

## Глава 6

# СТРУКТУРА ИЗОБРАЖЕНИЯ, ОБРАЗОВАННОГО ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ, И ОЦЕНКА ЕГО КАЧЕСТВА

Распределение освещённости в плоскости изображения определяется выражением

$$E_0(x', y') = \tau \pi L'(x', y') \sin^2 \sigma' \cos^4 w', \quad (6.1)$$

где  $L'(x', y')$  – распределение яркости излучения в направлении главных лучей, осреднённой в пределах светового пучка лучей;  $\tau$  – коэффициент пропускания света оптической системой и средами, разделяющими предмет, оптическую систему и плоскость изображений;  $\sigma'$  – угол, образованный крайним лучом осевого пучка с оптической осью в пространстве изображений;  $w'$  – угол (полевой угол) между главным лучом и оптической осью в пространстве изображений. Распределение яркости  $L'(x', y') = \frac{n'^2}{n^2} L(x, y)$ , где  $L(x, y)$  – распределение яркости излучения поверхностью предмета;  $n$  и  $n'$  – показатели преломления сред в пространстве предметов и изображений соответственно. Следовательно,

$$E_0(x', y') = \tau \pi L(x, y) \frac{n'^2}{n^2} \sin^2 \sigma' \cos^4 w'. \quad (6.2)$$

Поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой, определяется соотношением вида:

$$V = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'},$$

где  $\sigma$  – угол, образованный крайним лучом, исходящим из осевой точки предмета, с оптической осью. При этом выражение (6.2) можно представить в виде:

$$E_0(x', y') = \tau \pi L(x, y) \frac{\sin^2 \sigma}{V^2} \cos^4 w'.$$

Пусть, например,  $\sin w' = 0,1$ , что соответствует углу  $w' \approx 6^\circ$ . Тогда  $\cos^4 w' = (1 - \sin^2 w')^2 = 1 - 2\sin^2 w' + \sin^4 w' = 0,9801$ . Таким образом, при достаточно большом, например, для объективов зрительных труб, угловом поле изображения приближённо можно считать, что

$$E_0(x', y') = \tau \pi \frac{\sin^2 \sigma}{V^2} L(x, y) \quad (6.3)$$

или

$$E_0(x', y') = KL(x, y), \quad (6.4)$$

где  $K = \tau\pi \frac{\sin^2 \sigma}{V^2} = \text{const}$ .

Итак, при сравнительно малом, но достаточно большом, например, для объективов зрительной трубы, угловом поле распределение освещённости на плоскости изображения идеально отображает распределение яркости излучения поверхностью предмета.

Важно отметить, что формула (6.1) получена для идеальной оптической системы на основе представлений геометрической оптики. Оптическую систему будем считать геометрически идеальной, если она удовлетворяет следующим условиям, сформулированным Д.К.Максвеллом в 1858 году:

– все лучи, вышедшие из точки предмета  $A(x, y)$  и прошедшие через оптическую систему, должны сойтись (пересечься) в точке изображения  $A'(x', y')$ ;

– каждый элемент плоскости предмета, нормальной к оптической оси и содержащей точку  $A(x, y)$ , должен быть изображён элементом плоскости, нормальной к оптической оси и содержащей точку  $A'(x', y')$ ;

– высота изображения  $y'$  должна быть пропорциональна высоте предмета  $y$ , причём коэффициент пропорциональности должен быть постоянным независимо от местоположения точки  $A(x, y)$  в плоскости предмета.

Отклонения от первого условия определяют поперечные aberrации широких и узких пучков лучей, образующих изображение; отклонения от второго условия определяют кривизну поверхности изображения, а отклонения от третьего условия нарушают подобие изображения предмету и называются дисторсией. Однако, в изображении, образованном геометрически идеальной оптической системой, распределение освещённости не является идеальным отображением яркости излучения поверхностью предмета, поскольку в этом случае каждая точка предмета изображается в виде дифракционного пятна, радиус первого тёмного кольца в котором (радиус кружка или пятна Эри) при круглой форме зрачков определяется формулой:

$$r'_a = \frac{1,22\lambda}{2n' \sin \sigma'} \quad (6.5)$$

Вполне очевидно, что при прочих равных условиях размер дифракционного пятна в изображении точки тем меньше, чем меньше длина волны излучения  $\lambda$ . Этим, например, объясняется тот факт, что для повышения эффективности применения планарной технологии производства современной полупроводниковой электроники наблюдается постоянное стремление использовать излучение более коротких длин волн.

Из соотношения (6.5) следует, что только при  $\lambda = 0$  безабберационная оптическая система формирует геометрически идеальное изображение. Если предположить, что величина светового потока, излучаемого точечным источником (точечным предметом), мала, но конечна, то вполне очевидно, что яркость излучения такого источника должна быть бесконечно большой, при этом бесконечно велика должна быть и освещённость геометрически идеального изображения точки. Освещённость идеализированного изображения точки можно описать с помощью так называемой  $\delta$ -функции Дирака:

$$\delta(x', y') = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(x'^2 + y'^2)] \quad (6.6)$$

Представим это выражение в виде:

$$\begin{aligned} \delta(x', y') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\exp[N^2 \pi(x'^2 + y'^2)]} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{N^2} + \pi(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} N^2 \pi^2 (x'^2 + y'^2)^2 + K} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $x' = 0$  и  $y' = 0$  функция  $\delta(0, 0) = \infty$ . Если  $x' \neq 0$  и (или)  $y' \neq 0$ , то  $\delta(x', y') = 0$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x', y') dx' dy' &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-N^2 \pi(x'^2 + y'^2)] dx' dy' = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-N^2 \pi x'^2) dx' \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-N^2 \pi y'^2) dy' \end{aligned}$$

Обозначим  $N^2 \pi x'^2 = u$ . Тогда  $2N^2 \pi x' dx' = du$  и, соответственно,

$$dx' = \frac{1}{2N\sqrt{\pi}} u^{-\frac{1}{2}} du.$$

При этом получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-N^2 \pi x'^2) dx' = 2 \int_0^{\infty} \exp(-N^2 \pi x'^2) dx' = \frac{1}{N\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{-\frac{1}{2}} du.$$

Известно, что гамма-функция определяется интегралом Эйлера в виде:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} \exp(-u) u^{t-1} du.$$

Из сопоставления интегралов следует, что  $t = \frac{1}{2}$ . Но  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

При этом  $\int_0^{\infty} \exp(-N^2 \pi x'^2) dx' = \int_0^{\infty} \exp(-N^2 \pi y'^2) dy' = \frac{1}{N}$ . В результате

получаем, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x', y') dx' dy' = 1$ .

Итак,  $\delta$ -функция обладает следующими свойствами:

$$\delta(x' - x'_0, y' - y'_0) = \begin{cases} \infty, & \text{їдє } x' = x'_0; y' = y'_0; \\ 0, & \text{їдє } x' \neq x'_0 \text{ є } (єєє) y' \neq y'_0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = 1.$$

Отсюда следует, что если  $\delta$ -функция описывает распределение освещённости в идеализированном изображении точки, то световой поток, формирующий это изображение, равен единице. С другой стороны, если яркость излучения точечного источника света равна нулю, то освещённость в изображении точки, а, следовательно, и поток, его формирующий, тоже будут равны нулю. Поэтому освещённость в идеализированном изображении точки определим произведением вида:

$$E_0(x', y') \delta(x' - x'_0, y' - y'_0).$$

Пусть  $f(x', y')$  – любая функция переменных  $x'$  и  $y'$ . Если  $f(x', y')$  непрерывна при  $x' = x'_0$  и  $y' = y'_0$ , то справедливо следующее важное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = f(x'_0, y'_0),$$

т.е. справедливо соотношение

$$f(x', y') \delta(x' - x'_0, y' - y'_0) = f(x'_0, y'_0) \delta(x' - x'_0, y' - y'_0). \quad (6.7)$$

Свойство  $\delta$ -функции, определяемое соотношением (6.7), называется фильтрующим свойством  $\delta$ -функции.

Таким образом, выражение

$$E_0(x', y')\delta(x' - x'_0, y' - y'_0) = E_0(x'_0, y'_0)\delta(x' - x'_0, y' - y'_0).$$

Вполне очевидно, что световой поток, формирующий как реальное изображение точки (с учётом дифракции и aberrаций), так и идеализированное, должен быть одним и тем же, равным входящему в оптическую систему с учётом коэффициента пропускания сред оптической системы.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x', y') \delta(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = E_0(x'_0, y'_0), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где  $E_0(x'_0, y'_0)$  – величина освещённости в изображении точки, определяемая формулой (6.1) или формулой (6.3).

Функцию  $D(x' - x'_0, y' - y'_0)$ , определяемую отношением

$$D(x' - x'_0, y' - y'_0) = \frac{E(x' - x'_0, y' - y'_0)}{E_0(x'_0, y'_0)},$$

называют функцией рассеяния точки (ФРТ). При этом из выражения (6.8) находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = 1. \quad (6.9)$$

Таким образом, ФРТ можно интерпретировать как изображение точечного источника излучения, в котором распределён поток излучения, равный единице.

Заметим, что

$$E(x' - x'_0, y' - y'_0) = D(x' - x'_0, y' - y'_0)E_0(x'_0, y'_0), \quad (6.10)$$

где  $E(x' - x'_0, y' - y'_0)$  – распределение освещённости в реальном изображении точки, образованном оптической системой.

Если ФРТ постоянна для всех точек плоскости изображения (aberrации практически не изменяются в пределах всей плоскости изображения), то освещённость в рассматриваемой точке с координатами  $x', y'$  зависит только от расстояния, на котором она находится от точки идеализированного изображения с координатами  $x'_0, y'_0$ . Это означает, что оптическая система удовлетворяет условию пространственной инвариантности, т.е. в соответствии с

терминологией, принятой в оптике, она обладает изопланатической коррекцией аберрацией или, просто, она изопланатична. В общем случае оптические системы этому условию не удовлетворяют. Однако, плоскость изображения всегда можно разделить на кольцевые зоны, концентричные осевой точке изображения, в пределах которых условие изопланатичности практически соблюдается, т.е. в пределах которых ФРТ изменяется в допустимых пределах.

Поскольку в изображении точки освещённость распределена на малой, но конечной площади, то вполне очевидно, что распределение освещённости в изображении других точек будет влиять на общее распределение освещённости в изображении этих точек. Будем считать излучаемый каждой точкой предмета свет некогерентным, при этом освещённость в каждой точке плоскости изображения равна сумме освещённостей от каждой изображаемой точки. В общем случае изображающая система линейна, если  $E(x', y') = \sum_i a_i E_i(x', y')$ .

### 6.1. Оптическая система как фильтр пространственных частот

В общем случае влияние оптической системы на структуру образованного ею изображения можно определить с помощью математического оператора, который показывает, как нужно преобразовать функцию  $E_0(x'_0, y'_0)$  идеализированного изображения, чтобы получить функцию распределения освещённости  $E(x', y')$  в действительном изображении. Такое воздействие оптической системы, удовлетворяющей требованиям линейности и изопланатичности, можно описать с помощью передаточной функции. Передаточная функция должна быть достаточно универсальна, чтобы её можно было применить к системам различного назначения. Другое важное требование, предъявляемое к передаточной функции, состоит в том, чтобы её можно было измерить.

Рассмотрим распределение освещённости на плоскости изображения вдоль линии, параллельной, например, оси  $x'$ . В этом случае  $E_0(x'_0, y'_0) = E_0(x'_0, y'_0 = const)$ . Если эту линию совместить с осью  $x'$ , то  $y'_0 = 0$ . При этом  $E_0(x'_0, y'_0) = E_0(x'_0)$  и, соответственно,

$$E(x' - x'_0) = E(x'_0) D_{\varepsilon}(x' - x'_0), \quad (6.11)$$

где  $D_{\varepsilon}(x' - x'_0)$  – функция рассеяния линии (ФРЛ), причём

$$D_{\varepsilon}(x' - x'_0) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0) dy'.$$

Условие нормировки ФРЛ таково, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{\varepsilon}(x' - x'_0) dx' = \iint_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = 1.$$

В случае изопланатической системы

$$D_{\varepsilon}(x' - x'_{0i}) = D_{\varepsilon}(x' - x'_{0j}).$$

Удобно обозначить  $x' - x'_0 = \xi'$ . При этом ФРЛ можно представить в виде, показанном на рис.6.1.

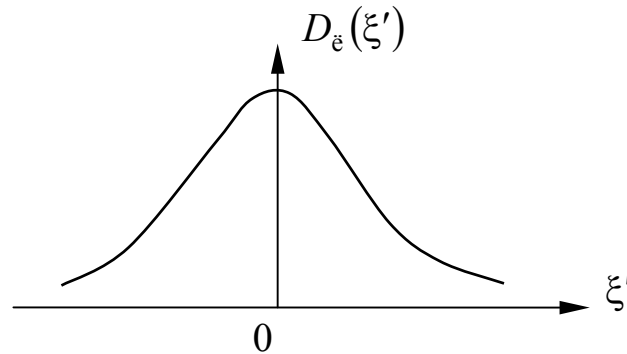


Рис.6.1. Функция рассеяния линии

Обратимся к рис.6.2, на котором распределение освещённости в идеализированном изображении в направлении оси  $x'$  представлено кривой  $E_0 = E_0(x'_0)$ . Определим освещённость изображения  $E(x')$  в произвольной точке с координатой  $x'$ . Для этого надо найти сумму ординат, равных  $D_{\varepsilon}(\xi')E_0(x' - \xi')$  при изменении координаты  $\xi'$  (отсчитываемой от точки с координатой  $x'$ ) теоретически от  $-\infty$  до  $\infty$ . При каждом значении координаты  $\xi'$  соответствующую ординату можно считать принадлежащей ФРЛ в изображении предмета с абсциссой  $x'_0 = x' - \xi'$  и отстоящей от центра этой функции (т.е. от абсциссы  $x'_0$ ) на расстоянии, равном  $\xi'$ , как показано на рис.6.2. Таким образом, распределение освещённости в изображении предмета определяется выражением

$$E(x') = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\varepsilon}(\xi') E_0(x' - \xi') d\xi'. \quad (6.12)$$

Этот интеграл представляет собой так называемую свёртку функции  $E_0(x'_0)$  распределения освещённости вдоль оси  $x'$  в идеализированном изображении предмета, образованного оптической системой, с функцией рассеяния линии  $D_{\varepsilon}(\xi')$ . Свёртку функций часто обозначают значком  $\otimes$ . При этом  $E = D_{\varepsilon} \otimes E_0$ .

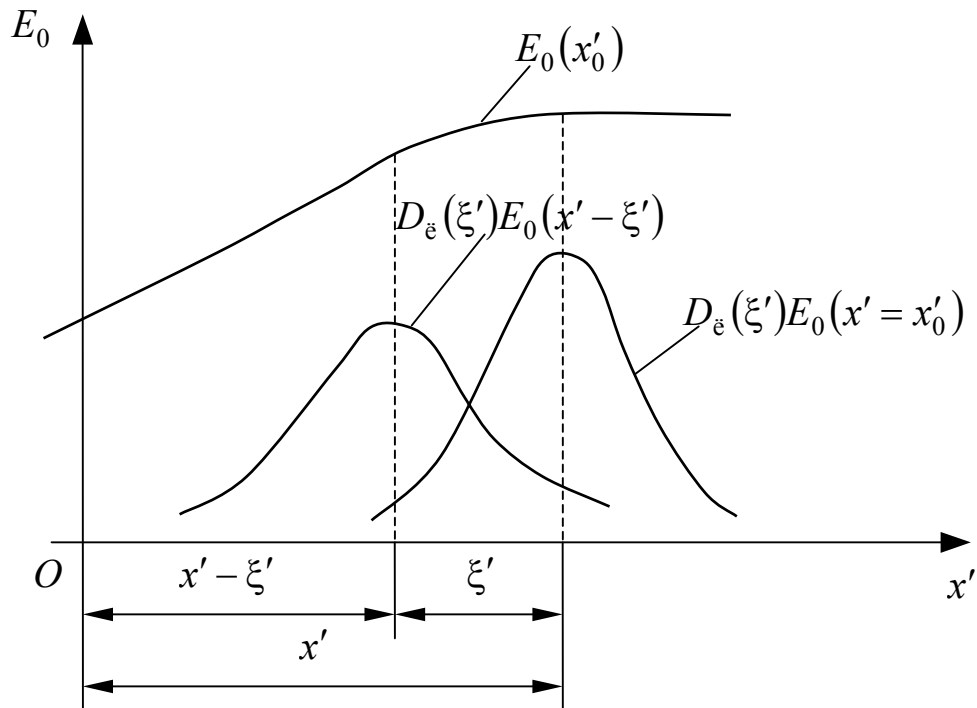


Рис.6.2. К выводу свёртки функций  $D_{\varepsilon}(\xi')$  и  $E_0(x' - \xi')$

В общем случае двумерного распределения освещённости  $E_0(x'_0, y'_0)$  в идеализированном изображении предмета формула (6.12) принимает вид:

$$E(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} D(\xi', \eta') E_0(x' - \xi', y' - \eta') d\xi' d\eta', \quad (6.13)$$

где  $\xi', \eta'$  – координаты ФРТ.

Можно показать, что линейный процесс, определяемый интегралом (6.13), на языке преобразования Фурье записывается в чрезвычайно простой форме, что приводит к интересным и полезным соображениям о действии оптической системы как фильтра пространственных частот.

Уместно напомнить, что формула (6.12), а, соответственно, и формула (6.13), получены в предположении, что вид функции  $D(\xi', \eta')$  в пределах рассматриваемых участков изображения не изменяется, т.е. в пределах рассматриваемых участков изображения оптическая система обладает изопланатической коррекцией aberrаций, при этом каждая точка предмета излучает некогерентный свет.

При решении многих задач физики и математики необходимо осуществить разложение периодической функции  $f(x)$  с периодом, равным  $p$ , в ряд по тригонометрическим функциям:



$$f(x) = a_0 + a_1 \sin \frac{2\pi}{p}x + b_1 \cos \frac{2\pi}{p}x + \dots + a_n \sin n \frac{2\pi}{p}x + b_n \cos n \frac{2\pi}{p}x + \dots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sin 2\pi \frac{nx}{p} + b_n \cos 2\pi \frac{nx}{p} \right). \quad (6.14)$$

Ряд вида (6.14) называется рядом Фурье, а разложение функции  $f(x)$  в ряд Фурье составляет задачу гармонического анализа. В приложениях зачастую ограничиваются конечным числом членов и получают при этом приближение функции тригонометрическим многочленом.

Легко убедиться, что коэффициенты такого ряда Фурье определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \sin 2\pi \frac{nx}{p} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \cos 2\pi \frac{nx}{p} dx, \quad (n = 1, 2, \dots, K).$$

Во многих случаях представляет интерес, когда ряд Фурье сходится в обычном смысле, т.е. поточечно, и каким образом он описывает функцию  $f(x)$ . На такую постановку вопроса в значительной степени даёт ответ следующая теорема Дирихле. Пусть  $f(x)$  удовлетворяет в интервале  $\left(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p\right)$  так называемым условиям Дирихле:

- интервал  $\left(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p\right)$  можно разбить на конечное число интервалов, в которых  $f(x)$  непрерывна и монотонна;
- если  $x_0$  является точкой разрыва функции  $f(x)$ , то существуют  $f(x_0 + 0)$  и  $f(x_0 - 0)$ . Тогда ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится и имеет место



$$\text{При } n = 0: \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}^p}^{\frac{1}{2}^p} f(x) dx = a_0.$$

Изменив знак величины  $n$ , т.е. заменив  $n$  на  $-n$ , из формулы для  $\frac{b_n + ia_n}{2}$  получаем формулу для  $\frac{b_n - ia_n}{2}$ . А тогда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \exp(in\omega x), \quad (6.15)$$

$$\text{где } C_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}^p}^{\frac{1}{2}^p} f(x) \exp(-in\omega x) dx. \quad (6.16)$$

Пусть  $N$  – пространственная частота функций (гармоник), составляющих ряд Фурье, при этом  $N = \frac{n}{p}$ . Единичное изменение частоты  $N$  определим разностью

$$\Delta N = \frac{n_{i+1}}{p} - \frac{n_i}{p} = \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g(N) \exp(i2\pi N x) \Delta N, \text{ где } g(N) = \int_{-\frac{1}{2}^p}^{\frac{1}{2}^p} f(x) \exp(-i2\pi N x) dx.$$

Пусть некоторая функция  $f(x)$  задана на всей вещественной оси. Предположим, что нас интересуют её значения в интервале  $[x_0, x_0 + p]$ . При этом функцию  $f(x)$  на всей вещественной оси можно заменить последовательностью её значений в интервале  $[x_0, x_0 + p]$  с периодом, равным  $p$ , т.е. можно заменить функцию  $f(x)$  соответствующей периодической функцией. Тогда функцию  $f(x)$  в интервале  $[x_0, x_0 + p]$  можно представить рядом Фурье. Вполне очевидно, что в этом случае функция, представленная рядом Фурье, вне интервала  $[x_0, x_0 + p]$  не будет совпадать с функцией  $f(x)$ . Для целого ряда задач было бы полезно иметь выражение, подобное ряду Фурье, представляющее функцию  $f(x)$ , заданную в промежутке от  $-\infty$  до  $\infty$ . При этом будем считать, что  $f(x)$  в любом конечном

интервале подчиняется условиям Дирихле и является абсолютно интегрируемой, т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ .

Чтобы распространить полученное выражение на случай непериодических функций, можно устремить период  $p$  к бесконечности. Основным интервал тогда становится бесконечно большим, при этом величину  $\frac{1}{p}$  можно считать бесконечно малым

изменением пространственной частоты  $N$ , т.е.  $\frac{1}{p} = dN$ . Тогда

суммирование бесконечно большого числа колебаний всех частот от  $-\infty$  до  $\infty$ , определяемое полученным бесконечным рядом, можно представить интегралом

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(N) \exp(i2\pi Nx) dN, \quad (6.17)$$

при этом функция  $g(N)$  определяется через  $f(x)$  формулой

$$g(N) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi Nx) dx. \quad (6.18)$$

Эти соотношения можно представить в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \quad (6.19)$$

и, соответственно,

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx, \quad (6.20)$$

где  $\omega = 2\pi \frac{n}{p}$ ,  $d\omega = 2\pi \frac{1}{p}$  при  $p \rightarrow \infty$ .

Выражение (6.19) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) d\omega \right] \exp(i\omega x) d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega) \exp(i\omega x) d\omega. \end{aligned}$$

При этом

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx.$$

Выражение (6.18) определяет прямое преобразование Фурье функции  $f(x)$  и записывается в виде:

$$F [f(x)] = g(N) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi Nx) dx, \quad (6.21)$$

а обратное преобразование Фурье записывается в таком виде:

$$F^{-1}[g(N)] = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(N) \exp(i2\pi Nx) dN. \quad (6.22)$$

Это выражение можно рассматривать как представление функции  $f(x)$  в виде линейной комбинации (т.е. интеграла) элементарных функций характерного вида  $\exp(i2\pi Nx)$ . Вполне очевидно, что комплексное число  $g(N)$  представляет собой просто весовой коэффициент, на который следует умножить элементарную функцию частоты  $N$  при синтезе искомой функции  $f(x)$ .

Преобразование Фурье функции двух переменных  $f(x, y)$  определяется формулой вида:

$$F [f(x, y)] = g(N_x, N_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i2\pi(N_x x + N_y y)] dx dy, \quad (6.23)$$

при этом обратное преобразование Фурье записывается в виде:

$$F^{-1}[g(N_x, N_y)] = f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(N_x, N_y) \exp[i2\pi(N_x x + N_y y)] dN_x dN_y. \quad (6.24)$$

Заметим, что для любой пары частот  $(N_x, N_y)$  функция  $\exp[i2\pi(N_x x + N_y y)] = 1$  при  $i2\pi(N_x x + N_y y) = i2\pi n$ , где  $n$  – целое число. При этом  $y = -\frac{N_x}{N_y} x + \frac{n}{N_y} = x \operatorname{tg} \alpha + y_0$ , где  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{N_x}{N_y}$ ,  $y_0 = \frac{n}{N_y}$ .

