МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

И.В.Блинова, И.Ю. Попов, Е.С.Трифанова

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

по функциональному анализу

Санкт-Петербург

2011

Блинова И.В., Попов И.Ю., Трифанова Е.С. Типовые расчеты по функциональному анализу. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 24 с.

Методическое пособие содержит два типовых расчета по функциональному анализу. Предназначено для студентов третьего курса ЕНФ и ИТиП, обучающихся по направлению 01.04.00 (Прикладная математика и информатика).

Рекомендовано к печати Советом естественнонаучного факультета СПбГУ ИТМО 01.03.2011 (протокол № 2)

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

Типовой расчет № 1 «Пространства и операторы»

I. Проверить, образует ли (X,ρ) метрическое пространство, если

$$X = C[a,b],\ \rho(x,y) = \left(\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Решение. Для того чтобы определить, является ли данное пространство метрическим, нужно проверить, удовлетворяет ли заданная функция расстояния $\rho(x,y)$, где $x,y \in X$ трем аксиомам:

1) $\forall x,y \in X:\ \rho(x,y) \ge 0$, и $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

2) $\forall x,y \in X:\ \rho(x,y)=\rho(y,x)$ *(аксиома симметрии)*;

3) $\forall x,y,z \in X:\ \rho(x,z) \le \rho(x,y)+\rho(y,z)$ *(аксиома треугольника)*.

Для данной функции $\rho(x,y)$ выполнение условий 1) и 2) очевидно. Докажем выполнение аксиомы треугольника, которая примет вид

$$\sqrt{\int_a^b (x(t)-z(t))^2\,dt} \le \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt} + \sqrt{\int_a^b (y(t)-z(t))^2\,dt}. \qquad (1)$$

Введем обозначения $x(t)-y(t)=f(t)$, $y(t)-z(t)=g(t)$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt} \le \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}. \qquad (2)$$

Полученное неравенство следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \le \int_a^b f^2(t)\,dt \cdot \int_a^b g^2(t)\,dt. \qquad (3)$$

Имеем

$$\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt = \int_a^b f^2(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt + 2\int_a^b f(t)g(t)\,dt \le$$

$$\le \int_a^b f^2(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt + 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt} = \left(\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}\right)^2,$$

что равносильно неравенству (2). Следовательно, все три аксиомы выполнены, и данное пространство является метрическим.

II. Проверить, можно ли ввести норму в пространстве $X = l_1$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ следующим образом: $\|x\| = \sup\limits_{n\in N}\left|\sum\limits_{i=1}^n x_i\right|$.

Решение. Для того чтобы определить, может ли заданная функция $\|\cdot\|$ являться нормой в пространстве X, нужно проверить, удовлетворяет ли она трем условиям:

1) $\forall x \in X:\ \|x\| \ge 0$, причем $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$;

2) $\forall x, y \in X: \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$;

3) $\forall x \in X, \forall \alpha: \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Для данной функции $\|\cdot\|$ выполнение условия 1) очевидно. Проверим выполнение условия 2). Воспользуемся свойствами модуля и супремума:

$$\|x+y\| = \sup_{n\in N}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\right| \le \sup_{n\in N}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}y_i\right|\right) \le \sup_{n\in N}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right| + \sup_{n\in N}\left|\sum_{i=1}^{n}y_i\right| = \|x\| + \|y\|,$$

$\forall x, y \in X$.

Условие 3) также выполнено:

$$\|\lambda x\| = \sup_{n\in N}\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i\right| = \sup_{n\in N}\left|\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right| = |\lambda|\sup_{n\in N}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right| = |\lambda|\cdot\|x\|,\ \forall x \in X, \forall \alpha.$$

Следовательно, функция $\|x\| = \sup_{n\in N}\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|$ задает норму на пространстве X.

III. В пространстве H найти проекцию элемента x на подпространство, порожденное $f_1, f_2, \ldots, f_n$, если $\mathrm{H} = L_2(0,1)$, $x = t^2$, $f_1 = 1+t$, $f_2 = \sqrt{t}$.

Решение. Обозначим M - подпространство, порожденное функциями f_1, f_2. Тогда $x(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где $\varphi \in \mathrm{M}$ - проекция x на M, $\psi \in \mathrm{M}^{\perp}$. Разложим функцию φ по базису f_1, f_2:

$$\varphi(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

и найдем коэффициенты разложения α и β в этом базисе. Имеем

$$x(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t) + \psi(t).$$

Умножим это равенство скалярно сначала на f_1, а затем на f_2:

$$\begin{cases}(x, f_1) = \alpha|f_1|^2 + \beta(f_2, f_1);\\ (x, f_2) = \alpha(f_1, f_2) + \beta|f_2|^2.\end{cases} \tag{4}$$

