

2. АНАЛИЗ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

2.1. Грубость свойств систем управления

2.1.1. Постановка задачи. Понятия грубости и робастности

Задача исследования систем с неопределенностями может быть сформулирована следующим образом. Пусть номинальная система (т.е. система с номинальной математической моделью) обладает некоторыми *желаемыми свойствами* (например, определенным типом устойчивости, заданными показателями точности или заданными показателями динамического качества и т. п.). Сохранятся ли эти свойства при изменениях (*вариациях* или *возмущениях*) математической модели? Проблема сохранения некоторого свойства системы при изменениях ее математической модели изучается *теорией грубости свойств систем управления*. Дадим следующее определение.

Определение 2.1. *Если некоторое свойство системы сохраняется хотя бы при малых (в определенном смысле) вариациях ее математической модели, то данное свойство называется грубым по отношению к выделенному классу вариаций. Если можно указать хотя бы одну систему, у которой исследуемое свойство не сохраняется при сколь угодно малых вариациях ее математической модели, то такое свойство называется негрубым.*

Особое значение понятие грубости приобретает при исследовании свойств сложной системы по ее упрощенной (идеализированной) модели. Впервые задача исследования свойств системы по ее упрощенной номинальной модели была сформулирована и решена известным русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым в форме его знаменитых теорем об исследовании устойчивости по первому приближению (т. е. по линеаризованной модели). Термин *грубая система* был введен в научный оборот только через 45 лет А.А. Андроновым, выделившим класс динамических систем, топологическая структура траекторий которых не меняется при малых изменениях их математических моделей.

Однако для теории динамических систем с целенаправленно изменяемыми внешними воздействиями (т.е. для задач теории управления) характерна более широкая трактовка понятия грубости как сохранения некоторых свойств (и не обязательно – только топологической структуры траекторий) динамической системы при малых изменениях ее математической модели. Так как фундаментальным свойством любой динамической системы является устойчивость, то прежде всего интересуются грубостью свойств устойчивости (хотя можно изучать

грубость свойств переходных процессов, грубость точностных свойств, грубость частотных характеристик и т. п.).

В последнее время в литературе часто вместо термина «грубость» используется термин *робастность* (от англ. *robust* – крепкий, сильный). Обычно, говоря о робастности, предполагают знание количественных оценок допустимых вариаций математической модели. В этом смысле «грубость» может трактоваться как «локальная робастность». Термины «грубый» и «робастный» используются также по отношению к алгоритмам управления и замкнутым системам. При этом для корректного использования этих терминов необходимо оговаривать класс номинальных моделей систем управления, класс допустимых вариаций и указывать свойство системы, которое сохраняется при данных вариациях. Однако во многих специальных разделах современной теории управления термин «робастный» используется в специальном, более узком смысле без каких-либо дополнительных оговорок и условий. Так, *адаптивными робастными* системами в современной теории адаптивного управления называются системы, которые за счет специальной модификации алгоритма адаптации сохраняют работоспособность в условиях внешних возмущений, нестационарности неизвестных параметров или при наличии паразитной динамики.

В настоящем параграфе мы остановимся на исследовании *грубости свойств устойчивости* динамических систем. При этом основным методом исследования является метод функций Ляпунова. В приложении 2 приведены краткие сведения из теории устойчивости и метода функций Ляпунова, необходимые для понимания последующего материала.

Грубость свойств систем управления может изучаться по отношению к различным классам вариаций (возмущений) математической модели – параметрическим, сигнальным, структурным и т.д. Ниже мы остановимся подробнее на двух классах возмущений – параметрических и структурных. Анализ грубости свойств устойчивости по отношению к сигнальным (постоянно действующим) возмущениям можно найти в литературе.

2.1.2. Грубость свойств устойчивости по отношению к параметрическим возмущениям

Начнем изучение вопроса с частного примера, а потом распространим полученный результат на широкий класс динамических систем.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу асимптотической стабилизации объекта вида

$$\dot{x} = qx + u, \tag{2.1}$$

где x – скалярная регулируемая переменная, u – сигнал управления, q – постоянный параметр. Очевидно, что для решения поставленной задачи можно использовать регулятор вида

$$u = -q_0 x - kx, \quad (2.2)$$

где $k > 0$ – коэффициент обратной связи, а q_0 – номинальное значение параметра q . Если истинное значение параметра соответствует номинальному (т. е. $q_0 = q$), то, подставляя (2.2) в (2.1), имеем

$$\dot{x} = -kx. \quad (2.3)$$

Так как модель (2.3) получена при условии равенства истинного значения параметра q номинальному \hat{q} , то будем называть ее *номинальной моделью* замкнутой системы. Из (2.3) с очевидностью следует экспоненциальная устойчивость нулевого состояния равновесия. Сохранится ли данное свойство при отклонении номинального значения параметра от истинного? Подставляя (2.2) в (2.1) при условии, что $q \neq q_0$, получаем

$$\dot{x} = -kx + \delta q x, \quad (2.4)$$

где величина $\delta q = q - q_0$ носит название *параметрического возмущения* (или *параметрической ошибки*). При этом сама модель (2.4) получила название *параметрически возмущенной* модели. Очевидно, что возмущенная модель также экспоненциально устойчива, если $|\delta q| < k$. Таким образом, можно сделать *предположение, что свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям*, так как оно сохраняется хотя бы при малых отклонениях истинных параметров объекта от принятых номинальных значений. \square

Рассмотрим теперь *номинальную* систему более общего вида,

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (2.5)$$

где x – n -мерный вектор состояния. Пусть возмущенная система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, t) + \Delta(x, t), \quad (2.6)$$

где слагаемое $\Delta(x, t)$ в общей форме определяет вариации (возмущения) номинальной модели. Класс *параметрических возмущений* задается неравенством

$$\Delta(x, t) \leq c_5 \|x\|, \quad (2.7)$$

где c_5 – некоторая положительная константа. Использование неравенства (2.7) для определения класса параметрических возмущений может

быть мотивировано с учетом примера 2.1. Действительно, параметрическое возмущение (состоящее в отклонении истинного значения параметра от принятого номинального) привело к появлению в возмущенной модели (2.4) слагаемого $\delta\dot{x}$, для которого справедлива оценка $\delta\dot{x} \leq |\delta\phi| |x|$. Заменяя положительную константу $|\delta\phi|$ на c_5 , слагаемое $\delta\dot{x}$ на $\Delta(x, t)$ и переходя к векторной величине x , получим общее описание класса параметрических возмущений в виде неравенства (2.7).

Определение 2.2. *Свойство устойчивости системы (2.5) называется грубым по отношению к параметрическим возмущениям, если может быть указано число $c_5 > 0$ такое, что данное свойство устойчивости справедливо также для системы (2.6) при любых $\Delta(x, t)$, удовлетворяющих условию (2.7).*

Пусть номинальная модель (2.5) является экспоненциально устойчивой и, следовательно, существует функция Ляпунова $V(x)$, для которой справедливы неравенства (П 2.10)–(П 2.12) из Приложения 2. Тогда вычисляя производную функции Ляпунова $V(x)$ в силу уравнений параметрически возмущенной системы (2.6), получаем:

$$\dot{V}(x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \|\Delta\| \leq -(c_3 - c_4 c_5) \|x\|^2 \leq -\frac{1}{c_2} (c_3 - c_4 c_5) V(x).$$

Из последнего неравенства очевидно, что при $c_5 < c_3 / c_4$ состояние равновесия возмущенной системы (2.6) является экспоненциально устойчивым. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям.*

Замечание 2.1. Так как можно указать количественную оценку допустимых параметрических вариаций, определенную неравенством $c_5 < c_3 / c_4$, то свойство экспоненциальной устойчивости является также *робастным* по отношению к параметрическим возмущениям. \square

Являются ли грубыми по отношению к параметрическим возмущениям свойства устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости? Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующие примеры.

Пример 2.2. Пусть для управления объектом (2.1) использован регулятор вида

$$u = -q_0 x, \tag{2.8}$$

где, как и раньше, q_0 – номинальное значение параметра q . При равенстве номинального значения параметра истинному подстановка уравнения (2.8) в уравнение (2.1) дает следующую номинальную модель замкнутой системы:

$$\dot{x} = 0,$$

откуда следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $x = 0$. При $q \neq q_0$ получаем параметрически возмущенную модель:

$$\dot{x} = \delta x. \quad (2.9)$$

Из (2.9) очевидно, что при любых сколь угодно малых положительных параметрических возмущениях (т.е. при $\delta > 0$) модель (2.9) является неустойчивой. Следовательно, свойство устойчивости по Ляпунову не является грубым по отношению к параметрическим возмущениям. \square

Пример 2.3. Пусть линейная номинальная модель имеет вид (П2.8) (см. приложение 2). Как отмечено в приложении, состояние равновесия $x = 0$ линейной нестационарной системы (П2.8) является асимптотически устойчивым (но не является ни равномерно асимптотически устойчивым, ни экспоненциально устойчивым). Очевидно, что состояние равновесия $x = 0$ возмущенной системы

$$\dot{x} = -\frac{1}{t+1}x + c_5x = -\left(\frac{1}{t+1} - c_5\right)x$$

является неустойчивым для любых сколь угодно малых $c_5 > 0$, так как

$$-\left(\frac{1}{t+1} - c_5\right) > 0$$

при всех $t > 1/c_5 - 1$. \square

Пример 2.4. Пусть нелинейная номинальная модель имеет вид (П2.9) (см. приложение 2). Состояние равновесия $x = 0$ системы является равномерно асимптотически устойчивым (но не является экспоненциально устойчивым). При этом состояние равновесия $x = 0$ возмущенной системы

$$\dot{x} = -x^3 + c_5x = -(x^2 - c_5)x$$

является неустойчивым для любых сколь угодно малых $c_5 > 0$, так как в малой окрестности точки $x = 0$ имеем

$$-(x^2 - c_5) > 0$$

для всех $|x| < \sqrt{c_5}$. \square

Примеры 2.2, 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Свойства устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости не являются грубыми по отношению к параметрическим возмущениям.*

Класс линейных стационарных динамических систем допускает наглядную геометрическую интерпретацию введенного понятия грубости свойств устойчивости. Экспоненциальная устойчивость линейных систем означает, что корни системы расположены в левой открытой полуплоскости на некотором ненулевом расстоянии λ от границы устойчивости (см. рис. 2.1).

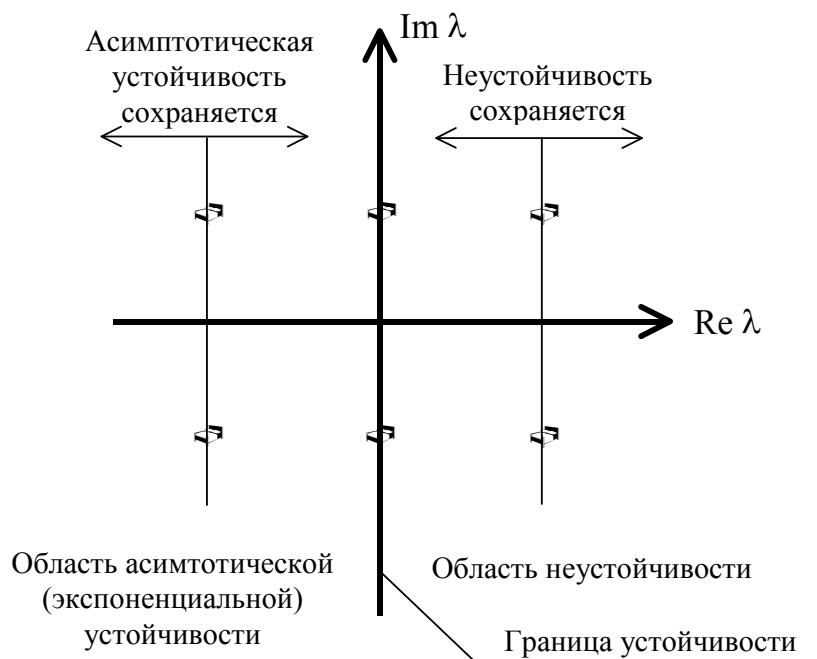


Рис. 2.1. Комплексная плоскость и корни линейных стационарных систем

Поэтому небольшие изменения в расположении корней, вызванные параметрическими возмущениями, не приводят к переходу корня в правую полуплоскость и, следовательно, к изменению типа устойчивости. Аналогичное замечание можно сделать для неустойчивых систем, имеющих корни в правой открытой полуплоскости. Однако, если система находится на границе устойчивости (т.е. является устойчивой по Ляпунову, но не является экспоненциально устойчивой), то она имеет корни с нулевой вещественной частью, расположенные на мнимой оси. Малейший (произвольно малый) сдвиг корней вправо приводит к переходу корней в правую полуплоскость и к изменению свойств устойчивости (система становится неустойчивой). Аналогично, при малейшем сдвиге корней влево корни попадают в левую полуплоскость, и система становится экспоненциально устойчивой.

Проблема обеспечения стабильной работы технических систем, находящихся на границе устойчивости, является сложной инженерной проблемой. Так, генератор гармонических колебаний может быть описан простым дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2.10)$$

где константа ω определяет угловую частоту колебаний, а начальные условия $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ задают амплитуду и фазу колебаний. Очевидно, что реализация уравнения (2.10) на современной электронной базе допускает микроминиатюрное исполнение (схема моделирования генератора (2.10) приведена на рис. 2.2).

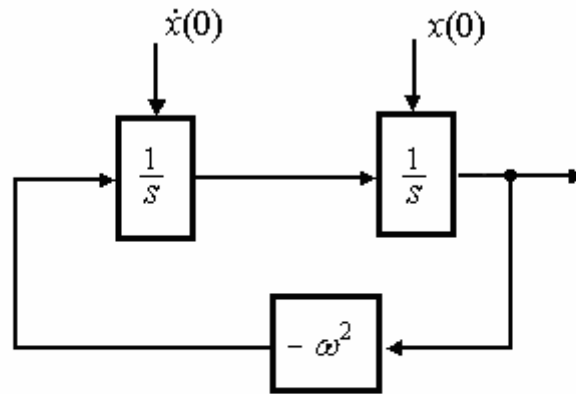


Рис. 2.2. Функциональная блок-схема генератора гармонического сигнала

Однако на практике генераторы представляют собой достаточно сложные технические устройства, основная проблема практической реализации которых состоит в обеспечении стабильности характеристик. Легко убедиться, что корни характеристического уравнения генератора (2.10) являются чисто мнимыми и, следовательно, сам генератор (как динамическая система) находится на границе устойчивости. Малейшая неидеальность в реализации уравнения (2.10) приводит к смещению корней (влево или вправо с мнимой оси) и, соответственно, к генерации затухающих или расходящихся колебаний. Таким образом, проблема грубости свойств устойчивости динамических систем получает важное практическое значение при конструировании генераторов, интерполяторов и дифференциальных анализаторов.