Направление, перпендикулярное к этой линии, определится очевидным уравнением вида:  $y = x \operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) + y_0 = x \operatorname{tg} \theta + y_0$ , где

$\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{N_y}{N_x}$ . Отсюда следует, что  $N_y = N_x \operatorname{tg} \theta$ . При этом

$N_x x + N_y y = N_x x + N_x y \operatorname{tg} \theta = \frac{N_x}{\cos \theta} (x \cos \theta + y \sin \theta)$ . Повернём систему

координат  $xoy$  вокруг начала координат в положение  $x'oy'$  в соответствии с уравнением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \exp[i2\pi(N_x x + N_y y)] &= \exp\left[i2\pi \frac{N_x}{\cos \theta} (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] = \\ &= \exp\left[i2\pi \frac{N_x}{\cos \theta} (x' \cos^2 \theta - y' \sin \theta \cos \theta + x' \sin^2 \theta + y' \sin \theta \cos \theta)\right] = \\ &= \exp(i2\pi N x'), \end{aligned}$$

где  $N = \frac{N_x}{\cos \theta}$ , т.е.  $N_x = N \cos \theta$ , а  $N_y = N_x \operatorname{tg} \theta = N \sin \theta$ .

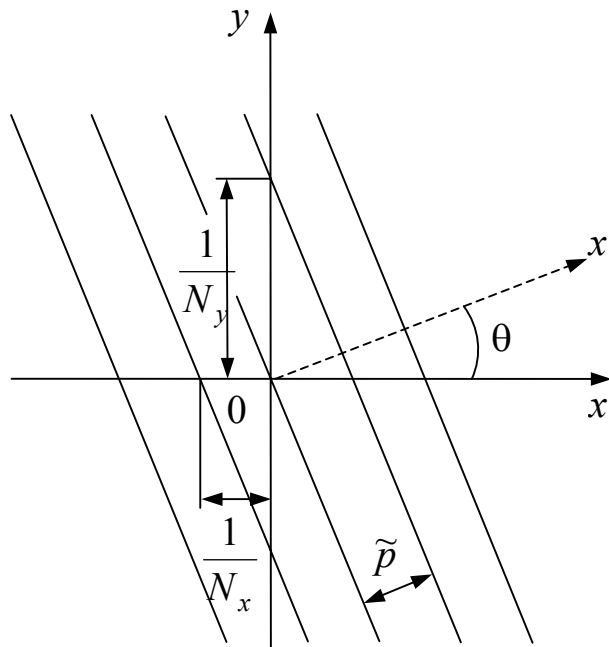


Рис.6.3. Линии равной фазы

Таким образом, точно так же, как одномерное, двумерное преобразование Фурье можно рассматривать как представление функции  $f(x, y)$  в виде линейной комбинации элементарных функций вида  $\exp[i2\pi(N_x x + N_y y)]$ , при этом каждая элементарная функция в плоскости  $xoy$  "направлена" по отношению к оси  $x$  под углом  $\theta$ , как показано на рис.6.3. Здесь  $N_x = \frac{n}{p_x}$ ;  $N_y = \frac{n}{p_y}$ , при этом

$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$ ; величина угла  $\theta$  определяется соотношением:

$\theta = \arctg \frac{N_y}{N_x}$ . Пространственный период (т.е. расстояние между линиями равной фазы) можно определить очевидным выражением вида:

$$\tilde{p} = \frac{p}{n} = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2}}.$$

Для функции, обладающей осевой симметрией, удобно перейти к полярной системе координат:

$$x' = r' \cos \varphi, \quad y' = r' \sin \varphi, \quad \text{при этом } r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{y'}{x'};$$

$$N_x = \rho \cos \gamma, \quad N_y = \rho \sin \gamma, \quad \text{при этом } \rho = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}, \quad \text{tg} \gamma = \frac{N_y}{N_x}.$$

$$\text{Тогда } F[f(r', \varphi)] = g(\rho, \gamma),$$

$$\text{где } g(\rho, \gamma) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r', \varphi) \exp[-i2\pi r' \rho (\cos \gamma \cos \varphi + \sin \gamma \sin \varphi)] r' dr' d\varphi.$$

Из свойства осевой симметрии функции  $f(r', \varphi)$  следует, что  $f(r', \varphi) = f(r')$ . При этом

$$g(\rho, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r') r' dr' \int_0^{2\pi} \exp[-i2\pi r' \rho \cos(\varphi - \gamma)] d\varphi.$$

Используя тождество

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ia \cos(\varphi - \gamma)] d\varphi,$$

где  $J_0(a)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, получаем

$$g(\rho, \gamma) = g(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r') J_0(2\pi r' \rho) r' dr'. \quad (6.25)$$

Полученное выражение преобразования Фурье, играющее важную роль в решении оптических задач, называется преобразованием Фурье-Бесселя или, иначе, преобразованием Ганкеля. Путём аналогичных рассуждений можно показать, что обратное преобразование Фурье функции  $g(\rho)$ , обладающей осевой симметрией, определяется выражением вида:

$$f(r') = 2\pi \int_0^{\infty} g(\rho) J_0(2\pi r' \rho) \rho d\rho. \quad (6.26)$$

Следовательно, для функций, обладающих осевой симметрией, различие между действиями прямого и обратного преобразования Фурье отсутствует, т.е. преобразование Ганкеля обладает свойством симметрии.

Из определения преобразования Фурье вытекает ряд математических следствий, облегчающих нахождение фурье-образа (иначе спектра Фурье или частотного спектра). Эти следствия принято формулировать в виде математических теорем.

### 1. Теорема линейности

$$F [\alpha f(x, y) + \beta F(x, y)] = \alpha F [f(x, y)] + \beta F [F(x, y)].$$

### 2. Теорема подобия

$$\text{Если } F [f(x, y)] = g(N_x, N_y), \text{ то } F [f(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} g\left(\frac{N_x}{a}, \frac{N_y}{b}\right).$$

Отсюда следует, что "растяжение" координат в пространственной области  $(x, y)$  приводит к "сжатию" координат в области частот  $(N_x, N_y)$  и к изменению общей амплитуды спектра.

### 3. Теорема смещения

Если  $F [f(x, y)] = g(N_x, N_y)$ , то

$$F [f(x - a, y - b)] = g(N_x, N_y) \exp[-i2\pi(N_x a + N_y b)].$$

т.е. смещение функции в пространственной области вызывает линейный фазовый сдвиг в области частот.

### 4. Теорема Парсеваля

Если  $F [f(x, y)] = g(N_x, N_y)$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(N_x, N_y)|^2 dN_x dN_y.$$

Теорему Парсеваля обычно интерпретируют как закон сохранения.

### 5. Теорема свёртки

Если  $F [f(x, y)] = g(N_x, N_y)$ , а  $F [F(x, y)] = G(N_x, N_y)$ , то

$$F \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) F(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right] = g(N_x, N_y) G(N_x, N_y).$$

Доказательство

$$F \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) F(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right] =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) F(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right] \exp[-i2\pi(N_x x + N_y y)] dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x - \xi, y - \eta) \exp[-i2\pi(N_x x + N_y y)] dx dy \right\} d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Введём новые переменные  $q = x - \xi$  и  $p = y - \eta$ .

При этом

$$\begin{aligned}
\exp[-i2\pi(N_x x + N_y y)] &= \exp[-i2\pi(N_x \xi + N_y \eta)] \times \\
&\times \exp[-i2\pi(N_x q + N_y p)].
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
F [f(x, y) \otimes F(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \exp[-i2\pi(N_x \xi + N_y \eta)] d\xi d\eta \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(q, p) \exp[-i2\pi(N_x q + N_y p)] dq dp = g(N_x, N_y) G(N_x, N_y),
\end{aligned}$$

т.е. преобразование Фурье свёртки двух функций полностью эквивалентно более простой операции умножения их образов. Теорема свёртки известна как теорема Бореля.

### 6. Теорема автокорреляции

Если  $F [f(x, y)] = g(N_x, N_y)$ , то

$$F \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) f^*(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right] = |g(N_x, N_y)|^2.$$

Эту теорему можно рассматривать как частный случай теоремы свёртки.

### 7. Интегральная теорема Фурье

Во всех точках, где функция  $f(x, y)$  непрерывна,

$$FF^{-1}[f(x, y)] = F^{-1}F[f(x, y)] = f(x, y),$$

т.е. в результате последовательного выполнения прямого и обратного преобразования Фурье некоторой функции  $f(x, y)$  получается преобразуемая функция за исключением точек разрыва. В каждой точке разрыва функции два последовательных преобразования её дают среднее значение величины  $f(x, y)$  в окрестности этой точки.

Теоремы преобразования Фурье определяют основные правила выполнения преобразований и могут существенно упростить решение задач, связанных с использованием анализа Фурье.

В соответствии с теоремой свёртки преобразование Фурье распределения освещённости  $E(x', y')$ , определяемого формулой (6.13), равно произведению преобразований Фурье ФРТ  $D(\xi', \eta')$  и распределения освещённости  $E_0(x'_0, y'_0)$  в идеализированном изображении предмета:

$$e(N_x, N_y) = d(N_x, N_y) e_0(N_x, N_y). \quad (6.27)$$

Формула (6.27) определяет механизм образования изображения: каждой составляющей пространственного спектра  $e_0(N_x, N_y)$  распределения освещённости при идеализированном изображении предмета соответствует коэффициент  $d(N_x, N_y)$ , который можно назвать "множителем передачи" или "множителем контраста" оптической системы. Таким образом, функция  $d(N_x, N_y)$ , характеризующая состояние коррекции aberrаций в изображении, образованном оптической системой, по сути дела выполняет роль фильтра пространственных частот.

Функция  $d(N_x, N_y)$ , определяющая то, каким образом каждая частотная составляющая передаётся оптической системой с учётом дифракции, остаточных aberrаций и ошибок изготовления оптической системы, называется оптической передаточной функцией (ОПФ) системы.

ОПФ, являющаяся преобразованием Фурье ФРТ, представляет собой в общем случае комплексную функцию, которую можно записать в показательной форме через модуль комплексной функции  $T(N)$  и аргумент  $\varphi(N)$ :

$$\begin{aligned} d(N_x, N_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} D(x', y') \exp[-i2\pi(N_x x' + N_y y')] dx' dy' = \\ &= T(N_x, N_y) \exp[-i\varphi(N_x, N_y)]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

В случае одномерного распределения освещённости в идеализированном изображении предмета (этот случай чаще всего встречается при измерении ОПФ, когда предмет представляет собой решётку из параллельных штрихов, узкую щель и т.п.) ОПФ становится функцией одного аргумента – пространственной частоты  $N$ , например, вдоль оси  $x'$

$$d(N) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\xi}(x') \exp[-i2\pi N x'] dx'.$$

Используя формулу Эйлера, получаем

$$d(N) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(x') \cos 2\pi N x' dx' - i \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(x') \sin 2\pi N x' dx' = \quad (6.29)$$

$$= C(N) - iS(N),$$

где интегралы, обозначенные через  $C$  и  $S$ , называются косинус-преобразованием и синус-преобразованием функции рассеяния линии. Модуль комплексной функции по определению равен

$$T(N) = \sqrt{[C(N)]^2 + [S(N)]^2} = \quad (6.30)$$

$$= \sqrt{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(x') \cos 2\pi N x' dx' \right]^2 + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(x') \sin 2\pi N x' dx' \right]^2},$$

а аргумент  $\varphi(N)$  может быть определён из соотношений:

$$\sin \varphi(N) = \frac{S(N)}{T(N)}, \quad (6.31)$$

$$\cos \varphi(N) = \frac{C(N)}{T(N)}. \quad (6.32)$$

Для лучшего понимания смысла модуля  $T(N)$  и аргумента  $\varphi(N)$  комплексной ОПФ рассмотрим более подробно, как изображается отдельная частотная составляющая спектра идеализированного изображения предмета оптической системой, имеющей известную функцию рассеяния.

Пусть распределение освещённости в идеализированном изображении предмета (или в его частотной составляющей) определяется косинусоидой с постоянной составляющей  $E_0$ , как показано на рис.6.4а, при этом

$$E_0(x') = E_0 + E_1 \cos 2\pi N x', \quad (6.33)$$

где  $N$  – пространственная частота; заметим, что период  $\tilde{p} = \frac{1}{N}$ .

Пусть  $D_{\tilde{\epsilon}}(\xi')$  – функция рассеяния линии.

Тогда

$$E(x') = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(\xi') E_0(x' - \xi') d\xi' = E_0 + E_1 \left[ \cos 2\pi N x' \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(\xi') \cos 2\pi N \xi' d\xi' + \right.$$

$$\left. + \sin 2\pi N x' \int_{-\infty}^{\infty} D_{\tilde{\epsilon}}(\xi') \sin 2\pi N \xi' d\xi' \right] = E_0 + E_1 [C(N) \cos 2\pi N x' +$$

$$+ S(N) \sin 2\pi N x'] = E_0 + E_1 T(N) [\cos \varphi(N) \cos 2\pi N x' + \sin \varphi(N) \sin 2\pi N x'].$$

В результате получаем, что

$$E(x') = E_0 + E_1 T(N) \cos[2\pi N x' - \varphi(N)]. \quad (6.34)$$

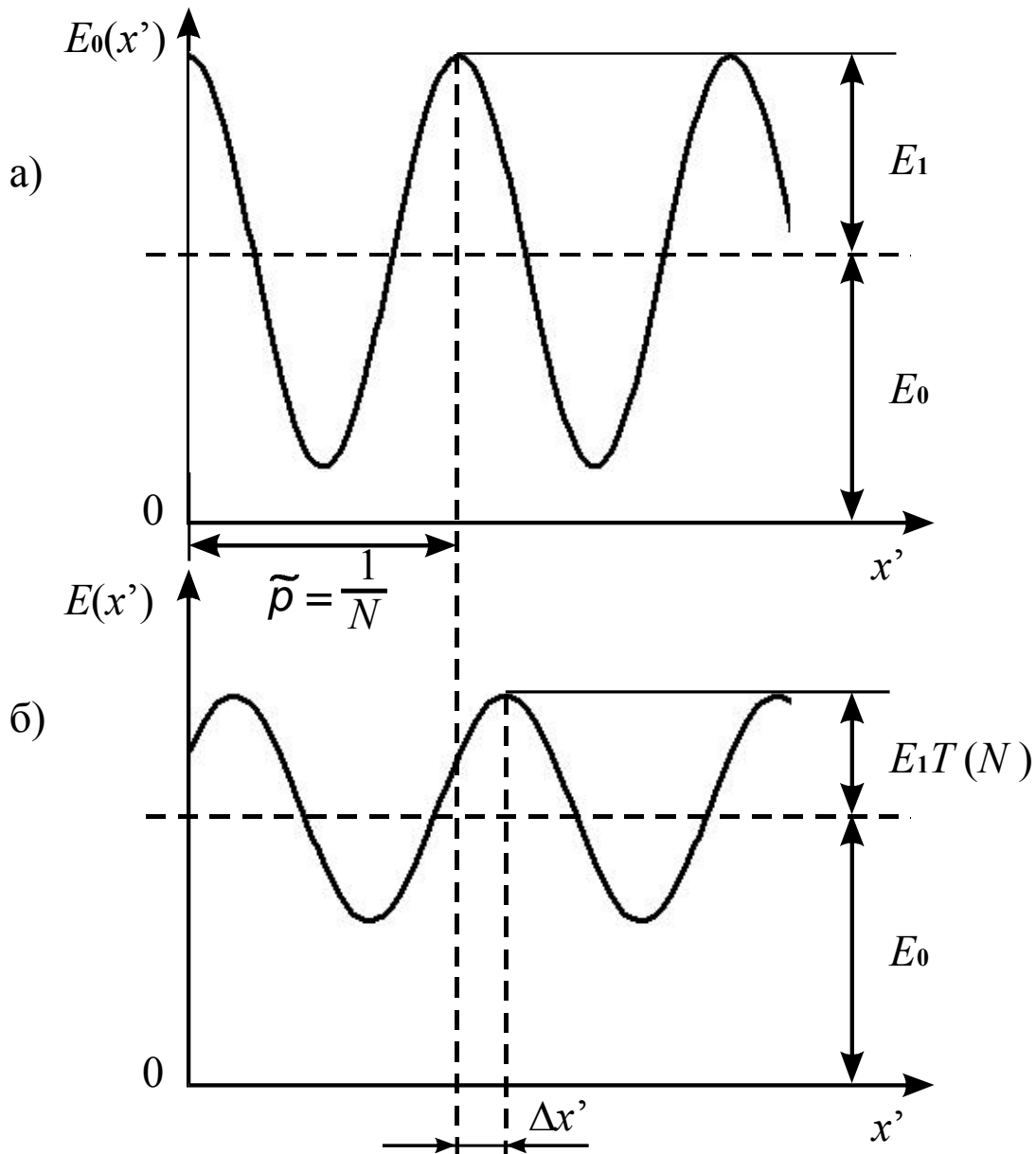


Рис.6.4. Распределение освещённости в идеализированном а) и действительном б) изображениях

Отсюда следует, что полученное распределение освещённости в изображении предмета при косинусоидальном распределении освещённости в его идеализированном изображении остаётся косинусоидальным и той же пространственной частоты. Однако, модуляция, равная отношению амплитуды переменной составляющей распределения освещённости к среднему её значению (т.е. к постоянной составляющей) для полученного распределения освещённости оказывается меньше, чем для исходного, как показано

на рис.6.4б. Действительно, для идеализированного изображения имеем

$$m = \frac{E_1}{E_0}, \quad (6.35)$$

а при действительном распределении освещённости величина

$$m' = \frac{E_1}{E_0} T(N), \quad (6.36)$$

т.е.  $T(N) = \frac{m'}{m}$ . (6.37)

Таким образом, значение модуля ОПФ, т.е. значение  $T(N)$ , для каждой пространственной частоты равно отношению модуляции распределения освещённости в действительном изображении к модуляции распределения освещённости в идеализированном изображении гармонической составляющей соответствующей частоты и называется коэффициентом передачи модуляции (КПМ) системы. Совокупность значений КПМ для различных пространственных частот составляет функцию передачи модуляции (ФПМ) или частотно-контрастную характеристику оптической системы.

Распределение освещённости в действительном изображении отличается от распределения освещённости в идеализированном изображении ещё и сдвигом косинусоиды на угол  $\varphi(N)$ , определяющим линейное смещение косинусоиды на расстояние  $\Delta x' = \frac{\varphi(N)}{2\pi N}$ . Совокупность значений сдвига (смещения) фазы  $\varphi(N)$  для различных пространственных частот составляет функцию передачи фазы (ФПФ) системы. Как следует из выражений (6.29)–(6.32), если  $N = 0$ , то  $T(0) = 1$ , а  $\varphi(0) = 0$ .

Определим контраст идеализированного изображения выражением

$$k = \frac{E_0(x')_{\max} - E_0(x')_{\min}}{E_0(x')_{\max} + E_0(x')_{\min}}. \quad (6.38)$$

Но  $E_0(x')_{\max} = E_0 + E_1$ , а  $E_0(x')_{\min} = E_0 - E_1$ . Тогда

$$k = \frac{E_0 + E_1 - E_0 + E_1}{E_0 + E_1 + E_0 - E_1} = \frac{E_1}{E_0} = m.$$

При этом контраст действительного изображения равен

$$k' = \frac{E(x')_{\max} - E(x')_{\min}}{E(x')_{\max} + E(x')_{\min}} =$$

$$= \frac{E_0 + E_1 T(N) - E_0 + E_1 T(N)}{E_0 + E_1 T(N) + E_0 - E_1 T(N)} = \frac{E_1 T(N)}{E_0} T(N) = m T(N) = m'.$$

Отсюда следует, что

$$T(N) = \frac{k'}{k} = \frac{m'}{m}.$$

При  $k = 1$ , т.е. при  $E_1 = E_0$ ,  $T(N) = k' = m'$ .

Итак, нормированное распределение освещённости в изображении точечного предмета, образованном оптической системой, называется функцией рассеяния точки (ФРТ). Другими названиями этой же характеристики являются следующие: выходной сигнал импульсного типа, функция Грина, дифракционная картина Фраунгофера. ФРТ является одной из двух наиболее полных характеристик, описывающих качество изображения, образованного оптической системой. Распределение освещённости  $E(x', y')$  в изображении любого предмета в принципе можно рассчитать как свёртку распределения освещённости в идеализированном изображении предмета, т.е.  $E_0(x', y')$ , и ФРТ. Практически же для любого реального предмета, распределение освещённости в идеализированном изображении которого непрерывно, подобный расчёт является довольно сложной процедурой. В то же время одиночные светящиеся точки или совокупность таких дискретных точек часто являются предметами для оптических систем, применяемых в астрономии, что придаёт ФРТ не только теоретическое значение, но и определённый практический смысл.

Второй из двух наиболее полных характеристик качества изображения является комплексная оптическая передаточная функция (ОПФ), удобная для характеристики качества изображения при непрерывном распределении освещённости в нём. Математически ФРТ и ОПФ взаимозаменяемы, так как каждая из них может быть получены путём Фурье-преобразования другой.

Применение ОПФ удобно потому, что, во-первых, процессы Фурье-преобразования функции  $E_0(x', y')$ , умножения её на ОПФ и обратного Фурье-преобразования результата для получения функции  $E(x', y')$  выполнить проще, чем эквивалентную математическую процедуру свёртки; во-вторых, ОПФ для ряда независимых факторов, ухудшающих качество изображения, могут быть объединены

простым их перемножением, в результате чего получается полная ОПФ изображающей системы.

## **6.2. Структура изображения точечного предмета, образованного оптической системой**

### **6.2.1. Введение в дифракционную теорию образования изображения**

Первое упоминание о дифракционных явлениях света появилось в работе Леонардо да Винчи (1452–1519). Однако, впервые они были описаны в книге монаха иезуита, физика и профессора математики в иезуитской коллегии в Болонье, Франческо Марии Гримальди (1618–1663), опубликованной в 1665 году спустя два года после его смерти. Пропустив сквозь маленькое отверстие солнечный свет в тёмную комнату и поместив в конический пучок света на довольно большом расстоянии от отверстия обычный стержень, направляя тень от него на белую поверхность экрана, Гримальди наблюдал по обе стороны тени одну, две или три полосы (в зависимости от силы света), которые с края, обращённого к тени, были голубыми, а с противоположного – красными, при этом при ярком солнечном свете замечались цветные полосы и в самой тени. Такое свойство света Гримальди назвал дифракцией. Затем он проделал в ставне комнаты два отверстия и получил на экране изображения на таком расстоянии, чтобы они отчасти покрывали друг друга. В результате получились два тёмных пересекающихся кольца вокруг каждого из светлых кругов. Поле пересечения колец оказалось гораздо светлее полей каждого кольца в отдельности, при этом край каждого круга казался тёмным на освещённом поле другого. Из всех этих явлений, вместе взятых, Гримальди вывел следующее заключение: освещённое тело может сделаться темнее, если к полученному им свету прибавится новое количество света. Таким образом, он точно описывает результат интерференции света, хотя и не объясняет его.

Ф.Гримальди, без сомнения, думал о волнообразном движении света. Зачатки волновой теории света ясно выражены в его работе, где он писал: "Подобно тому, как вокруг камня, брошенного в воду (как вокруг центра), образуются круговые возвышения воды, точно так же вокруг тени непрозрачного предмета возникают блестящие полосы, которые соответственно форме последнего либо распространяются в длину, или же изгибаются дугообразно. Далее, подобно тому, как те круговые волны представляют простое скопление воды, вокруг которых с обеих сторон тянется углубление, так и блестящие полосы

суть не что иное, как свет, распределённый неравномерно вследствие сильного рассеяния и прорезанный теньвыми промежутками".