Вычислим скалярные произведения, зная, что $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Имеем

$$(x, f_1) = \int_0^1 t^2(1+t)dt = \frac{7}{12},\ (x, f_2) = \int_0^1 t^2\sqrt{t}dt = \frac{2}{7},$$

$$(f_2, f_1) = (f_1, f_2) = \int_0^1 \sqrt{t}(1+t)dt = \frac{16}{15},\ |f_1|^2 = \int_0^1 (1+t)^2 dt = \frac{7}{3},\ |f_2|^2 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Для решения системы (4) воспользуемся формулами Крамера. Определители системы

$$\Delta = \begin{vmatrix}\frac{7}{3} & \frac{16}{15}\\ \frac{16}{15} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{13}{450},\ \Delta_\alpha = \begin{vmatrix}\frac{7}{12} & \frac{16}{15}\\ \frac{2}{7} & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = -\frac{11}{840},\ \Delta_\beta = \begin{vmatrix}\frac{7}{3} & \frac{7}{12}\\ \frac{16}{15} & \frac{2}{7}\end{vmatrix} = \frac{2}{45}.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = -\frac{165}{364}, \ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{20}{13}.$$

И окончательно, $\varphi(t) = -\frac{165}{364}(1+t) + \frac{20}{13}\sqrt{t}$.

IV. Показать, что оператор A: $(Af)(s) = \int_0^1 2^s t^2 f(t)\,dt$, ограничен в пространстве $X = C[0,1]$, и найти его норму.

Решение. Докажем ограниченность оператора A. В пространстве $C[a,b]$ норма элемента x равна $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$. Имеем

$$\|Af\| = \sup_{s\in[0,1]} |Af| = \sup_{s\in[0,1]} \left| \int_0^1 2^s t^2 f(t)\,dt \right| =$$

$$= \sup_{s\in[0,1]} 2^s \left| \int_0^1 t^2 f(t)\,dt \right| \le 2\int_0^1 |f(t)| t^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^1 t^2 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\,dt \le 2 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}\|f\|$$

при $f(t) \in X$. Следовательно, оператор A ограничен.

Норма оператора A определяется следующим образом: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Тогда получаем

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \max_{0\le s\le 1} \left| \int_0^1 2^s t^2 f(t)\,dt \right| = \max_{0\le s\le 1} 2^s \cdot \sup_{\|f\|=1} \left| \int_0^1 t^2 f(t)\,dt \right| = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

V. Найти точечный спектр и собственные функции оператора A: $Ay = y'' + 2y$, заданного на дважды непрерывно дифференцируемых функциях с граничными условиями $y'(0) = y(1) = 0$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Решение. Запишем уравнение для определения собственных значений и собственных функций:

$$Ay = \lambda y,$$

то есть

$$y'' + (2-\lambda)y = 0. \tag{5}$$

Его решения будут разными в зависимости от знака выражения $\lambda - 2$. Рассмотрим 3 случая:

1) $\lambda - 2 > 0$. Тогда решение уравнения (5) имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{x\sqrt{\lambda-2}} + C_2 e^{-x\sqrt{\lambda-2}}.$$

Удовлетворим граничным условиям:

$$\begin{cases} C_1\sqrt{\lambda-2}-C_2\sqrt{\lambda-2}=0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda-2}}+C_2 e^{-\sqrt{\lambda-2}}=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $C_1=C_2=0$, то есть $y(x)\equiv 0$, что противоречит определению собственной функции.

2) $\lambda-2=0$. Решение уравнения (5) в этом случае имеет вид $y(x)=C_1+C_2x$, и краевым условиям удовлетворяет только нулевая функция.

3) $\lambda-2<0$. Решение уравнения (5) имеет вид

$$y(x)=C_1\cos x\sqrt{2-\lambda}+C_2\sin x\sqrt{2-\lambda}.$$

Подставляя краевые условия, получим $C_2=0$ и $\cos\sqrt{2-\lambda}=0$. Находим спектр

$$\lambda_n=2-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4},\ n\in\mathbb{N}.$$

Соответствующие собственные функции (принадлежащие $L_2[0,1]$) имеют вид

$$y_n(x)=C\cdot\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2}.$$

VI. Проверить, является ли оператор двукратного дифференцирования $(Ay=y'')$, определенный в комплексном пространстве $L_2(a,b)$ на дважды непрерывно дифференцируемых функциях u, удовлетворяющих граничным условиям $u'(a)=u(a),\ u(b)=0$, симметричным. Каким граничным условиям удовлетворяют функции из области определения сопряженного оператора?

Решение. Оператор A называется симметричным, если выполняется условие

$$\forall u,v\in D(A):\ (Au,v)=(u,Av). \qquad (6)$$

Возьмем $u(t),v(t)\in D(A)\subset L_2[a,b]$. Тогда

$$(Au,v)=\int_a^b u''\overline{v}dt=u'\overline{v}\Big|_a^b-\int_a^b u'\overline{v}'dt=(u'\overline{v}-u\overline{v}')\Big|_a^b+\int_a^b u\overline{v}''dt=(u'\overline{v}-u\overline{v}')\Big|_a^b+(u,Av).$$

Следовательно, для симметричности оператора A необходимо и достаточно выполнения условия

$$(u'\overline{v}-u\overline{v}')\Big|_a^b=0,$$

то есть

$$u'(b)\overline{v}(b)-u(b)\overline{v}'(b)-u'(a)\overline{v}(a)+u(a)\overline{v}'(a)=0. \qquad (7)$$

Так как $u,v\in D(A)$, то функции u,v удовлетворяют заданным граничным условиям. Подставим их в (7):

$$u'(b)\cdot 0-0\cdot\overline{v}'(b)-u(a)\overline{v}(a)+u(a)\overline{v}(a)=0.$$

Полученное верное равенство равносильно симметричности оператора A.