2.1.3. Грубость свойств устойчивости по отношению к структурным возмущениям

Рассмотрим теперь случай *структурных возмущений*, вызванных наличием *паразитной* динамики. Ограничимся классом линейных стационарных систем. Пусть номинальная линейная система описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (2.11)$$

$$u = -k^T x, \quad (2.12)$$

где x – n -мерный вектор состояния, u – сигнал управления, A – $n \times n$ стационарная матрица, b – $n \times 1$ вектор стационарных коэффициентов, а k – $n \times 1$ вектор коэффициентов обратных связей. При этом уравнение (2.11) описывает объект управления, а уравнение (2.12) – модальный регулятор стабилизации (см. рис. 2.3.а). Регулятор (2.12) выбран таким образом, что замкнутая система (2.11), (2.12) экспоненциально устойчива, т.е. матрица $F = A - bk^T$ является гурвицевой.

Пусть возмущенная система имеет вид

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad (2.13)$$

$$\dot{\xi} = \gamma(u - \xi), \quad (2.14)$$

$$u = -k^T x, \quad (2.15)$$

где уравнение (2.14) описывает паразитную динамику, представленную апериодическим звеном первого порядка с постоянной времени $T = 1/\gamma$ и выходной переменной ξ (см. рис. 2.3.б).

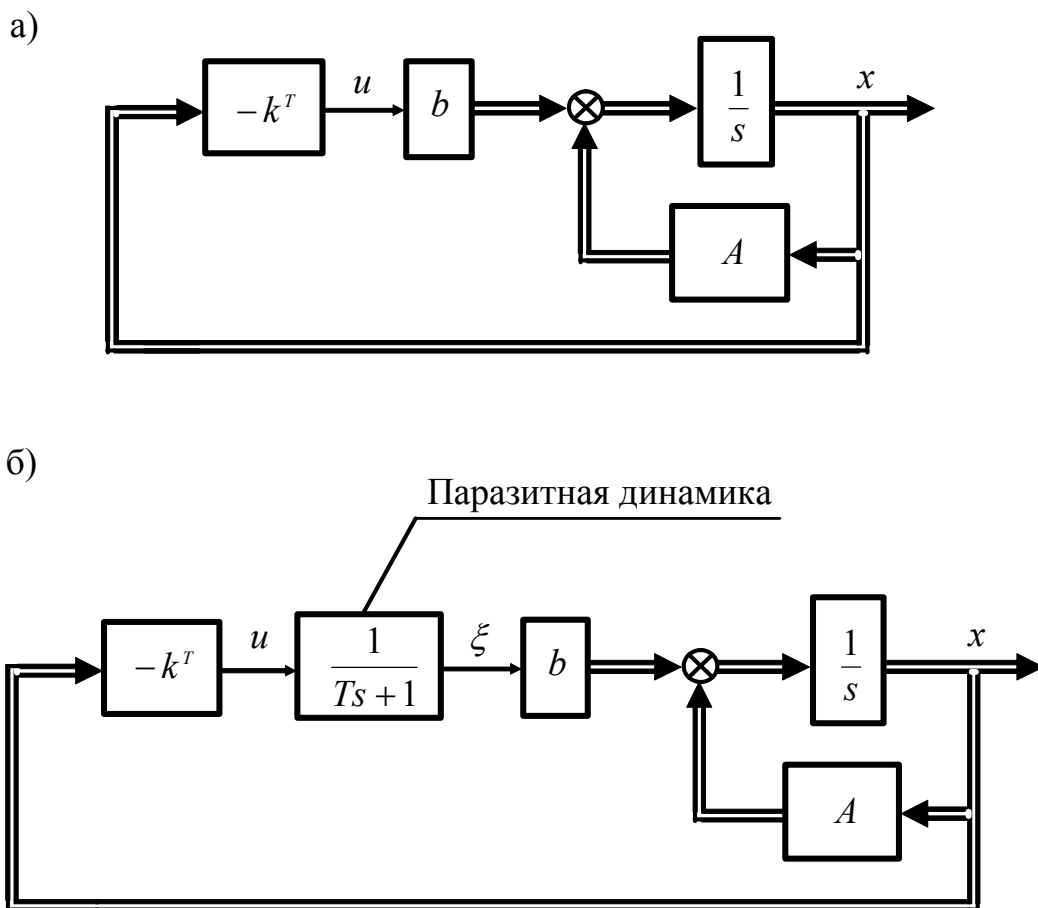


Рис. 2.3. Системы модального управления: а – структурная схема номинальной модели; б – структурная схема модели с паразитной динамикой

Вопрос, который подлежит исследованию, состоит в следующем: будет ли возмущенная система (2.13)–(2.15) экспоненциально устойчивой хотя бы при малых значениях постоянной времени T ? В случае положительного ответа мы сделаем вывод о грубости свойства экспоненциальной устойчивости по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.

Для использования метода функций Ляпунова преобразуем систему (2.13)–(2.15) к удобному виду, введя новую «быструю» переменную

$$z = u - \xi. \quad (2.16)$$

Так как процессы в возмущенной системе (2.13)–(2.15) будут исследоваться при малых значениях постоянной времени T (т.е. при больших значениях коэффициента γ), то разность между сигналами u и ξ будет быстро затухать. Это наблюдение мотивирует введенное название переменной z – *быстрая переменная*.

Продифференцируем (2.16) с учетом (2.13) и (2.15) (о правилах дифференцирования скалярных функций векторного аргумента см. приложение 1):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{u} - \dot{\xi} = -\frac{\partial}{\partial x}(k^T x)\dot{x} - \gamma(u - z) = -k^T(Ax + b\xi) - \gamma z = \\ &= -k^T(Ax + b(-k^T x - z)) - \gamma z = -k^T Fx + k^T bz - \gamma z. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя $\xi = u - z$ в (2.13), получаем описание замкнутой возмущенной системы в координатах x и z :

$$\dot{x} = Fx - bz, \quad (2.17)$$

$$\dot{z} = -\gamma z - k^T Fx + k^T bz. \quad (2.18)$$

Для исследования устойчивости системы (2.17), (2.18) используем функцию Ляпунова вида

$$V(x, z) = \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} z^2, \quad (2.19)$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения Ляпунова

$$F^T P + P F = -2I. \quad (2.20)$$

Отметим, что уравнение (2.19) имеет единственное решение, так как матрица F является гурвицевой (см. приложение 1).

Вычисляя производную функции (2.19) в силу уравнений (2.17), (2.18), получаем (о правилах транспонирования матричных произведений см. приложение 1):

$$\begin{aligned}
V(x, z) &= \frac{1}{2} x^T P x + \frac{1}{2} x^T P b z + \frac{1}{2} z^T k x \\
&= \frac{1}{2} (F x - b z)^T P x + \frac{1}{2} x^T P (F x - b z) - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2 = \\
&= \frac{1}{2} x^T (F^T P + P F) x - \frac{1}{2} z b^T P x - \frac{1}{2} x^T P b z - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнение (2.20) и тот факт, что слагаемые $\frac{1}{2} z b^T P x$ и $\frac{1}{2} x^T P b z$ равны (в силу симметричности матрицы P), перепишем выражение для производной функции Ляпунова в виде

$$V(x, z) = -\|x\|^2 - z b^T P x - \gamma z^2 - z k^T F x + k^T b z^2.$$

Объединяя слагаемые с одинаковыми переменными и переходя к нормам, получим

$$V(x, z) \leq -\|x\|^2 - \gamma \|z\|^2 + \rho_1 \|z\| \|x\| + \rho_2 \|z\|^2, \quad (2.21)$$

где значения констант ρ_1 и ρ_2 определяются соотношениями

$$\rho_1 = \|b^T P - k^T F\|, \quad \rho_2 = \|k^T b\|. \quad (2.22)$$

Перепишем выражение (2.21) в виде

$$\begin{aligned}
V(x, z) &\leq -\frac{3}{4} \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \|z\|^2 - \frac{1}{4} \|x\|^2 + \rho_1 \|z\| \|x\| - \rho_1^2 \|z\|^2 = \\
&= -\frac{3}{4} \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \|z\|^2 - \left(\frac{1}{2} \|x\| - \rho_1 \|z\| \right)^2.
\end{aligned}$$

Усиливая последнее неравенство, пренебрежем квадратным членом:

$$V(x, z) \leq -\frac{3}{4} \|x\|^2 - (\gamma - \rho_1^2 - \rho_2) \|z\|^2. \quad (2.23)$$

Из (2.23) легко получить условие экспоненциальной устойчивости

$$\gamma > \rho_1^2 + \rho_2,$$

где положительные константы ρ_1 и ρ_2 определены равенствами (2.22).

Другими словами, если коэффициент γ является достаточно большим (или, что эквивалентно, постоянная времени $T = 1/\gamma$ звена паразитной динамики является достаточно малой), то возмущенная система (2.13)–(2.15) сохраняет свойство экспоненциальной устойчивости. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.*

В общем случае такое утверждение не является справедливым для нелинейных и нестационарных систем. Для них свойство экспоненциальной устойчивости сохраняется только для ограниченного множества начальных условий, радиус которого зависит от скорости изменения нестационарных параметров.

2.1.4. Практические выводы

Свойство экспоненциальной устойчивости является наиболее сильным («крепким», робастным) по отношению к различным вариациям математической модели замкнутой системы. На практике это означает следующее. Если синтезированный регулятор обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы с номинальной (упрощенной, идеализированной) математической моделью, то этот же регулятор обеспечит экспоненциальную устойчивость и для реальной системы при небольших отклонениях ее параметров (или структуры) от принятых номинальных значений. Это позволяет при синтезе управления использовать усредненные (приближенные) значения параметров, пренебрегать малыми постоянными времени.

Для класса линейных систем задача обеспечения экспоненциальной устойчивости является достаточно простой, так как свойства асимптотической и экспоненциальной устойчивости следуют одно из другого (см. приложение 2). Для нелинейных и нестационарных систем асимптотическая устойчивость, в общем случае, не означает экспоненциальной устойчивости, а, значит, не гарантирует устойчивости замкнутых систем даже при малых вариациях их математических моделей. Особую сложность приобретают задачи практической реализации систем, находящихся на границе устойчивости, так как они тоже не являются грубыми по отношению к различным типам возмущений (вариаций) их математических моделей.

В завершение параграфа отметим, что в практической деятельности разработчики систем управления часто исходят из интуитивной предпосылки, что свойства реальной системы сохраняются при малых изменениях ее математической модели. Однако, как мы установили выше, такое утверждение справедливо только для одного типа устойчивости – экспоненциальной. В связи с этим позволим себе сделать замечание, что часто интуиция является плохим советчиком в тех вопросах, где требуются строгие методы исследования.

2.2. Методы теории чувствительности

Методы теории чувствительности объектов и систем управления к вариациям параметров их функциональных компонентов относительно номинальных значений этих параметров является эффективным инструментом решения проблемы параметрической неопределенности, сформулированной в разделе 1, как в аналитической, так и синтетической постановках. Инструментарий современной теории чувствительности (ТЧ) весьма обширен, он имеет богатую библиографию. Авторы для решения поставленных задач ограничились тем инструментом теории чувствительности, возможности которого сориентированы на матричный формализм метода пространства состояния (МПС).

2.2.1. Аппарат функций траекторной чувствительности

Аппарат функций траекторной чувствительности (ФТЧ) в своей первичной постановке строился так, чтобы дать разработчикам возможность наблюдать дополнительное движение динамической системы, порожденное вариациями параметров ее функциональных компонентов относительно их номинальных значений, оценивать влияние этого движения на качественные показатели системы.

В связи с тем, что наблюдение дополнительного движения осуществляется с помощью дополнительной динамической системы с фиксированными параметрами, именуемой моделью траекторной чувствительности (МТЧ), аппарат дает возможность разработчику при формировании объекта управления, представляющего собой агрегированные объединения физического (технологического) процесса, регулирующих органов и устройств измерения компонентов вектора состояния, сравнивать конфигурацию ОУ на предмет оценки потенциальной стабильности показателей качества проектируемой системы в условиях неопределенности параметров. Анализ управляемости агрегированной системы «номинальный ОУ – МТЧ» по выходу модели траекторной чувствительности с помощью аппарата матриц управляемости по состоянию и выходу МТЧ, а также системных грамианов позволяет ранжировать параметры по степени достижимости стабильности показателей качества систем с использованием возможностей неадаптивных алгоритмов управления, рационально распределять ресурсы управления, решать задачу «оптимального номинала» агрегатов ОУ. Применительно к спроектированной системе аппарат ФТЧ позволяет как на траекторном, так и на структурном уровне оценивать эффект введения в состав системы регуляторов в условиях параметрической неопределенности, проводить сравнения альтернативных вариантов регуляторов. Применение аппарата функций траекторной чувствительности к дискретным ди-

намическим системам дает возможность как траекторно, так и структурно оценивать влияние таких «дискретных» параметров, как интервал дискретности и запаздывания вывода из ЭВМ вычисленного управления.

Для введения аппарата траекторной чувствительности рассмотрим непрерывную динамическую систему, которая характеризуется вектором состояния $X \in R^n$, вектором выхода $y \in R^m$, а также вектором q квазистационарных параметров ($\dot{q}(t) = 0$), который вызывает вариацию Δq так, что $q = q_0 + \Delta q$, $q \in R^p$. Чтобы обеспечить прозрачность трактовки результатов, будем использовать безразмерную форму представления элементов q_j вектора параметров q ($j = \overline{1, p}$).

Полное движение динамической системы для случая произвольного значения вектора q параметров по состоянию и выходу может быть представлено в форме

$$x(t, q = q_0 + \Delta q) = x(t) + \Delta x(t, q_0, \Delta q), \quad (2.24)$$

$$y(t, q = q_0 + \Delta q) = y(t) + \Delta y(t, q_0, \Delta q), \quad (2.25)$$

где $x(t) \stackrel{\Delta}{=} x(t, q_0)$; $y(t) \stackrel{\Delta}{=} y(t, q_0)$. В выражениях (2.24), (2.25) $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой номинальные траектории непрерывной динамической системы соответственно по состоянию и выходу, $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$ – дополнительные движения системы по состоянию и выходу, определяемые вариацией Δq , а также номинальным значением q_0 вектора параметров. Будем полагать справедливыми две гипотезы: первая – о малости $\|\Delta q\|$ нормы вариации Δq вектора параметров, вторая – о непрерывной дифференцируемости по вектору параметров q в точке $q = q_0$ траекторий $x(t, q)$ и $y(t, q)$ в каждый момент времени. Тогда (2.24) и (2.25) принимают вид

$$x(t, q) = x(t) + \left. \frac{\partial x(t, q)}{\partial q} \right|_{q=q_0} \Delta q + O_x^2(\Delta q), \quad (2.26)$$

$$y(t, q) = y(t) + \left. \frac{\partial y(t, q)}{\partial q} \right|_{q=q_0} \Delta q + O_y^2(\Delta q), \quad (2.27)$$

где выполняются соотношения

$$\lim_{\|\Delta q\| \rightarrow 0} \frac{\|O_x^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} = 0; \quad \lim_{\|\Delta q\| \rightarrow 0} \frac{\|O_y^2(\Delta q)\|}{\|\Delta q\|} = 0. \quad (2.28)$$

Если воспользоваться (2.26)–(2.28), то для дополнительных движений $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$ параметрически возмущенной системы можно записать:

$$\Delta x(t, q_0, \Delta q) = \Sigma(t) \Delta q, \quad (2.29)$$

$$\Delta y(t, q_0, \Delta q) = \Xi(t) \Delta q. \quad (2.30)$$

Матрицы Якоби вида $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$ именуется матрицами траекторной чувствительности непрерывной системы соответственно по состоянию и выходу, и столбцовая форма их записи имеет вид

$$\Sigma(t) = \text{row} \left\{ \sigma_j(t) = \frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.31)$$

$$\Xi(t) = \text{row} \left\{ \eta_j(t) = \frac{\partial y(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.32)$$

где $\sigma_j(t)$ и $\eta_j(t)$ являются функциями траекторной чувствительности первого порядка (в дальнейшем – просто функциями траекторной чувствительности) по состоянию и выходу.