Рассуждая о цветах, он, например, высказывает мнение, что цвета должны, по всей вероятности, обуславливаться различной скоростью колебаний светового вещества, подобно тому, как различные тоны зависят от неодинаковой скорости колебаний воздуха. Он считает цвета составными частями света, поясняя, что цвета могут существовать только в самом свете и что так называемые истинные, или постоянные, цвета тел зависят от способности последних отражать падающий на них свет с особыми видоизменениями. Ф.Гримальди заметил, что свет, пройдя через призму, рассеивается и, следовательно, одна часть светового луча преломляется сильнее другой. Отсюда вывод: там, где свет наименее преломлён, он всего гуще и ярче, т.е. окрашен в красный цвет; в месте же наибольшего преломления он более разряжён и получает голубую или фиолетовую окраски. Христиан Гюйгенс (1629–1695), впервые обосновавший волновую теорию, очевидно, не знал об открытии Ф.Гримальди, иначе он, несомненно, сослался бы на него для подтверждения своей точки зрения. О возможности объяснить явление дифракции в рамках волновой теории нигде не упоминается вплоть до 1818 года, когда появился прекрасный мемуар Огюстена Жана Френеля (1788–1827), где было показано, что явление дифракции можно объяснить с помощью построения Гюйгенса и применения принципа интерференции. Позднее Густав Роберт Кирхгоф (1824–1887) придал исследованиям Френеля строго математическое обоснование и с этого времени началось широкое изучение дифракции.

Проблемы, возникающие при изучении дифракционных явлений, относятся к наиболее трудным в оптике и их редко удаётся довести до строгого решения. В большинстве же случаев, представляющих практический интерес, из-за математических трудностей приходится прибегать к приближенным методам и тут теория Гюйгенса и Френеля служит чрезвычайно мощным инструментом, позволяющим решить большинство вопросов, встречающихся в инструментальной оптике.

Согласно построению Гюйгенса каждую точку волнового фронта можно считать центром вторичного возмущения, которое вызывает элементарную сферическую волну, а волновой фронт в любой более поздний момент времени – огибающей этих волн. О.Френель смог объяснить явление дифракции, дополнив построение Гюйгенса утверждением, что вторичные волны интерферируют между собой.



Это сочетание построения Гюйгенса с принципом интерференции называется принципом Гюйгенса-Френеля.

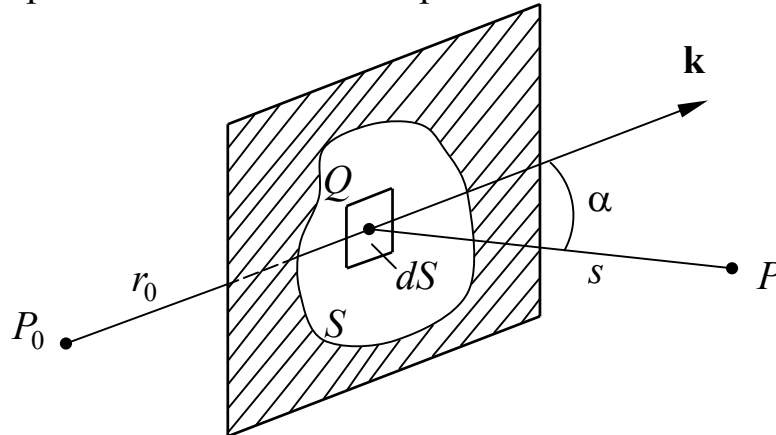


Рис.6.5. Дифракция на отверстии в экране

Рассмотрим какой-либо экран с отверстием, через которое проходит свет от точечного монохроматического источника  $P_0$ , как показано на рис.6.5. Размеры отверстия много больше длины волны света. Будем под  $A$  понимать любой компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электромагнитного поля световой волны, опуская при этом множитель  $\exp(-i\omega t)$ , определяющий зависимость от времени. Пусть требуется определить световое возмущение в точке  $P$ . Возмущение в точке  $Q$  волнового фронта можно представить в виде  $A \frac{\exp(ikr_0)}{r_0}$ , где

$A$  – амплитуда светового возмущения на расстоянии единицы длины от источника;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны излучения.

Разделим мысленно поверхность отверстия на элементарные участки площадью  $dS$ , малые по сравнению с размерами отверстия, но большие по сравнению с длиной волны. Можно считать, что каждый из этих участков сам становится источником световой волны, распространяющейся во все стороны. Световое возмущение  $du(P)$ , создаваемое элементарным участком  $dS$  в точке  $P$ , пропорционально амплитуде светового возмущения в самом участке  $dS$  (в точке  $Q$ ) и проекции  $dS_n$  площадки  $dS$  этого участка на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{k}$  луча, пришедшего из источника света в  $dS$ , поскольку именно проекция площадки  $dS_n$  определяет световой пучок лучей, проходящих из источника через площадку  $dS$ .

При вычислении вклада участка  $dS$  отверстия в световое возмущение  $du(P)$  необходимо учесть изменения амплитуды и фазы вторичной волны при её распространении от  $dS$  к  $P$ . Это приводит к

появлению в выражении для  $du(P)$  множителя  $\frac{\exp(iks)}{s}$ , где  $s$  – расстояние от  $dS$  до  $P$ . Таким образом,

$$du(P) = K(\alpha) A \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \frac{\exp(iks)}{s} dS_n,$$

где  $K(\alpha)$  – некоторый коэффициент наклона, учитывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла  $\alpha$  (часто называемого углом дифракции) между вектором  $\mathbf{k}$  и направлением на точку наблюдения. Следуя Френелю, предположим, что коэффициент  $K(\alpha)$  максимален при  $\alpha = 0$ , плавно убывает с увеличением угла  $\alpha$  и равен нулю при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Многие практически важные задачи

дифракции можно решить при этих весьма общих предположениях относительно  $K(\alpha)$ , не уточняя конкретного вида его зависимости от  $\alpha$ . И, наконец, предположим, что в точке  $P$  сказывается влияние только той части первоначальной волны, которая не загороживается каким-либо препятствием, находящемся между  $P_0$  и  $P$ . Поэтому полное возмущение в точке  $P$  равно

$$u(P) = A \int_S \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \frac{\exp(iks)}{s} K(\alpha) dS_n. \quad (6.39)$$

Формула (6.39) даёт математическое выражение принципа Гюйгенса-Френеля. Применим её для определения светового возмущения в точке  $P$  за круглым отверстием в экране.

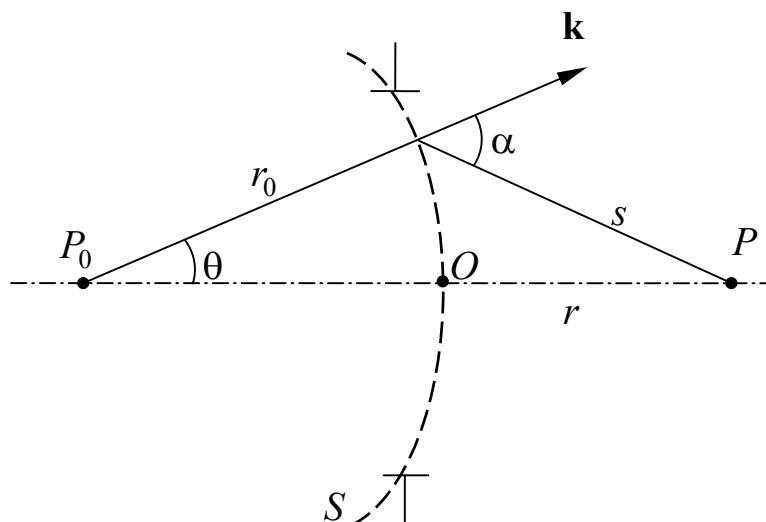


Рис.6.6. Принцип Гюйгенса-Френеля

Будем считать, что точечный источник  $P_0$  и точка  $P$  лежат на прямой, проходящей через центр отверстия и перпендикулярной его

плоскости, как показано на рис.6.6. В качестве вспомогательной поверхности  $S$  выберем часть сферы, проходящей через края отверстия, радиус кривизны которой равен  $r_0$ , а центр её расположен в точке источника. Световое возмущение в каждой точке поверхности  $S$  равно

$$u(0) = u_0 \exp(ikr_0) = \frac{A}{r_0} \exp(ikr_0). \quad (6.40)$$

При этом выражение (6.39) принимает вид:

$$u(P) = \frac{A \exp(ikr_0)}{r_0} \iint_S \frac{\exp(iks)}{s} K(\alpha) dS. \quad (6.41)$$

Для того, чтобы найти величину, определяемую полученным выражением, воспользуемся так называемыми зонами Френеля. Для этого построим вокруг точки  $P$  сферы с радиусами, равными  $s = r, r + \frac{\lambda}{2}, r + 2\frac{\lambda}{2}, r_0 + 3\frac{\lambda}{2}, \dots, r + j\frac{\lambda}{2}, \dots$ , где  $r = OP$ , а  $O$  – точка пересечения отрезка  $P_0P$  со сферой (волновым фронтом)  $S$ , как показано на рис.6.7.

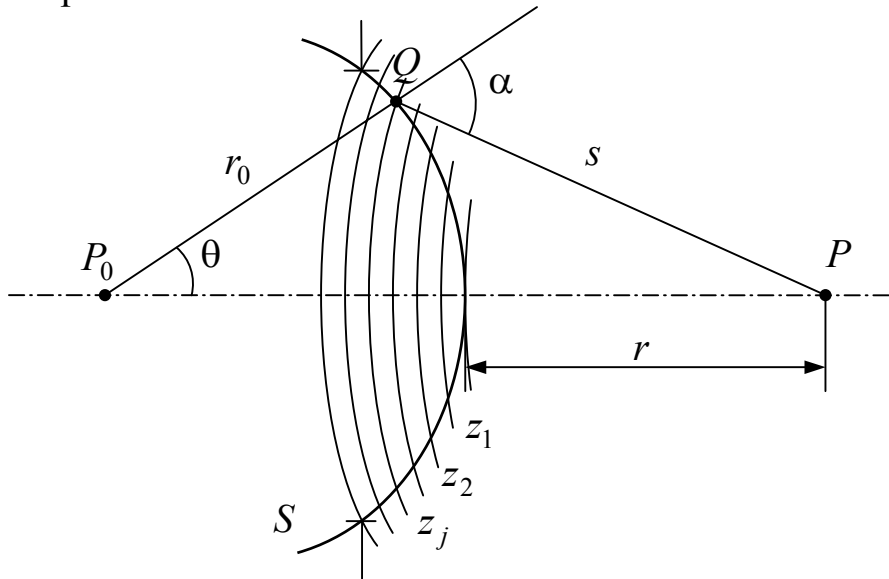


Рис.6.7. Зоны Френеля

Сферы делят поверхность  $S$  на целый ряд зон  $z_1, z_2, \dots, z_j, \dots$ . Пусть  $r_0$  и  $r$  велики по сравнению с длиной волны. Тогда можно предположить, что в любой зоне величина  $K(\alpha)$  постоянна и в зоне  $j$  равна  $K_j$ . Из рисунка следует, что

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + r)^2 - 2r_0(r_0 + r)\cos\theta. \quad (6.42)$$

Дифференцируя это уравнение, получаем

$$sds = r_0(r_0 + r) \sin \theta d\theta.$$

При этом площадь поверхности  $j$ -ой зоны равна

$$dS_j = 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{r_0}{r_0 + r} sds.$$

Следовательно, вклад  $j$ -ой зоны в световое возмущение в точке  $P$  равен

$$\begin{aligned} u_j(P) &= 2\pi \frac{A \exp(ikr_0)}{r_0 + r} K_j \int_{r+(j-1)\frac{\lambda}{2}}^{r+j\frac{\lambda}{2}} \exp(iks) ds = \\ &= -\frac{2\pi i}{k} \frac{A \exp[ik(r_0 + r)]}{r_0 + r} K_j \exp\left(ikj\frac{\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-ik\frac{\lambda}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Так как  $k\lambda = 2\pi$ , последние два множителя этого выражения легко привести к виду

$$\exp\left(ikj\frac{\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-ik\frac{\lambda}{2}\right)\right] = \exp(i\pi j) [1 - \exp(-i\pi)] = 2(-1)^j.$$

В результате получаем, что

$$u_j(P) = 2i\lambda(-1)^{j+1} K_j \frac{A \exp[ik(r_0 + r)]}{r_0 + r}. \quad (6.43)$$

Отсюда следует, что вклад  $j$ -ой зоны отличается от вклада любой другой зоны лишь знаком и величиной коэффициента  $K(\alpha)$ , т.е. площади поверхностей зон Френеля равны между собой.

Заметим, что вклады следующих друг за другом зон имеют разные знаки. Результирующий эффект в точке  $P$  получается суммированием вкладов от всех зон, т.е.

$$u(P) = 2i\lambda \frac{A \exp[ik(r_0 + r)]}{r_0 + r} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} K_j. \quad (6.44)$$

Обозначим

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} K_j = K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + \dots + (-1)^{n+1} K_n = \Sigma.$$

Перепишем этот ряд в виде

$$\Sigma = \frac{1}{2} K_1 + \left(\frac{1}{2} K_1 - K_2 + \frac{1}{2} K_3\right) + \left(\frac{1}{2} K_3 - K_4 + \frac{1}{2} K_5\right) + \dots$$

Предположим, что изменение коэффициента  $K$  по зонам таково, что

$$K_{2j} > \frac{1}{2}K_{2j-1} + \frac{1}{2}K_{2j+1}.$$

Тогда

$$\Sigma < \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_n, \text{ если } n \text{ нечётно};$$

$$\Sigma < \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_{n-1} - K_n, \text{ если } n \text{ чётно}.$$

Представим тот же ряд в виде

$$\Sigma = K_1 - \frac{1}{2}K_2 - \left(\frac{1}{2}K_2 - K_3 + \frac{1}{2}K_4\right) - \left(\frac{1}{2}K_4 - K_5 + \frac{1}{2}K_6\right) - \dots$$

В этом случае, поскольку

$$K_{2j+1} > \frac{1}{2}K_{2j} + \frac{1}{2}K_{2j+2}, \text{ имеем}$$

$$\Sigma > K_1 - \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_{n-1} + K_n, \text{ если } n \text{ нечётно};$$

$$\Sigma > K_1 - \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_n, \text{ если } n \text{ чётно}.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$K_1 - \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_{n-1} + K_n < \Sigma < \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_n, \text{ если } n \text{ нечётно};$$

$$K_1 - \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{2}K_n < \Sigma < \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_{n-1} - K_n, \text{ если } n \text{ чётно}.$$

Представим эти выражения в виде

$$\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_n + \frac{1}{2}(K_1 - K_2) - \frac{1}{2}(K_{n-1} - K_n) < \Sigma < \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_n;$$

$$\frac{1}{2}K_1 - \frac{1}{2}K_n + \frac{1}{2}(K_1 - K_2) - \frac{1}{2}(K_{n-1} - K_n) < \Sigma < \frac{1}{2}K_1 - \frac{1}{2}K_n.$$

Поскольку величина  $K_j$  мало отличается от величин соседних коэффициентов  $K_{j-1}$  и  $K_{j+1}$ , приближённо можно считать, что

$$\Sigma = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_n, \text{ если } n \text{ нечётно};$$

$$\Sigma = \frac{1}{2}K_1 - \frac{1}{2}K_n, \text{ если } n \text{ чётно}.$$

Легко проверить, что полученные соотношения остаются справедливыми и в том случае, если предположить, что  $K_j$  меньше среднего арифметического соседних членов. А тогда

$$u(P) = i\lambda(K_1 \pm K_n) \frac{A \exp[ik(r_0 + r)]}{r_0 + r} \quad (6.45)$$

или

$$u(P) = \frac{1}{2} [u_1(P) + u_n(P)]. \quad (6.46)$$

Для последней зоны  $z_n$ , видимой из  $P$ , линия  $QP$  становится касательной к волновому фронту, при этом угол  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ . По

предположению Френеля  $K_n = K\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ . При этом выражение

(6.45) принимает вид

$$u(P) = i\lambda K_1 \frac{A \exp[ik(r_0 + r)]}{r_0 + r} = \frac{1}{2} u_1(P), \quad (6.47)$$

т.е. полное световое возмущение в точке  $P$  равняется половине возмущения, обусловленного действием первой зоны. Однако, в отсутствие экрана с отверстием аналогично выражению (6.40) имеем

$$u(P) = \frac{A}{r_0 + r} \exp[ik(r_0 + r)]. \quad (6.48)$$

Сопоставляя правые части выражений (6.47) и (6.48) получаем  $i\lambda K_1 = 1$ , т.е.

$$K_1 = -\frac{i}{\lambda} = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}.$$

Множитель  $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$  можно объяснить, если предположить, что

вторичные волны отстают по фазе на четверть периода от первичной волны.

Хорошей иллюстрацией, подтверждающей приведённый метод рассуждения Френеля, может служить опыт с зонной пластинкой.

Обозначим  $r_0 \sin \theta = R_n$ , а  $s_n = r + n\frac{\lambda}{2}$ . Тогда

$$s_n^2 = \left(r + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 + nr\lambda + \left(n\frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 \left[1 + \frac{n}{r}\lambda + \left(\frac{n}{r}\frac{\lambda}{2}\right)^2\right] \approx r^2 + nr\lambda;$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{R_n^2}{r_0^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R_n^2}{r_0^2}.$$

Подставив эти соотношения в уравнение (6.42), получаем

$$R_n \approx \sqrt{n\lambda \frac{r_0 r}{r_0 + r}}. \quad (6.49)$$

Рассмотрим пластинку, состоящую из последовательно чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, радиусы которых удовлетворяют соотношению (6.49). Если пластинка прикрывает все чётные зоны и оставит свободными все нечётные, начиная с центральной, то амплитуда светового возмущения в точке  $P$  будет пропорциональна

$$\Sigma = K_1 + K_3 + K_5 + K + K_{2n+1} + K.$$

В противном случае амплитуда светового возмущения в точке  $P$  будет пропорциональна

$$\Sigma = K_2 + K_4 + K + K_{2n} + K.$$

Опыт полностью подтверждает тот факт, что зонная пластинка Френеля увеличивает освещённость в точке  $P$ , действуя подобно собирающей линзе.

Положив в выражении (6.49) отношение  $\frac{R_n^2}{n\lambda} = f'$ , получаем

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r},$$

т.е.  $r_0$  и  $r$  взаимосвязаны соотношением, подобным формуле отрезков (без учёта принятого правила знаков), а величина  $f'$  играет роль фокусного расстояния. При  $r_0 = \infty$ , т.е. если на пластинку падает плоская волна, то  $r = f'$ .

В отличие от линзы зонная пластинка образует не одно, а целую последовательность в направлении оси изображений источника. Действительно, если сместить точку наблюдения таким образом, чтобы в пределах каждого прозрачного кольца зонной пластинки укладывалась не одна, а три зоны Френеля, действие двух из них будет взаимно скомпенсировано, а амплитуда колебаний в точке наблюдения будет определяться лишь третьей зоной, при этом волны, приходящие в точку наблюдения от нескомпенсированных зон всех колец пластинки, остаются синфазными, т.е. амплитуда колебаний в смещённой точке наблюдения имеет повышенное значение. Разность фаз между волнами от нескомпенсированных зон соседних колец при смещённой точке наблюдения увеличивается в три раза, при этом

положение смещённой точки определится соотношением  $\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{3}{f'}$ .

В общем случае, если в пределах каждого кольца пластинки укладывается любое нечётное число  $2n+1$  зон Френеля, то в соответствующих точках будет наблюдаться повышенное значение амплитуды светового возмущения. При этом положение точек наблюдения определяется соотношением

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_n} = \frac{2n+1}{f'} = \frac{1}{f'_n},$$

т.е.  $f'_n = \frac{f'}{2n+1}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

которое можно истолковать, как наличие у зонной пластинки последовательности (многих) фокусных расстояний  $f'_n$ .

Итак, за зонной пластинкой создаётся сложное волновое поле с множеством точек повышенной освещённости на осевой линии. Возникновение многих изображений обусловлено дифракцией падающей волны на сложном экране, который представляет собой зонная пластинка.

При этом следует иметь в виду, что фокусное расстояние зонной пластинки определяется величиной, обратно пропорциональной длине волны, а, следовательно, положение точек повышенной освещённости зависит от длины волны излучения, т.е. зонная пластинка обладает значительной хроматической аберрацией в изображении точки.

Можно достичь ещё большей освещённости в изображении точки, если не перекрывать световую волну в пределах чётных зон, а сообщить ей в пределах этих зон изменение фаз на  $\pi$ . Такую фазовую зонную пластинку впервые изготовил Р.Вуд, покрыв стекло тонким слоем лака и выгравировав на нём зонную пластинку так, что оптическая толщина нечётных зон отличалась от толщины чётных на величину  $\frac{1}{2}\lambda$ .

### 6.2.2. Интегральная теорема Гельмгольца-Кирхгофа

В 1882 году идее Гюйгенса-Френеля Г.Кирхгоф придал строгий математический вид и показал, что принцип Гюйгенса-Френеля можно считать приближённой формой определённой интегральной теоремы. В этой теореме решение однородного волнового уравнения в произвольной точке поля выражается через значения искомой



величины и её первой производной во всех точках произвольной замкнутой поверхности, окружающей эту точку.

Максвелл показал, что в однородной среде в областях, где отсутствуют заряды и токи, любой из декартовых компонентов  $u(\mathbf{r}, t)$  векторов электрической  $\mathbf{E}$  или магнитной  $\mathbf{H}$  напряжённостей поля удовлетворяют однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (6.50)$$

где  $V$  – скорость распространения волны,  $V = \frac{c}{n}$ ,  $c$  – скорость света в вакууме;  $n$  – показатель преломления среды;  $\nabla^2$  – дифференциальный оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Пусть  $\mathbf{r}(x, y, z)$  – радиус-вектор некоторой точки  $P$ , а  $\mathbf{s}(s_x, s_y, s_z)$  – единичный вектор с фиксированным направлением. При этом любое решение уравнения (6.50) в виде  $u = u(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, t)$  определяет плоскую волну, так как в каждый момент времени величина  $u$  постоянна в плоскостях  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \text{const}$ , которые перпендикулярны к единичному вектору  $\mathbf{s}$ . Общее решение уравнения (6.50) можно записать в виде:

$$u = u_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - Vt) + u_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + Vt), \quad (6.51)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  – произвольные функции.

Если дан точечный источник излучения, излучающий равномерно во всех направлениях (т.е. изотропный), то амплитуду волны этого источника в свободном пространстве на расстоянии  $r$  от источника можно определить выражением

$$u = u(r, t), \quad (6.52)$$

где  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Используя соотношения  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + x \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \text{ и т.д.,} \end{aligned}$$

получаем

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ur) = \frac{\partial}{\partial r} \left( u + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Сопоставляя правые части полученных выражений, имеем

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}.$$

При этом волновое уравнение (6.50) принимает вид:

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} = 0. \quad (6.53)$$

Заметим, что уравнение (6.53) совпадает с волновым уравнением (6.50), если одну из координатных осей совместить с направлением  $r$ , а величину  $u$  заменить на  $ru$ . Следовательно, решение уравнения (6.53) можно сразу же написать в виде выражения (6.51), т.е.

$$u = \frac{u_1(r - Vt)}{r} + \frac{u_2(r + Vt)}{r}, \quad (6.54)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  – по-прежнему произвольные функции.

В правой части равенства (6.54) первый член представляет сферическую волну, расходящуюся от начала координат, а второй – сферическую волну, сходящуюся к началу координат, причём скорость распространения обеих волн равна  $V$ .

Вид функции  $u$  зависит от природы источника излучения. В случае монохроматической волны функция  $u$  является синусоидальной или косинусоидальной функцией, например, в виде:

$$u(r, t) = \frac{a}{r} \cos[k(r - Vt) + \theta], \quad (6.55)$$

где  $a$  – положительная постоянная;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $\theta$  – фазовый угол.

Функцию  $u$  в случае монохроматической волны можно записать в комплексной форме:

$$u(r, t) = \frac{A}{r} \exp i(kr - \omega t), \quad (6.56)$$

где  $A = a \exp i\theta$ ;  $\omega = kV$  – угловая частота волны.

Следует отметить, что если две различные функции  $u$  являются решением уравнения (6.50), то в соответствии с принципом суперпозиции решением является и их сумма.