Пусть A^* - оператор, сопряженный с A. Он определяется так. $v\in D(A^*)$, если существует элемент (обозначим его A^*v) такой, что (сравните с условием (6)):

$$\forall u \in D(A):\ (Au, v) = \left(u, A^* v\right).$$

Это условие аналогично условию (7), но $u \in D(A)$, а $v \in D\left(A^*\right)$. Подставим в (6) условия на функцию u:

$$u'(b)\overline{v}(b) + u(a)\left(\overline{v}'(a) - \overline{v}(a)\right) = 0.$$

Поскольку $u'(b)$ и $u(a)$ произвольны, получаем граничные условия на функцию $v \in D\left(A^*\right)$: $v'(a) = v(a),\ v(b) = 0$, откуда следует, что граничные условия для элемента из области определения A^* те же, что и для оператора A.

Задачи для самостоятельного решения

I. Проверить, образует ли (X, ρ) метрическое пространство.

1. $X = C^1[a,b],\ \rho(x,y) = \max\limits_{t \in [a,b]} \left|x'(t) - y'(t)\right|$;

2. $X = C[0,1],\ \rho(x,y) = \left|x(1/2) - y(1/2)\right|$;

3. $X = \{x \in C, |x| = 1\},\ \rho(x,y) = \left|\arg x - \arg y\right|$;

4. $X = C,\ \rho(x,y) = \left|\operatorname{Re} x \cdot \operatorname{Re} y - \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y\right|$;

5. $X = C^2,\ \rho(x,y) = \max\limits_{i=1,2} \left|\operatorname{Re} x_i - \operatorname{Re} y_i\right|$;

6. $X = C,\ \rho(x,y) = \left|\operatorname{Re} x - \operatorname{Re} y\right| + \left|\operatorname{Im} x - \operatorname{Im} y\right|$;

7. $X = R^n,\ \rho(x,y) = \max\limits_{1 \le i \le n} \left|x_i^2 - y_i^2\right|$;

8. $X = l_\infty,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ \rho(x,y) = \sup\limits_n \left|x_n - y_n\right|$;

9. $X = l_1,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ \rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|x_i - y_i\right|$;

10. $X = M_{m \times n}$ - матрицы размером $m \times n$, $\rho(x,y) = \max\limits_{i,j}\left(x_{ij} - y_{ij}\right)$;

11. $X = \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2, x_3),\ \rho(x,y) = \left|x_2 - y_2\right|$;

12. X - сфера в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, $\rho(x,y)$ - длина хорды, соединяющей точки x, y;

13. X - сфера в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, $\rho(x,y)$ - длина кратчайшей дуги большого круга, проходящего через точки x, y;

14. $X = C[a,b],\ \rho(x,y) = \int_a^b |x(t)\cdot y(t)|dt$;

15. $X = C[a,b],\ \rho(x,y) = \int_a^b |x(t)+y(t)|dt$;

16. $X = C[a,b],\ \rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} \big||x(t)|-|y(t)|\big|$;

17. $X = L_1(a,b),\ \rho(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt$;

18. $X = C[a,b],\ \rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$;

19. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = \big||x|-|y|\big|$;

20. $X = \mathbb{R},\ \rho(x,y) = |x-y|$.

II. Проверить, можно ли ввести норму указанным образом.

1. $X = l_1,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ \|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$;

2. $X = l_\infty,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ \|x\| = \sup\limits_n |x_n|$;

3. $X = \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right|$;

4. $X = \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \max\limits_i |x_i| - \min\limits_i |x_i|$;

5. $X = \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \max\limits_i |x_i - x_1|$;

6. $X = \mathbb{R}^n,\ \|x\| = \max\limits_{i,k} |x_i - x_k|$;

7. $X = \mathbb{R}^n,\ x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \|x\| = \max\limits_{i,k} |\xi_i \xi_k|$;

8. $X = C[a,b],\ \|x\| = \left|\int_a^b x(t)\,dt\right|$;

9. $X = C[a,b],\ \|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt$;

10. $X = C[a,b],\ \|x\| = \left|\max\limits_{t\in[a,b]} x(t)\right|$;

11. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

12. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)+x'(t)|$;

13. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

14. $X = C^2[a,b],\ \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}\left(|x'(t)| + |x''(t)|\right)$

15. $X = C^2[a,b],\ \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x''(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|;$

16. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \int_a^b |x'(t)|\,dt;$

17. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)x'(t)|;$

18. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \sqrt{\int_a^b |x'(t)|^2\,dt};$

19. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)x'(t)|\,dt};$

20. $X = C^1[a,b],\ \|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)+x'(t)|\,dt}.$

III. В пространстве Н найти проекцию элемента x на подпространство, порожденное $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