Заметим, что если известны матрицы чувствительности $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$ непрерывной динамической системы для любого t , то основные задачи анализа параметрической неопределенности в традиционной постановке могут быть решены. Причем, если достаточно решения задачи в экстремальной версии, в форме мажорант и минорант дополнительных движений, то эффективным инструментом здесь оказывается SVD-разложение матрицы (см. приложение 5) траекторной чувствительности $\Sigma(t)$ и $\Xi(t)$. В пространстве траекторий для любого t максимальное $\alpha^*(*)_M(t)$ и минимальное $\alpha^*(*)_m(t)$ сингулярные числа матрицы $(*)(t)$, задают значение нормы максимальной и минимальной полуосей эллипсоидных покрытий дополнительных движений (2.29) и (2.30), порожденных сферой $\|\Delta q\| = 1$, а элементы правого сингулярного базиса SVD-разложения матрицы $(*)(t)$ задают сочетания вариаций параметров, порождающие максимальную и минимальную полуоси этого покрытия.

Конструирование модели траекторной чувствительности проиллюстрируем на примере линейного непрерывного ОУ, матричные компоненты модельного представления которого зависят от вектора параметров q .

$$\dot{x}(t, q) = A(q)x(t, q) + B(q)u(t); x(0, q) = x(0); y(t, q) = C(q)x(t, q), \quad (2.33)$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m \forall q, t$. Продифференцируем выражение (2.33) по j -му компоненту q_j вектора параметров q в точке $q = q_0$. Сконструируем порядок дифференцирования по времени t и параметру q_j в левой части первого уравнения (2.33) так, что получим цепочку равенств

$$\left. \frac{\partial}{\partial q_j} (\mathfrak{X}(t, q)) \right|_{q=q_0} = \left. \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{dx(t, q)}{dt} \right) \right|_{q=q_0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x(t, q)}{\partial q_j} \right) \right|_{q=q_0} = \mathfrak{X}_j(t), \quad (2.34)$$

а также введем обозначения

$$A_{q_j} \stackrel{\Delta}{=} \left. \frac{\partial A(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; \quad B_{q_j} \stackrel{\Delta}{=} \left. \frac{\partial B(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}; \quad C_{q_j} \stackrel{\Delta}{=} \left. \frac{\partial C(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad (2.35)$$

$$A(q)|_{q=q_0} = A; \quad B(q)|_{q=q_0} = B; \quad C(q)|_{q=q_0} = C, \quad (2.36)$$

$$x(t, q)|_{q=q_0} = x(t); \quad y(t, q)|_{q=q_0} = y(t). \quad (2.37)$$

Теперь для j -й модели траекторной чувствительности получим представление

$$\mathfrak{X}_j(t) = A\sigma_j(t) + A_{q_j}x(t) + B_{q_j}u(t); \quad \eta_j = C\sigma_j(t) + C_{q_j}x(t), \quad (2.38)$$

МТЧ (2.38) будет генерировать функции траекторной чувствительности $\sigma_j(t)$ по состоянию и $\eta_j(t)$ по выходу, если ее дополнить моделью номинального ОУ (см. рисунок 2.4), полученной из (2.33) при $q = q_0$:

$$\mathfrak{X}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t). \quad (2.39)$$

Нетрудно видеть из (2.33) и (2.39), что динамическая модель дополнительных движений (2.29) и (2.30) с точностью до мультипликативной составляющей $\Delta q_j, j = \overline{1, p}$ по выходам $\sigma_j(j)$ и $\eta_j(t)$ совпадает системой из p МТЧ (2.38). Установление возможности сведения дополнительных движений к нулю хотя бы в асимптотике сводится к анализу управляемости МТЧ вида (2.38). Для этих целей сконструируем агрегированную систему с составным вектором $\mathfrak{X}_j = \text{col}\{x, \sigma_j\}$ размерности $\dim \mathfrak{X}_j = 2n$, которая объединением (2.38) и (2.39), получает векторно-матричное представление

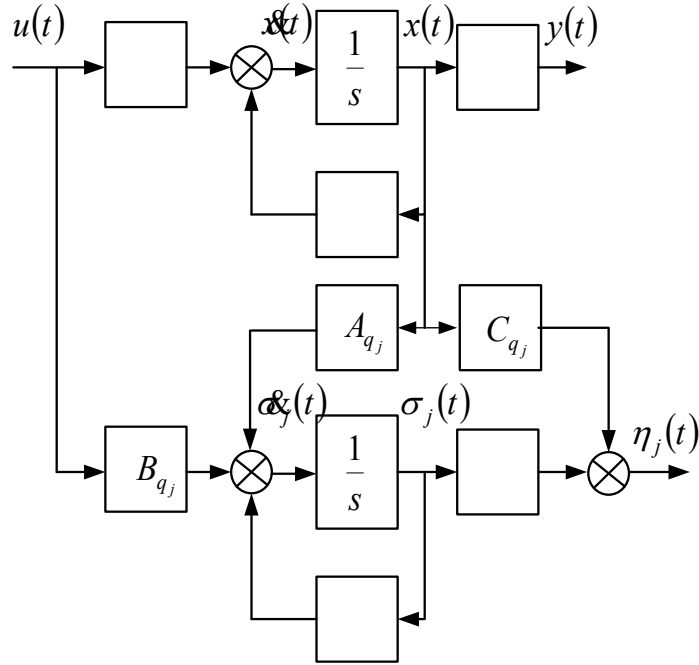
$$\mathfrak{X}_j(t) = \mathfrak{A}_j^0 \mathfrak{X}_j(t) + \mathfrak{B}_j^0 u(t); \quad \mathfrak{X}_j(0) = \text{col}\{x(0), 0\} \quad (2.40)$$

$$x(t) = \mathcal{E}_{x_j}^0 \mathfrak{X}_j(t); \quad y(t) = \mathcal{E}_j^0 \mathfrak{X}_j(t); \quad \sigma_j(t) = \mathcal{E}_{\sigma_j}^0 \mathfrak{X}_j(t); \quad \eta_j(t) = \mathcal{E}_{\eta_j}^0 \mathfrak{X}_j(t) \quad (2.41)$$

где

$$\mathcal{A}_j^0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_j} & A \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}_j^0 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_j} \end{bmatrix}; \quad (2.42)$$

$$\mathcal{C}_{x_j}^0 = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times n}]; \quad \mathcal{C}_j^0 = [C \quad 0_{m \times n}]; \quad \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 = [0_{n \times n} \quad I_{n \times n}]; \quad \mathcal{C}_{\eta_j}^0 = [C_{q_j} \quad C]. \quad (2.43)$$



B

Рис.2.4 Модель траекторной чувствительности, дополненная моделью номинального ОУ

Если провести агрегирование номинального ОУ (2.39) и всех p МТЧ (2.38) путем введения вектора $\mathcal{X}^0 = \text{col}\{x, \sigma_j; j = \overline{1, p}\}$ размерности $\dim \mathcal{X}^0 = (p+1)n$, то векторно-матричное представление такой системы получает вид

$$\dot{\mathcal{X}}^0(t) = \mathcal{A}^0 \mathcal{X}^0(t) + \mathcal{B}^0 u(t); \quad \mathcal{X}^0(0) = \text{col}\{x(0), \sigma_j(0) = 0; j = \overline{1, p}\}, \quad (2.44)$$

$$x(t) = \mathcal{C}_x^0 \mathcal{X}^0(t); \quad y(t) = \mathcal{C}_y^0 \mathcal{X}^0(t); \quad \sigma(t) = \mathcal{C}_\sigma^0 \mathcal{X}^0(t); \quad \eta(t) = \mathcal{C}_\eta^0 \mathcal{X}^0(t), \quad (2.45)$$

где

$$\mathcal{A}^0 = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times np} \\ \text{col}\{A_{q_j}; j = \overline{1, p}\} & \text{diag}\{A_{jj}^0 = A; j = \overline{1, p}\} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{B}^0 = \text{col}\{B, B_{q_j}; j = \overline{1, p}\}; \quad \mathcal{C}_x^0 = \text{row}[I_{n \times n} \quad 0_{n \times np}], \quad (2.47)$$

$$\mathcal{C}_y^0 = \text{row}[C \quad 0_{m \times pn}]; \quad \mathcal{C}_\sigma^0 = [0_{np \times n} \quad I_{np \times np}], \quad (2.48)$$

$$\mathcal{C}_\eta^0 = [\text{col}\{C_{q_j}; j = \overline{1, p}\} \quad \text{diag}\{C_{\eta_j}^0 = C; j = \overline{1, p}\}], \quad (2.49)$$

$$\sigma(t) = \text{col}\{\sigma_j(t); j = \overline{1, p}\}; \eta(t) = \text{col}\{\eta_j(t); j = \overline{1, p}\}. \quad (2.50)$$

Нетрудно видеть, что с ростом числа варьируемых параметров заметно растет размерность $\dim \mathcal{X} = (p+1)n$ агрегированной системы (2.44), (2.45), что может породить проблемы вычислительной устойчивости. В этой связи аддитивная природа дополнительных движений по состоянию (2.2а) и выходу (2.30) позволяет p раз воспользоваться агрегированной системой (2.40), (2.41) размерности $\dim \mathcal{X}_j = 2n$ для всех $j = \overline{1, p}$.

Для оценки достижимости нулевой траекторной чувствительности к вариациям параметра q_j ($j = \overline{1, p}$), а также ранжирования параметров по возможным затратам ресурсов управления для достижения нечувствительности траектории проектируемой системы к этим вариациям проведем анализ управляемости системы (2.40), (2.41) по вектору состояния σ_j МТУ и ее выходу η_j . Первая задача решается на тройке матриц $(\mathcal{C}_{\sigma_j}^0, \mathcal{A}_j^0, \mathcal{B}_j^0)$, а вторая – на тройке матриц $(\mathcal{C}_{\eta_j}^0, \mathcal{A}_j^0, \mathcal{B}_j^0)$. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Если тройка матриц $(\mathcal{C}_{\sigma_j}^0, \mathcal{A}_j^0, \mathcal{B}_j^0)$ полностью управляема для всех $j = \overline{1, p}$ в том смысле, что матрица управляемости

$$\mathcal{W}_{y\sigma_j}^0 = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 \mathcal{B}_j^0 & \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 \mathcal{A}_j^0 \mathcal{B}_j^0 & \dots & \mathcal{C}_{\sigma_j}^0 \mathcal{A}_j^{0^{n-1}} \mathcal{B}_j^0 \end{bmatrix}, j = \overline{1, p} \quad (2.51)$$

имеет ранг, равный n ($\text{rang } \mathcal{W}_{y\sigma_j}^0 = n$), то в системе управления, полученной агрегированием параметрически возмущенного ОУ (2.33) и регулятора, содержащего в своем составе номинальный ОУ (2.39) и реализующего закон управления по вектору дополнительного движения $\Delta x(t, q_0, \Delta q_j)$, достижима в асимптотике траекторная нечувствительность вектора состояния $x(t)$ к вариациям всех компонентов q_j ($j = \overline{1, p}$) вектора параметров q относительно номинальных значений в смысле выполнения условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t, q_0, \Delta q_j) = 0 \quad \forall j = \overline{1, p} \quad (2.52)$$

с наперед заданным темпом. □

Для доказательства утверждения используется тот факт, что в силу (2.29) и (2.31) условие (2.52) эквивалентно выполнению предельного перехода

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_j(t) = 0 \quad \forall j = \overline{1, p}. \quad (2.53)$$

Тогда управляемость тройки матриц (C_j^0, A_j^0, B_j^0) $j = \overline{1, p}$ гарантирует существование такого закона управления, при котором выполняется (2.53), а, следовательно, (2.52). ■

Требования к ресурсам управления заметно снижаются, если изначально ограничиться задачей обеспечения траекторной нечувствительности выхода проектируемой системы. На уровне требований к структурным свойствам агрегированной системы (2.40), (2.41) задача сводится к контролю управляемости тройки матриц $(C_{\eta_j}^0, A_j^0, B_j^0)$ и количественной оценке эффекта управления по переменной η_j при приложении управления $u(t)$ фиксированной нормы с помощью сингулярных чисел матрицы управляемости

$$W_{\eta_j}^0 = \begin{bmatrix} C_{\eta_j}^0 B_j^0 & C_{\eta_j}^0 A_j^0 B_j^0 & \dots & C_{\eta_j}^0 A_j^{0n-1} B_j^0 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Следует заметить, что если ранг матриц B_j^0 и $C_{\eta_j}^0$ больше единицы, то матрица управляемости (2.54) по выходу составляется для всех возможных композиций столбцов матрицы B_j^0 и всех строк матрицы $C_{\eta_j}^0$. Ранжирование параметров q_j ($j = \overline{1, p}$) осуществляется по значению сингулярных чисел $\alpha \{W_{q_{\eta_j}}^0\}$. Чем эти числа меньше, тем большими по норме управлениями достигается асимптотическая траекторная нечувствительность данного компонента $y_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) вектора выхода $y(t)$ к вариациям j -го элемента q_j вектора параметров q . Нулевому сингулярному числу соответствуют бесконечные по норме управления, с помощью которых достигается асимптотическая траекторная нечувствительность компонента $y_j(t)$ вектора выхода $y(t)$.