Пусть световое возмущение в точке  $P$  в момент времени  $t$  описывается скалярной функцией  $u(P, t)$ . В случае линейно поляризованных волн можно считать, что эта функция определяет напряжённость электрического или магнитного полей. Развёрнутое выражение для поля монохроматической волны можно представить в виде:

$$u(P, t) = U(P) \exp(-i\omega t), \quad (6.57)$$

где  $U(P)$  – комплексная функция координат (иногда называемая фазором);

$$U(P) = U_0(P) \exp[-i\varphi(P)],$$

где  $U_0(P)$  и  $\varphi(P)$  – соответственно амплитуда и фаза волны в точке  $P$ .

Если функция светового возмущения  $u(P, t)$  описывает световую волну, то в каждой точке, где нет источников излучения, она должна удовлетворять скалярному волновому уравнению (6.50), при этом для описания светового возмущения в точке  $P$  достаточно комплексной функции  $U(P)$ , так как зависимость  $u$  от времени известна заранее.

Из выражения (6.57) находим, что

$$\nabla^2 u(P, t) = \exp(-i\omega t) \nabla^2 U(P).$$

Дифференцируя выражение (6.57), получаем

$$\frac{\partial u(P, t)}{\partial t} = -i\omega U(P) \exp(-i\omega t);$$

$$\frac{\partial^2 u(P, t)}{\partial t^2} = i^2 \omega^2 U(P) \exp(-i\omega t) = -\omega^2 U(P) \exp(-i\omega t).$$

Подставив эти соотношения в уравнение (6.50), получаем

$$\exp(-i\omega t) \nabla^2 U(P) + \frac{\omega^2}{V^2} U(P) \exp(-i\omega t) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\nabla^2 U(P) + k^2 U(P) = 0,$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{\nu}{V} = \frac{\omega}{V}$ ;  $\nu$  – частота колебаний.

Это выражение можно записать в виде:

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0. \quad (6.58)$$

Комплексная амплитуда любого светового монохроматического возмущения, распространяющегося в свободном пространстве, должна удовлетворять уравнению (6.58). Комплексную функцию

светового возмущения  $U$  в выбранной точке пространства определим при помощи соотношения, называемого теоремой Грина.

В теории поля справедливы следующие формулы, заменяющие тройной интеграл двойным:

– формула для градиента

$$\int_V \mathbf{grad} f dV = \int_S f d\mathbf{S}; \quad (6.59)$$

– формула для дивергенции (теорема Остроградского-Гаусса)

$$\int_V \mathit{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (6.60)$$

где  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ ;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к площадке  $dS$ .

В соответствии с определением дивергенции находим

$$\begin{aligned} \mathit{div}(f\mathbf{A}) &= \frac{\partial(fA_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fA_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fA_z)}{\partial z} = \\ &= f \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} = \\ &= f \mathit{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathit{grad} f. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Пусть  $S$  – замкнутая поверхность, ограничивающая объём  $V$ ;  $p$  и  $q$  – две скалярные функции точки  $M$ . Заменив в выражении (6.61)  $f$  на  $p$ , а  $\mathbf{A}$  на  $\mathit{grad} q$ , получаем

$$\mathit{div}(p \mathit{grad} q) = p \Delta q + \mathit{grad} q \mathit{grad} p. \quad (6.62)$$

Подставив в выражение (6.60) вместо вектора  $\mathbf{A}$  вектор  $p \mathit{grad} q$ , с учётом выражения (6.62) получаем

$$\int_V (p \Delta q + \mathit{grad} q \mathit{grad} p) dV = \int_S p \mathit{grad} q d\mathbf{S}.$$

Меняя роли функций  $p$  и  $q$ , имеем

$$\int_V (q \Delta p + \mathit{grad} q \mathit{grad} p) dV = \int_S q \mathit{grad} p d\mathbf{S}.$$

Вычитая последнее выражение из предыдущего, получаем формулу Грина в виде:

$$\int_V (p \Delta q - q \Delta p) dV = \int_S (p \mathit{grad} q - q \mathit{grad} p) d\mathbf{S}. \quad (6.63)$$

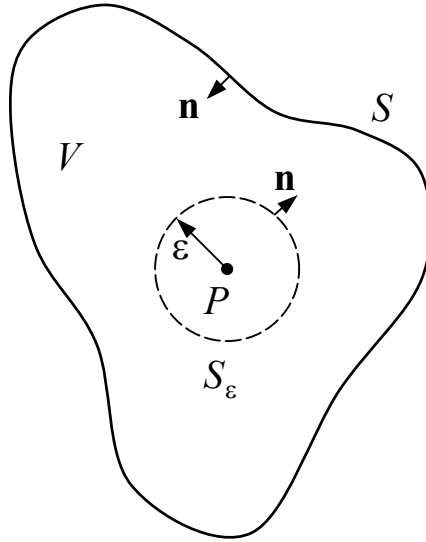


Рис.6.8. К выводу теоремы Грина

Пусть  $V$  – объём, ограниченный произвольной замкнутой поверхностью  $S$ , а  $P$  – какая-нибудь точка внутри него, как показано на рис.6.8, при этом в пространстве, ограниченном поверхностью  $S$ , нет источников света. Предположим, что комплексная функция светового монохроматического возмущения  $U$  имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков внутри этого объёма и на поверхности  $S$ . Если  $G$  – любая другая функция, удовлетворяющая таким же требованиям непрерывности, как и  $U$ , то в соответствии с теоремой Грина имеем

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV = - \iint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS, \quad (6.64)$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает частную производную в каждой точке поверхности  $S$ , взятую по нормали, идущей внутрь пространства, ограниченного поверхностью  $S$ . Однако, только при осторожном выборе так называемой функции Грина  $G$  и замкнутой поверхности  $S$  теорему можно непосредственно применить к решению дифракционных задач.

В рассматриваемом случае задача состоит в том, чтобы выразить световое возмущение в точке  $P$  через его значения на поверхности  $S$ . Для решения этой задачи, следуя Кирхгофу, используем теорему Грина и выберем в качестве функции  $G$  сферическую волну единичной амплитуды, т.е. так называемую функцию Грина свободного пространства. При этом для функции  $G$  в произвольной точке  $Q$  поверхности  $S$  имеем

$$G(Q) = \frac{\exp(iks)}{s}, \quad (6.65)$$

где через  $s$  обозначено переменное расстояние от точки  $P$  до точки  $Q$ . Однако, в точке  $P$  функция (6.65) обращается в бесконечность, а, следовательно, не удовлетворяет требованию непрерывности и дифференцируемости. Для того, чтобы исключить точку  $P$  из области интегрирования, окружим её небольшой сферой  $S_\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  и применим теорему Грина, причём интегрирование будем вести по объёму  $V'$ , заключённому между поверхностями  $S$  и  $S_\varepsilon$ , так что поверхностью интегрирования будет составная поверхность  $S' = S + S_\varepsilon$ , как показано на рис.6.8. Заметим, что "внутренняя" нормаль к составной поверхности направлена внутрь (в общепринятом смысле) на поверхности  $S$  и наружу на поверхности  $S_\varepsilon$  (по направлению от точки  $P$ ). Внутри объёма  $V'$  световое возмущение  $G$ , представляющее собой сходящуюся в точке  $P$  сферическую волну, удовлетворяет уравнению Гельмгольца в виде

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0. \quad (6.66)$$

Используя обе записи уравнений Гельмгольца, т.е. уравнения (6.58) и (6.66), преобразуем левую часть формулы Грина к виду:

$$\iiint_{V'} (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV = - \iiint_{V'} (UGk^2 - UGk^2) dV \equiv 0.$$

При этом выражение (6.64) принимает вид:

$$\iiint_{S'} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0$$

или

$$\iint_S \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = - \iint_{S_\varepsilon} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (6.67)$$

Применив выражение (6.65) для произвольной точки на поверхности  $S'$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(Q)}{\partial n} &= \frac{\partial G(Q)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) \frac{\partial G(Q)}{\partial s} = \\ &= \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) \left[ ik \frac{\exp(iks)}{s} - \frac{\exp(iks)}{s^2} \right] = \\ &= \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) \left( ik - \frac{1}{s} \right) \frac{\exp(iks)}{s}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

где  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{s})$  – косинус угла между направлением нормали  $\mathbf{n}$  и вектором  $\mathbf{s}$ , соединяющим точки  $P$  и  $Q$ . Для точки на поверхности  $S_\varepsilon$  имеем  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) = 1$ , при этом

$$G(Q) = \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon}, \text{ а } \frac{\partial G(Q)}{\partial n} = \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Если величина  $\varepsilon$  стремится к нулю, то в силу непрерывности функции  $U$  и её производных можно записать, что

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\varepsilon} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \\ & = 4\pi\varepsilon^2 \left[ U(P) \left( ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial U(P)}{\partial n} \right]. \end{aligned}$$

При этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = -4\pi U(P).$$

Полученный результат позволяет представить выражение (6.67)

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\exp(iks)}{s} \right] - \left[ \frac{\exp(iks)}{s} \right] \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS. \quad (6.69)$$

Это выражение, известное под названием интегральной теоремы Гельмгольца-Кирхгофа, играет важную роль в скалярной теории дифракции, поскольку позволяет выразить поле в любой точке  $P$  через "граничные значения" волны на любой замкнутой поверхности, окружающей эту точку.

### 6.2.3. Теория дифракции Кирхгофа

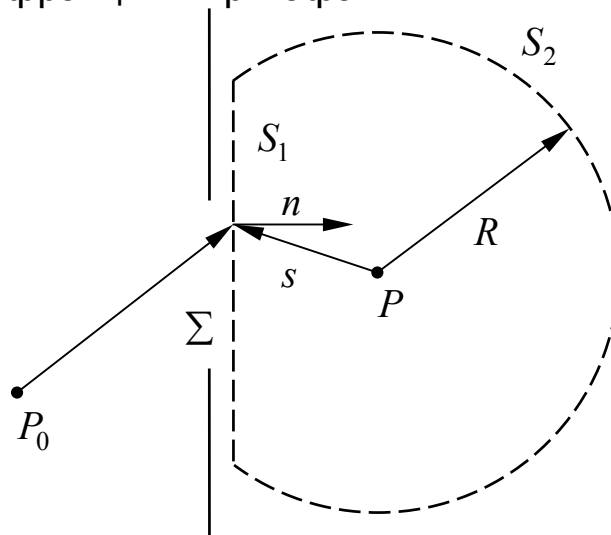


Рис.6.9. Дифракция света на отверстии в непрозрачном экране

Рассмотрим задачу о дифракции на отверстии в бесконечном непрозрачном экране. Пусть световая волна падает слева на экран с отверстием, как показано на рис.6.9. Необходимо рассчитать поле в

точке  $P$  в пространстве справа от отверстия. Следуя Кирхгофу, возьмём замкнутую поверхность  $S$  таким образом, чтобы она состояла из двух частей:  $S_1$  и  $S_2$ , как показано на рисунке. Пусть плоская поверхность  $S_1$ , лежащая сразу же за дифрагирующим экраном, замыкается большим сферическим колпаком  $S_2$  радиуса  $R$  с центром в рассматриваемой точке  $P$ . Полная замкнутая поверхность  $S$  представляет собой просто сумму  $S_1$  и  $S_2$ . Применяв интегральную теорему Гельмгольца-Кирхгофа в форме (6.69), получаем

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_1+S_2} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS, \quad (6.70)$$

где, как и прежде,  $G = \frac{\exp(iks)}{s}$ .

Функция  $G$  в точках на поверхности  $S_2$  определяется выражением

$$G = \frac{\exp(ikR)}{R}. \quad (6.71)$$

Заметим, что с увеличением расстояния  $R$  значение функции  $G$  на поверхности  $S_2$  уменьшается. Однако, следует иметь в виду, что площадь интегрирования при этом возрастает пропорционально  $R^2$ . Исследуем вклад интегрирования по поверхности  $S_2$  более обстоятельно.

В рассматриваемом случае в соответствии с выражением (6.68) имеем

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(ikR)}{R} = \left( \frac{1}{R} - ik \right) \frac{\exp(ikR)}{R} = \left( \frac{1}{R} - ik \right) G.$$

При этом

$$\int \int_{S_2} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \int \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{1}{R} - ik \right) U - \frac{\partial U}{\partial n} \right] GR^2 d\Omega,$$

где  $\Omega$  – телесный угол с вершиной в точке  $P$ , стягиваемый поверхностью  $S_2$ . Величина  $RG = \exp(ikR)$  равномерно ограничена на поверхности  $S_2$ . Поэтому полный интеграл по  $S_2$  будет стремиться к нулю по мере стремления  $R$  к бесконечности при условии, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \left( \frac{1}{R} - ik \right) U - \frac{\partial U}{\partial n} \right] = 0$$



равномерно во всём телесном угле. Это условие называется условием Зоммерфельда для излучения.

Покажем, что сходящаяся сферическая волна (или линейная комбинация сферических волн), определяющая световое возмущение в точке  $P$ , удовлетворяет этому условию. Для этого предположим, что все источники света  $S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}, \dots$  лежат в конечной области пространства. Окружим эту область замкнутой поверхностью  $S_{i\Sigma}$ , как показано на рис.6.10.

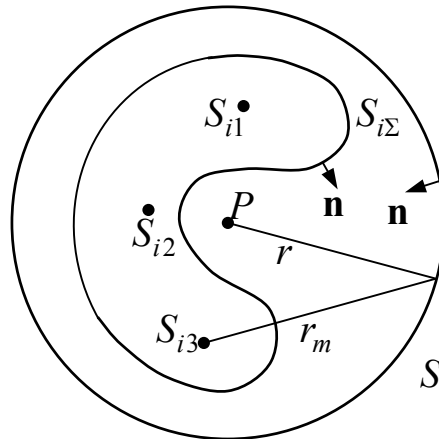


Рис.6.10. К доказательству условия Зоммерфельда

Пусть точка  $P$  находится в пространстве вне поверхности  $S_{i\Sigma}$ . Опишем из точки  $P$  как из центра сферу настолько большего радиуса, чтобы она целиком окружала поверхность  $S_{i\Sigma}$ . Тогда в пространстве между поверхностями  $S$  и  $S_{i\Sigma}$  не будет источников света, а поэтому можно для вычисления  $U(P)$  применить формулу (6.69) в виде:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{i\Sigma} + S} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS.$$

Докажем, что интеграл по сфере  $S$  стремится к нулю, когда её радиус стремится к бесконечности. Для этого необходимо доказать, что соблюдается условие Зоммерфельда.

Предположим, что в пространстве, ограниченном поверхностью  $S_{i\Sigma}$ , находится один или несколько точечных источников света:  $S_1, S_2, S_3, \dots$ . Тогда поле этих источников на поверхности  $S$  можно представить в виде

$$U = \sum C_m \frac{\exp(ikr_m)}{r_m},$$

где  $C_m$  – постоянные коэффициенты.

Если при этом  $r$  стремится к  $\infty$ , то и  $r_m$  стремится к  $\infty$ , однако, разность  $r_m - r$  будет оставаться конечной.

Представим световое возмущение  $U$  в виде:

$$U = \sum C_m \frac{\exp(ik(r + a_m))}{r + a_m} = \frac{\exp(ikr)}{r} \sum \frac{A_m}{1 + \frac{a_m}{r}},$$

где  $A_m = C_m \exp(ika_m)$  – новые постоянные.

При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial n} &= \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial r} \text{grad} r \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial U}{\partial r} \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = -\frac{\partial U}{\partial r} = \\ &= -\left( ik \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr)}{r^2} \right) \sum \frac{A_m}{1 + \frac{a_m}{r}} - \frac{\exp(ikr)}{r^3} \sum \frac{A_m a_m}{\left(1 + \frac{a_m}{r}\right)^2} = \\ &= -\left( ik - \frac{1}{r} \right) U - \frac{\exp(ikr)}{r^3} \sum \frac{A_m a_m}{\left(1 + \frac{a_m}{r}\right)^2}. \end{aligned}$$

При  $r = R$  имеем

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \left( \frac{1}{R} - ik \right) U - \frac{\partial U}{\partial n} \right] &= \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \left[ \left( \frac{1}{R} - ik \right) U + \left( ik - \frac{1}{R} \right) U + \frac{\exp(ikR)}{R^3} \sum \frac{A_m a_m}{\left(1 + \frac{a_m}{R}\right)^2} \right] = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\exp(ikR)}{R^2} \sum \frac{A_m a_m}{\left(1 + \frac{a_m}{R}\right)^2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если некоторый участок поверхности  $S$  удаляется в бесконечность, то интеграл по этому участку поверхности стремится к нулю.

Устранив, таким образом, в выражении (6.70) интегрирование по поверхности  $S_2$ , возмущение в точке  $P$  можно выразить через функцию светового возмущения и её производную по нормали, взятые на бесконечной плоскости  $S_1$ , расположенной непосредственно за экраном, т.е.

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (6.72)$$

Экран не прозрачен везде, кроме открытого отверстия, которое на рис.6.9 обозначено через  $\Sigma$ . Поэтому Кирхгоф принял следующие интуитивные предположения:

1. На отверстии  $\Sigma$  распределение поля  $U$  и его производная  $\frac{\partial U}{\partial n}$  имеют точно такие же значения, какие они имели бы в отсутствие экрана.

2. На той части поверхности  $S_1$ , которая лежит в области геометрической тени экрана, распределение поля  $U$  и его производная  $\frac{\partial U}{\partial n}$  тождественно равны нулю.

Эти условия известны под названием граничных условий Кирхгофа. Приняв эти условия, выражение (6.72) можно записать в виде:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS. \quad (6.73)$$

Граничные условия Кирхгофа значительно упрощают решение задачи. Тем не менее, следует помнить, что ни одно из них не может быть абсолютно справедливым. Однако, если размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны, то получаемые результаты хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Следует обратить внимание на то, что расстояние  $s$  от отверстия до точки наблюдения обычно во много раз больше длины волны, а, следовательно,  $k \gg \frac{1}{s}$ . При этом выражение (6.68) можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial G(Q)}{\partial n} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) \left( ik - \frac{1}{s} \right) \frac{\exp(iks)}{s} \approx ik \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) \frac{\exp(iks)}{s}.$$

Подставив это приближённое выражение и выражение (6.65) в выражение (6.73), получаем

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(iks)}{s} \left[ ikU \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) - \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS. \quad (6.74)$$

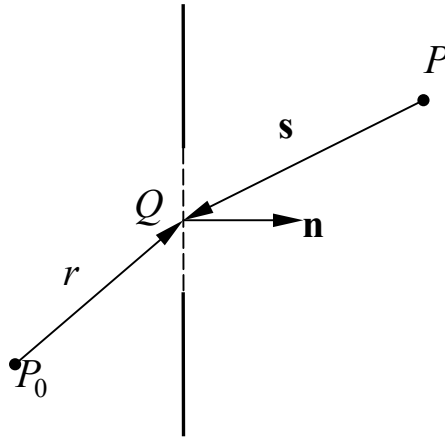


Рис.6.11. К выводу дифракционной формулы Френеля-Кирхгофа

Теперь предположим, что на отверстие падает сферическая волна

$$U(Q) = \frac{A \exp(ikr)}{r},$$

исходящая из одиночного точечного источника, расположенного в точке  $P_0$  на расстоянии  $r$  от точки  $Q$ , как показано на рис.6.11. Если расстояние  $r$  во много раз больше длины волны, то

$$\frac{\partial U}{\partial n} \approx ik \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \frac{A \exp(ikr)}{r}.$$

При этом выражение (6.74) принимает вид:

$$U(P) = \frac{A_{ik}}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(iks) \exp(ikr)}{sr} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{s}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r})] dS$$

или

$$U(P) = \frac{A}{2i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(s+r)]}{sr} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s})] dS. \quad (6.75)$$

Это выражение называется дифракционной формулой Френеля-Кирхгофа.

Вполне очевидно, что вместо плоской поверхности  $\Sigma$  можно выбрать любую другую незамкнутую поверхность, границы которой совпадают с краем отверстия. В частности, при круглой апертуре и в случае, когда точка  $P$  расположена на оси апертуры, в качестве поверхности  $\Sigma$  удобно взять часть сферы  $L$ , концентричной точке  $P_0$ , определяющей падающий волновой фронт. В этом случае расстояние  $r$  будет постоянной величиной, а угол  $(\mathbf{n}, \mathbf{r})$  всегда равен нулю. Кроме того, угол  $(\mathbf{n}, \mathbf{s})$  равен углу  $\pi - \alpha$ , как показано на рис.6.12.

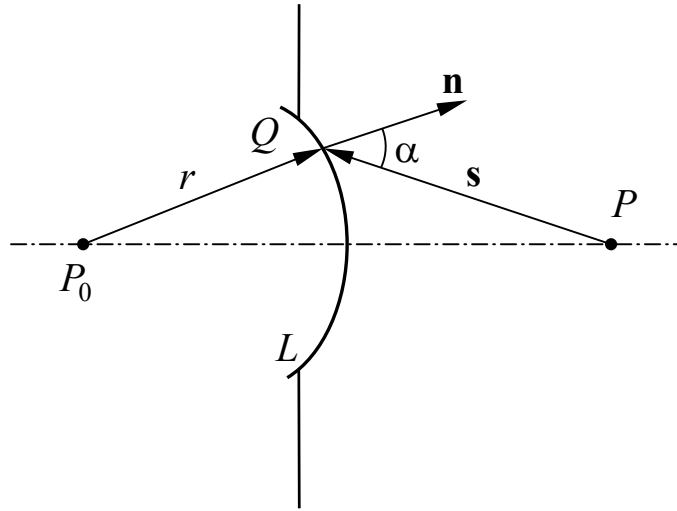


Рис.6.12. Сферический волновой фронт на отверстии в плоском экране

При этом выражение (6.75) упрощается и принимает вид:

$$U(P) = \frac{1}{2i\lambda} \frac{A \exp(ikr)}{r} \iint_L \frac{\exp(iks)}{s} (1 + \cos \alpha) dS.$$

Этот результат находится в согласии с формулировкой принципа Гюйгенса-Френеля, если вкладом от элемента  $dS$  волнового фронта  $L$  считать световое возмущение

$$dU(P) = -\frac{i}{2\lambda} \frac{A \exp(ikr)}{r} \frac{\exp(iks)}{s} (1 + \cos \alpha) dS.$$

Из сопоставления с выражением (6.41) находим, что коэффициент наклона, фигурирующий в теории Френеля, равен

$$K(\alpha) = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \alpha).$$

Для центральной зоны  $\alpha = 0$ , при этом  $K_1 = K(0) = -\frac{i}{\lambda}$ , что согласуется с величиной, полученной Френелем. Однако, при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

получаем  $K\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{i}{2\lambda} = \frac{1}{2} K_1$ , т.е. предположение о том, что

$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , неверно.

Возвращаясь снова к дифракционной формуле (6.75) Френеля-Кирхгофа, отметим, что она симметрична относительно источника и точки наблюдения. Это означает, что точечный источник, находящийся в  $P$ , производит в  $P_0$  такое же действие, какое производил бы в точке  $P$  точечный источник равной интенсивности,

помещённый в точку  $P_0$ . Этот вывод иногда называют теоремой взаимности (или теоремой обратимости) Гельмгольца.