1. $\mathrm{H} = L_2(-\pi,\pi),\ x = t^2,\ f_1 = 1,\ f_2 = \sin 2t,\ f_3 = \cos 2t;$
2. $\mathrm{H} = L_2(0,2\pi),\ x = t+1,\ f_1 = \sin t,\ f_2 = \cos t;$
3. $\mathrm{H} = L_2(0,2\pi),\ x = \cos t,\ f_1 = 1,\ f_2 = 2\sin t;$
4. $\mathrm{H} = L_2(-\pi,\pi),\ x = \cos^2 t,\ f_1 = 1,\ f_2 = \cos t,\ f_3 = \sin 2t;$
5. $\mathrm{H} = L_2(0,2\pi),\ x = e^t,\ f_1 = \cos t,\ f_2 = \sin t;$
6. $\mathrm{H} = L_2(0,\pi),\ x = \sin t,\ f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2;$
7. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = \sqrt[3]{t},\ f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2;$
8. $\mathrm{H} = L_2(0,1),\ x = \sqrt{t},\ f_1 = t,\ f_2 = t^2;$
9. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = e^{2t},\ f_1 = 1,\ f_2 = t;$
10. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = \cos t,\ f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2;$
11. $\mathrm{H} = L_2(-2,2),\ x = e^{t+1},\ f_1 = 1,\ f_2 = t, f_3 = t^2;$
12. $\mathrm{H} = L_2(-2,2),\ x = te^t,\ f_1 = 1,\ f_2 = t;$
13. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = te^{-t},\ f_1 = 1,\ f_2 = t^2;$
14. $\mathrm{H} = L_2(-\pi,\pi),\ x = \cos t,\ f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^3;$
15. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = e^{2t},\ f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^3;$
16. $\mathrm{H} = L_2(0,\pi),\ x = t,\ f_1 = 1,\ f_2 \sin 2t;$
17. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = t^3,\ f_1 = 1, f_2 = t,\ f_3 = t^3 + t;$
18. $\mathrm{H} = L_2(-1,1),\ x = \sin^2 t,\ f_1 = 1,\ f_2 = t,\ f_3 = t^2;$

19. $\mathrm{H} = L_2(-\pi,\pi)$, $x = 2t+1$, $f_1 = \sin t$, $f_2 = \cos 2t$;

20. $\mathrm{H} = L_2(-\pi,\pi)$, $x = t^2-1$, $f_1 = 1$, $f_2 = \sin 2t$.

IV. Показать, что оператор A ограничен в пространстве X, и найти его норму.

1. $(Af)(s) = \int_0^{\pi/2} s\sin t \cdot f(t)\,dt,\ \ X = C[0,\pi/2]$;

2. $(Af)(s) = \int_0^1 \left(s^2+t^2\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

3. $(Af)(s) = \int_0^1 s^2 t^2 f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

4. $(Af)(s) = \int_0^{\pi} \left(s+\sin\dfrac{t}{2}\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,\pi]$;

5. $(Af)(s) = \int_0^1 \left(s^3+t^3\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

6. $(Af)(s) = \int_0^2 \left(st+s^2t^2\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,2]$;

7. $(Af)(s) = \int_0^1 (s+t)\,tf(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

8. $(Af)(s) = \int_0^1 e^{t+s} f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

9. $(Af)(s) = \int_0^1 se^t f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

10. $(Af)(s) = \int_0^1 e^{t+s}\,tf(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

11. $(Af)(s) = \int_0^{\pi/2} s^2\sin t \cdot f(t)\,dt,\ \ X = C[0,\pi/2]$;

12. $(Af)(s) = \int_0^{\pi/2} \left(s+\sin^2 t\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,\pi/2]$;

13. $(Af)(s) = \int_0^1 \left(s^2+2\right) t^2 f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

14. $(Af)(s) = \int_0^2 \left(s^3+t^3\right) tf(t)\,dt,\ \ X = C[0,2]$;

15. $(Af)(s) = \int_0^1 \left(s^2+s^3t\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

16. $(Af)(s) = \int_0^1 \left(s+s^3t\right) f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

17. $(Af)(s) = \int_0^2 2^{s+3t} f(t)\,dt,\ \ X = C[0,2]$;

18. $(Af)(s) = \int_0^1 s3^t f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$;

19. $(Af)(s) = \int_0^2 e^s 2^{t+1} f(t)\,dt,\ \ X = C[0,2]$;

20. $(Af)(s) = \int_0^1 e^s \sin t \cdot f(t)\,dt,\ \ X = C[0,1]$.