Пример 2.5. Рассмотрим исполнительный электропривод (ЭП) проектируемой следящей системы, описываемый передаточной функцией

$$W_{\text{ЭП}}(s) = \frac{K_{\text{дв}}}{(T_{\text{дв}}s + 1)s}$$

при номинальном значении параметров и передаточной функцией

$$W_{\text{ЭП}}(s, q) = \frac{K_{\text{дв}}(1 + q_1)}{(T_{\text{дв}}(1 + q_2)s + 1)s}$$

при варьируемых параметрах $q_1 = q_{10} + \Delta q_1$; $q_2 = q_{20} + \Delta q_2$; $q_{10} = q_{20} = 0$; $|\Delta q_1| = |\Delta q_2| \leq 0.3$. В выражениях для передаточных функций $K_{\text{дв}} = 20$ рад \cdot с $^{-1} \cdot B^{-1}$, $T_{\text{дв}} = 0.1$ с. Для составления векторно-матричного

описания ОУ (2.33), (2.3а), МТЧ (2.38) и агрегированных систем (2.40), (2.41) запишем передаточную матрицу ЭП в форме

$$W_{эн}(s, q) = \frac{\frac{K_{\partial\epsilon} \cdot 1 + q_1 \cdot 1}{T_{\partial\epsilon} \cdot 1 + q_2 \cdot s}}{1 + \frac{1}{T_{\partial\epsilon}(1 + q_2) \cdot \frac{1}{s}}} = \frac{200 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + q_1 \cdot 1}{1 + q_2 \cdot s}}{1 + 10 \cdot \frac{1}{1 + q_2 \cdot s}}$$

Воспользуемся базисом представления передаточной функции $W_{эн}(s, q)$, в котором от q_1 и q_2 зависит только матрица состояния, тогда векторно-матричное описание (2.33) ОУ получает вид

$$\dot{x}(t, q) = A(q)x(t, q) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t),$$

в котором

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 + q_1}{1 + q_2} \\ 0 & -\frac{10}{1 + q_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрицы номинального ОУ (2.39) имеют реализации

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Матрицы моделей траекторий чувствительности (2.38):

$$A_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{q_1} = [0 \quad 0];$$

$$A_{q_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}; \quad B_{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{q_2} = [0 \quad 0].$$

Матрицы агрегированной системы (2.40), (2.41) имеют представление:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_1} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad B_1^0 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_{\sigma_1}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C_{\eta_1}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$\mathcal{A}_2^0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_2} & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 0 & -10 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}_2^0 = \begin{bmatrix} B \\ B_{q_2} \end{bmatrix} = \mathcal{B}_1^0; \quad \mathcal{C}_{\delta_2}^0 = \mathcal{C}_{\delta_1}^0; \\ \mathcal{C}_{\eta_2}^0 = \mathcal{C}_{\eta_1}^0;$$

Проверим управляемость агрегированных систем по состоянию $\sigma_j(t)$ и выходу $\eta_j(t)$ ($j=1,2$) с помощью матриц управляемости $\tilde{W}_{y\sigma_j}$ (2.51) и $\tilde{W}_{y\eta_j}$ (2.54), которые с учетом $n=2$ имеют реализации

$$\tilde{W}_{y\sigma_1} = [\tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{A}_1 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{A}_1^2 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\sigma_1} \tilde{A}_1^3 \tilde{B}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 200 & -2000 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \tilde{W}_{y\eta_1} = [\tilde{C}_{\eta_1} \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\eta_1} \tilde{A}_1 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\eta_1} \tilde{A}_1^2 \tilde{B}_1 \quad \tilde{C}_{\eta_1} \tilde{A}_1^3 \tilde{B}_1] = [0 \quad 200 \quad -2000 \quad 20000]; \\ \tilde{W}_{y\sigma_2} = [\tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{A}_2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{A}_2^2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\sigma_2} \tilde{A}_2^3 \tilde{B}_2] = \\ = \begin{bmatrix} 0 & -200 & 4000 & -60000 \\ 0 & 2000 & -40000 & 600000 \end{bmatrix}; \\ \tilde{W}_{y\eta_2} = [\tilde{C}_{\eta_2} \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\eta_2} \tilde{A}_2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\eta_2} \tilde{A}_2^2 \tilde{B}_2 \quad \tilde{C}_{\eta_2} \tilde{A}_2^3 \tilde{B}_2] = \\ = [0 \quad -200 \quad 4000 \quad -60000].$$

Ранги матриц $\tilde{W}_{y\sigma_1}$ и $\tilde{W}_{y\sigma_2}$ соответственно равны $\text{rang } \tilde{W}_{y\sigma_1} = 1$, $\text{rang } \tilde{W}_{y\sigma_2} = 1$, агрегированные системы (2.40), (2.41) с составными векторами состояний $\tilde{x}_1 = \text{col}\{x, \sigma_1\}$ и $\tilde{x}_2 = \text{col}\{x, \sigma_2\}$ не являются полностью управляемыми по векторам $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$, поэтому недостаточно выполнения условия асимптотической сходимости (2.52) по состоянию параметрически возмущенного ОУ. Ранги матриц $\mathcal{W}_{y\eta_1}^0$ и $\mathcal{W}_{y\eta_2}^0$ равны $\text{rang } \tilde{W}_{y\eta_1} = \text{rang } \tilde{W}_{y\eta_2} = 1$, что совпадает с размерностью $m=1$ вектора выхода. Таким образом, выбором закона управления можно обеспечить сходимость $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y(t, q_0, \Delta q_j) = 0; j = \overline{1,2}$ с заданным темпом. Сингулярные числа матриц $\mathcal{W}_{y\eta_j}^0$ ($j = \overline{1,2}$) принимают значения $\alpha\{\mathcal{W}_{y\eta_1}^0\} = 2 \cdot 10^4; \alpha\{\mathcal{W}_{y\eta_2}^0\} = 6 \cdot 10^4$. Отсюда следует, что асимптотическая сходимость к нулю дополнительного движения $\Delta y(t, q_0, \Delta q_1)$ потребует больших затрат на управление, чем сходимость дополнительного движения $\Delta y(t, q_0, \Delta q_2)$ с тем же темпом.

Рассмотрим теперь возможности аппарата функций траекторной чувствительности применительно к исследованию спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности, а, следова-

тельно, к оценке эффекта введения регулятора, реализующего просинтезированный закон управления.

При произвольном значении $q = q_0 + \Delta q$ векторе параметров исследуемая система имеет векторно-матричное представление

$$\dot{x}(t, q) = F(q)x(t, q) + G(q)g(t); x(0); y(t, q) = C(q)x(t, q), \quad (2.55)$$

$$\varepsilon(t, q) = g(t) - y(t, q), \quad (2.56)$$

где $g(t)$ – внешнее воздействие, $\varepsilon(t, q)$ – ошибка воспроизведения системой (2.55) внешнего воздействия. Система (2.55) образована агрегированием ОУ (2.33) и регулятора, реализующего ЗУ

$$U(t) = K_g g(t) - Kx(t) \quad (2.57)$$

в виде прямой связи (ПС) по внешнему воздействию и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния ОУ, матрицы которого K_g и K просинтезированы для случая номинальной версии (2.39) объекта управления. Определенности ради положим, что матрица K просинтезирована с использованием концепции матричного и векторного подобия, приводящей к матричному уравнению Сильвестра, решение которого является алгоритмической основой современной постановки задачи модального управления (МУ). Матрица K_g ПС доставляет спроектированной системе необходимые свойства отношения "вход–выход". Простейшим из них является равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии (свойство астатизма порядка $V \geq 1$), что накладывается на номинальную передаточную матрицу $\Phi(s) = \Phi(s, q = q_0)$ системы (2.55)

$$\Phi(s) = C(sI - F)^{-1} G \quad (2.58)$$

условие

$$\Phi(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) = -CF^{-1}G = I; \quad (2.59)$$

с учетом того, что

$$F = A - BK, G = BK_g \quad (2.60)$$

соотношение (2.59) позволяет для матрицы K_g ПС записать

$$K_g = -(CF^{-1}B)^{-1}. \quad (2.61)$$

Следует заметить, что в зависимости от состава допустимых измерений ЗУ (2.57) может иметь еще две реализационные версии, записываемые в формах

$$U(t) = K_g g(t) - K_y y(t) - K_x x(t), \quad (2.62)$$

$$U(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_x x(t). \quad (2.63)$$

При этом формы представления ЗУ (2.57), (2.62) и (2.63) при номинальных значениях параметров являются эквивалентными, если выполняются матричные соотношения

$$\begin{bmatrix} K_y & K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} = K, \quad (2.64)$$

$$K_\varepsilon = K_g = K_y, K_x = K + (CF^{-1}B)^{-1} C. \quad (2.65)$$

Однако при реализации структурных компонентов системы K_g , K_y и K_ε с некоторой параметрической неопределенностью, т.е. в форме $K_g(q)$, $K_y(q)$ и $K_\varepsilon(q)$, свойства системы (2.55), (2.56) с ЗУ в формах (2.57), (2.62) и (2.63), определяемые дополнительными движениями $\Delta x(t, q_0, \Delta q)$, $\Delta y(t, q_0, \Delta q)$ и $\Delta \varepsilon(t, q_0, \Delta q)$, оказываются различными.

Модель траекторной чувствительности системы (2.55), (2.56), если ввести обозначение

$$F_{q_j} = \frac{\Delta \partial F(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; G_{q_j} = \frac{\Delta \partial G(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; F(q) \Big|_{q=q_0} = F; G(q) \Big|_{q=q_0} = G, \quad (2.66)$$

по аналогии с (2.38) (см. рисунок 2.5) имеет вид

$$\mathfrak{X}_j(t) = F \sigma_j(t) + F_{q_j} x(t) + G_{q_j} g(t); \eta_j(t) = C \sigma_j(t) + C_{q_j} x(t). \quad (2.67)$$

Функция траекторной чувствительности $\varepsilon_j(t)$ вектора ошибки удовлетворяет условию

$$\varepsilon_j(t) = \frac{\Delta \partial \varepsilon(t, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} = \frac{\partial}{\partial q_j} [g(t) - y(t, q)] \Big|_{q=q_0} = -y_j(t). \quad (2.68)$$

Если по аналогии с (2.40), (2.41) ввести в рассмотрение агрегированную систему с вектором состояния $\mathfrak{X}_j(t) = \text{col}\{x, \sigma_j\}$ то для нее получим

$$\dot{\mathfrak{X}}_j(t) = \mathring{F}_j^0 \mathfrak{X}_j(t) + \mathring{G}_j^0 g(t); \mathfrak{X}_j(0) = \text{col}\{x(0), 0\}, \quad (2.69)$$

$$x(t) = \mathring{C}_{xy}^0 \mathfrak{X}_j(t); y(t) = \mathring{C}_j^0 \mathfrak{X}_j(t); \sigma_j(t) = \mathring{C}_{\sigma j}^0 \mathfrak{X}_j(t), \quad (2.70)$$

$$\eta_j(t) = \mathring{C}_{\eta j}^0 \mathfrak{X}_j(t); \xi_j(t) = -\eta_j(t), \quad (2.71)$$

где

$$\dot{\mathcal{P}}_j^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_j} & F \end{bmatrix}; \mathcal{G}_j^0 = \begin{bmatrix} G \\ G_{q_j} \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

а матрицы $\mathcal{C}_{x_j}^0$, \mathcal{C}_j^0 , $\mathcal{C}_{\sigma_j}^0$ и $\mathcal{C}_{\eta_j}^0$ задаются в форме (2.43).

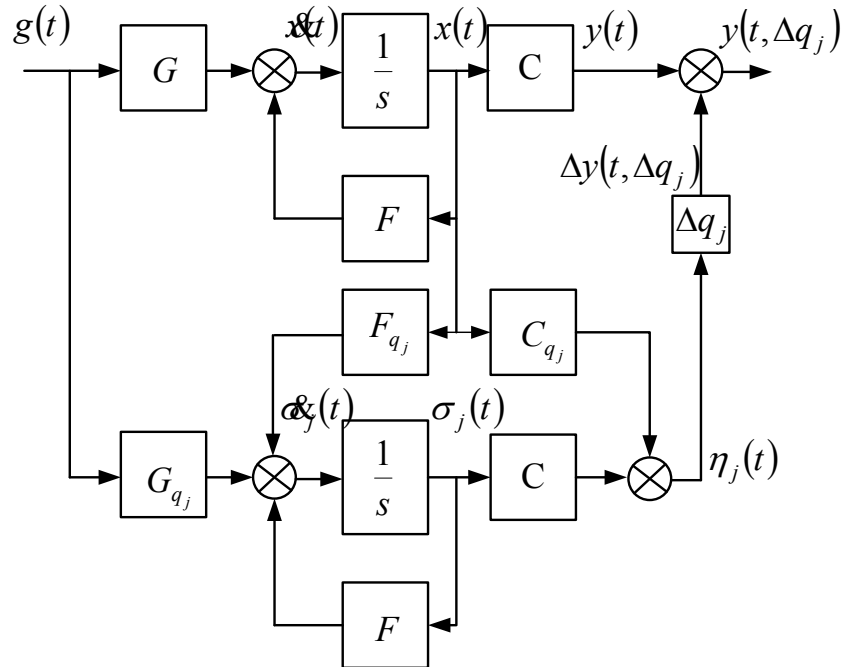


Рис.2.5 Модель траекторной чувствительности, дополненная номинальной моделью системы (2.55), (2.56)

Если провести агрегирование номинальной системы и всех p МТЧ вида (2.67) путем введения вектора $\mathcal{X} = \text{col}\{x, \sigma_j; j = \overline{1, p}\}$ размерности $\dim \mathcal{X} = (p+1)n$, то векторно-матричное представление такой системы по аналогии с (2.44)–(2.47) получает представление

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \dot{\mathcal{P}}\mathcal{X}(t) + \dot{\mathcal{G}}_g^0(t); \mathcal{X}(0) = \text{col}\{x(0), \sigma_j(0) = 0; j = \overline{1, p}\}, \quad (2.73)$$

$$x(t) = \mathcal{C}_x^0 \mathcal{X}(t); y(t) = \mathcal{C}_y^0 \mathcal{X}(t); \sigma(t) = \mathcal{C}_\sigma^0 \mathcal{X}(t); \eta(t) = \mathcal{C}_\eta^0 \mathcal{X}(t); \xi(t) = -\eta(t), \quad (2.74)$$

где

$$\dot{\mathcal{P}}^0 = \begin{bmatrix} F & O_{n \times np} \\ \text{col}\{F_{q_j}; j = \overline{1, p}\} & \text{diag}\{\dot{\mathcal{P}}_{jj}^0 = F; j = \overline{1, p}\} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathcal{G}}^0 = \text{col}\{G, G_{q_j}; j = \overline{1, p}\}. \quad (2.75)$$

Матрицы \mathcal{C}_x^0 , \mathcal{C}_y^0 , \mathcal{C}_σ^0 , \mathcal{C}_η^0 определяются посредством (2.47)–(2.49).

Анализ свойств спроектированной системы в условиях параметрической неопределенности ее функциональных компонентов может быть осуществлен траекторными и структурными методами.

Траекторный метод предполагает конструирование оценок максимального и минимального размеров сечений трубы, в которой размещаются движения $\Delta x(g(t), q_0, \Delta q, t)$ по состоянию, $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$ и $\Delta \Sigma(g(t), q_0, \Delta q, t)$ по выходу и ошибке.

Если эта задача решается в глобальной постановке, т.е. на множестве всех параметров q_j $j = \overline{1, p}$, образующих вектор p , то для формирования оценок, как это уже отмечено в начале параграфа, целесообразно использовать SVD-анализ применительно к матрицам чувствительности $\Sigma(t)$ (2.31) и $\Xi(t)$ (2.32), конструируемым с помощью агрегированной системы (2.73)–(2.75).