#### 6.2.4. Дифракция Фраунгофера и Френеля

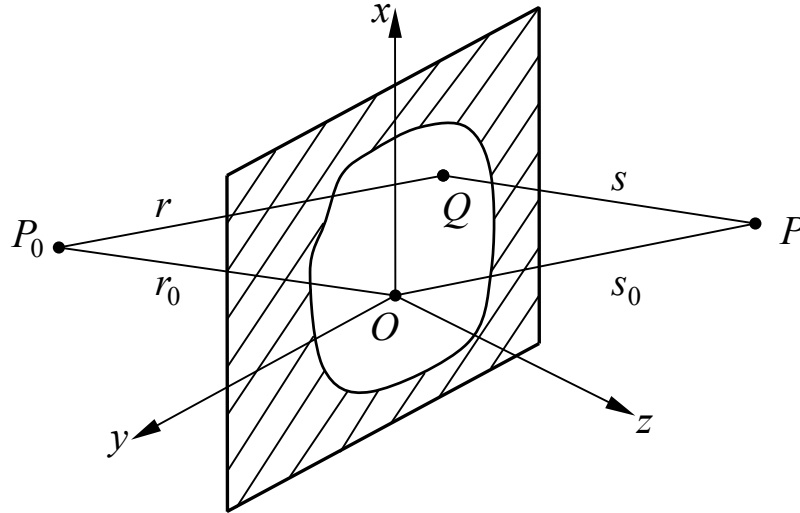


Рис.6.13. Дифракция на отверстии в плоском экране

Пусть монохроматическая волна, излучаемая точечным источником  $P_0$ , проходит сквозь отверстие в плоском непрозрачном экране, как показано на рис.6.13. Будем считать, что линейные размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны света, но малы по сравнению с расстояниями от точек  $P_0$  и  $P$  до плоскости экрана. В соответствии с рисунком расстояние  $P_0Q = r$ , а расстояние  $QP = s$ . Определим световое возмущение в некоторой точке  $P$  справа от экрана. Для этого обратимся вновь к дифракционному интегралу Френеля-Кирхгофа

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[ik(r+s)]}{rs} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s})] dS. \quad (6.76)$$

Величина  $r+s$  в процессе интегрирования будет весьма заметно изменяться (на много длин волн) и поэтому величина  $\exp[ik(r+s)]$  будет быстро осциллировать. Кроме того, если расстояния от точек  $P_0$  и  $P$  до экрана велики по сравнению с линейными размерами отверстия, то множитель  $[\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{s})]$  изменяется по отверстию незначительно.

Возьмём за начало декартовой системы координат точку  $O$  отверстия, а оси  $Ox$  и  $Oy$  выберем в плоскости отверстия. Будем считать, что ось  $Oz$  направлена в сторону полупространства, в котором находится рассматриваемая точка  $P$ . Далее, предполагая, что

углы, образованные линиями  $P_0O$  и  $OP$  с линией  $P_0P$ , не слишком велики, можно заменить этот множитель на  $2\cos\delta$ , где  $\delta$  – угол между линией  $P_0P$  и нормалью к экрану. И, наконец, множитель  $\frac{1}{rs}$  можно заменить множителем  $\frac{1}{r_0s_0}$ , где  $r_0$  и  $s_0$  – расстояния от точек

$P_0$  и  $P$  до начала координат. При этом уравнение (6.76) можно представить в виде:

$$U(P) \approx -\frac{iA \cos \delta}{\lambda r_0 s_0} \iint_{\Sigma} \exp[ik(r+s)] dS. \quad (6.77)$$

Пусть  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x, y, z)$  – координаты точек  $P_0$  и  $P$  соответственно, а  $(\xi, \eta)$  – координаты точки  $Q$  отверстия.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + z_0^2, \\ s^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.78)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ s_0^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.79)$$

Используя соотношения (6.79), уравнения (6.78) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= r_0^2 - 2(x_0\xi + y_0\eta) + \xi^2 + \eta^2, \\ s^2 &= s_0^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

Отсюда находим, что

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 \sqrt{1 - 2\frac{x_0\xi + y_0\eta}{r_0^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{r_0^2}}, \\ s &= s_0 \sqrt{1 - 2\frac{x\xi + y\eta}{s_0^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{s_0^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

Если линейные размеры отверстия в экране малы по сравнению с длиной отрезков  $r_0$  и  $s_0$ ; то правые части выражений (6.81) можно разложить в степенные ряды по  $\frac{\xi}{r_0}$ ,  $\frac{\eta}{r_0}$ ,  $\frac{\xi}{s_0}$  и  $\frac{\eta}{s_0}$ . При этом получим

$$\left. \begin{aligned} r &\approx r_0 - \frac{x_0\xi + y_0\eta}{r_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r_0^3} + \text{K} , \\ s &\approx s_0 - \frac{x\xi + y\eta}{s_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s_0} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s_0^3} + \text{K} . \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

Полученные соотношения позволяют выражение (6.77) представить в виде:

$$U(P) = -\frac{i \cos \delta}{\lambda} \frac{A \exp[ik(r_0 + s_0)]}{r_0 s_0} \iint_{\Sigma} \exp[ikf(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (6.83)$$

$$\text{где } f(\xi, \eta) = -\frac{x_0\xi + y_0\eta}{r_0} - \frac{x\xi + y\eta}{s_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2r_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2s_0} - \frac{(x_0\xi + y_0\eta)^2}{2r_0^3} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2s_0^3} + \text{K} . \quad (6.84)$$

Обозначим первые два направляющих косинуса через  $(l_0, m_0)$  и  $(l, m)$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} l_0 &= \frac{0 - x_0}{r_0} = -\frac{x_0}{r_0}, & l &= \frac{x - 0}{s_0} = \frac{x}{s_0}, \\ m_0 &= \frac{0 - y_0}{r_0} = -\frac{y_0}{r_0}, & m &= \frac{y - 0}{s_0} = \frac{y}{s_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

При этом выражение (6.84) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} \right) (\xi^2 + \eta^2) - \right. \\ &\left. - \frac{(l_0\xi + m_0\eta)^2}{r_0} - \frac{(l\xi + m\eta)^2}{s_0} \right] + \text{K} . \end{aligned} \quad (6.86)$$

Итак, задача определения светового возмущения в точке  $P$  свелась к вычислению интеграла (6.83). Распределение интенсивности (освещённости) в дифракционной картине определяется квадратом модуля светового возмущения  $U(P)$ . Следовательно, экспоненциальный множитель перед интегралом никакого влияния на распределение интенсивности в дифракционной картине не оказывает, поскольку по модулю равен единице.



Вычисление интеграла (6.83) существенно упростится, если в выражении (6.86) пренебречь квадратичными членами и членами более высоких порядков относительно  $\xi$  и  $\eta$ . В этом случае дифракцию, описываемую интегралом (6.83), называют дифракцией Фраунгофера. Если же квадратичными членами пренебречь нельзя, – то дифракцией Френеля. Строго говоря, члены второго и более высоких порядков обращаются в ноль только в том предельном случае, когда  $r_0 \rightarrow \infty$  и  $s_0 \rightarrow \infty$ , т.е. когда и источник, и точка наблюдения расположены в бесконечности. При этом надо допустить, что отношение  $\frac{A}{r_0 s_0}$  в рассматриваемом случае равно конечной величине.

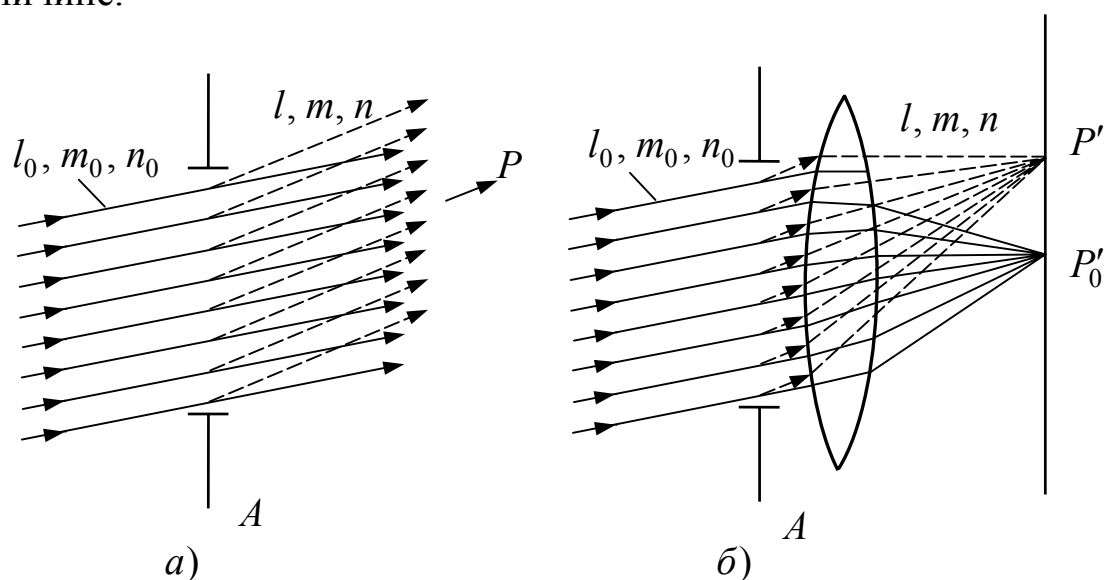


Рис.6.14. Сравнение двух случаев дифракции Фраунгофера

На рис.6.14а пучок лучей от бесконечно удалённой точки падает на отверстие в направлении, определяемом направляющими косинусами  $l_0, m_0, n_0$ . Можно считать, что дифракция, наблюдаемая в направлении  $l, m, n$  в очень удалённой точке  $P$ , возникла в результате суперпозиции плоских волн, исходящих из каждой точки отверстия в этом направлении. Такие волны (не существующие в рамках геометрической оптики) можно назвать дифрагированными волнами, а соответствующие волновые нормали – дифрагированными лучами. Если теперь за экраном поместить хорошо коррелированный объектив, как показано на рис.6.14б, то весь свет, дифрагированный в направлении  $(l, m, n)$ , соберётся в точке  $P'$  в фокальной плоскости объектива. Так как длины оптических путей всех лучей, приходящих в точку  $P'$  от волнового фронта дифрагированного пучка лучей,

равны, то, по сути дела, интерференционные эффекты остаются такими же, как и для исходного направления пучка лучей при условии, что объектив достаточно велик, чтобы не вносить дополнительной дифракции.

В выражении (6.86) имеем

$$(l_0\xi + m_0\eta)^2 = l_0^2\xi^2 + 2l_0m_0\xi\eta + m_0^2\eta^2 = \\ = (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2) - (l_0\eta - m_0\xi)^2 \leq (l_0^2 + m_0^2)(\xi^2 + \eta^2)$$

и, соответственно,  $(l\xi + m\eta)^2 \leq (l^2 + m^2)(\xi^2 + \eta^2)$ .

В большинстве практически важных случаев  $l_0^2 + m_0^2 \ll 1$  и  $l^2 + m^2 \ll 1$ , а поэтому для описания дифракции достаточно пользоваться приближением:

$$f(\xi, \eta) = (l_0 - l)\xi + (m_0 - m)\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} \right) (\xi^2 + \eta^2). \quad (6.87)$$

Такое приближение называют приближением Френеля.

Заметим, что в выражение (6.87) четыре величины  $l_0, m_0, l$  и  $m$  входят только в комбинации

$$p = l - l_0, \quad q = m - m_0.$$

Следовательно, в той области, где справедливо приближение Френеля, дифракционная картина не изменится, если отверстие сместится в своей собственной плоскости. При этом дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа можно записать в виде:

$$U(P) = C \iint_{\Sigma} \psi(\xi, \eta) \exp[-ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta, \quad (6.88)$$

где  $C$  – комплексная постоянная величина

$$C = -\frac{ik \cos \delta \exp[ik(r_0 + s_0)]}{2\pi r_0 s_0}; \quad \psi(\xi, \eta) = A \exp \frac{ik}{2} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} \right) (\xi^2 + \eta^2).$$

В полученном выражении интегрирование предполагается в пределах площади  $\Sigma$  отверстия. Однако, учитывая, что в точках непрозрачных частей экрана  $\psi(\xi, \eta) = 0$ , интегрирование по  $\xi$  и  $\eta$  можно производить в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . При этом дифракционная картина Френеля с точностью до комплексной постоянной величины определяется преобразованием Фурье функции  $\psi(\xi, \eta)$ :

$$U(P) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta) \exp[-ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta.$$

В приближении Френеля квадратичные члены относительно  $\xi$  и  $\eta$  отсутствуют при  $\frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} = 0$ . (6.89)

Условие (6.89) означает, что дифракция Фраунгофера имеет место и тогда, когда точка наблюдения находится в плоскости, параллельной плоскости отверстия при условии, что точка наблюдения источник света достаточно близки к оси  $z$ . При этом возможны два случая. Если  $r_0$  отрицательно, то падающие на отверстие волновые фронты имеют вогнутость в направлении распространения и точка  $P_0$  является центром схождения, а не расхождения падающей волны. Этот случай очень важен для практики, так как осуществляется в пространстве изображений хорошо коррелированной центрированной системы, изображающей точечный источник, расположенный вблизи оси. Дифракционная картина Фраунгофера образуется в параксиальной плоскости изображений и может рассматриваться как результат дифракции волнового фронта на выходном зрачке.

Пусть  $s_0 = -r_0 = R'$ . Рассматривая изображение осевой точки предмета, можно принять  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ , при этом  $\cos \delta \approx 1$ . Обозначив  $x = x'$ ,  $y = y'$ , получаем  $p = \frac{x}{s_0} = \frac{x'}{R'}$ ,  $q = \frac{y}{s_0} = \frac{y'}{R'}$ . При этом дифракционный интеграл, описывающий дифракцию Фраунгофера в рассматриваемом случае, принимает вид:

$$U(x', y') = -\frac{i}{\lambda R'^2} \iint_{\Sigma} \psi(\xi, \eta) \exp\left[-ik \frac{x'\xi + y'\eta}{R'}\right] d\xi d\eta, \quad (6.90)$$

где  $\psi(\xi, \eta) = A$ .

Если  $r_0$  положительно, то волновые фронты имеют выпуклости в направлении распространения. При этом дифракционные картины мнимых изображений кажутся образованными на экране, проходящем через источник  $P_0$ . Этот случай имеет место, например, тогда когда отверстие в экране находится непосредственно перед глазом наблюдателя.

Распределение светового возмущения в дифракционной картине мало отличается от распределения, определяемого дифракцией Фраунгофера, если в приближении Френеля выражение

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} \right) (\xi^2 + \eta^2) \leq \frac{1}{4} \lambda. \text{ При этом}$$

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{s_0} \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\xi^2 + \eta^2}, \text{ где } r_0 + s_0 \neq 0.$$

$$\text{При } r_0 = s_0 = R \geq 4 \frac{\rho^2}{\lambda}, \text{ где } \rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

$$\text{При этом при } \lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ мм: } R_{\min} = 8 \cdot 10^3 \rho^2 \text{ мм.}$$

$$\text{При } \rho = 10 \text{ мм: } R_{\min} = 8 \cdot 10^5 \text{ мм} = 800 \text{ м}.$$

$$\text{При } \rho = 1 \text{ мм: } R_{\min} = 8 \cdot 10^3 \text{ мм} = 8 \text{ м}.$$

$$\text{При } \rho = 0,1 \text{ мм: } R_{\min} = 80 \text{ мм} = 0,08 \text{ м}.$$

$$\text{При } r_0 \rightarrow \infty: s_0 \geq 2 \frac{\rho^2}{\lambda}.$$

$$\text{При этом при } \lambda = 5 \cdot 10^{-4} \text{ мм} : s_{0\min} = 4 \cdot 10^3 \rho^2 \text{ мм}.$$

### 6.2.5. Дифракция Фраунгофера на отверстиях разной формы

#### *Прямоугольное отверстие*

Рассмотрим прямоугольное отверстие со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Если начало координат  $O$  находится в центре прямоугольника, а оси  $O\xi$  и  $O\eta$  параллельны его сторонам (рис.6.15), то дифракционный интеграл Фраунгофера принимает вид

$$u(P) = C \int_{-a}^a \int_{-b}^b \exp[-ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta = C \int_{-a}^a \exp(-ikp\xi) d\xi \int_{-b}^b \exp(-ikq\eta) d\eta,$$

где  $C = \frac{ikA}{2\pi R'^2}$ .

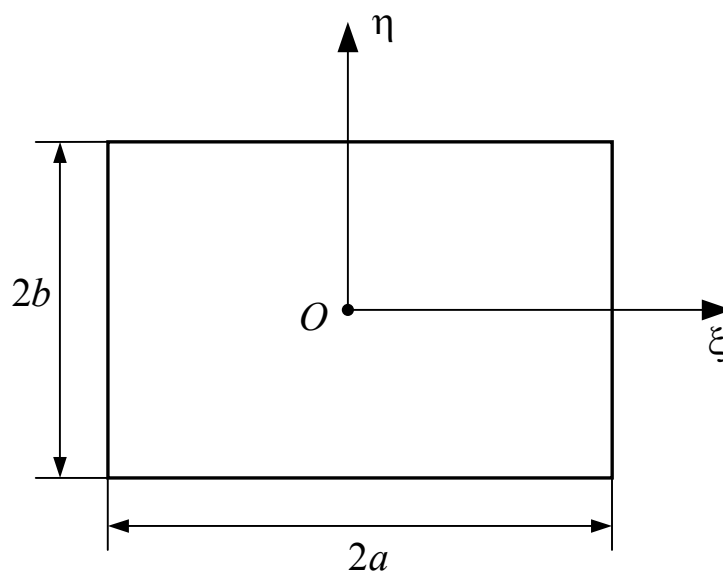


Рис.6.15. Прямоугольное отверстие в плоском экране

Но

$$\int_{-a}^a \exp(-ikp\xi) d\xi = -\frac{1}{ikp} [\exp(-ikpa) - \exp(ikpa)] = 2 \frac{\sin kpa}{kp}.$$

Аналогично

$$\int_{-b}^b \exp(-ikq\eta) d\eta = 2 \frac{\sin kqb}{kq}.$$

При этом

$$u(P) = 4C \frac{\sin kpa}{kp} \frac{\sin kqb}{kq}.$$

При  $p = 0, q = 0$ :  $u(0, 0) = 4Cab$ . Тогда относительное распределение светового возмущения будет равно

$$\tilde{u}(P) = \frac{u(P)}{u(0, 0)} = \frac{\sin kpa}{kpa} \frac{\sin kqb}{kqb}.$$

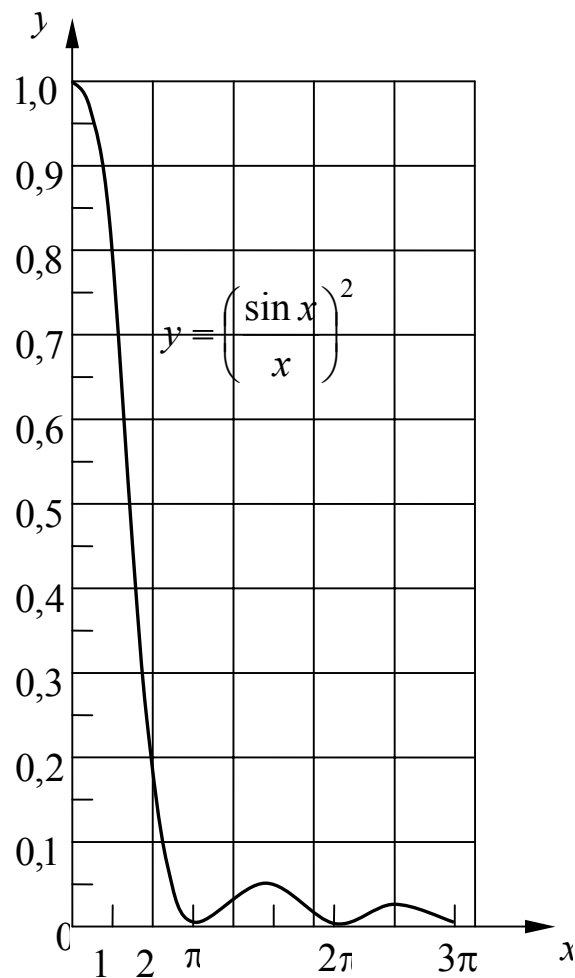


Рис.6.16. Дифракционное изображение осевой точки при прямоугольной форме отверстия

При этом относительное распределение освещённости в дифракционном пятне изображения осевой точки определится выражением:

$$\tilde{E}(P) = \tilde{u}(P) \cdot \tilde{u}^*(P) = \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2 \left( \frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2.$$

$$\text{При } q = 0: \tilde{E}(P) = \tilde{E}(p) = \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right)^2.$$

$$\text{При } p = 0: \tilde{E}(q) = \left( \frac{\sin kqb}{kqb} \right)^2. \quad (6.91)$$

График функции  $y = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$  приведён на рис.6.16. Она имеет главный максимум  $y = 1$  при  $x = 0$  и минимумы, равные нулю, при  $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ . Эти минимумы разделяют вторичные максимумы, положение которых определяется из условия  $\frac{dy}{dx} = 0$ , т.е.

из условия  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{x^3} (x - \operatorname{tg}x) = 0$ . Отсюда следует, что положение вторичных максимумов определяется корнями уравнения  $\operatorname{tg}x - x = 0$ .

Пять первых максимумов функции  $y = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$  приведены в таблице:

$x$	$y$
0	1
$1,430\pi = 4,493$	0,04718
$2,459\pi = 7,725$	0,01694
$3,470\pi = 10,90$	0,00834
$4,479\pi = 14,07$	0,00503

Из таблицы следует, что интенсивности в последовательности максимумов убывают очень быстро. Итак, интенсивность  $\tilde{E}(P)$  равна нулю вдоль двух рядов линий, параллельных сторонам прямоугольника. Положение этих линий определяется из соотношений

$$kpa = \pm\mu\pi, \quad kqb = \pm\nu\pi \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\text{или, так как } p = l - l_0, \quad q = m - m_0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$l - l_0 = \pm \frac{\mu\lambda}{2a}, \quad m - m_0 = \pm \frac{\nu\lambda}{2b}.$$

Внутри каждого прямоугольника, образованного последовательными парами тёмных полос, интенсивности достигают максимумов, которые, однако, составляют лишь малую часть интенсивности центрального максимума и быстро уменьшаются по мере удаления от центра. Следует отметить, что большему размеру отверстия соответствуют меньшие эффективные размеры дифракционной картины.

### *Круглое отверстие*

В этом случае удобно использовать полярные координаты вместо прямоугольных. Пусть  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты произвольной точки отверстия, т.е.

$$\rho \cos \theta = \xi, \quad \rho \sin \theta = \eta,$$

и пусть  $(\nu, \varphi)$  – координаты точки  $P$  в дифракционной картине, относящейся к геометрическому изображению осевой точки источника, т.е.  $\nu \cos \varphi = p$ ,  $\nu \sin \varphi = q$ .