V. Найти точечный спектр и собственные функции оператора A в $L_2\left[a,b\right]$.

1. $Ay=\pi^2 y''+\dfrac{9}{4}y,\ y(0)=y(3\pi/2)=0$;
2. $Ay=\pi^2(1-y''),\ y'(0)=y(\pi)=0$;
3. $Ay=4(y''+9y),\ y'(0)=y'(1)=0$;
4. $Ay=-4y''+9y,\ y(0)=y(\pi)=0$;
5. $Ay=\pi^2 y-y'',\ y(0)=y(\pi)=0$;
6. $Ay=2y''+3y,\ y'(0)=y(\pi)=0$;
7. $Ay=-y''+4y,\ y(0)=y'(\pi/2)=0$;
8. $Ay=y''+4y,\ y'(0)=y'(\pi/2)=0$;
9. $Ay=9y''+4y,\ y'(0)=y'(1)=0$;
10. $Ay=16y-y'',\ y(0)=y'(4)=0$;
11. $Ay=-9y''-y,\ y(0)=y(1)=0$;
12. $Ay=-4y''+y,\ y(0)=y(2)=0$;
13. $Ay=-y''-y,\ y(-\pi)=y(\pi)=0$;
14. $Ay=y''-6y,\ y(0)=y(2)=0$;
15. $Ay=9y-y'',\ y'(0)=y(\pi/2)=0$;
16. $Ay=y-y'',\ y(0)=y'(1)=0$;
17. $Ay=y''+y,\ y'(0)=y'(1)=0$;
18. $Ay=y'',\ y'(0)=y'(1)=0$;
19. $Ay=y''+4y,\ y(0)=y(\pi)=0$;
20. $Ay=y'',\ y(0)=y(1)=0$.

VI. Проверить, является ли оператор двукратного дифференцирования $(Ay=y'')$, определенный в комплексном пространстве $L_2(a,b)$ на дважды непрерывно дифференцируемых функциях, удовлетворяющих указанным граничным условиям, симметричным. Каким граничным условиям удовлетворяют функции из области определения сопряженного оператора?

1. $u'(a)=u'(b)=0$;
2. $u'(a)-2u(a)=0,\ u(b)=0$;
3. $u(a)=u(b)=0$;
4. $u'(a)=u(a), u'(b)=u(b)$;
5. $u'(a)-2iu(a)=0,\ u(b)=0$;

6. $u(a)=0, u'(b)=(1+i)u(b)$;

7. $u'(a)=0, u'(b)+10u(b)=0$;

8. $5iu'(a)+u(a)=0,\ u'(b)=0$;

9. $u'(a)+\dfrac{1+i}{1-i}u(a)=0,\ u(b)=0$;

10. $3iu'(a)-u(a)=0,\ u(b)=0$;

11. $u'(a)=u(b)=0$;

12. $u'(a)=2u(a), u'(b)=iu(b)$;

13. $\dfrac{i}{i+1}u'(a)=u(a), u'(b)=0$;

14. $u'(a)+\dfrac{10}{1+i}u(a)=0,\ u(b)=0$;

15. $u'(a)-\dfrac{u(a)}{2i+3}=0,\ u'(b)=u(b)$;

16. $2iu'(a)+(4+i)u(a)=0,\ u(b)=0$;

17. $(i+1)u'(a)-(2i-1)u(a)=0,\ u(b)=0$;

18. $\dfrac{u'(a)}{2i+3}=u(a), \dfrac{u'(b)}{i+1}=u(b)$;

19. $2u'(a)=u(a), u'(b)=2u(b)$;

20. $u'(a)=\dfrac{u(a)}{i+4},\ u'(b)=2iu(b)$.

Типовой расчет № 2 «Интегральные уравнения»

I. Для заданного ядра $K(s,t)$ интегрального оператора, заданного на отрезке $[a,b]$

1) построить резольвенту Фредгольма тремя способами:

а) с помощью ряда Неймана;

б) с помощью рядов Фредгольма;

в) как для вырожденного ядра.

2) найти характеристические значения и собственные функции двумя способами:

а) как для вырожденного ядра;

б) через особенности резольвенты Фредгольма.

1) Пусть $K(s,t) = s - t$, $a = 0$, $b = 1$.

Речь идет о решении интегрального уравнения

$$f - Mf = h, \tag{1}$$

где M - интегральный оператор с ядром $K(s,t)$:

$$(Mf)(s) = \lambda \int_a^b K(s,t) f(t)\,dt, \tag{2}$$

h - заданная функция.

а) Решение уравнения (1) будем искать методом последовательных приближений. Для этого полагаем

$$f(s) = h(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s) \lambda^n,$$

где функции φ_n задаются формулами:

$$\varphi_1(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\,dt,$$

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt = \int_a^b K_n(s,t) f(t)\,dt \text{ для } n \ge 2,$$

где $K_n(s,t)$ называется итерированным ядром и определяется как

$$K_n(s,t) = \int_a^b dt_1 \int_a^b dt_2 \ldots \int_a^b K(s,t_1) K(t_1,t_2) \ldots K(t_{n-1},t)\,dt_{n-1},\ n \ge 2, \tag{3}$$

$$K_1(s,t) \equiv K(s,t).$$

Тогда решение уравнения (1) может быть найдено в виде $f = h + \lambda Rh$, где R - интегральный оператор с ядром $R(s,t;\lambda)$, называемым резольвентой Фредгольма. Для резольвенты Фредгольма справедливо равенство

$$R(s,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s,t) \lambda^{n-1}, \tag{4}$$

где ряд, стоящий справа, называется рядом Неймана.