Если задача решается в локальной покомпонентной форме, то оценки максимальных размеров трубок дополнительных движений $\Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t)$ и $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t)$ на множестве угловых реализаций вектора Δq , параметризованные временем t , определяются соотношениями

$$\hat{\Delta} x_i(t) = \max_{\Delta q} \Delta x_i(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^p \sigma_{ji}(t) |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \delta_{ji}(t), \quad (2.76)$$

$$\hat{\Delta} y_l(t) = \max_{\Delta q} \Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q, t) = \sum_{j=1}^p \eta_{jl}(t) |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \eta_{jl}(t), \quad (2.77)$$

$$\hat{\Delta} \varepsilon_l(t) = \hat{\Delta} y_l(t). \quad (2.78)$$

Структурный метод предполагает конструирование оценок норм элементов функционального пространства $L_T^2(T = [0, \infty))$ применительно к функциям траекторной чувствительности с использованием системных грамианов как в глобальной, так и локальной постановках. Если далее ограничиться функциями траекторной чувствительности по выходу (ошибке) в глобальной постановке, то используется агрегированная система (2.73)–(2.74), при этом кросс-грамиан \mathcal{W}_η^0 конструируется на тройке матриц $(\mathcal{C}_\eta^0, \mathcal{F}_\eta^0, \mathcal{G}_\eta^0)$ как решения матричного уравнения

$$\mathcal{F}_\eta^0 \mathcal{W}_\eta^0 + \mathcal{W}_\eta^0 \mathcal{F}_\eta^0 = -\mathcal{G}_\eta^0 \mathcal{C}_\eta^0 \quad (2.79)$$

Теперь к кросс-грамиану \mathcal{W}_η^0 необходимо применить технику SVD-анализа, которая дает информацию о длинах максимальной и минимальной полуосей эллипсоидных покрытий в виде $\alpha_M(\mathcal{W}_\eta^0)$ и $\alpha_m(\mathcal{W}_\eta^0)$ – максимального и минимального сингулярных чисел \mathcal{W}_η^0 , а элементы

правого сингулярного базиса \hat{V}_{η}° , согласованные с $\alpha_M(\hat{W}_{\eta}^{\circ})$ и $\alpha_m(\hat{W}_{\eta}^{\circ})$, задают наименее и наиболее благоприятные состояния параметров, порождающие дополнительные движения $\Delta y(g(t), q_0, \Delta q, t)$ максимальной и минимальной норм функционального пространства. В случае локальной покомпонентной постановки задач, когда оценивается норма дополнительного движения $\Delta y_l(g(t), q_0, \Delta q_j, t)$, порожденного вариацией Δq_j j -го компонента вектора параметров q , наблюдаемого на l -том выходе j -ой МТЧ при возбуждении k -того входа системы (2.55), кросс-грамиан $\hat{W}_{\eta_j}^{\circ}(\hat{C}_{j\eta}^{\circ}, \hat{G}_{jk}^{\circ})$ строится на тройке матриц $(\hat{C}_{j\eta}^{\circ}, \hat{A}_{zj}^{\circ}, \hat{G}_{jk}^{\circ})$ как решение матричного уравнения

$$\hat{F}_j \hat{W}_{\eta_j}^{\circ}(\hat{C}_{j\eta}^{\circ}, \hat{G}_{jk}^{\circ}) + \hat{W}_{\eta_j}^{\circ}(\hat{C}_{j\eta}^{\circ}, \hat{G}_{jk}^{\circ}) \hat{F}_j^{\circ} = -\hat{G}_{jk}^{\circ} \hat{C}_{jn}^{\circ}. \quad (2.80)$$

Ненулевые сингулярные числа кросс-грамианов $\hat{W}_{\eta_j}^{\circ}(\hat{C}_{j\eta}^{\circ}, \hat{G}_{jk}^{\circ})$ позволяют дать полную апостериорную характеристику эффекта введения в систему регулятора, реализующего ЗУ в одной из форм (2.57), (2.62) и (2.63), осуществить апостериорное ранжирование варьируемых параметров.

Структурный метод может быть реализован и с использованием передаточных матриц (функций) "вход агрегированной системы – выход МТЧ" с последующим использованием аппарата анализа H^{∞} . Так, аналогом (2.80) является передаточная функция

$$\Phi_{j\eta k}(s) = \frac{\Delta \eta_{jl}(s)}{g_k(s)} = \hat{C}_{j\eta}^{\circ} (sI - \hat{F}_j^{\circ})^{-1} \hat{G}_{jk}^{\circ}, \quad (2.81)$$

для которой необходимо получить оценку нормы в H^{∞} -пространстве.

Пример 2.6. Рассматривается система, представляющая собой объединение ОУ с передаточной функцией $W_{oy}(s) = \frac{1}{(s+1)s}$ и регулятора, доставляющего матрице $F = A - BK$ распределение мод Баттерворта с характеристической частотой $\omega_0 = 10c^{-1}$, так что ее собственные значения имеют реализацию $\lambda_{1,2} = -10(0,707 \mp j0,707)$.

Ставится задача сравнить по чувствительности реализации ЗУ в формах (2.62) и (2.63),

$$u(t) = K_g(1+q_1)g(t) - K_y(1+q_2)y(t) - K_x x(t), \quad (2.82)$$

$$u(t) = K_{\Sigma}(1+q_3)\varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (2.83)$$

применительно к дополнительному установившемуся движению по выходу при ступенчатом входном воздействии $g(t) = g_0 1(t)$. Модель

(2.39) номинального ОУ характеризуется матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0].$$

Система (2.55) при номинальном значении вектора параметров $q = q_0 = 0$ характеризуется матрицами $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -14.1 \end{bmatrix};$

$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0].$ Система (2.55) при реализации ЗУ в форме (2.82)

имеет матрицы $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1+q_2) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1+q_1) \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0],$ а при реализации ЗУ в форме (2.83) –

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100(1+q_3) & -14.1 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 100(1+q_3) \end{bmatrix}.$$

Агрегированные системы с векторами $\mathcal{X}_j = \text{col}\{x, \sigma_j; j = \overline{1,3}\}$ (2.69)–(2.72) характеризуются матрицами

$$\mathcal{F}_1^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_1} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \mathcal{C}_{\eta_1}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$\mathcal{F}_2^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathcal{C}_{\eta_2}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0];$$

$$\mathcal{F}_3^0 = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_2} & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -100 & -14.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -100 & 0 & -100 & -14.1 \end{bmatrix}; \mathcal{G}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; \mathcal{C}_{\eta_3}^0 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0].$$

Для решения поставленной задачи используем структурный подход, основанный на аппарате передаточных функций, для которых

$$\Phi_{\eta_1 g}(s) = \frac{\Delta \eta_1(s)}{g(s)} = \mathcal{C}_{\eta_1}^0 (sI - \mathcal{F}_1^0)^{-1} \mathcal{G}_1^0 = \frac{100}{s^2 + 14.1s + 100};$$

$$\Phi_{\eta_2 g}(s) = \frac{\Delta \eta_2(s)}{g(s)} = \mathcal{C}_{\eta_2}^0 (sI - \mathcal{F}_2^0)^{-1} \mathcal{G}_2^0 = \frac{(100)^2}{(s^2 + 14.1s + 100)^2};$$

$$\Phi_{\eta_{3g}}(s) = \frac{\Delta \eta_3(s)}{g(s)} = \mathcal{C}_{\eta_3}^0 (sI - \mathcal{P}_3^0)^{-1} \mathcal{G}_3^0 = \frac{100s(s+14,1)}{(s^2 + 14,1s + 100)^2}.$$

Анализ установившегося значения функций чувствительности по выходу на основе их Лапласовых образов при скачкообразном входе $g(t) = g_0 1(t)$

$$\eta_j(s) = \Phi_{\eta_j}(s)g(s)$$

дает:

$$\eta_{1ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_1(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_1}(s) = g_0,$$

$$\eta_{2ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_2(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_2}(s) = -g_0,$$

$$\eta_{3ycm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_3(t) = g_0 \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\eta_3}(s) = 0.$$

Таким образом, дополнительные движения по выходу в установившемся режиме при ступенчатом внешнем воздействии, соответственно при реализации закона управления в форме (2.82) и (2.83), получают представления

$$\Delta Y_{ycm}(t) = \eta_{1ycm} \Delta q_1 + \eta_{2ycm} \Delta q_2 = g_0 (\Delta q_1 - \Delta q_2),$$

$$\Delta Y_{ycm}(t) = \eta_{3ycm} \Delta q_2 = 0. \quad \square$$

В заключение рассмотрим возможности аппарата функций траекторной чувствительности к исследованию дополнительных движений по состоянию,

$$\Delta x(k, q_0, \Delta q) = \overset{\Delta}{x}(k, q_0 + \Delta q) - x(k, q_0) = \Sigma(k) \Delta q, \quad (2.84)$$

и выходу,

$$\Delta y(k, q_0, \Delta q) = y(k, q_0 + \Delta q) - y(k, q_0) = \Xi(k) \Delta q, \quad (2.85)$$

где k – дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt , для дискретных динамических систем на примере

$$x(k+1, q) = \bar{A}(q)x(k, q) + \bar{B}(q)u(k); x(0); y(k, q) = C(q)x(k, q). \quad (2.86)$$

Будем придерживаться концепции дискретного объекта управления (ДОУ), состоящей в том, что ДОУ (2.86) представляет собой дискретную по времени с интервалом дискретности длительности Δt выборку из непрерывных процессов по вектору состояния $x(t, q)$ и выходу $y(t, q)$ при фиксированном на интервале $t \in [\Delta tk, \Delta t(k+1)]$ значении управления $u(t) = u(\Delta tk) = u(k)$. Эта концепция связывает матрицы не-

прерывного (2.39) и дискретного ОУ (2.39) следующими функциональными соотношениями:

$$\bar{A}(q) = e^{A(q)\Delta t}; \bar{B}(q) = A^{-1}(q)(e^{A(q)\Delta t} - I)B(q); \bar{C}(q) = C(q), \quad (2.87)$$

если при выводе управления из устройства, его формирующего и осуществляющего цифро-аналоговое преобразование, можно пренебречь задержкой τ по сравнению с Δt . Если задержкой τ пренебречь нельзя, то размерность вектора ДОУ становится на τ больше размерности вектора состояния непрерывного ОУ, где r – размерность вектора управления, а матрицы модели (2.86) принимают вид

$$\bar{A}(q) = \begin{bmatrix} e^{A(q)\Delta t} & e^{A(q)\Delta t}(I - e^{A(q)\tau})A^{-1}(q)B(q) \\ O_{r \times n} & O_{r \times r} \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} (e^{A(q)(\Delta t - \tau)} - I)A^{-1}(q)B(q) \\ I_{r \times r} \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

$$\bar{C} = [C \quad 0_{m \times r}]. \quad (2.89)$$

Матрицы функций чувствительности $\Sigma(k)$ и $\Xi(k)$ строятся в форме (2.31), (2.32) на основе гипотезы о том, что в каждый дискретный момент времени векторы $x(k, q)$ и $y(k, q)$ дифференцируемы по q :

$$\Sigma(k) = \text{row} \left\{ \sigma_j(k) = \frac{\Delta \partial x(k, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.90)$$

$$\Xi(k) = \text{row} \left\{ \eta_j(k) = \frac{\Delta \partial y(k, q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0}; j = \overline{1, p} \right\}. \quad (2.91)$$

Модель траекторной чувствительности, необходимая для генерирования функций траекторной чувствительности $\sigma_j(k)$ и $\eta_j(k)$ $j = \overline{1, p}$ по состоянию и выходу ДОУ, строится путем дифференцирования компонентов представления (2.86) по компонентам q_j вектора параметров q при его номинальном значении, в результате чего для МТЧ получаем

$$\sigma(k+1) = \bar{A}\sigma(k) + \bar{A}_{q_j}x(k) + \bar{B}u(k); \sigma_j(0) = 0; \eta_{j(k)} = \bar{C}\sigma_j(k) + \bar{C}_{q_j}x(k). \quad (2.92)$$

Дальнейшее конструирование инструментария аппарата функций траекторной чувствительности осуществляется по той же схеме, что и в случае непрерывных ОУ.

Необходимо в заключение отметить, что векторно-матричное представление ДОУ в форме (2.86) с матричными компонентами (2.87) и (2.88), в явном виде содержащими такие чисто "дискретные" параметры, как интервал дискретности Δt и задержку τ вывода управле-

ния, заметно упрощает анализ процессов ДОУ, опирающийся на возможности аппарата функций траекторной чувствительности.

2.2.2. Функции чувствительности алгебраических и геометрических спектров матриц

Рассматривается $n \times n$ квадратная матрица $N(q)$, элементы которой $N_{il}(q)$ ($i, l = \overline{1, n}$) зависят от параметров q_j , образующих p -мерный вектор $q = q_0 + \Delta q$ с номинальным значением q_0 . Очевидно, оказываются зависимыми от элементов q_j вектора параметров q $j = \overline{1, p}$ и элементы $\lambda_i(q)$ алгебраического спектра собственных значений матрицы $N(q)$ $\sigma\{N(q)\} = \{\lambda_i(q) : \det[\lambda_i(q)I - N(q)] = 0; i = \overline{1, n}\}$, становятся зависимыми от вектора параметров q и собственные векторы $\zeta_i(q)$ $N(q)\zeta_i(q) = \lambda_i(q)\zeta_i(q) : i = \overline{1, n}$.

Если для матрицы $N(q)$ построить сингулярное разложение, то получим представление

$$N(q) = U(q)\Sigma(q)V^T(q), \quad (2.93)$$

где $U(q), V(q)$ – ортогональные матрицы для $\forall t$, образующие левый и правый сингулярный базисы, $\Sigma(q)$ – диагональная для $\forall q$ матрица сингулярных чисел $\alpha_i(q)$

$$\Sigma(q) = \text{diag}\{\alpha_i(q); i = \overline{1, n}\}, \quad (2.94)$$

где сингулярные числа $\alpha_i(q)$ ($i = \overline{1, n}$) вычисляются в силу соотношений

$$\alpha_i(q) = \left| \mu^{\frac{1}{2}}(q) \right| \det(\mu_i(q)I - N(q)N^T(q)) = \det(\mu_i(q)I - N^T(q)N(q)) = 0. \quad (2.95)$$

Таким образом, матрица $N(q)$ обладает алгебраическим спектром сингулярных чисел $\sigma_\alpha\{N(q)\} = \{\alpha_i(q) : i = \overline{1, n}\}$ и двумя геометрическими спектрами с элементами $U_i(q)$ и $V_i(q)$, образующими левый $U_i(q) = \text{row}\{U_i(q) : i = \overline{1, n}\}$ и правый $V_i(q) = \text{rov}\{V_i(q) : i = \overline{1, n}\}$ сингулярные базисы.

Ставится задача конструирования функций чувствительности собственных значений

$$\lambda_{iq_j} = \left. \frac{\Delta \partial \lambda_i(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad (2.96)$$

собственных векторов

$$\zeta_{iq_j} = \left. \frac{\Delta \partial \zeta_i(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad (2.97)$$

сингулярных чисел

$$\alpha_{iq_j} = \left. \frac{\Delta \partial \alpha_i(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}, \quad (2.98)$$

элементов левого сингулярного базиса

$$U_{iq_j} = \left. \frac{\Delta \partial U_i(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}$$

и элементов правого сингулярного базиса $V_{iq_j} = \left. \frac{\Delta \partial V_i(q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0}$ к вариациям

j -го элемента q_j вектора параметров q относительно номинального значения q_0 , с целью анализа чувствительности показателей качества динамической системы, сформированных в модальной или эллипсоидной формах. Основные результаты изложим в форме системы утверждений.