Из определения  $p$  и  $q$  следует, что  $\nu = \sqrt{p^2 + q^2}$  равно синусу угла между направлением  $(p, q)$  и центральным направлением  $p = q = 0$ . В таком случае, если  $a$  – радиус круглого отверстия, то дифракционный интеграл принимает вид

$$u(P) = C \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho\nu \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\theta.$$

Используя тождество

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ia \cos(\theta - \varphi)] d\theta,$$

получаем

$$u(P) = 2\pi C \int_0^a J_0(k\rho\nu) \rho d\rho.$$

$$\text{Но } \frac{d}{dz} [z^{n+1} J_{n+1}(z)] = z^{n+1} J_n(z).$$

При  $n = 0$ :  $d[zJ_1(z)] = zJ_0(z)dz$ . А тогда

$$u(P) = \frac{2\pi C}{k^2 v^2} \int_0^a k v \rho J_0(k \rho v) d(k \rho v) = \frac{2\pi C}{k^2 v^2} k v a J_1(k a v) =$$

$$= 2\pi C a^2 \frac{J_1(k a v)}{k a v}.$$

При  $v = 0$ :  $u(0) = \pi C a^2$ . Тогда

$$\tilde{u}(P) = \frac{2J_1(k a v)}{k a v}. \text{ При этом}$$

$$\tilde{E}(P) = \left[ \frac{2J_1(k a v)}{k a v} \right]^2. \quad (6.92)$$

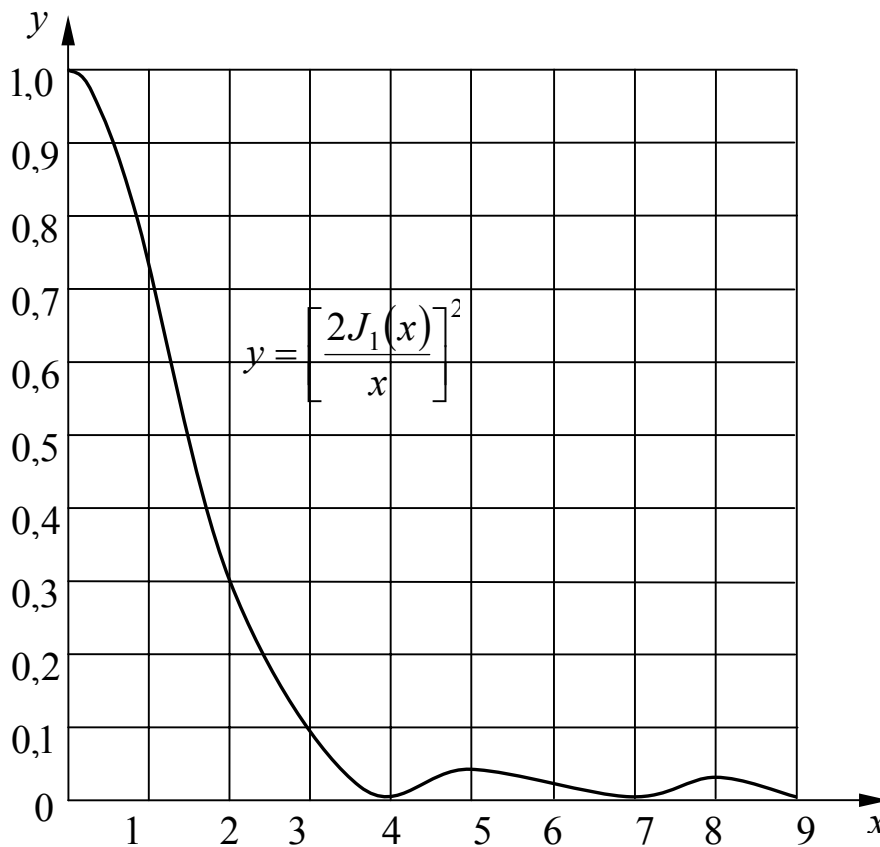


Рис.6.17. Дифракционное изображение осевой точки при круглом отверстии в плоском экране

Распределение интенсивности в окрестности геометрического изображения точки описывается функцией  $y = \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$ , график которой приведён на рис.6.17. Она имеет главный максимум  $y = 1$  при  $x = 0$  и с увеличением  $x$  осциллирует с постепенным уменьшением амплитуды подобно функции  $\left( \frac{\sin x}{x} \right)^2$ . Интенсивность равна нулю



(минимум) при значениях  $x$ , определяемых корнями уравнения  $J_1(x) = 0$ . Минимумы здесь уже не строго эквидистантны, что и следует из таблицы:

$x$	$\left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2$	
0	1	максимум
$1,220\pi = 3,832$	0	минимум
$1,635\pi = 5,136$	0,0175	максимум
$2,233\pi = 7,016$	0	минимум
$2,679\pi = 8,417$	0,0042	максимум
$3,238\pi = 10,174$	0	минимум
$3,699\pi = 11,620$	0,0016	максимум

Положение вторичных максимумов определяется значениями  $x$ , удовлетворяющими уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{J_1(x)}{x} \right] = 0,$$

или, пользуясь формулой

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x),$$

– корнями уравнения  $J_2(x) = 0$ . При увеличении  $x$  расстояния между последовательными минимумами или последовательными максимумами приближаются к  $\pi$ , как и в предыдущем случае.

Из полученных результатов следует, что наблюдаемая картина имеет вид светлого диска с центром в геометрическом изображении источника  $p = q = 0$ , окружённого светлыми и тёмными кольцами. Интенсивность светлых колец быстро уменьшается с увеличением радиуса и обычно освещённость только одного или двух первых колец достаточна, чтобы их можно было наблюдать невооружённым глазом.

В рассматриваемом случае  $x = kav$ . При этом радиусы тёмных колец равны

$$v = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{x \lambda}{2\pi a} = 0,610 \frac{\lambda}{a}, 1,116 \frac{\lambda}{a}, 1,619 \frac{\lambda}{a}, \text{К}.$$

Расстояние между двумя соседними кольцами асимптотически приближается к величине  $\frac{\lambda}{2a}$ . Здесь мы снова видим, что

эффективные размеры дифракционной картины обратно пропорциональны линейным размерам отверстия.

Дифракционный интеграл Фраунгофера для круглого отверстия запишем в виде:

$$u(v, \varphi) = \frac{ik}{2\pi R'^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} A \exp[-ik\rho v \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\theta.$$

Пусть  $A = A(\rho, \theta)$ . Из условия круговой симметрии рассматриваемой задачи следует, что

$$A(\rho, \theta) = A(\rho).$$

Пусть  $D' = 2a$  – диаметр отверстия в экране. Тогда  $\rho = a\rho'$ , где  $0 \leq \rho' \leq 1$ . Обозначим

$$\tilde{\rho} = k a \rho' = k \rho. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} u(v, \varphi) &= \frac{i\lambda}{(2\pi R')^2} \int_0^{\tilde{\rho}_m} \int_0^{2\pi} A(\tilde{\rho}) \exp[-i\tilde{\rho} v \cos(\theta - \varphi)] \tilde{\rho} d\tilde{\rho} d\theta = \\ &= \frac{i}{kR'^2} \int_0^{\tilde{\rho}_m} A(\tilde{\rho}) J_0(\tilde{\rho} v) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}. \end{aligned}$$

Здесь в весьма общем виде представлена зрачковая функция  $G(\rho, \theta) = A(\tilde{\rho})$ . Для её аппроксимации удобно применить определённый интеграл Сонина:

$$J_{\mu+\nu+1}(x) = \frac{x^{\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^{\pi/2} J_\mu(x \sin \gamma) \sin^{\mu+1} \gamma \cos^{2\nu+1} \gamma d\gamma.$$

Эта формула справедлива, когда действительные числа  $\mu, \nu > -1$ . В дифракционный интеграл входит функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Поэтому в интеграле Сонина в интересах рассматриваемого вопроса естественно принять  $\mu = 0$ .

Тогда

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x \sin \gamma) \sin \gamma \cos^{2\nu+1} \gamma d\gamma = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\int_0^1 J_0(x \sin \gamma) \cos^{2\nu} \gamma \sin \gamma d(\sin \gamma) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Введём обозначения:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_m \sin \gamma, \quad x = v \tilde{\rho}_m.$$

Тогда

$$\int_0^{\tilde{\rho}_m} J_0(v\tilde{\rho}) \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_m} \right)^2 \right]^v \tilde{\rho} d\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_m^2 2^v \Gamma(v+1) \frac{J_{v+1}(v\tilde{\rho}_m)}{(v\tilde{\rho}_m)^{v+1}}.$$

Аппроксимируем зрачковую функцию выражением

$$G(\tilde{\rho}) = A_0 \sum_v q_v \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_m} \right)^2 \right]^v.$$

Подставив это выражение в дифракционный интеграл и сопоставив полученный результат с преобразованным интегралом Сонины получаем

$$u(v) = \tilde{\rho}_m^2 \sum_v 2^v \Gamma(v+1) q_v \frac{J_{v+1}(v\tilde{\rho}_m)}{(v\tilde{\rho}_m)^{v+1}}.$$

Для кольцевой формы отверстия диаметр внутреннего экрана равен  $\eta D'$ , где  $\eta$  – коэффициент линейного экранирования.

В соответствии с принципом Бабине

$$\begin{aligned} u(v) &= \frac{i}{kR'^2} \int_0^{\tilde{\rho}_m} G(\tilde{\rho}) J_0(\tilde{\rho}v) \tilde{\rho} d\tilde{\rho} - \frac{i}{kR'^2} \int_0^{\eta\tilde{\rho}_m} G(\tilde{\rho}) J_0(\tilde{\rho}v) \tilde{\rho} d\tilde{\rho} = \\ &= \frac{i}{kR'^2} \int_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} G(\tilde{\rho}) J_0(\tilde{\rho}v) \tilde{\rho} d\tilde{\rho}. \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } G(\tilde{\rho}) = A_0 \left\{ q_0 + q_1 \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_m} \right)^2 \right] \right\}.$$

При этом

$$\begin{aligned} u(v) &= \frac{iA_0}{kR'^2} \int_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} \left\{ q_0 + q_1 \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_m} \right)^2 \right] \right\} J_0(\tilde{\rho}v) \tilde{\rho} d\tilde{\rho} = \\ &= \frac{iA_0(q_0 + q_1)}{kR'^2} \int_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} J_0(\tilde{\rho}v) \tilde{\rho} d\tilde{\rho} - \frac{iA_0q_1}{kR'^2 \tilde{\rho}_m^2} \int_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} J_0(\tilde{\rho}v) \tilde{\rho}^3 d\tilde{\rho}. \end{aligned}$$

Поскольку  $d[zJ_1(z)] = zJ_0(z)dz$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \int_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} J_0(\tilde{\rho}v) (\tilde{\rho}v) d(\tilde{\rho}v) &= \frac{1}{v^2} (\tilde{\rho}v) J_1(\tilde{\rho}v) \Big|_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} = \\ &= \tilde{\rho}^2 \frac{J_1(\tilde{\rho}v)}{\tilde{\rho}v} \Big|_{\eta\tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} = \frac{1}{2} \tilde{\rho}_m^2 \left[ \frac{2J_1(\tilde{\rho}_m v)}{\tilde{\rho}_m v} - \eta^2 \frac{2J_1(\eta\tilde{\rho}_m v)}{\eta\tilde{\rho}_m v} \right]. \end{aligned}$$

Применяя так называемое интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^4} \int_{\eta \tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} J_0(\tilde{\rho}v)(\tilde{\rho}v)^3 d(\tilde{\rho}v) &= \frac{1}{v^4} (\tilde{\rho}v)^3 J_1(\tilde{\rho}v) \Big|_{\eta \tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} - \\ &- \frac{2}{v^4} \int_{\eta \tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} (\tilde{\rho}v)^2 J_1(\tilde{\rho}v) d(\tilde{\rho}v) = \tilde{\rho}_m^4 \left[ \frac{J_1(\tilde{\rho}_m v)}{\tilde{\rho}_m v} - \eta^4 \frac{J_1(\eta \tilde{\rho}_m v)}{\eta \tilde{\rho}_m v} \right] - \\ &- \frac{2(\tilde{\rho}v)^2}{v^4} J_2(\tilde{\rho}v) \Big|_{\eta \tilde{\rho}_m}^{\tilde{\rho}_m} = \tilde{\rho}_m^4 \left[ \frac{J_1(\tilde{\rho}_m v)}{\tilde{\rho}_m v} - \eta^4 \frac{J_1(\eta \tilde{\rho}_m v)}{\eta \tilde{\rho}_m v} \right] - \\ &- 2\tilde{\rho}_m^4 \left[ \frac{J_2(\tilde{\rho}_m v)}{\tilde{\rho}_m^2 v^2} - \eta^4 \frac{J_2(\eta \tilde{\rho}_m v)}{\eta^2 \tilde{\rho}_m^2 v^2} \right]. \end{aligned}$$

Подставив в дифракционный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} u(v) &= \frac{iA_0}{kR'^2} \tilde{\rho}_m^2 \left\{ \frac{q_0 + q_1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{q_1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^4 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \frac{4J_2(v\tilde{\rho}_m)}{v^2\tilde{\rho}_m^2} + \eta^4 \frac{4J_2(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v^2\eta^2\tilde{\rho}_m^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Но  $2\frac{v}{z}J_\nu(z) = J_{\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z)$ , т.е. в нашем случае

$\frac{4}{z}J_2(z) = J_3(z) + J_1(z)$ . А тогда

$$\begin{aligned} u(v) &= \frac{iA_0}{kR'^2} \tilde{\rho}_m^2 \left\{ \frac{q_0 + q_1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{q_1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^4 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \frac{J_3(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \frac{J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \eta^4 \frac{J_3(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} + \eta^4 \frac{J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] \right\} = \\ &= \frac{iA_0}{2kR'^2} \tilde{\rho}_m^2 \left\{ (q_0 + q_1) \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] - \right. \\ &\left. - \frac{q_1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} \right] + \frac{q_1}{2} \eta^4 \left[ \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] \right\}. \end{aligned}$$

При  $v = 0$ :

$$\begin{aligned}
u(0) &= \frac{iA_0}{2kR'^2} \tilde{\rho}_m^2 \left[ (q_0 + q_1)(1 - \eta^2) - \frac{q_1}{2}(1 - \eta^4) \right] = \\
&= \frac{iA_0}{2kR'^2} \tilde{\rho}_m^2 (1 - \eta^2) \left[ q_0 + q_1 - \frac{q_1}{2}(1 + \eta^2) \right] = \\
&= \frac{iA_0}{2kR'^2} \tilde{\rho}_m^2 (1 - \eta^2) \left[ q_0 + \frac{q_1}{2}(1 - \eta^2) \right].
\end{aligned}$$

При этом относительное распределение освещённости в изображении точки определится выражением:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(v) &= \left[ \frac{u(v)}{u(0)} \right]^2 = \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 \left[ q_0 + \frac{q_1}{2}(1 - \eta^2) \right]^2} \times \\
&\times \left\{ (q_0 + q_1) \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] - \right. \\
&\left. - \frac{q_1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} \right] + \frac{q_1}{2} \eta^4 \left[ \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] \right\}^2.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что при  $\tilde{\rho} = 0$ :  $G(0) = A_0(q_0 + q_1)$ , а при  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_m$ :  $G(\tilde{\rho}_m) = A_0q_0$ . Естественно положить  $G(0) = A_0(q_0 + q_1) = A_0$ . Отсюда  $q_0 + q_1 = 1$ . Тогда  $q_1 = 1 - q_0$ . При этом

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(v) &= \frac{1}{(1 - \eta^2)^2 \left[ q_0 + \frac{1 - q_0}{2}(1 - \eta^2) \right]^2} \left\{ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \right. \\
&\left. - \frac{1 - q_0}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} \right] + \frac{1 - q_0}{2} \eta^4 \left[ \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right] \right\}^2.
\end{aligned}$$

Пусть на краю отверстия  $G(\tilde{\rho}_m) = A_0q_0 = 0$ , т.е.  $q_0 = 0$ . При этом

$$\begin{aligned}
\tilde{E}(v) &= \frac{4}{(1 - \eta^2)^4} \left\{ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^4 \left( \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} - \frac{2J_3(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right) \right] \right\}^2. \tag{6.93}
\end{aligned}$$

Пусть  $G(\tilde{\rho}) \equiv A_0$ , т.е.  $q_0 = 1$ , а  $q_1 = 0$ .

При этом

$$\tilde{E}(v) = \frac{1}{(1-\eta^2)^2} \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} - \eta^2 \frac{2J_1(v\eta\tilde{\rho}_m)}{v\eta\tilde{\rho}_m} \right]^2. \quad (6.94)$$

При  $\eta = 0$ :

$$\tilde{E}(v) = \left[ \frac{2J_1(v\tilde{\rho}_m)}{v\tilde{\rho}_m} \right]^2 \quad \text{или} \quad \tilde{E}(v) = \left[ \frac{2J_1(kav)}{kav} \right]^2. \quad (6.95)$$

### Эллиптическое отверстие

Запишем уравнение окружности в виде

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Пусть  $x = \frac{x'}{\mu}$ ;  $y = y'$ . Подставив в уравнение окружности,

получаем  $\frac{x'^2}{\mu^2 r^2} + \frac{y'^2}{r^2} = 1$ , т.е. получили уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

где  $a = \mu r$ , а  $b = r$ . Таким образом, эллипс представляет собой окружность, растянутую или сжатую в одном из направлений.

Рассмотрим решение задачи в общем случае. Пусть  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  – два отверстия, причём в некотором направлении ( $0\xi$ ) размеры  $\Sigma_2$  в  $\mu$  раз больше, чем  $\Sigma_1$ . Для дифракции Фраунгофера на  $\Sigma_1$  имеем

$$u_1(p, q) = C \iint_{\Sigma_1} \exp[-ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta.$$

Аналогично для дифракции Фраунгофера на  $\Sigma_2$  находим  $u_2(p, q) = C \iint_{\Sigma_2} \exp[-ik(p\xi' + q\eta')] d\xi' d\eta'$ . Заменяя здесь переменные

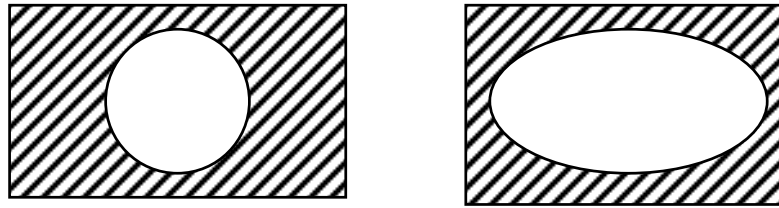
интегрирования  $(\xi', \eta')$  на  $(\xi, \eta)$ , где  $\xi' = \mu\xi$ ,  $\eta' = \eta$ , получим

$$\begin{aligned} u_2(p, q) &= \mu C \iint_{\Sigma_2} \exp[-ik(\mu p\xi + q\eta)] d\xi d\eta = \\ &= \mu C \iint_{\Sigma_1} \exp[-ik(\tilde{p}\xi + q\eta)] d\xi d\eta = \mu u_1(\tilde{p}, q) \end{aligned}$$

или

$$u_2(p, q) = \mu u_1(\mu p, q).$$

## Отверстие



## Дифракционная картина

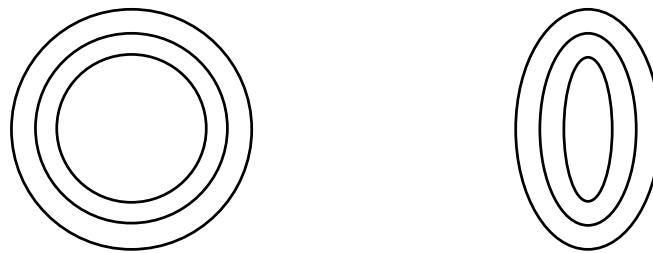


Рис.6.18. Зависимость вида дифракционного изображения точки от формы отверстия

Отсюда следует, что если отверстие симметрично расширяется в каком-либо направлении в  $\mu$  раз, то дифракционная картина Фраунгофера сжимается в том же направлении в  $\mu$  раз, а интенсивность в некоторой точке новой картины становится в  $\mu^2$  раз больше интенсивности в соответствующей точке первоначальной картины. Используя этот результат, можно, например, сразу найти картину дифракции Фраунгофера от эллиптического отверстия из картины дифракции от круга, как показано на рис.6.18.

### 6.2.6. Дифракция Фраунгофера на системе одинаковых и одинаково ориентированных отверстий

Зрачковую функцию экрана, состоящего из  $N$  отверстий можно представить в виде

$$G(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^N G_j(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}). \quad (6.96)$$

Начала координатных осей  $(\xi, \eta)$  и  $(x', y')$  расположены на общей нормали к плоскостям экрана и рассматриваемой дифракционной картины. Пусть система координат  $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ , начало которой совпадает с центром  $j$ -го отверстия, смещена относительно системы осей  $(\xi, \eta)$  в точку с координатами  $(\xi_{0j}, \eta_{0j})$ . Тогда

$$u_j(p, q) = \frac{ik}{2\pi R'^2} \iint_{\Sigma_j} G_j(\xi, \eta) \exp[-ik(p\xi + q\eta)] d\xi d\eta =$$

$$= \frac{ik}{2\pi R'^2} \exp[-ik(p\xi_{0j} + q\eta_{0j})] \iint_{\Sigma_j} G_j(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \exp[-ik(p\tilde{\xi} + q\tilde{\eta})] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}.$$

Введём обозначения

$$\frac{\xi_{0j}}{R'} = \alpha_{0j}; \quad \frac{\tilde{\xi}}{R'} = \tilde{\alpha}; \quad \frac{\eta_{0j}}{R'} = \beta_{0j}; \quad \frac{\tilde{\eta}}{R'} = \tilde{\beta}; \quad kx' = \tilde{x}'; \quad ky' = \tilde{y}'; \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

Предположим, что область  $j$ -го отверстия ограничена прямоугольником, при этом

$$G_j(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = A_j(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = A_j(0, 0) = A_{0j}.$$

Тогда при  $x = y = 0$  имеем

$$u_j(\tilde{x}', \tilde{y}') = \frac{i}{\lambda} A_{0j} \exp[-i(\alpha_{0j}\tilde{x}' + \beta_{0j}\tilde{y}')] \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} \exp(-i\tilde{\alpha}\tilde{x}') d\tilde{\alpha} \times$$

$$\times \int_{-\beta_j}^{\beta_j} \exp(-i\tilde{\beta}\tilde{y}') d\tilde{\beta} = \frac{i}{\lambda} 4\alpha_j\beta_j A_{0j} \exp[-i(\alpha_{0j}\tilde{x}' + \beta_{0j}\tilde{y}')] \times \quad (6.97)$$

$$\times \frac{\sin \alpha_j \tilde{x}' \sin \beta_j \tilde{y}'}{\alpha_j \tilde{x}' \beta_j \tilde{y}'}$$

Для всей системы отверстий в целом

$$u(\tilde{x}', \tilde{y}') = \frac{4i}{\lambda} \sum_{j=1}^N A_{0j} \alpha_j \beta_j \frac{\sin \alpha_j \tilde{x}' \sin \beta_j \tilde{y}'}{\alpha_j \tilde{x}' \beta_j \tilde{y}'} \times \quad (6.98)$$

$$\times \exp[-i(\alpha_{0j}\tilde{x}' + \beta_{0j}\tilde{y}')].$$

Пусть  $\alpha_1 = \alpha_2 = \mathbf{K} = \alpha_j = \mathbf{K} = \alpha_N = \alpha$ ;

$\beta_1 = \beta_2 = \mathbf{K} = \beta_j = \mathbf{K} = \beta_N = \beta$ ;  $A_{01} = A_{02} = \mathbf{K} = A_{0j} = \mathbf{K} = A_{0N} = A_0$ .

Тогда

$$u(\tilde{x}', \tilde{y}') = \frac{4}{\lambda} A_0 \alpha \beta \frac{\sin \alpha \tilde{x}' \sin \beta \tilde{y}'}{\alpha \tilde{x}' \beta \tilde{y}'} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N [\sin(\alpha_{0j}\tilde{x}' + \beta_{0j}\tilde{y}') + i \cos(\alpha_{0j}\tilde{x}' + \beta_{0j}\tilde{y}')].$$

При этом распределение освещённости в дифракционном пятне определится выражением вида



$$E(\tilde{x}', \tilde{y}') = u(\tilde{x}', \tilde{y}')u^*(\tilde{x}', \tilde{y}') = \left( \frac{4}{\lambda} A_0 \alpha \beta \frac{\sin \alpha \tilde{x}' \sin \beta \tilde{y}'}{\alpha \tilde{x}' \beta \tilde{y}'} \right)^2 \times \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N \sin(\alpha_{0j} \tilde{x}' + \beta_{0j} \tilde{y}') \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^N \cos(\alpha_{0j} \tilde{x}' + \beta_{0j} \tilde{y}') \right]^2 \right\}. \quad (6.99)$$

При  $N = 1$

$$E(\tilde{x}', \tilde{y}') = E_0(\tilde{x}', \tilde{y}') = \left( \frac{4}{\lambda} A_0 \alpha \beta \frac{\sin \alpha \tilde{x}' \sin \beta \tilde{y}'}{\alpha \tilde{x}' \beta \tilde{y}'} \right)^2.$$

$$\text{При } \tilde{x}' = 0; \tilde{y}' = 0: E(0, 0) = N^2 \left( \frac{4}{\lambda} A_0 \alpha \beta \right)^2 = N^2 E_0(0, 0).$$

Следует обратить внимание, что в результате перераспределения энергии освещённость в центре дифракционной картины увеличивается в  $N^2$  раз.