Найдем последовательно итерированные ядра, следуя формуле (3). Имеем

$$K_1(s,t) = s - t,$$
$$K_2(s,t) = \int_0^1 K(s,t_1)K(t_1,t)\,dt_1 = \int_0^1 (s-t_1)(t_1-t)\,dt_1 = \frac{1}{2}(s+t) - st - \frac{1}{3},$$
$$K_3(s,t) = \int_0^1 K(s,t_1)K_2(t_1,t)\,dt_1 = \int_0^1 (s-t_1)\left(\frac{1}{2}(t_1+t) - t_1 t - \frac{1}{3}\right)dt_1 = -\frac{1}{12}(s-t),$$
$$K_4(s,t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (s-t_1)(t_1-t)\,dt_1 = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}(s+t) - st - \frac{1}{3}\right),$$
$$K_5(s,t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (s-t_1)\left(\frac{1}{2}(t_1+t) - t_1 t - \frac{1}{3}\right)dt_1 = \frac{1}{12^2}(s-t).$$

Методом математической индукции можно доказать, что итерированные ядра имеют вид:

$$K_{2m-1}(s,t) = \frac{(-1)^{m-1}}{12^{m-1}}(s-t),$$
$$K_{2m}(s,t) = \frac{(-1)^{m-1}}{12^{m-1}}\left(\frac{1}{2}(s+t) - st - \frac{1}{3}\right),$$

где $m = 1,2,3,\ldots$.

Тогда ряд Неймана для резольвенты примет вид

$$R(s,t;\lambda) = (s-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{12^{n-1}}\lambda^{2n-2} + \left(\frac{1}{2}(s+t) - st - \frac{1}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{12^{m-1}}\lambda^{2n-1} =$$
$$= (s-t)\frac{1}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}} + \left(\frac{1}{2}(s+t) - st - \frac{1}{3}\right)\frac{\lambda}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}} = \frac{s - t + \lambda\left(\dfrac{1}{2}(s+t) - st - \dfrac{1}{3}\right)}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}}.$$

б) Резольвента Фредгольма уравнения (1) может быть найдена по формуле:

$$R(s,t;\lambda) = \frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)},$$

где функции $D(s,t;\lambda)$ и $D(\lambda)$ находятся с помощью рядов Фредгольма:

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}d_n\lambda^n,$$

$$d_n = \int_a^b dt_1\int_a^b dt_2\ldots\int_a^b dt_n\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ \vdots & & & \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix},$$

$$D\left(s,t;\lambda\right)=K\left(s,t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}d_n\left(s,t\right)\lambda^n ,$$

$$d_n\left(s,t\right)=\int_a^b dt_1\int_a^b dt_2\ldots\int_a^b dt_n\begin{vmatrix}K\left(s,t\right) & K\left(s,t_1\right) & \ldots & K\left(s,t_n\right)\\ K\left(t_1,t\right) & K\left(t_1,t_1\right) & \ldots & K\left(t_1,t_n\right)\\ \vdots & & & \\ K\left(t_n,t\right) & K\left(t_n,t_1\right) & \ldots & K\left(t_n,t_n\right)\end{vmatrix}.$$

Имеем

$$d_1=\int_a^b K\left(t_1,t_1\right)dt_1=\int_0^1\left(t_1-t_1\right)dt_1=0,$$

$$d_2=\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K\left(t_1,t_1\right) & K\left(t_1,t_2\right)\\ K\left(t_2,t_1\right) & K\left(t_2,t_2\right)\end{vmatrix}dt_1dt_2=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}0 & t_1-t_2\\ t_2-t_1 & 0\end{vmatrix}dt_1dt_2=\frac{1}{6},$$

$$d_3=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}0 & t_1-t_2 & t_1-t_3\\ t_2-t_1 & 0 & t_2-t_3\\ t_3-t_1 & t_3-t_2 & 0\end{vmatrix}dt_1dt_2dt_3=0,$$

так как подынтегральный определитель равен нулю. Очевидно, что $d_n=0$ при $n\geq 3$. Следовательно,

$$D\left(\lambda\right)=1+\frac{1}{12}\lambda^2.$$

Далее,

$$d_1\left(s,t\right)=\int_a^b\begin{vmatrix}K\left(s,t\right) & K\left(s,t_1\right)\\ K\left(t_1,t\right) & K\left(t_1,t_1\right)\end{vmatrix}dt_1=\int_0^1\begin{vmatrix}s-t & s-t_1\\ t_1-t & 0\end{vmatrix}dt_1=\frac{1}{3}+ts-\frac{1}{2}\left(s+t\right),$$

$$d_2\left(s,t\right)=\int_0^1\int_0^1\begin{vmatrix}s-t & s-t_1 & s-t_2\\ t_1-t & 0 & t_1-t_2\\ t_2-t & t_2-t_1 & 0\end{vmatrix}dt_1dt_2=0,$$

так как подынтегральный определитель равен нулю. Очевидно, что $d_n\left(s,t\right)=0$ при $n\geq 2$. Следовательно,

$$D\left(s,t;\lambda\right)=s-t+\lambda\left(\frac{1}{2}\left(s+t\right)-st-\frac{1}{3}\right).$$

Окончательно, получаем резольвенту

$$R(s,t;\lambda)=\frac{s-t+\lambda\left(\frac{1}{2}(s+t)-st-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{\lambda^2}{12}}.$$