Утверждение 2.5. Пусть квадратная $n \times n$ матрица $N(q)$ является матрицей простой структуры при $q = q_0 + \Delta q$, где Δq не нарушает корректность аппарата чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка так, что справедливо матричное условие подобия, записываемое в форме

$$M(q)\Lambda(q) = N(q)M(q), \quad (2.99)$$

где $\Lambda(q) = \text{diag}\{\lambda_i(q); i = \overline{1, n}\}$, $M(q)$ – матрица диагонального преобразования, тогда функция чувствительности λ_{iq_j} i -го собственного значения $\lambda_i(q)$ к вариации j -го элемента q_j вектора параметров q относительно номинального значения q_0 может быть вычислена в силу соотношений

$$\lambda_{iq_j} = (M^{-1})^i N_{q_j} (M)_i = (M^{-1} N_{q_j} M)_{ii}. \quad (2.100)$$

В выражении (2.100) $M = M(q = q_0)$, $(M^{-1})^i$ – i -я строчка матрицы (M^{-1}) , M_i – i -й столбец матрицы M , матрица N_{q_j} есть матрица чувствительности матрицы $N(q)$ к вариации параметра q_j , определяемая соотношением

$$N_{q_j} \stackrel{\Delta}{=} \frac{\partial N(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} = \text{row} \left\{ \text{col} \left(\frac{\partial N_{il}(q)}{\partial q_j} \Big|_{q=q_0} ; i = \overline{1, n} \right) ; i = \overline{1, n} \right\}. \quad \square \quad (2.101)$$

Доказательство утверждения 2.5 приведено в приложении 4. ■

В процессе доказательства утверждения 2.5, по существу, доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.6. Матрица $N(q)$ приведения произвольной матрицы простой структуры $N(q)$ к диагональному виду $\Lambda(q)$ составлена из собственных векторов диагонализируемой матрицы так, что

$$\zeta_i(q) = M_i(q); i = \overline{1, n}. \quad \square \quad (2.102)$$

Доказательство утверждения 2.6 содержится в представлении (п.6.2) условия подобия (2.99). ■

Соотношение (2.102) сводит задачу конструирования функции чувствительности $\zeta_{i q_j}$ (2.92) к задаче конструирования функций чувствительности $M_{i q_j}$ i -го столбца матрицы $M(q)$ приведения к диагональному виду исходной матрицы простой структуры $N(q)$.

Утверждение 2.7. Функция чувствительности $\zeta_{i q_j} = M_{i q_j}$ i -го элемента геометрического спектра собственных векторов $\{\zeta_i(q) = M_i(q); i = \overline{1, n}\}$ матрицы простой структуры представлена в форме

$$\zeta_{i q_j} = M_{i q_j} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \gamma_{ik}^j M_k; \gamma_{ii}^j = 0, \quad (2.103)$$

где коэффициенты γ_{ik}^j линейного разложения $M_{i q_j}$ по собственным векторам M_k ; $(k = \overline{1, n}; k \neq i)$ определяются соотношениями

$$\gamma_{ik}^j = \frac{(M^{-1})^i N_{q_j} M_k}{\lambda_i - \lambda_k}; k \neq i; \gamma_{ii}^j = 0, \quad (2.104)$$

при этом соотношение (2.104) имеет эквивалентное представление

$$\gamma_{ik}^j = \frac{(M^{-1}N_{q_j}M)_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}; k = i: \gamma_{ii}^j = 0. \quad \square \quad (2.105)$$

Доказательство утверждения 2.7 приведено в приложении 4. ■

Полученные результаты, строго говоря, справедливы для матрицы $N(q)$ простой структуры, имеющей вещественный спектр $\sigma\{N(q)\} = \{\lambda_i(q) = 0; i = \overline{1, n}\}$. Если в спектре $\sigma\{N(q)\}$ имеется хотя бы одна пара комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2}(q) = \delta(q) \pm j\beta(q)$, то вещественная матрица подобия $N(q)$ будет блочно-диагональной, вида

$$K(q) = \begin{bmatrix} \delta(q) & \beta(q) & & \\ -\beta(q) & \delta(q) & & \\ & & O_{2 \times (n-2)} & \\ & & & diag\{\lambda_i(q); i = \overline{3, n}\} \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Для вычисления функций чувствительности δ_{q_j} и β_{q_j} соответственно вещественных и мнимых частей комплексно-сопряженных собственных значений к вариациям параметра q_j следует вычислить матрицу $(M^{-1}N_{q_j}M)$ и на элементах этой матрицы сконструировать функции чувствительности δ_{q_j} и β_{q_j} с помощью соотношений

$$\delta_{q_j} = \frac{1}{2} \left\{ (M^{-1}N_{q_j}M)_{11} + (M^{-1}N_{q_j}M)_{22} \right\}, \quad (2.107)$$

$$\beta_{q_j} = \frac{1}{2} \left\{ (M^{-1}N_{q_j}M)_{12} - (M^{-1}N_{q_j}M)_{21} \right\}. \quad (2.108)$$

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности собственных значений $\lambda_{i q_j}$ матрицы простой структуры $N(q)$, именуемых также функциями модальной чувствительности, может быть сконструирована матрица S_λ модальной чувствительности

$$S_\lambda = row \left\{ col \left\{ \lambda_{i q_j}; i = \overline{1, n} \right\}; j = \overline{1, p} \right\}. \quad (2.109)$$

Столбцы матрицы модальной чувствительности S_λ составлены из функций чувствительности всех собственных значений (мод) $\lambda_{i q_j}$ к вариациям одного параметра q_j ($j = \overline{1, p}$), строки этой матрицы составлены из функций чувствительности одного собственного значения $\lambda_i(q)$ к вариациям всех параметров q_j . Если на векторе $\Delta q = col \left\{ \Delta q_j; j = \overline{1, p} \right\}$

вариаций вектора параметров q относительно номинальных значений сконструировать вектор $\Delta\lambda = \text{col}\{\Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ вариаций собственных значений, то эти векторы оказываются связанными соотношением

$$\Delta\lambda(q_0, \Delta q) = S_\lambda \Delta q. \quad (2.110)$$

Векторно-матричное соотношение (2.110) позволяет дать исчерпывающее решение задачи оценки вариации собственных значений матрицы $N(q)$. Тогда, если воспользоваться сингулярным разложением матрицы модальной чувствительности

$$S_\lambda = U_\lambda \Sigma_\lambda V_\lambda^T, \quad (2.111)$$

при этом выделить согласованные тройки $\{U_{\lambda_{\max}}, \alpha_{\lambda_{\max}}, V_{\lambda_{\max}}\}$ $\{U_{\lambda_{\min}}, \alpha_{\lambda_{\min}}, V_{\lambda_{\min}}\}$, то на фиксированной в сфере $\|\Delta q\| = \text{const}$ в пространстве параметров могут быть получены оценки

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\lambda\| = \alpha_{\lambda_{\max}} \|\Delta q\|, \quad (2.112)$$

$$\min_{\Delta q} \|\Delta\lambda\| = \alpha_{\lambda_{\min}} \|\Delta q\| \quad (2.113)$$

максимальной и минимальной по норме вариации собственных значений, при этом правые сингулярные векторы $V_{\lambda_{\max}}$ и $V_{\lambda_{\min}}$ задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетание параметров, порождающих соответственно вариации (2.112) и (2.113).

Если задача (2.111) решается покомпонентно, то для оценок максимально достижимой вариации $\Delta\lambda_i$ собственного значения λ_i при вариации Δq вектора параметров можно воспользоваться соотношением

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\lambda\| = \sum_{j=1}^p \lambda_{i_{q_j}} |\Delta q_j| \text{sgn} \lambda_{i_{q_j}}. \quad (2.114)$$

Основной областью использования аппарата функций чувствительности собственных значений являются системы, при синтезе которых для достижения желаемых показателей качества процессов использованы корневые (модальные) методы. Наиболее характерными представителями таких систем являются системы, которые просинтезированы методами модального управления.

Пример 2.7. В качестве примера матрицы $N(q)$ рассмотрим матрицу $F(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10(1+q_1) & -7(1+q_2) \end{bmatrix}$ состояния системы, спроектированной методами модального управления так, что при номинальных

значениях параметров $q_{10} = 0, q_{20} = 0$ матрица F имеет спектр собственных значений $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$, и ее степень устойчивости $\eta = -2$. Для анализа модальной чувствительности спроектированной системы произведем следующие вычисления.

Вычисление матриц чувствительности $(F(q))_{q_j}; j = \overline{1,2}$, методом прямого дифференцирования дает

$$F_{q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} F(q) \Big|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}; F_{q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} F(q) \Big|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Вычисление $M : M\Lambda = FM$, где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$, дает реализацию матрицы M в форме матрицы Вандермонда

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix},$$

откуда $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Вычисление матриц:

$$M^{-1}F_{q_j}M \Big|_{j=1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & -\frac{10}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix};$$

$$M^{-1}F_{q_j}M \Big|_{j=2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{35}{3} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}.$$

В силу (2.100) получаем функции модальной чувствительности $\lambda_{1q_1} = -\frac{10}{3}; \lambda_{1q_2} = \frac{14}{3}; \lambda_{2q_1} = \frac{10}{3}; \lambda_{2q_2} = -\frac{35}{3}$. Матрица модальной чувствительности S_λ получает представление

$$S_\lambda = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{35}{3} \end{bmatrix}.$$

Сингулярное разложение матрицы S_λ принимает вид

$$S_\lambda = U_\lambda \Sigma_\lambda V_\lambda^T = \begin{bmatrix} 0,4118 & 0,8817 \\ -0,8817 & 0,4118 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,34 & 0 \\ 0 & 1,807 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,3489 & 0,9373 \\ 0,9373 & -0,3489 \end{bmatrix},$$

которое в силу (2.112), (2.113) дает оценки

$$\begin{aligned} \max_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| &= 13,34 \|\Delta q\|, \\ \min_{\Delta q} \|\Delta \lambda\| &= 1,807 \|\Delta q\|. \end{aligned}$$

Наиболее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} -0,3489 \\ 0,9373 \end{bmatrix} \|\Delta q\|,$$

наименее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 0,9373 \\ -0,3489 \end{bmatrix} \|\Delta q\|.$$

Максимальная вариация $\Delta \lambda_1$ собственного значения λ_1 задается в силу первой строки матрицы S_λ соотношением

$$\Delta \lambda_1 = \frac{10}{3} |\Delta q_1| + \frac{14}{3} |\Delta q_2|,$$

максимальная вариация $\Delta \lambda_2$ собственного значения λ_2 задается в силу второй строки матрицы S_λ соотношением

$$\Delta \lambda_2 = \frac{10}{3} |\Delta q_1| + \frac{35}{3} |\Delta q_2|.$$

Нетрудно видеть, что при вариациях Δq_1 и Δq_2 , одновременно принимающих значения $\Delta q_1 = -0,25$ и $\Delta q_2 = 0,25$, т.е. при вариациях реальных значений системных параметров, образующих матрицу F , составляющих 25% от номинальных, противоположных знаков, спроектированная система оказывается на границе устойчивости. \square

Обратимся теперь к вычислению функций чувствительности к вариациям j -го компонента q_j вектора параметров q элементов $\alpha_i(q)$ алгебраического вектора $\sigma_\alpha \{N(q)\}$ сингулярных чисел и элементов $U_i(q)$ и $V_i(q)$ левого и правого сингулярных базисов матрицы $N(q)$. Заметим, что при решении этой задачи можно снять требования к матрице $N(q)$ быть квадратной и матрицей простой структуры.

Утверждение 2.8. Функция чувствительности $\alpha_{i q_j}$ сингулярного числа $\alpha_i(q) \in \sigma_\alpha \{N(q)\}$ к вариации j -го компонента q_j вектора параметров q относительно его номинального значения q_0 может быть вычислена в силу соотношения

$$\alpha_{i q_j} = (U^T)^i N_{q_j} V_i = (U^T N_{q_j} V)_{ii} \quad \square \quad (2.115)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 4. ■

Утверждение 2.9. Функции чувствительности $U_{i q_j}$ и $V_{i q_j}$ i -х элементов левого $U(q)$ и правого $V(q)$ сингулярных базисов матрицы $N(q)$ к вариации компонента q_j вектора параметров $\alpha_{i q_j}$ могут быть представлены в аддитивных формах

$$U_{i q_j} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik}^j U_i \text{ и } V_{i q_j} = \sum_{k=1}^n \rho_{ik}^j V_i; \quad j = \overline{1, p}, \quad (2.116)$$

где γ_{ik}^j и ρ_{ik}^j – коэффициенты разложения $U_{i q_j}$ и $V_{i q_j}$ по элементам базиса U и V соответственно – задаются соотношениями

$$\gamma_{ik}^j = \frac{\alpha_i (U^T)^k N_{i q_j} V_i + \alpha_k (U^T)^i N_{i q_j} V_k}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}; \quad i \neq k; \quad \gamma_{ii}^j = 0, \quad (2.117)$$

$$\rho_{ik}^j = \frac{\alpha_i (U^T)^i N_{i q_j} V_i + \alpha_k (U^T)^k N_{i q_j} V_k}{\alpha_i^2 - \alpha_k^2}; \quad i \neq k; \quad \rho_{ii}^j = 0. \quad \square \quad (2.118)$$

Доказательство утверждения 2.9 строится по той же схеме, что и доказательство утверждения 2.7, здесь оно опущено. ■

Нетрудно видеть, что на функциях чувствительности $\lambda_{i q_j}$ сингулярных чисел $N(q)$ может быть построена матрица S_α сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = \text{row} \{ \text{col} \{ \alpha_{i q_j}; i = \overline{1, n} \} \}. \quad (2.119)$$

Строки S_α^i матрицы S_α (2.119) составлены из функций чувствительности $\alpha_{i q_j}$ сингулярного числа $\alpha_i(q)$ к вариации всех компонентов q_j вектора q . Столбцы S_α^l матрицы S_α составлены из функций чувствительности $\alpha_{l q_j}$ $l = \overline{1, n}$ всех сингулярных чисел к вариации одного компонента q_j вектора параметров. Если ставится задача оценки α^* наиболее чувствительного сингулярного числа, то это также можно сделать с помощью функционала $J_{S_\alpha}^i = \|S_\alpha^i\|, i = \overline{1, n}$; в форме

$$\alpha^* = \arg \max_i J_{S\alpha}^i. \quad (2.120)$$

Если ставится задача оценки доминирующего параметра q^* , то это можно сделать с помощью функционала

$$J_{S\alpha_j} = \|S_{\alpha_j}\|; j = \overline{1, p} \text{ в форме } q^* = \arg \max_j J_{S\lambda_j}. \quad (2.121)$$

Если на векторе $\Delta q = \text{col}\{\Delta q_j; j = \overline{1, p}\}$ вариаций параметров q относительно номинального значения q_0 построить вектор $\Delta\alpha = \text{col}\{\Delta\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ вариаций сингулярных чисел, то эти векторы оказываются связанными соотношениями

$$\Delta\alpha(q_0, \Delta q) = S_\alpha \Delta q. \quad (2.122)$$

Если теперь построить сингулярное разложение матрицы S_α сингулярной чувствительности

$$S_\alpha = U_\alpha \Sigma_\alpha V_\alpha^T, \quad (2.123)$$

при этом выделить согласованные тройки $\{U_{\alpha \max}, \alpha_{\alpha \max}, V_{\alpha \max}\}$ и $\{U_{\alpha \min}, \alpha_{\alpha \min}, V_{\alpha \min}\}$, то на фиксированной сфере $\|\Delta q\| = \text{const}$ в пространстве параметров могут быть сконструированы оценки

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\alpha\| = \alpha_{\alpha M} \|\Delta q\|, \quad (2.124)$$

$$\min_{\Delta q} \|\Delta\alpha\| = \alpha_{\alpha m} \|\Delta q\| \quad (2.125)$$

максимальной и минимальной по норме вариации сингулярных чисел $N(q)$, при этом правые сингулярные векторы $V_{\alpha \max}$ и $V_{\alpha \min}$ задают наиболее неблагоприятное и наименее неблагоприятное сочетание вариаций Δq_j ($j = \overline{1, p}$) параметров, порождающих вариации $\Delta\alpha$ соответственно с нормами (2.124) и (2.125).