При этом

$$\tilde{E}(\tilde{x}', \tilde{y}') = \Phi_M(\alpha_{0j} \tilde{x}', \beta_{0j} \tilde{y}') \tilde{E}_0(\tilde{x}', \tilde{y}'),$$

где  $\tilde{E}_0(\tilde{x}', \tilde{y}') = \text{sinc}^2(\alpha \tilde{x}') \text{sinc}^2(\beta \tilde{y}')$ ;  $\text{sinc}(z) = \frac{\sin z}{z}$ ;  $\Phi_M(\alpha_{0j} \tilde{x}', \beta_{0j} \tilde{y}')$  – функция амплитудной модуляции пятна рассеяния в дифракционной картине изображения осевой точки, образованной отдельным отверстием экрана, при этом

$$N^2 \Phi_M(\alpha_{0j} \tilde{x}', \beta_{0j} \tilde{y}') = \left[ \sum_{j=1}^N \sin(\alpha_{0j} \tilde{x}' + \beta_{0j} \tilde{y}') \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^N \cos(\alpha_{0j} \tilde{x}' + \beta_{0j} \tilde{y}') \right]^2; \quad (6.100)$$

$$0 \leq \Phi_M(\alpha_{0j} \tilde{x}', \beta_{0j} \tilde{y}') \leq 1.$$

Легко видеть, что  $\tilde{E}_0(\tilde{x}', \tilde{y}') = 0$  при  $\alpha \tilde{x}'_m = \pm \mu \pi$ ;  $\beta \tilde{y}'_m = \pm \nu \pi$ , где  $\mu, \nu = 1, 2, K$ . Отсюда  $\tilde{x}'_m = \pm \frac{\mu}{\alpha} \pi$ ;  $\tilde{y}'_m = \pm \frac{\nu}{\beta} \pi$ . При этом будем считать

$$\tilde{x}' = \pm \frac{\mu}{\alpha} \pi \tilde{x}''; \tilde{y}' = \pm \frac{\nu}{\beta} \pi \tilde{y}'', \text{ где } 0 \leq \tilde{x}'' \leq 1; 0 \leq \tilde{y}'' \leq 1.$$

Тогда

$$\tilde{E}_0(\tilde{x}'', \tilde{y}'') = \text{sinc}^2(\mu \pi \tilde{x}'') \text{sinc}^2(\nu \pi \tilde{y}'');$$

$$N^2 \Phi_M(\tilde{\alpha}_{0j} \tilde{x}'' , \tilde{\beta}_{0j} \tilde{y}'') = \left[ \sum_{j=1}^N \sin\left( \frac{\alpha_{0j}}{\alpha} \mu \pi \tilde{x}'' + \frac{\beta_{0j}}{\beta} \nu \pi \tilde{y}'' \right) \right]^2 + \quad (6.101)$$

$$+ \left[ \sum_{j=1}^N \cos\left( \frac{\alpha_{0j}}{\alpha} \mu \pi \tilde{x}'' + \frac{\beta_{0j}}{\beta} \nu \pi \tilde{y}'' \right) \right]^2.$$

Пусть  $\mu = \nu = 1$ . При этом

$$\tilde{E}_0(\tilde{x}'', \tilde{y}'') = \text{sinc}^2(\pi \tilde{x}'') \text{sinc}^2(\pi \tilde{y}'');$$

$$N^2 \Phi_M(\tilde{\alpha}_{0j} \tilde{x}'', \tilde{\beta}_{0j} \tilde{y}'') = \left[ \sum_{j=1}^N \sin\left( \frac{\alpha_{0j}}{\alpha} \pi \tilde{x}'' + \frac{\beta_{0j}}{\beta} \pi \tilde{y}'' \right) \right]^2 +$$

$$+ \left[ \sum_{j=1}^N \cos\left( \frac{\alpha_{0j}}{\alpha} \pi \tilde{x}'' + \frac{\beta_{0j}}{\beta} \pi \tilde{y}'' \right) \right]^2.$$

Пусть при этом  $N = 2$ . Полагая  $\alpha_{01} = -\alpha_{02} = \alpha_0$ ;  $\beta_{01} = -\beta_{02} = \beta_0$ , получаем

$$\Phi_M(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x}'', \tilde{\beta}_0 \tilde{y}'') = \frac{1 + \cos\left[ 2\pi \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} \tilde{x}'' + \frac{\beta_0}{\beta} \tilde{y}'' \right) \right]}{2}.$$

Пусть  $y'' = 0$ . Тогда

$$\Phi_M(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x}'') = \frac{1 + \cos\left( 2\pi \frac{\alpha_0}{\alpha} \tilde{x}'' \right)}{2}.$$

Пусть  $\Phi_M(\tilde{\alpha}_0 \tilde{x}'') = 0$ . При этом  $\cos\left( 2\pi \frac{\alpha_0}{\alpha} \tilde{x}'' \right) = -1$ . Отсюда

$$2\pi \frac{\alpha_0}{\alpha} \tilde{x}'' = (2m+1)\pi.$$

Пусть  $\tilde{x}'' = 1$ . Тогда  $2\pi \frac{\alpha_0}{\alpha} = (2m+1)\pi$ .

Отсюда  $\frac{\alpha_0}{\alpha} = m + \frac{1}{2}$ . При  $m = 0$ :  $\frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{1}{2}$ , т.е. это решение

физически не реализуемо.

При  $m = 1$ :  $\frac{\alpha_0}{\alpha} = \frac{3}{2}$  и т.д.

Пусть  $\alpha_j \rightarrow 0$ ,  $\beta_j \rightarrow 0$ . При этом

$$\frac{\sin \alpha_j \tilde{x}'}{\alpha_j \tilde{x}'} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin \beta_j \tilde{y}'}{\beta_j \tilde{y}'} \rightarrow 1.$$

Будем считать, что

$$S_j = 4\alpha_j \beta_j = \lim_{\substack{\Delta\alpha_{0j} \rightarrow 0 \\ \Delta\beta_{0j} \rightarrow 0}} \Delta\alpha_{0j} \Delta\beta_{0j} = dS.$$

А тогда

$$u(\tilde{x}', \tilde{y}') = \frac{i}{\lambda} \lim_{\substack{\Delta\alpha_{0j} \rightarrow 0 \\ \Delta\beta_{0j} \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N A_{0j} \exp[-i(\alpha_{0j} \tilde{x}' + \beta_{0j} \tilde{y}')] \Delta\alpha_{0j} \Delta\beta_{0j}.$$

Положив  $A_{0j} = A_0$ , находим

$$\begin{aligned} u(\tilde{x}', \tilde{y}') &= \frac{i}{\lambda} A_{0j} \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(-i\alpha_{0j} \tilde{x}') d\alpha_{0j} \int_{-\beta}^{\beta} \exp(-i\beta_{0j} \tilde{y}') d\beta_{0j} = \\ &= \frac{4i}{\lambda} A_0 \alpha \beta \frac{\sin \alpha \tilde{x}'}{\alpha \tilde{x}'} \frac{\sin \beta \tilde{y}'}{\beta \tilde{y}'}, \end{aligned}$$

т.е. получили выражение, определяющее распределение светового возмущения в дифракционной картине при сплошном отверстии прямоугольной формы в экране.

Предположим, что область  $j$ -го отверстия ограничена окружностью, при этом удобно ввести полярную систему координат

$$\begin{aligned} \xi &= a\rho' \cos \theta, & \rho' &= \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}}, & 0 \leq \rho' &\leq 1, & a &= \frac{D'}{2}; \\ \eta &= a\rho' \sin \theta, \end{aligned}$$

$$x' = r' \cos \varphi, \quad y' = r' \sin \varphi, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = R' \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Здесь  $a$  – радиус круглого экрана с отверстиями;  $\rho', \theta$  – полярные координаты в плоскости экрана;  $r', \varphi$  – полярные координаты в плоскости наблюдения дифракционной картины.

При этом выражение, определяющее световое возмущение в дифракционной картине изображения осевой точки, примет вид

$$\begin{aligned} u(r', \varphi) &= \frac{ika^2}{2\pi R'^2} \iint_S G(\rho', \theta) \times \\ &\times \exp\left[-ik \frac{a}{R'} r' \rho' \cos(\theta - \varphi)\right] \rho d\rho' d\theta. \end{aligned} \tag{6.102}$$

Обратимся к рис.6.19, на котором показана точка  $Q_j$   $j$ -го отверстия в экране в системе полярных координат  $(\rho', \theta)$  и  $(\rho'_j, \theta_j)$ .

Полус  $O$  системы координат  $(\rho', \theta)$  и полус системы координат  $(r', \varphi)$  лежат на одной прямой, принятой в качестве оси, а полус  $C$  системы координат  $(\rho'_j, \theta_j)$  совмещён с центром  $j$ -го отверстия, положение которого в системе координат  $(\rho', \theta)$  определено координатами  $(\rho'_{0j}, \theta_{0j})$ , при этом полярные оси обеих систем координат параллельны.

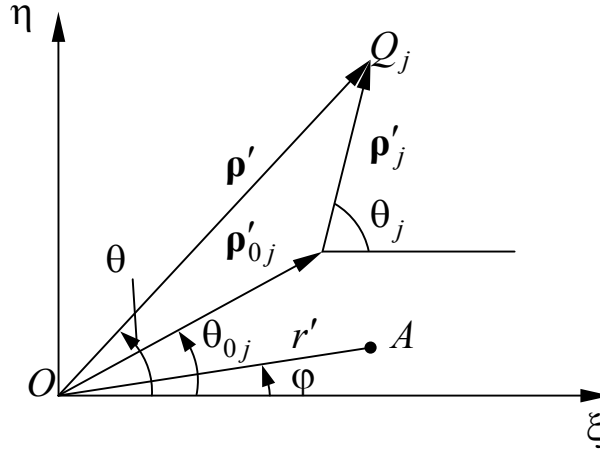


Рис.6.19. Координаты элемента системы отверстий круглой формы

На этом же рисунке показана точка  $A$  плоскости изображения, положение которой определяется координатами  $(r', \varphi)$ . Из рисунка следует, что

$$\rho' \cos(\theta - \varphi) = \rho'_{0j} \cos(\theta_{0j} - \varphi) + \rho'_j \cos(\theta_j - \varphi).$$

Обозначим  $\theta_{0j} - \varphi = \psi_{0j}$ ,  $\theta_j - \varphi = \psi_j$ .

Выполнив соответствующую подстановку с учётом принятых обозначений, получаем

$$u_j(r') = \frac{ika_j^2}{2\pi R'^2} \exp\left(-ik \frac{a}{R'} r' \rho'_{0j} \cos \psi_{0j}\right) \times \int \int_{S_j} G(\rho'_j, \psi_j) \exp\left(-ik \frac{a_j}{R'} r' \rho'_j \cos \psi_j\right) \rho'_j d\rho'_j d\psi_j, \quad (6.103)$$

где  $a$  – радиус круглого экрана с отверстиями; при этом  $0 \leq \rho'_{0j} \leq 1$ ;  $a_j$  – радиус  $j$ -го отверстия экрана, при этом  $0 \leq \rho'_j \leq 1$ .

Обозначим  $\frac{a_j}{R'} = A_j$ ;  $kA_j r' = \tilde{r}'_j$ ;  $\tilde{\rho}'_{0j} = \frac{a}{a_j} \rho'_{0j}$ , при этом

$$0 \leq \tilde{\rho}'_{0j} \leq \frac{a}{a_j}.$$

$$\text{Положив } G(\rho'_j, \psi_j) = \frac{u_j(\rho'_j, \psi_j)}{R'} = \frac{u_j(0, 0)}{R'} = \frac{u_{0j}}{R'},$$

где  $u_{0j}$  – амплитуда светового возмущения на расстоянии единицы длины от источника, получаем

$$\begin{aligned} u_j(\tilde{r}_j) &= i \frac{R'}{\lambda} A_j^2 u_{0j} \exp(-i\tilde{r}_j' \tilde{\rho}'_j \cos \psi_{0j}) \times \\ &\times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-i\tilde{r}_j' \rho'_j \cos \psi_j) \rho'_j d\rho'_j d\psi_j, \\ u_j(\tilde{r}_j', \psi_j) &= i u_{0j} \frac{R'}{\lambda} A_j^2 \exp(-i\tilde{r}_j' \tilde{\rho}'_j \cos \psi_{0j}) \times \\ &\times \int_0^1 \rho'_j d\rho'_j \int_0^{2\pi} \exp(-i\tilde{r}_j' \rho'_j \cos \psi_j) d\psi_j. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Напомним, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-iz \cos \psi) d\psi = J_0(z), \text{ а } \frac{d}{dz} [zJ_1(z)] = zJ_0(z).$$

Применив эти соотношения, получаем

$$\begin{aligned} u_j(\tilde{r}_j') &= i k u_{0j} R' A_j^2 \exp(-i\tilde{r}_j' \tilde{\rho}'_j \cos \psi_{0j}) \int_0^1 J_0(\tilde{r}_j' \rho'_j) \rho'_j d\rho'_j = \\ &= \frac{i}{2} k u_{0j} R' A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}_j')}{\tilde{r}_j'} \exp(-i\tilde{r}_j' \tilde{\rho}'_j \cos \psi_{0j}). \end{aligned}$$

При заполнении отверстий в экране когерентным излучением распределение светового возмущения в дифракционной картине определится выражением вида

$$\begin{aligned} u(r') &= \frac{1}{2} k R' \left[ \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}_j')}{\tilde{r}_j'} \sin(\tilde{r}_j' \tilde{\rho}'_j \cos \psi_{0j}) + \right. \\ &\left. + i \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}_j')}{\tilde{r}_j'} \cos(\tilde{r}_j' \tilde{\rho}'_j \cos \psi_{0j}) \right]. \end{aligned} \quad (6.105)$$

При этом соответствующее распределение освещённости в дифракционной картине равно произведению взаимно сопряжённых величин  $u(r')u^*(r')$ , т.е.

$$E(r') = \frac{1}{4} k^2 R'^2 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}'_j)}{\tilde{r}'_j} \sin(\tilde{r}'_j \tilde{\rho}'_{0j} \cos \psi_{0j}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}'_j)}{\tilde{r}'_j} \cos(\tilde{r}'_j \tilde{\rho}'_{0j} \cos \psi_{0j}) \right]^2 \right\}. \quad (6.106)$$

При  $N = 1$ :

$$E(r') = E_0(r) = \left[ \frac{1}{2} k R' u_0 A^2 \frac{2J_1(\tilde{r}')}{\tilde{r}'} \right]^2.$$

Пусть  $A_1 = A_2 = \mathbf{K} = A_j = \mathbf{K} = A$ ,  $u_{01} = u_{02} = \mathbf{K} = u_{0j} = \mathbf{K} = u_0$ .

Тогда

$$E(r') = \left[ \frac{1}{2} k R' u_0 A^2 \frac{2J_1(\tilde{r}')}{\tilde{r}'} \right]^2 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N \sin(\tilde{r}' \tilde{\rho}'_{0j} \cos \psi_{0j}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \sum_{j=1}^N \cos(\tilde{r}' \tilde{\rho}'_{0j} \cos \psi_{0j}) \right]^2 \right\}. \quad (6.107)$$

При  $r' = 0$ :

$$E(0) = N^2 \left( \frac{1}{2} k R' u_0 A^2 \right)^2 = N^2 E_0(0).$$

При этом

$$\tilde{E}(r') = \Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_{0j}, \psi_{0j}) \tilde{E}_0(r'),$$

где  $\tilde{E}_0(r') = \left[ \frac{2J_1(\tilde{r}')}{\tilde{r}'} \right]^2$ ;  $\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_{0j}, \psi_{0j})$  – функция амплитудной

модуляции пятна рассеяния в дифракционной картине изображения осевой точки, образованной отдельным отверстием экрана, при этом

$$N^2 \Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_{0j}, \psi_{0j}) = \left[ \sum_{j=1}^N \sin(\tilde{r}' \tilde{\rho}'_{0j} \cos \psi_{0j}) \right]^2 + \\ + \left[ \sum_{j=1}^N \cos(\tilde{r}' \tilde{\rho}'_{0j} \cos \psi_{0j}) \right]^2; \quad (6.108)$$

$$0 \leq \Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_{0j}, \psi_{0j}) \leq 1.$$

Пусть  $N = 2$ . Полагая  $\tilde{\rho}'_{01} = \tilde{\rho}'_{02} = \tilde{\rho}'_0$ , получаем

$$\tilde{E}(r') = \Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_0, \psi_{01}, \psi_{02}) \tilde{E}_0(r'),$$

где  $\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}', \psi_{01}, \psi_{02}) = \frac{1 + \cos[\tilde{r}'\tilde{\rho}'(\cos\psi_{02} - \cos\psi_{01})]}{2}$ .

Легко видеть, что из условия  $\cos\psi_{02} - \cos\psi_{01} = 0$  следует  $\psi_{01} = \pm\psi_{02} = \psi_0$ . При этом  $\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}', \psi_0) = 1$ , а  $\tilde{E}(r') = \tilde{E}_0(r')$ . Практический интерес представляет условие  $\psi_{01} = \psi_0$ ;  $\psi_{02} = \psi_0 + \pi$ . При этом

$$\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}', \psi_0) = \frac{1 + \cos(2\tilde{r}'\tilde{\rho}' \cos\psi_0)}{2}.$$

Отсюда следует, что при  $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{E}(r') = \tilde{E}_0(r') = \left[ \frac{2J_1(\tilde{r}')}{\tilde{r}'} \right]^2.$$

При  $\psi_0 = 0$ :

$$\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}') = \frac{1 + \cos(2\tilde{r}'\tilde{\rho}')}{2},$$

где  $0 \leq \Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}') \leq 1$ .

Наглядное представление влияния функции  $\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}')$  на распределение освещённости в изображении точки даёт следующий пример.

Пусть  $\tilde{E}(r') = 0$ . Это возможно при следующих условиях:

- $\tilde{E}_0(r') = 0$ ;
- $\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}') = 0$ ;
- $\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}') = \tilde{E}_0(r') = 0$ .

Пусть при  $\tilde{r}' = \tilde{r}'_{i\acute{e}}$  выполняется условие  $\tilde{E}_0(r'_{i\acute{e}}) = \left[ \frac{2J_1(\tilde{r}'_{i\acute{e}})}{\tilde{r}'_{i\acute{e}}} \right]^2 = 0$ .

Пусть при этом и  $\Phi_M(\tilde{r}'_{ок}, \tilde{\rho}') = 0$ . Тогда  $2\tilde{r}'_{i\acute{e}}\tilde{\rho}' = (1 + 2q)\pi$ , где  $q = 0, 1, 2, \dots, K$ . Отсюда следует, что  $\tilde{\rho}'_0 = \tilde{\rho}'_{0q} = \frac{1 + 2q}{2\tilde{r}'_{ок}}\pi$ .

При  $\tilde{\rho}'_0 = \tilde{\rho}'_{0q}$  из условия  $\Phi_M(\tilde{r}'_{0t}, \tilde{\rho}'_{0q}) = 0$  находим

$$\tilde{r}'_{0t} = \frac{1 + 2t}{2\tilde{\rho}'_{0q}}\pi,$$

где  $t = 0, 1, 2, \dots, K, q$ . В результате соответствующей подстановки получаем

$$\tilde{r}'_{0t} = \frac{1+2t}{1+2q} \tilde{r}'_{ок}.$$

При  $t = 0$   $\tilde{r}'_{0t} = \frac{\tilde{r}'_{ок}}{1+2q}$ , а при  $t = q$   $\tilde{r}'_{0t} = \tilde{r}'_{ок}$ .

При  $t = q = 0$ :  $\tilde{r}'_{0t} = \tilde{r}'_0 = 3,832$ .

В общем случае распределение освещённости в дифракционной картине осевой точки определяется выражением (6.105) при условии одновременного изменения углов  $\varphi_{0j}$  на одну и ту же величину  $\varphi$ , т.е.

$$E(r', \varphi) = \frac{1}{4} k^2 R^2 \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}'_j)}{\tilde{r}'_j} \sin(\tilde{r}'_j \tilde{\rho}'_{0j} \cos(\psi_{0j} + \varphi)) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j^2 \frac{2J_1(\tilde{r}'_j)}{\tilde{r}'_j} \cos(\tilde{r}'_j \tilde{\rho}'_{0j} \cos(\psi_{0j} + \varphi)) \right]^2 \right\}, \quad (6.109)$$

где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

При  $u_{01} = u_{02} = K = u_{0j} = K = u_0$ ;  $A_1 = A_2 = K = A_j = K = A$ :

$\tilde{E}(r', \varphi) = \Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_0, \psi_0, \varphi) E_0(r')$ , где

$$\Phi_M(\tilde{r}', \tilde{\rho}'_0, \psi_0, \varphi) = \left\{ \sum_{j=1}^N \sin[\tilde{r}'_j \tilde{\rho}'_{0j} \cos(\psi_{0j} + \varphi)] \right\}^2 + \\ + \left\{ \sum_{j=1}^N \cos[\tilde{r}'_j \tilde{\rho}'_{0j} \cos(\psi_{0j} + \varphi)] \right\}^2. \quad (6.110)$$

### 6.2.7. Дифракционный интеграл при наличии aberrаций

Пусть сферический монохроматический волновой фронт падает на круглое отверстие и сходится в осевой точке  $O'$ . Рассмотрим световое возмущение  $u(P')$  в произвольной точке  $P'$  вблизи точки  $O'$ . Положение точки  $P'$  относительно точки  $O'$  определим вектором  $\mathbf{r}'$ . Будем считать, что расстояние  $r' = O'P'$  и радиус  $a' (>> \lambda)$  отверстия малы по сравнению с радиусом  $R'_0 = O'C'$  волнового фронта  $L'$ , который заполняет это отверстие, как показано на рис.6.20.



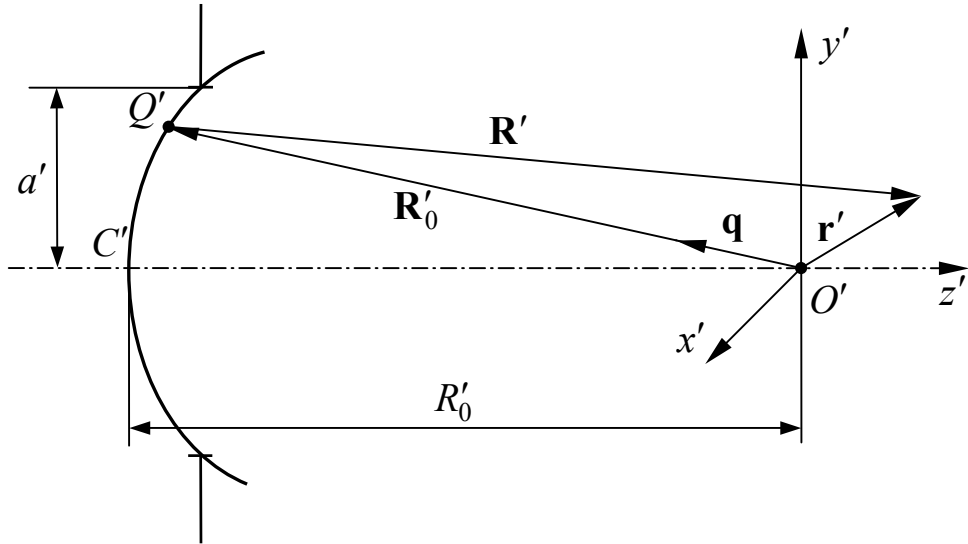


Рис.6.20. Световое возмущение в дифракционном изображении точки

Обозначим через  $R'$  расстояние от точки  $Q'$  волнового фронта  $L'$  до точки наблюдения  $P'$ , а через  $\frac{A}{R_0'}$  – световое возмущение (амплитуду) падающего волнового фронта в точке  $Q'$ . Тогда, применяя принцип Гюйгенса-Френеля, получаем

$$u(P') = \frac{i}{\lambda} \frac{A \exp(-ikR_0')}{R_0'} \iint_S \frac{\exp(ikR')}{R'} dS. \quad (6.111)$$

Поскольку рассматриваемые расстояния  $r'$  предполагаются малыми, вариации коэффициента наклона по волновому фронту пренебрежимо малы. В соответствии с рис.6.20 имеем

$$\mathbf{R}'_0 + \mathbf{R}' = \mathbf{r}'.$$

Обозначая через  $\mathbf{q}$  единичный вектор в направлении  $O'Q'$ , получаем

$$\mathbf{R}'_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'.$$

$$\text{Но } \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}' = R' \cos(180^\circ - \angle \mathbf{q}, \mathbf{R}') = -R' \cos(\mathbf{q}, \mathbf{R}').$$

С хорошим приближением можно принять  $\cos(\mathbf{q}, \mathbf{R}') = 1$ . Тогда  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}' = -R'$ . При этом

$$\mathbf{R}' - \mathbf{R}'_0 = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'. \quad (6.112)$$

Элемент  $dS$  волнового фронта равен

$$dS = R_0'^2 d\Omega,$$

где  $d\Omega$  – элемент телесного угла, под которым элемент  $dS$  виден из точки  $O'$ . Без заметной ошибки можно заменить в знаменателе подинтегрального выражения  $R'$  на  $R_0'$ . При этом

$$u(P') = \frac{i}{\lambda} A \int_{\Omega} \exp(-ik\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}') d\Omega. \quad (6.113)$$

Теперь интегрирование производится по всему телесному углу  $\Omega$ , под которым отверстие видно из точки  $O'$ . Полученное выражение представляет собой интеграл Дебая и выражает поле как результат суперпозиции плоских волн, распространяющихся во всех направлениях (определяемых векторами  $\mathbf{q}$ ), попадающих в  $\Omega$ .

