».

8. ГОСТ 11.002-73 «Прикладная статистика. Правила оценки анормаль ности результатов наблюдений»

9. ГОСТ 11.004-74 «Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров нормального распределения».

10. ГОСТ 11.006-74 «Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим».

11. ГОСТ 8.011-72 «Государственная система обеспечения единства измерений. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений».

Вера Леонидовна Ткалич
Римма Яновна Лабковская

Обработка результатов технических измерений

Учебное пособие

В авторской редакции	В.Л. Ткалич Р.Я. Лабковская
Дизайн обложки	Р.Я. Лабковская
Компьютерный набор и вёрстка	Р.Я. Лабковская
Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО	
Зав. РИО	Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99	
Подписано к печати	
Заказ №	
Тираж	
Отпечатано на ризографе	

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49