Если задача (2.122) решается покомпонентно, то максимальная вариация $\Delta\alpha_i$, достижимая на векторе $\Delta q = \text{col}\{\Delta q_j; j = \overline{1, p}\}$, определится соотношением

$$\max_{\Delta q} \|\Delta\alpha_i\| = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} |\Delta q_j| \text{sgn } \alpha_{ij} \quad (2.126)$$

Пример 2.8. Проиллюстрируем технологию вычисления функций чувствительности α_{ij} сингулярных чисел $\alpha_i(q)$ на примере матрицы

$$N(q) = \begin{bmatrix} -2(1+q_1) & 1 \\ 0 & -5(1+q_2) \end{bmatrix}, q_{10} = q_{20} = 0.$$

Матрица $N(q)$ является треугольной, следовательно, ее диагональные элементы совпадают с собственными значениями $\lambda_i(q)$ матрицы. По условию задачи варьируемыми элементами матрицы $N(q)$ являются только диагональные элементы, поэтому решение задачи вычисления функций чувствительности сингулярных чисел $\lambda_i(q)$ позволяет установить связь вариаций сингулярных чисел матрицы с вариациями ее собственных значений.

Следуя изложенной процедуре, заложенной в соотношении (2.116), произведем вычисления.

$$N_{q_1} = \left. \frac{\partial}{\partial q_1} N(q) \right|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_{q_2} = \left. \frac{\partial}{\partial q_2} N(q) \right|_{q=q_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$U, V : N = U \Sigma V^T, \text{ где } \Sigma = \text{diag} \left\{ \alpha_i = \left| \mu_i^{1/2} \right|; \mu_i : \det(MI - N^T N) = 0 \right\}$$

$$U_i : (NN^T)U_i = \alpha_i^2 U_i; \|U_i\| = 1; V_i : (N^T N)V_i = \alpha_i^2 V_i; \|V_i\| = 1$$

$$N^T N = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 26 \end{bmatrix}; \quad NN^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\sigma \{ NN^T \} = \sigma \{ N^T N \} = \{ \alpha_1^2 = 26, 2; \alpha_2^2 = 3, 8 \};$$

$$\Sigma = \text{diag} \{ \alpha_1 = 5, 17; \alpha_2 = 1, 954 \};$$

$$U = [U_1 \quad U_2] = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix}; \quad V = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матриц:

$$U^T N_{q_1} V = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0413 & 0,4577 \\ 0,1748 & -1,9384 \end{bmatrix},$$

$$U^T N_{q_2} V = \begin{bmatrix} -0,2298 & 0,9732 \\ 0,9732 & 0,2298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0898 & 0,9959 \\ 0,9959 & 0,0898 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,846 & -0,437 \\ -1,1443 & -0,1032 \end{bmatrix}.$$

Из полученных матриц в силу (2.116) получаем функции чувствительности сингулярных чисел

$$\alpha_{1q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{11} = -0,0413; \quad \alpha_{2q_1} = (U^T N_{q_1} V)_{22} = -1,9384,$$

$$\alpha_{1q_2} = (U^T N_{q_2} V)_{11} = -4,846; \quad \alpha_{2q_2} = (U^T N_{q_2} V)_{22} = -0,1032.$$

Матрица сингулярной чувствительности S_α получает реализацию

$$S_{\alpha} = \begin{bmatrix} -0.0413 & -4.846 \\ -1.9384 & -0.1032 \end{bmatrix},$$

которая характеризуется абсолютными нормами строк и столбцов

$$\|S_{\alpha}^1\| = 4.8873; \|S_{\alpha}^2\| = 2.0416; \|S_{\alpha 1}\| = 1.9797; \|S_{\alpha 2}\| = 4.9492.$$

Полученные значения норм позволяют сделать вывод, что наиболее чувствительным является сингулярное число $\alpha_1 = 517$, а доминирующим параметром является q_2 . Заметим, что сингулярные числа обладают большей параметрической робастностью (меньшей чувствительностью) по сравнению с собственными значениями, их вариации связаны соотношениями

$$\Delta\alpha_1 = -0.0413\Delta\lambda_1, \Delta\alpha_2 = -0.1032\Delta\lambda_2. \quad \square$$

Основной прикладной областью аппарата функций чувствительности сингулярных чисел является анализ чувствительности эллипсоидных показателей качества объектов и систем управления. Эллипсоидные показатели конструируются на эллипсоидных мажорантах и минорантах эллипсоидного покрытия векторных процессов по состоянию, выходу и ошибке. Эллипсоидные мажоранты и миноранты позволяют скаляризовать векторные процессы. Математически эллипсоидные мажоранта и миноранта представляют собой соответственно максимальный и минимальный элементы алгебраического спектра сингулярных чисел некоторой критериальной матрицы N , сводящей описание процессов в исследуемом объекте или системе к линейной (локально линейной) алгебраической задаче, записываемой или в векторно-матричной форме

$$k = N\chi, \quad (2.127)$$

или в скалярной форме

$$k^T k = \chi^T N^T N \chi, \quad (2.128)$$

где $\dim k = \nu$, $\dim \chi = e$, $N - (\nu \times e)$ – критериальная матрица.

Если в (2.127) и (2.128) перейти к евклидовым векторным нормам, то для обеих форм в силу отношения Релея становятся справедливыми неравенства

$$\alpha_m \{N\} \leq \frac{\|k\|}{\|\chi\|} \leq \alpha_n \{N\}, \quad (2.129)$$

здесь $\alpha_m\{N\}$, $\alpha_M\{N\}$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы N .

Задача в форме (2.127) при исследовании процессов в динамических системах оказывается параметризованной временем t так, что представление (2.127) принимает вид

$$\kappa(t) = N(t)\chi(0), \quad (2.130)$$

что приводит к соотношениям по евклидовым нормам, записываемым в форме

$$\alpha_m\{N(t)\} \leq \frac{\|\kappa(t)\|}{\|\chi_0\|} \leq \alpha_M\{N(t)\}. \quad (2.131)$$

В неравенствах (2.131) $\alpha_m\{N(t)\}$, $\alpha_M\{N(t)\}$ задают соответственно нормализованные эллипсоидные миноранту и мажоранту векторного процесса $x(t)$, порожденного вектором χ_0 начального состояния, принадлежащего сфере $\|\chi_0\|=1$.

Если критериальная матрица N в (2.130) параметризована не только временем, но и вектором параметров $q = q_0 + \Delta q$, тогда (2.130) принимает вид

$$\kappa(t, q) = N(t, q)\chi(0); N(t, q = q_0) = N(t). \quad (2.132)$$

Соотношение (2.132) позволяет записать для (2.131)

$$\alpha_m\{N(t, q)\} \stackrel{\Delta}{=} \alpha_{Nm}(t, q) \leq \frac{\|\kappa(t, q)\|}{\|\chi(0)\|} \leq \alpha_{NM}(t, q) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_M\{N(t, q)\}. \quad (2.133)$$

Эллипсоидные миноранта $\alpha_{Nm}(t, q)$ и мажоранта $\alpha_{NM}(t, q)$, параметризованные временем t и вектором параметров q , ставят задачу конструирования глобальной эллипсоидной мажоранты

$$\max_{\Delta q} \alpha_{NM}\{t, q = q_0 + \Delta q\} = \alpha_{NM}(t) + \max_{\Delta q} \Delta \alpha_{NM}\{t, q_0, \Delta q\}, \forall t \quad (2.134)$$

и глобальной эллипсоидной миноранты

$$\min_{\Delta q} \alpha_{Nm}\{t, q = q_0 + \Delta q\} = \alpha_{Nm}(t) - \max_{\Delta q} \Delta \alpha_{Nm}\{t, q_0, \Delta q\}, \forall t \quad (2.135)$$

с привлечением аппарата функций чувствительности сингулярных чисел критериальной матрицы $N(t, q)$ при условии, что $\|\Delta q\|$ не нарушает корректности аппарата чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка.

Для конструирования критериальных матриц $N(t)$ в случае возбуждения входа системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.136)$$

конечномерным внешним воздействием $g(t)$ воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 2.10. Пусть система (2.136) возбуждается конечномерным внешним воздействием $g(t)$, генерируемым конечномерной автономной системой

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), z(0), g(t) = Pz(t), \quad (2.137)$$

где $\Gamma \in R^{l \times l}$; $P \in R^{m \times l}$; $z \in R^l$; $g \in R^m$. Тогда, если матрица T удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра

$$T\Gamma - FT = GP, \quad (2.138)$$

то для системы (2.136) оказываются справедливыми представления

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = e^{Ft}x(0) + (Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T)z(0) \quad (2.139)$$

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{Ft}x(0) + C(Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T)z(0) \quad (2.140)$$

$$\varepsilon(t) = g(t) - y(t) = (P - CT)e^{\Gamma t}z(0) + Ce^{Ft}(Tz(0) - x(0)) \quad \square \quad (2.141)$$

Доказательство утверждения 2.10 приведено в приложении 4. ■

Нетрудно видеть, что представление (2.139)–(2.141) содержит несколько задач вида (2.130). Первая задача – для полного движения по вектору состояния, в которой следует в силу (2.130) и (2.139) положить

$$\chi(0) = [x^T(0), z^T(0)]^T; N(t) = [e^{Ft} \quad Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T]; q(t) = x(t). \quad (2.142)$$

Вторая задача – для свободного движения по состоянию, для которой следует положить

$$\chi(0) = x(0); N(t) = e^{Ft}; q(t) = x(t). \quad (2.143)$$

Третья задача – для вынужденного движения по вектору состояния, для которого следует положить

$$\chi(0) = z(0); N(t) = Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T; q(t) = x(t). \quad (2.144)$$

Нетрудно видеть, что задача (2.144) декомпозируется на задачу для установившегося движения по состоянию с компонентами

$$\chi(0) = z(0); N(t) = Te^{\Gamma t}; q(t) = x(t). \quad (2.145)$$

Аналогичные задачи вида (2.130) содержатся в представлении (2.140) для вектора выхода, в которых следует положить

$q(t) = x(t); N(t) = Ce^{Ft}T; q(0) = x(0)$ для компонента свободного движения и $q(t) = x(t); N(t) = C(Te^{\Gamma t} - e^{Ft}T); \chi(0) = z(0)$ для компонента вынужденного движения соответственно. В представлении (2.141) для вектора ошибки интерес представляет установившаяся составляющая ошибки, в этом случае для сведения задачи к виду (2.130) следует положить $q(t) = \varepsilon(t), N(t) = (P - CT)e^{\Gamma t}$ и $\chi(0) = z(0)$.

Если матричные компоненты представления (2.136) зависят от вектора параметров $q = q_0 + \Delta q$ так, что они принимают вид $F(q)$ и $G(q)$, то перечисленные задачи сводятся к виду (2.132), в которой матрица $N(t, q)$ содержит матрицы $F(q)$ и $T(q)$. Следует заметить, что при вычислении матриц чувствительности F_{q_j} и T_{q_j} ($j = \overline{1, p}$) в первом случае используется дифференцирование $F(q)$ по q_j в точке $q = q_0$, а во втором T_{q_j} ищется как решение продифференцированного по q_j в точке $q = q_0$ уравнения Сильвестра (2.138), принимающего при $q \neq q_0$ вид

$$T(q)\Gamma - F(q)T(q) = G(q)P, \quad (2.146)$$

в результате чего получим

$$T_{q_j}\Gamma - FT_{q_j} = G_{q_j}P + F_{q_j}T; j = \overline{1, p}. \quad (2.147)$$

К задаче вида (2.127) сводится и задача анализа такого структурного свойства, как управляемость. В этом случае следует положить $\kappa = x(0), N = W_y$, где W_y – матрица управляемости, представляемая в виде

$$W_y = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (2.148)$$

$\chi = V$ – вектор стратегии управления на интервале $T = [0, t_k]$, задаваемый в форме

$$V = \text{col} \left\{ -\int_0^{t_k} u(\tau) \beta_i(\tau) d(\tau); i = \overline{0, n-1} \right\},$$

где $\beta_i(-\tau) : e^{-A\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i(-\tau) A^i$.

Вычисления минимального $\alpha_m \{W_y\}$ и максимального $\alpha_M \{W_y\}$ сингулярных чисел дают количественную оценку в виде минорант и мажорант управляемости ОУ с парой матриц (A, B) . Связанные с этими сингулярными числами элементы $U_m \{W_y\}$ и $V_M \{W_y\}$ левого сингулярного базиса определяют положения подпространств наилучшей и

наилучшей управляемости. Если матрицы ОУ зависят от вектора параметров $q = q_0 + \Delta q$, то пара $\{A(q), B(q)\}$ порождает матрицу управляемости

$$W_y(q) = [B(q) \quad A(q)B(q) \quad A^2(q)B(q) \quad \dots \quad A^{n-1}(q)B(q)]. \quad (2.149)$$

Как следствие, зависимыми от q становятся и элементы алгебраического спектра $\sigma\{W_y(q)\} = \{\alpha_{yi}(q); i = \overline{1, n}\}$ сингулярных чисел, вычисление их функций чувствительности $\alpha_{yiq_j} (j = \overline{1, p})$ в точке $q = q_0$ позволяет построить матрицу чувствительности $S_\alpha\{W_y\}$, нормы $\|S_{\alpha_j}\{W_y\}\| (j = \overline{1, p})$ столбцов которой позволяет ранжировать параметры q_j по степени влияния на эллипсоидные оценки управляемости.

К задаче вида (2.128) приводят задачи конструирования на тройке матриц (A, B, C) системы управления (2.136) системных грамианов, вид которых приведен в приложении 7. Задача сводится к схеме с использованием мажорант и минорант, какими являются максимальное и минимальное сингулярные числа данного системного грамиана. Если тройки матриц ОУ и системы зависят от вектора параметров q так, что они принимают вид $\{A(q), B(q), C(q)\}, \{F(q), G(q), C(q)\}$ соответственно, то функции чувствительности эллипсоидных мажорант и минорант эллипсоидных покрытий, порождаемых эволюционирующими грамианами, определяются в силу алгоритмов вычисления функций чувствительности корня квадратного $\alpha_M^{1/2} (*)$ и $\alpha_m^{1/2}$ экстремальных сингулярных чисел системного грамиана (*).