в) Перепишем уравнение (1) в виде

$$f(s)=h(s)+\lambda\int_0^1(s-t)f(t)dt=h(s)+\lambda s\int_0^1 f(t)dt-\lambda\int_0^1 t\cdot f(t)dt.$$

Введем обозначения

$$c_1=\int_0^1 f(t)dt,\ c_2=\int_0^1 t\cdot f(t)dt. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) равносильно равенству

$$f(s)=h(s)+\lambda sc_1-\lambda c_2. \tag{6}$$

Подставим выражение (6) в равенства (5). Получим систему уравнений для c_1 и c_2:

$$\begin{cases}\left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)c_1+\lambda c_2=\int_0^1 h(t)dt;\\ -\frac{1}{3}\lambda c_1+\left(1+\frac{1}{2}\lambda\right)c_2=\int_0^1 t\cdot h(t)dt.\end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$c_1=\frac{1+\frac{1}{2}\lambda}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}\int_0^1 h(t)dt-\frac{\lambda}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}\int_0^1 t\cdot h(t)dt,$$

$$c_2=\frac{1-\frac{1}{2}\lambda}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}\int_0^1 t\cdot h(t)dt+\frac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}\int_0^1 h(t)dt.$$

Далее, записывая решение (6) уравнения (1), получаем резольвенту Фредгольма

$$R(s,t;\lambda)=s\left(\frac{1+\frac{1}{2}\lambda}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}-\frac{\lambda t}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}\right)-\left(\frac{\left(1-\frac{1}{2}\lambda\right)t}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}+\frac{\frac{1}{3}\lambda}{1+\frac{1}{12}\lambda^2}\right)=$$

$$=\frac{s-t+\lambda\left(\frac{1}{2}(s+t)-st-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{\lambda^2}{12}}.$$

2) Пусть $K(s,t)=1+3st$, $a=0$, $b=1$.

а) Запишем однородное уравнение Фредгольма в виде

$$f(s)=\lambda\int_0^1(1+3st)f(t)\,dt=\lambda\int_0^1 f(t)\,dt+3\lambda s\int_0^1 t\cdot f(t)\,dt.$$

Вводя обозначения

$$c_1=\int_0^1 f(t)\,dt,\; c_2=\int_0^1 t\cdot f(t)\,dt,$$

получим

$$f(s)=\lambda c_1+\lambda c_2 s.$$

Тогда для c_1 и c_2 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}(\lambda-1)c_1+\frac{3}{2}\lambda c_2=0;\\ \frac{1}{2}\lambda c_1+(\lambda-1)c_2=0.\end{cases} \tag{7}$$

Из условия существования нетривиального решения

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & \frac{3}{2}\lambda\\ \frac{1}{2}\lambda & \lambda-1\end{vmatrix}=0$$

находим характеристические значения $\lambda_{1,2}=4\pm 2\sqrt{3}$.

Так как из (7) следует, что $c_2 = -\dfrac{\lambda c_1}{2(\lambda - 1)}$, то подставляя $\lambda_{1,2}$, получаем выражения для собственных функций:

$$f_{1,2}(s) = \left(4 \pm 2\sqrt{3}\right) c_1 \left(1 \mp s\sqrt{3}\right) = c\left(1 \mp s\sqrt{3}\right),$$

где $c = \left(4 \pm 2\sqrt{3}\right) c_1$.

б) Известно, что характеристические числа интегрального уравнения являются полюсами резольвенты $R(s,t;\lambda)$ (как функции от λ), а ее коэффициенты рядов Лорана (в выколотых окрестностях этих полюсов) при наибольшей по модулю отрицательной степени дают соответствующие этим значениям собственные функции (как функции от первого аргумента при любом значении t).

Пусть для ядра $K(s,t) = 1 + 3st$, $a = 0$, $b = 1$ резольвента уже найдена:

$$R(s,t;\lambda) = \frac{1 + 3st + \lambda\left(\dfrac{3}{2}(s+t) - 3st - 1\right)}{\dfrac{1}{4}\lambda^2 - 2\lambda + 1}.$$

Числа $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ - ее простые полюса. Имеем для собственной функции

$$f_1(s) = \operatorname*{res}_{\lambda = 4+2\sqrt{3}} R(s,t;\lambda) = \left.\frac{1 + 3st + \lambda\left(\dfrac{3}{2}(s+t) - 3st - 1\right)}{\dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{1}{4}\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)}\right|_{\lambda = 4+2\sqrt{3}} =$$

$$= \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(t\sqrt{3} - 1\right)\left(1 - s\sqrt{3}\right) = c\left(1 - s\sqrt{3}\right),$$

где $c = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(t\sqrt{3} - 1\right)$.

Аналогично находится $f_2(s) = c\left(1 + s\sqrt{3}\right)$.

II. Решить уравнение или систему уравнений.

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi'(t)\,dt = e^{2x},\ \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1.$$

Применим преобразование Лапласа к левой и правой частям. Обозначим образ функции $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$. Имеем для правой части $e^{2x} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-2}$.