Для вычисления интеграла представим подинтегральное выражение в более явном виде. Примем за начало декартовых координат точку  $O'$ , при этом  $P' = P'(x', y', z')$ , а  $Q' = Q'(\xi', \eta', \zeta')$ .

Будем считать, что

$$\begin{aligned} \xi' &= a' \rho \sin \theta, & x' &= r' \sin \varphi, \\ \eta' &= a' \rho \cos \theta; & y' &= r' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Так как точка  $Q'$  лежит на сферическом волновом фронте  $L$ , имеем

$$\zeta' = -\sqrt{R_0'^2 - a'^2 \rho^2} = -R_0' \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a'^2 \rho^2}{R_0'^2} - K \right).$$

Следовательно,

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' = \frac{x' \xi' + y' \eta' + z' \zeta'}{R_0'} = \frac{a' \rho r' \cos(\theta - \varphi)}{R_0'} - z' \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{a'^2 \rho^2}{R_0'^2} - K \right).$$

Введём безразмерные переменные  $u$  и  $v$ , которые в сочетании с углом  $\varphi$  определяют положение точки  $P'$ , а именно

$$u' = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a'}{R_0'} \right)^2 z', \quad v' = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a'}{R_0'} \right) r' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a'}{R_0'} \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Если члены, содержащие отношение  $\frac{\rho}{R_0'}$  в степени, превышающей вторую, пренебрежимо малы по сравнению с единицей, то

$$k\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' = v' \rho \cos(\theta - \varphi) - \left( \frac{R_0'}{a'} \right)^2 u' + \frac{1}{2} u' \rho^2.$$

Кроме того, элемент телесного угла  $d\Omega$  равен

$$d\Omega = \frac{dS}{R_0'^2} = \frac{a'^2 \rho d\rho d\theta}{R_0'^2}.$$

С учётом этих соотношений получаем

$$u(P') = \frac{i}{\lambda} \frac{a'^2 A}{R_0'^2} \exp \left[ i \left( \frac{R_0'}{a'} \right)^2 u' \right] \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -i \left[ v' \rho \cos(\theta - \varphi) + \frac{1}{2} u' \rho^2 \right] \right\} \rho d\rho d\theta. \quad (6.114)$$

Рассмотрим центрированную оптическую систему, образующую изображение точечного источника монохроматического излучения  $P_0$ , как показано на рис.6.21. Выберем начало декартовой системы координат в месте параксиального изображения точки  $P_0$ , т.е. в точке  $P'_0$ , при этом ось  $z'$  направим вдоль луча  $C'P'_0$ , где  $C'$  – центр выходного зрачка. Ось  $y'$  расположим в меридиональной плоскости, т.е. в плоскости, в которой расположена точка  $P_0$  и оптическая ось системы. Обозначим через  $y_0$  и  $y'_0$  расстояния от оси до точек  $P_0$  и  $P'_0$  соответственно. Деформацию волнового фронта (отклонение от сферы) в области выходного зрачка опишем функцией aberrаций или aberrационной функцией  $W$ . Пусть  $\tilde{Q}'$  и  $Q'$  – точки пересечения луча в пространстве изображений с волновым фронтом, проходящим через точку  $C'$ , и с опорной сферой Гаусса соответственно. Если предположить, что показатель преломления среды в пространстве изображений равен единице, то волновая aberrация  $W$  определяется расстоянием  $\tilde{Q}'Q'$ , измеренным вдоль луча (на рисунке  $W > 0$ ).

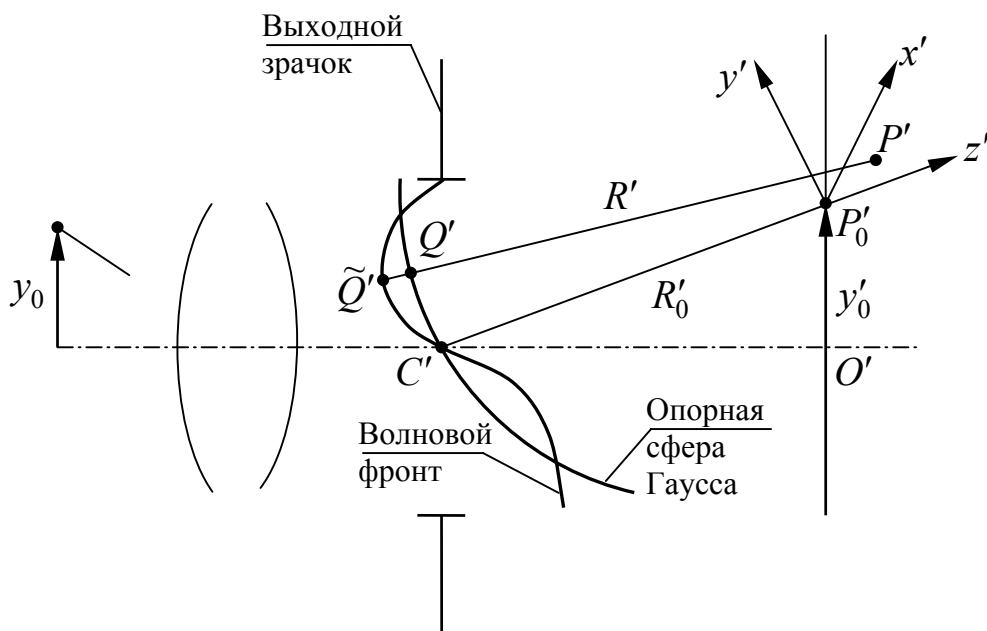


Рис.6.21. Аберрации в изображении точки

Пусть  $R'_0$  – радиус опорной сферы Гаусса, равный отрезку  $C'P'_0$ ,  $R'$  – расстояние между точкой  $Q'$  и произвольной точкой  $P'$ , расположенной вблизи точки  $P'_0$ . Возмущение в точке  $Q'$  описывается величиной

$$\frac{A \exp[ik(W - R'_0)]}{R'_0},$$

где  $\frac{A}{R'_0}$  – амплитуда светового возмущения в точке  $Q'$ . Согласно

принципу Гюйгенса-Френеля возмущение в точке  $P'$  равно

$$u(P') = -\frac{i}{\lambda} \frac{A \exp(-ikR'_0)}{R'_0} \iint_S \frac{\exp[ik(W + R')]}{R'} dS, \quad (6.115)$$

где интегрирование проводится по той части опорной сферы Гаусса, которая открыта выходным зрачком, при этом предполагается, что смещение точки  $P'$  относительно точки  $P'_0$  невелико, а поэтому вариациями коэффициента наклона по волновому фронту можно пренебречь. Кроме того, предполагаем, что амплитуда световых колебаний на поверхности волнового фронта практически постоянна, т.е. коэффициент  $A$  можно вынести из под знака интеграла.

Пусть  $a'$  – радиус выходного зрачка, а  $\xi', \eta', \zeta'$  и  $x', y', z'$  – координаты точек  $Q'$  и  $P'$  соответственно, при этом

$$\begin{aligned} \xi' &= a' \rho \sin \theta, & x' &= r' \sin \varphi, \\ \eta' &= a' \rho \cos \theta; & y' &= r' \cos \varphi. \end{aligned}$$

В этом случае, как было показано,

$$k(R' - R'_0) = -v' \rho \cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2} u' \rho^2 + \left( \frac{R'_0}{a'} \right) u',$$

где  $u'$  и  $v'$  – "оптические координаты" точки  $P'$ , т.е.

$$u' = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a'}{R'_0} \right)^2 z', \quad v' = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a'}{R'_0} \right) \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

При  $z' = 0$ :  $k(R' - R'_0) = -v' \rho \cos(\theta - \varphi) = -k \frac{\xi' x' + \eta' y'}{R'_0}$ . При этом

$$u(x', y') = -\frac{i}{\lambda} \frac{A}{R'_0} \iint_S \frac{\exp(ikW)}{R'} \exp\left(-ik \frac{\xi' x' + \eta' y'}{R'_0}\right) d\xi' d\eta'. \quad (6.116)$$

Величину  $W$  удобно рассматривать как функцию  $y'_0$ ,  $\rho$  и  $\theta$ :  $W = W(y'_0, \rho, \theta)$ . Элемент поверхности опорной сферы Гаусса  $dS = a'^2 \rho d\rho d\theta$ . Если угол, образованный лучом  $C'P'_0$  с оптической

осью системы, мал, то пределами интегрирования могут служить  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Кроме того, для точек  $P'$ , расположенных вблизи точки  $P'_0$ , величину  $R'$ , стоящую в знаменателе подинтегрального выражения, можно заменить на  $R'_0$ .

В результате изложенного получаем

$$\begin{aligned} u(P') &= u(u', v', \varphi) = \\ &= -\frac{i}{\lambda} \frac{Aa'^2}{R_0'^2} \exp \left[ i \left( \frac{R'_0}{a'} \right)^2 u' \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp \left\{ i \left[ kW(y'_0, \rho, \theta) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - v' \rho \cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2} u' \rho^2 \right] \right\} \rho d\rho d\theta, \end{aligned} \quad (6.117)$$

при этом интенсивность (освещённость) света в точке  $P'$  равна

$$\begin{aligned} E(P') &= u(P') u^*(P') = \\ &= \left( \frac{Aa'^2}{\lambda R_0'^2} \right)^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp \left\{ i \left[ kW(y'_0, \rho, \theta) - v' \rho \cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2} u' \rho^2 \right] \right\} \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned}$$

В точке параксиального изображения ( $v' = 0, u' = 0$ ) при  $W(y'_0, \rho, \theta) = 0$  имеем

$$E_0(P') = \left( \frac{Aa'^2}{\lambda R_0'^2} \right)^2 \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta \right|^2 = \pi^2 \left( \frac{Aa'^2}{\lambda R_0'^2} \right)^2.$$

Тогда нормированная интенсивность определится выражением вида:

$$\begin{aligned} i(P') &= \frac{E(P')}{E_0(P')} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp \left\{ i \left[ kW(y'_0, \rho, \theta) - v' \rho \cos(\theta - \varphi) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{2} u' \rho^2 \right] \right\} \rho d\rho d\theta \right|^2. \end{aligned}$$

В отсутствие аберраций интенсивность света максимальна в точке параксиального изображения. При наличии же аберраций максимум интенсивности в общем случае может сместиться из точки параксиального изображения в другую точку. Практический интерес представляет максимальная величина нормированной интенсивности и её положение в определённой плоскости наблюдения. Эту величину называют числом Штреля или определительной яркостью.

### Теорема смещения

Пусть  $W$  и  $W'$  – две функции аббераций, причём

$$W' = W + H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M,$$

где  $H, K, L, M$  – постоянные порядка  $\lambda$ .

Выражение для нормированной интенсивности удобно записать в виде:

$$i(u', v', \varphi) = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[if(u', v', \varphi; \rho, \theta)] \rho d\rho d\theta \right|^2,$$

где  $f(u', v', \varphi; \rho, \theta) = kW - v'\rho\cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2}u'\rho^2$ . Последнее выражение

можно представить в виде:

$$\begin{aligned} f(u', v', \varphi; \rho, \theta) &= kW' - k[H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M] - \\ &- v'\rho\cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2}u'\rho^2 = \\ &= kW' - \tilde{v}'\rho\cos(\theta - \tilde{\varphi}) - \frac{1}{2}\tilde{u}'\rho^2 - kM = f'(\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{\varphi}; \rho, \theta) - kM, \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}' = u' + 2kH$ ,  $\tilde{v}'\sin\tilde{\varphi} = v'\sin\varphi + kK$ ,  $\tilde{v}'\cos\tilde{\varphi} = v'\cos\varphi + kL$ .

$$\text{Но } \tilde{u}' = k\left(\frac{a'}{R_0'}\right)^2 \tilde{z}' = u' + 2kH = k\left(\frac{a'}{R_0'}\right)^2 z' + 2kH, \text{ т.е.}$$

$$\tilde{z}' = z' + 2\left(\frac{R_0'}{a'}\right)^2 H; \quad \tilde{v}' = k\left(\frac{a'}{R_0'}\right) \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2}, \text{ где}$$

$$\tilde{x}' = \tilde{r}'\sin\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{v}'}{k}\left(\frac{R_0'}{a'}\right)\sin\tilde{\varphi} = \frac{1}{k}\left(\frac{R_0'}{a'}\right)v'\sin\varphi + \left(\frac{R_0'}{a'}\right)K = x' + \left(\frac{R_0'}{a'}\right)K;$$

$$\tilde{y}' = \tilde{r}'\cos\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{v}'}{k}\left(\frac{R_0'}{a'}\right)\cos\tilde{\varphi} = \frac{1}{k}\left(\frac{R_0'}{a'}\right)v'\cos\varphi + \left(\frac{R_0'}{a'}\right)L = y' + \left(\frac{R_0'}{a'}\right)L.$$

Итак,

$$\begin{aligned} i(u', v', \varphi) &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[if(u', v', \varphi; \rho, \theta)] \rho d\rho d\theta \right|^2 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \exp(-ikM) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[if'(\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{\varphi}; \rho, \theta)] \rho d\rho d\theta \right|^2 = i(\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{\varphi}). \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема смещения: добавление к функции аббераций члена  $H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M$ ,

где  $H, K, L, M$  – постоянные порядка  $\lambda$ , не изменяет трёхмерного распределения интенсивности света в параксиальном изображении точки, а только смещает его как целое в соответствии с преобразованиями:

$$\tilde{x}' = x' + \left(\frac{R'_0}{a'}\right)K, \quad \tilde{y}' = y' + \left(\frac{R'_0}{a'}\right)L, \quad \tilde{z}' = z' + 2\left(\frac{R'_0}{a'}\right)^2 H. \quad \text{Иными}$$

словами, происходит смещение изображения точки на величину  $2\left(\frac{R'_0}{a'}\right)^2 H$  вдоль луча  $C'P'_0$  (вдоль оси  $z'$ ) и на величины  $\left(\frac{R'_0}{a'}\right)K$  и  $\left(\frac{R'_0}{a'}\right)L$  вдоль направлений осей  $x'$  и  $y'$  соответственно.

### Изменение опорной сферы

Аддитивные члены в правой части выражения

$$W' = W + H\rho^2 + K\rho\sin\theta + L\rho\cos\theta + M$$

можно рассматривать как величины, характеризующие изменение опорной сферы Гаусса. Предположим, что выбрана новая опорная сфера с центром в точке  $\tilde{P}'_0(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$  вблизи параксиального изображения точки  $P'_0$ , при этом радиус кривизны её равен  $\tilde{R}' = N\tilde{P}'_0$ , как показано на рис.6.22, а расстояние от новой опорной сферы до опорной сферы Гаусса не превышает нескольких длин волн.

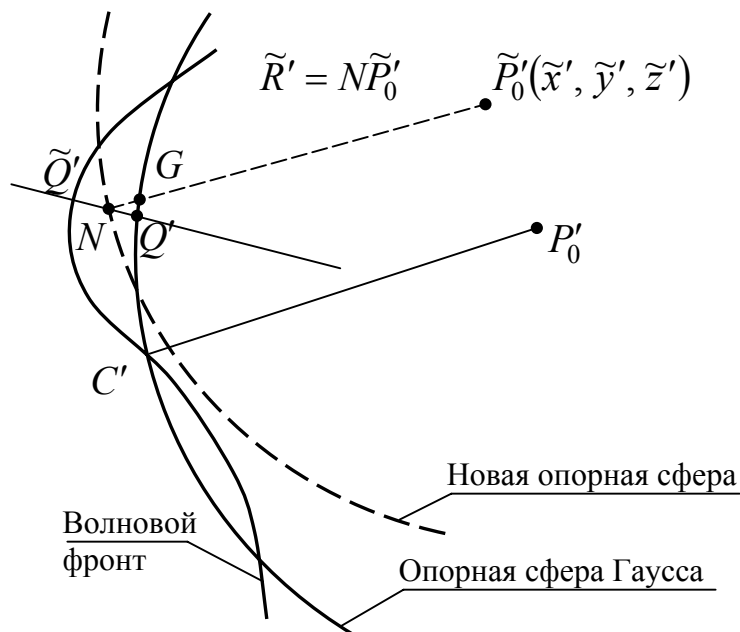


Рис.6.22. Изменение опорной сферы

Пусть  $N$  – точка пересечения луча  $\tilde{Q}'Q'$  с этой новой опорной сферой. Тогда функция aberrаций  $W'$ , отнесённая к новой сфере, в соответствии с рис.6.22 равна

$$W' = \tilde{Q}'N = \tilde{Q}'Q' - NQ' \approx \tilde{Q}'Q' - NG,$$

где  $G$  – точка пересечения линии  $N\tilde{P}'_0$  с опорной сферой Гаусса, при этом показатель преломления среды в пространстве изображений предполагается равным единице. Величина  $\tilde{Q}'Q' = W$  равна волновой aberrации, отнесённой к опорной сфере Гаусса, а расстояние  $NG = N\tilde{P}'_0 - G\tilde{P}'_0 = \tilde{R}' - R'$ , где  $R'$  – расстояние между точками  $G$  и  $\tilde{P}'_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} W' &\approx W + R' - \tilde{R}' = W + R' - R'_0 + R'_0 - \tilde{R}' = \\ &= W + \frac{\lambda}{2\pi} \left[ -\tilde{v}'\rho \cos(\theta - \tilde{\varphi}) - \frac{1}{2}\tilde{u}'\rho^2 + \left(\frac{R'_0}{a'}\right)^2 \tilde{u}' \right] + R'_0 - \tilde{R}'. \end{aligned}$$

$$\text{Напомним, что } \tilde{u}' = k \left(\frac{a'}{R'_0}\right)^2 \tilde{z}', \quad \tilde{v}' = k \left(\frac{a'}{R'_0}\right) \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2};$$

$$\tilde{x}' = \tilde{r}' \sin \tilde{\varphi}, \quad \tilde{y}' = \tilde{r}' \cos \tilde{\varphi}.$$

Раскрыв последнее выражение, получаем

$$\begin{aligned} W' &= W - \left(\frac{a'}{R'_0}\right) \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2} \rho \cos \theta \cos \tilde{\varphi} - \left(\frac{a'}{R'_0}\right) \sqrt{\tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2} \rho \sin \theta \sin \tilde{\varphi} - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{R'_0}\right)^2 \tilde{z}' \rho^2 + \left(\frac{R'_0}{a'}\right)^2 \left(\frac{a'}{R'_0}\right)^2 \tilde{z}' + R'_0 - \tilde{R}' = W - \left(\frac{a'}{R'_0}\right) \tilde{r}' \cos \tilde{\varphi} \rho \cos \theta - \\ &- \left(\frac{a'}{R'_0}\right) \tilde{r}' \sin \tilde{\varphi} \rho \sin \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{a'}{R'_0}\right)^2 \tilde{z}' \rho^2 + \tilde{z}' + R'_0 - \tilde{R}'. \end{aligned}$$

Итак,

$$W' = W + H\rho^2 + K\rho \sin \theta + L\rho \cos \theta + M,$$

$$\text{где } H = -\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{R'_0}\right)^2 \tilde{z}', \quad K = -\left(\frac{a'}{R'_0}\right) \tilde{x}', \quad L = -\left(\frac{a'}{R'_0}\right) \tilde{y}', \quad M = \tilde{z}' + R'_0 - \tilde{R}'.$$

### Формула Марешаля

Световое возмущение в парааксиальном изображении точки, т.е. при  $x' = 0$  и  $y' = 0$ , в соответствии с формулой (6.117) определяется выражением



$$u(0, 0) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Aa'^2}{R_0'^2} \exp \left[ i \left( \frac{R_0'}{a'} \right)^2 u' \right] \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(ikW) \rho d\rho d\theta, \quad (6.118)$$

где при  $y'_0 = const$ ,  $W(y'_0, \rho, \theta) = W(\rho, \theta)$ .

Как известно, показательную функцию можно представить степенным рядом вида:

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

При этом выражение (6.118) можно представить в виде:

$$u(0, 0) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Aa'^2}{R_0'^2} \exp \left[ i \left( \frac{R_0'}{a'} \right)^2 u' \right] \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[ 1 + ikW + \frac{1}{2} (ikW)^2 + \dots \right] \rho d\rho d\theta.$$

Пусть  $\bar{W}^n$  – среднее значение  $n$ -й степени  $W$ , т.е.

$$\bar{W}^n = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n \rho d\rho d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n \rho d\rho d\theta.$$

Тогда

$$u(0, 0) = -\frac{i}{\lambda} \frac{Aa'^2}{\pi R_0'^2} \exp \left[ i \left( \frac{R_0'}{a'} \right)^2 u' \right] \left( 1 + ik\bar{W} + \frac{1}{2} k^2 \bar{W}^2 + \dots \right).$$

Освещённость в параксиальном изображении точки равна

$$E(0, 0) = u(0, 0) u^*(0, 0) = \left( \frac{Aa'^2}{\lambda \pi R_0'^2} \right)^2 \left( 1 + ik\bar{W} - \frac{1}{2} k^2 \bar{W}^2 + \dots \right) \left( 1 - ik\bar{W} - \frac{1}{2} k^2 \bar{W}^2 - \dots \right).$$

В том случае, когда волновые aberrации настолько малы, чтобы можно было пренебречь величинами  $k\bar{W}$  в степени выше второй, получаем

$$E(0, 0) \approx \left( \frac{Aa'^2}{\lambda \pi R_0'^2} \right)^2 \left[ 1 + ik\bar{W} - \frac{1}{2} k^2 \bar{W}^2 - ik\bar{W} + (k\bar{W})^2 - \frac{1}{2} k^2 \bar{W}^2 \right] = \left( \frac{Aa'^2}{\lambda \pi R_0'^2} \right)^2 \left[ 1 - k^2 \bar{W}^2 + (k\bar{W})^2 \right].$$

При  $W \equiv 0$ :  $E_0(0, 0) = \left( \frac{Aa'^2}{\lambda\pi R_0'^2} \right)^2$ . При этом нормированная

освещённость в параксиальном изображении точки равна

$$i(0, 0) = \frac{E(0, 0)}{E_0(0, 0)} = 1 - k^2 \left[ \overline{W}^2 - (\overline{W})^2 \right]. \quad (6.119)$$

Определим среднеквадратическую деформацию волнового фронта

$$\begin{aligned} W_{\text{нêâ}} &= \left\{ \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} [W(\rho, \theta) - \overline{W}]^2 \rho d\rho d\theta}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^1 \int_0^{2\pi} W^2(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta - 2\overline{W} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta + (\overline{W})^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[ \overline{W}^2 - 2(\overline{W})^2 + (\overline{W})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \overline{W}^2 - (\overline{W})^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Полученный результат позволяет придать формуле (6.119) вид известной формулы Марешаля

$$i(0, 0) = \tilde{E}(0, 0) \approx 1 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 W_{\text{нêâ}}^2. \quad (6.120)$$

В случае малой величины aberrаций число Штреля равно нормированной освещённости, определяемой формулой Марешаля.

Согласно правилу четверти волны Рэля качество изображения можно считать достаточно совершенным, если максимальная деформация волнового фронта  $|W|_{\text{max}} \leq \frac{\lambda}{4}$ . Следуя Марешалю, принято считать качество изображения достаточно совершенным, если нормированная освещённость (число Штреля) не менее 0,8. Из формулы (6.120) следует, что в этом случае  $W_{\text{нêâ}} \leq \frac{\lambda}{14}$ .