В силу правила дифференцирования оригинала и учитывая данные начальные условия, получим

$$\varphi'(x) \leftrightarrow p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p),$$

$$\varphi''(x) \leftrightarrow p^2\Phi(p) - p\varphi(0) - \varphi'(0) = p^2\Phi(p) - 1.$$

Пользуясь свойством умножения изображений, получим

$$\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt \leftrightarrow \frac{p}{p-2}\Phi(p).$$

Тогда уравнение для образа искомой функции примет вид

$$p^2\Phi(p) - 1 + \frac{p}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Решая его, получим $\Phi(p) = \dfrac{1}{p(p-1)} = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$. Следовательно, решение исходного уравнения с данными начальными условиями имеет вид $\varphi(x) = e^x - 1$.

Задачи для самостоятельного решения

I. Для заданного ядра $K(s,t)$ интегрального оператора, заданного на отрезке $[a,b]$

1) построить резольвенту Фредгольма тремя способами:

а) с помощью ряда Неймана;

б) с помощью рядов Фредгольма;

в) как для вырожденного ядра.

2) найти характеристические значения и собственные функции двумя способами:

а) как для вырожденного ядра;

б) через особенности резольвенты Фредгольма.

1. $K(s,t) = st^2 + s^2t,\ a = 0,\ b = 1;$

2. $K(s,t) = e^s + e^t,\ a = 0,\ b = 1;$

3. $K(s,t)=\sin^2(s-t),\ a=0,\ b=2\pi$;

4. $K(s,t)=st+2s^2t^2,\ a=-1,\ b=1$;

5. $K(s,t)=\sin s\sin t+\cos 2s\cos 2t,\ a=-\pi,\ b=\pi$;

6. $K(s,t)=s^3t^3+s^2t^2,\ a=-1,\ b=1$;

7. $K(s,t)=st(s+t),\ a=-1,\ b=1$;

8. $K(s,t)=t^2+s^2,\ a=0,\ b=1$;

9. $K(s,t)=\cos(s-t),\ a=0,\ b=\pi$;

10. $K(s,t)=e^{s+t}(s+t),\ a=0,\ b=1$;

11. $K(s,t)=s^2t^2\left(1+s^2t^2\right),\ a=0,\ b=1$;

12. $K(s,t)=\sin(s+t),\ a=0,\ b=2\pi$;

13. $K(s,t)=e^{s+t}(s+t),\ a=-1,\ b=0$;

14. $K(s,t)=e^{-s}+e^{-t},\ a=0,\ b=1$;

15. $K(s,t)=s^2+t^2,\ a=-1,\ b=1$;

16. $K(s,t)=st^2+s^2t,\ a=-1,\ b=1$;

17. $K(s,t)=st^3+s^3t,\ a=-1,\ b=1$;

18. $K(s,t)=2st+3s^2t^2,\ a=-2,\ b=2$;

19. $K(s,t)=st+\cos s\cos t,\ a=-\pi,\ b=\pi$;

20. $K(s,t)=3st+5s^2t^2,\ a=-1,\ b=1$.

II. Решить уравнение или систему уравнений:

1. $\varphi(x)=1+x+\int\limits_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)\,dt$;

2. $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi(t)\,dt$;

3. $\varphi(x)=\sin x+\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$;

4. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt$;

5. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int\limits_0^x \left(3+6(x-t)+4(x-t)^2\right)\varphi(t)\,dt$;

6. $\varphi(x)=\operatorname{sh}x-\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt$;

7. $\varphi(x)=1+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$;

8. $\varphi(x)=e^x+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$;

9. $\varphi(x)=\cos x+\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$;

10. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^x+\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt-\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=-x-\int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt;\end{cases}$$

11. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=e^x-\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=1-\int\limits_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt;\end{cases}$$

12. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=x+\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=1-\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt,\\ \varphi_3(x)=\sin x+\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt;\end{cases}$$

13. $$\begin{cases}\varphi_1(x)=1-\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)=\cos x-1+\int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt,\\ \varphi_3(x)=\cos x+\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt;\end{cases}$$

14. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt; \end{cases}$$

15. $\varphi''(x) + \int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt = e^{2x},\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1;$

16. $\varphi'(x) - \varphi(x) + \int\limits_0^x (x-t)\varphi'(t)\,dt - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt = x,\ \varphi(0) = -1;$

17. $\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi''(t)\,dt + 2\int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi'(t)\,dt = \cos x,$

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0;$

18. $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 2\int\limits_0^x \sin(x-t)\varphi'(t)\,dt = \cos x,\ \varphi(0) = -1,\ \varphi'(0) = 1;$

19. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x,$

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0;$

20. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x,$

$\varphi(0) = -1,\ \varphi'(0) = 1.$

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики – крупнейшая в Санкт-Петербургском государственном университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П.Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г.Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, Санкт-Петербургским государственным электротехническим университетом «ЛЭТИ» и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия), Институтом прикладного анализа и стохастики имени Вейерштрасса (Германия).

Блинова Ирина Владимировна,
Попов Игорь Юрьевич,
Трифанова Екатерина Станиславовна
Типовые расчеты по функциональному анализу.

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка Трифанова Е.С., Блинова И.В.
Дизайн обложки Попов И.Ю.
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики.
Зав. РИО Гусарова Н.Ф.
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ
Отпечатано на ризографе
Тираж 100 экз.