К задаче вычисления системных грамианов примыкает задача вычисления матриц дисперсий (ковариаций) вектора состояния

$$D_x \overset{\Delta}{=} M \{x(t)x^T(t)\}, \quad (2.150)$$

где $M\{(*)\}$ – операция вычисления математического ожидания процесса (*), системы (2.136), возбуждаемой внешним стохастическим воздействием $g(t) = \omega(t)$, стационарным в широком смысле, с матрицей интенсивности Q как решения матричного уравнения типа уравнения Ляпунова

$$FD_x + D_x F^T = -GQG^T. \quad (2.151)$$

Если построить SVD-разложение матрицы дисперсий D_x , выделить две согласованные тройки $\{\alpha_M(D_x), U_M, V_M\}$ и $\{\alpha_m(D_x), U_m, V_m\}$, то эллип-

соидные мажоранты и миноранты эллипсоидов правдоподобия хорошо скаляризуют векторные стохастические процессы. Зависимость $F(q), G(q)$ матриц системы (2.136) от вектора параметров $q = q_0$ порождает задачу параметрической чувствительности эллипсоидных показателей качества процессов по дисперсии вектора состояния $\alpha_M \{D_x(q)\}$ и $\alpha_m \{D_x(q)\}$, которая решается с использованием аппарата функций чувствительности сингулярных чисел. Нетрудно видеть, что в случае необходимости анализировать поведение системы по стохастическим компонентам вектора $y(t)$ эта задача сводится к предыдущей. Действительно, оказывается справедливой цепочка равенств

$$D_y \stackrel{\Delta}{=} M \{y(t)y^T(t)\} = CM \{x(t)x^T(t)\} C^T = CD_x C^T. \quad (2.152)$$

В случае зависимости $y(t, q)$ в силу $F(q), G(q)$ становится справедливым соотношение

$$D_y(q) = CD_x(q)C^T, \quad (2.153)$$

и задача с помощью эллипсоидных мажоранты и миноранты сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел матрицы $D_y(q)$.

Задача анализа параметрической чувствительности корреляционных свойств стохастических процессов по вектору состояния и выхода системы также сводится к анализу чувствительности сингулярных чисел корреляционных матриц $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, для которых оказываются справедливыми соотношения

$$R_x(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M \{x(t+\tau)x^T(t)\} = M \{e^{F\tau}x(t)x^T(t)\} = e^{F\tau}D_x, \tau > 0, \quad (2.154)$$

$$R_y(\tau) \stackrel{\Delta}{=} M \{y(t+\tau)y^T(t)\} = Ce^{F\tau}D_x C^T = CR_x(\tau)c^T, \tau > 0. \quad (2.155)$$

Экстремальные элементы алгебраических спектров сингулярных чисел корреляционных матриц $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$ порождают скалярные мажоранту и миноранту корреляционных функций, с помощью которых строится мажоранта τ_{KM} и миноранта τ_{km} интервала корреляции. Если матричные компоненты модели системы (2.136) оказываются параметризованными вектором $q = q_0 + \Delta q$ в форме $F(q)$ и $G(q)$, то становятся параметризованы q и матрицы в (2.154), (2.155), что приводит к представлениям

$$R_x(\tau, q) = e^{F(q)\tau}D_x(q); \quad R_y(\tau, q) = CR_x(\tau)c^T, \tau > 0. \quad (2.156)$$

Дальнейшее исследование параметрической чувствительности корреляционных свойств системы (2.136) должно быть произведено

применительно к сингулярным числам $\alpha_M \{R_y(\tau, q)\}$, $\alpha_m \{R_x(\tau, q)\}$, $\alpha_M \{R_y(\tau, q)\}$ и $\alpha_m \{R_x(\tau, q)\}$.

И наконец, завершая рассмотрение возможностей аппарата чувствительности сингулярных чисел, рассмотрим сферу его применения на матрицы спектральных плотностей ММО-систем вида (2.136), опираясь на положения следующего утверждения.

Утверждение 2.11. Матрицы спектральных плотностей системы (2.136) по состоянию $S_x(j\omega)$ и по выходу $S_y(j\omega)$, определяемые соотношениями

$$S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (2.157)$$

$$S_y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int CR_x(\tau)C^T e^{-j\omega\tau} d\tau = CS_x(j\omega)C^T, \quad (2.158)$$

могут быть вычислены с помощью выражений

$$S_x(j\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x, \quad (2.159)$$

$$S_y(j\omega) = CS_x(j\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T \quad \square \quad (2.160)$$

Доказательство утверждения 2.11 приведено в приложении 4. ■

Полученные матрицы скаляризируются элементами алгебраических спектров их сингулярных чисел $\sigma_\alpha \{S_x(j\omega)\}$ и $\sigma_\alpha \{S_y(j\omega)\}$, причем использование их экстремальных элементов становится основой конструирования $S_{xM}(j\omega)$, $S_{xm}(j\omega)$, $S_{yM}(j\omega)$, $S_{ym}(j\omega)$ – соответственно эллипсоидных мажорант и минорант функций спектральных плотностей ММО-систем по состоянию и выходу. Вариация Δq , вектора параметров $q = q_0 + \Delta q$ матричных компонентов представления системы (2.136) приводит к вариациям эллипсоидных мажорант и минорант спектральных плотностей, которые могут быть оценены с помощью аппарата функций чувствительности сингулярных чисел.

Таким образом, аппарат функций чувствительности алгебраических и геометрических спектров проблемно-ориентированной критериальной матрицы решает основные задачи анализа процессов в динамических системах, допускающих линейное (локально-линейное) модельное представление (2.136), а также объекта управления на предмет априорного ранжирования его параметров, которые могут претерпевать вариации. Более того, результаты получены в терминах функций чувствительности, а с небольшой модификацией могут быть записаны и в терминах конечных приращений.

2.2.3. Оценка чувствительности с помощью чисел обусловленности матриц

Число обусловленности как одна из количественных характеристик квадратных матриц является одним из матричных инвариантов, т.е. существенным образом зависит от базиса представления матрицы. Это обстоятельство обнаружило возможность использования чисел обусловленности матриц для решения большого круга алгебраических задач, связанных с оценкой чувствительности матричных процедур к погрешностям представления компонентов этих процедур. Ниже рассматриваются возможности использования числа обусловленности для оценки потенциальной чувствительности модельных представлений объектов и систем управления с целью построения робастных моделей, а также для оценки вариаций элементов алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния динамической системы при оцененной погрешности представления этой матрицы. Полученные оценки относятся к классу экспресс-оценок, они должны конструироваться на начальном этапе процесса математического проектирования системы.

Основные результаты изложим в виде системы утверждений.

Утверждение 2.12. Рассмотрим линейную алгебраическую задачу (ЛАЗ)

$$k = N\chi, \quad (2.161)$$

в которой векторы $k, \chi \in R^m$; N – квадратная матрица, согласованная по размерности с вектором k и χ , $N \in R^{m \times m}$.

Предположим, что вектор χ в результате процедур измерения компонентов, округления, представления в вычислительной среде компьютера и т.д. получил погрешность $\Delta\chi$ его представления. Предположим, что по тем же причинам с погрешностью ΔN известна и матрица N . Как следствие, решение линейной алгебраической задачи (2.161) в виде вектора k приобретает вариацию, удовлетворяющую матричному уравнению в вариациях

$$\Delta k = N\Delta\chi + \Delta N\chi + \Delta N\Delta\chi. \quad (2.162)$$

Если перейти от абсолютных погрешностей (вариаций) $\Delta k, \Delta N, \Delta\chi$ к относительным, задав их соотношениями

$$\delta_0 = \frac{\Delta \|k\|}{\|k\|}; \delta_N = \frac{\Delta \|N\|}{\|N\|}; \delta_\chi = \frac{\Delta \|\chi\|}{\|\chi\|}, \quad (2.163)$$

то относительные погрешности (2.163) в силу (2.162) оказываются связанными неравенством

$$\delta_0 \leq C\{N\}(\delta_\chi + \delta_N + \delta_N \delta_\chi), \quad (2.164)$$

где $C\{N\}$ – число обусловленности матрицы N , задаваемое соотношением

$$C\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \|N\| \|N^{-1}\|. \quad \square \quad (2.165)$$

Доказательство утверждения 2.12 приведено в приложении 4. ■

Заметим, что число обусловленности (2.165) матрицы N численно зависит от выбранной матричной нормы, но при любой норме минимальное его значение равно единице ($\min_N C\{N\} = 1$), что соответствует случаю идеальной обусловленности матрицы N , а максимальное его значение равно бесконечности ($\max_N C\{N\} = \infty$), что соответствует случаю вырожденности матрицы N . Если в качестве матричных норм $\|N\|$ и $\|N^{-1}\|$ при вычислении числа обусловленности (2.165) используются спектральные нормы матриц N и N^{-1} , то (2.165) принимает вид

$$C\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \|N\| \|N^{-1}\| = \alpha_M(N) \alpha_m^{-1}(N), \quad (2.166)$$

где $\alpha_M(N)$, $\alpha_m(N)$ – соответственно наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы N . Выражение (2.166) имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. Так, если с помощью (2.161) отображается сфера $\|\chi\| = const$ в эллипсоид с полуосями максимальной длины $\alpha_M(N)\|\chi\|$ и минимальной длины $\alpha_m(N)\|\chi\|$, то число обусловленности, вычисленное в силу (2.166), определяет степень деформации сферы при этом отображении. Если в SVD-разложении матрицы N выделить две тройки $\{U_m, \alpha_m(N), V_m\}$ и $\{U_M, \alpha_M(N), V_M\}$, то максимальная относительная погрешность δ_κ в задаче (2.161) имеет место, когда номинальный вектор $\chi \in \varphi\{V_m\}$, а вектор погрешности $\Delta\chi \in \varphi\{V_M\}$, где $\varphi\{*\}$ – линейная оболочка, натянутая на систему векторов (*). Следует сказать, что число обусловленности в форме (2.166) допускает расширение его трактовки путем введения сепаратных чисел $C_1\{N\}$ обусловленности матрицы N , определяемых как

$$C_1\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \alpha_M(N) \alpha_1^{-1}(N), \quad (2.167)$$

где $\alpha_1(N) - 1 - e^1$ сингулярное число, совпадающее с глобальным (2.166), когда "1" принимает смысл "m". Наличие сепаратных чисел обусловленности (2.167) позволяет контролировать всю картину деформации сферы $\|\chi\| = const$ при отображении (2.161) с матрицей N .

Возвращаясь к основному результату утверждения 2.12 (2.164), следует сказать, что содержательно число обусловленности $C\{N\}$ представляет собой коэффициент усиления относительных ошибок δ_χ и δ_N задания (знания) компонентов ЛАЗ (2.161). Следует также заметить, что в силу определения (2.165) числа обусловленности прямая (2.161) и обратная ЛАЗ $\chi = N^{-1}q$ оказываются обусловленными так, как

$$C\{N^{-1}\} \stackrel{\Delta}{=} \|N^{-1}\| \| (N^{-1})^{-1} \| = \|N^{-1}\| \|N\| = C\{N\}. \quad (2.168)$$

Если матрица N является не квадратной, а прямоугольной, то для нее может быть введено обобщенное число обусловленности, задаваемое в форме

$$C\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \|N\| \|N^+\|, \quad (2.169)$$

где N^+ – матрица, псевдообратная к исходной матрице N .

Как указывалось в начале параграфа, одной из областей применения аппарата чисел обусловленности является построение хорошо обусловленных модельных представлений объектов и систем управления, обладающих матричными компонентами с минимальными числами обусловленности, а, следовательно, являющихся модельно робастными. Задача построения робастного модельного представления динамических систем в основном решается с помощью выбора базиса представления матриц системы и разумной ее размерности. Наибольшей модельной робастностью обладает внутреннее сбалансированное модельное (ВСМ) представление конструируемое на основе системного кросс-грамиана. Близкими к ВСМ представлению обладает представление, использующее диагональную (или блочно-диагональную) форму записи матрицы состояния системы. Низкой модельной робастностью обладает представление системы, использующее в матрице состояния Фробениусов базис. Проблемы модельной робастности заметно возрастают с ростом размерности системы. Уже системы четвертого порядка требуют повышенного внимания к обусловленности матричных компонентов модели состояния, при размерностях системы 6–8 и выше проблема требует сверхвысокого внимания, особенно если алго-

¹ в стандартной процедуре SVD – разложения, матрица сингулярных чисел организована так, что индексы α_i , $i = 1, m$ растут по мере убывания сингулярных чисел.

ритмическое обеспечение задач синтеза опирается на решение линейных матричных уравнений.

Так, если в процессе синтеза закона управления приходится решать линейное матричное уравнение вида

$$PQ + QR = S$$

относительно матрицы Q , то в качестве оценки обусловленности этого уравнения с помощью числа обусловленности используется значение, вычисленное в силу соотношения

$$C\{MU\} = \max_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \left[\min_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \right]^{-1}, \quad (2.170)$$

где $C\{MU\}$ – число обусловленности матричного уравнения (МУ) вида (2.169), к коим относятся уравнения Ляпунова и Сильвестра.

Завершая рассмотрение затронутой проблемы, следует заметить, что числа $C\{(*)\} \geq 500-1000$ уже должны настораживать.

Пример 2.9. Рассмотрим ЛАЗ (2.161) с вектором χ и матрицей N , имеющими реализацию

$$\chi = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} -66 & 28 \\ 97 & -41 \end{bmatrix}.$$

Точное решение ЛАЗ (2.161) дает результат

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Возмутим задачу погрешностью $\Delta\chi$ вектора χ :

$$\Delta\chi = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, относительная погрешность δ_χ задания вектора χ в силу (2.163), если воспользоваться абсолютной нормой компонентов

$$\|\Delta\chi\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 0.01; \quad \|\chi\| = \left\| \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \right\| = 13.8,$$

составляет

$$\delta_\chi = \frac{0.01}{13.8} = 7.246 * 10^{-4} (0.0724\%).$$

Оценим ожидаемую относительную погрешность δ_θ ЛАЗ (2.161), определяемую (2.164) при $\delta_N = 0$,

$$\delta_\theta \leq C\{N\}\delta_\chi.$$

Для этого вычислим число обусловленности $C\{N\}$, используя столбцовую матричную норму для матрицы N и N^{-1} , имеющей представление

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$$

так, что $\|N\| = 163$, $\|N^{-1}\| = 13.8$, в результате чего для числа обусловленности $C\{N\}$ получаем в силу (2.165)

$$C\{N\} \stackrel{\Delta}{=} \|N\| \|N^{-1}\| = 163 * 13.8 = 2249.9.$$

Таким образом, для δ_κ получим мажорирующую оценку

$$\delta_\kappa \leq 2249.4 * 7.246 * 10^{-4} = 1.63 (163\%).$$

Нетрудно видеть, что если неравенство близко к равенству, то следует ожидать мультиплицирования относительной ошибки δ_χ не точности знания вектора χ в относительную ошибку δ_θ вычисления в ЛАЗ (2.161) в 2249,4 раз. Проверим это точным решением возмущенной задачи (п. 6.35), которая в приращениях в силу (2.162) при $\Delta N = 0$ принимает вид

$$\Delta\theta = N\Delta\chi = \begin{bmatrix} -66 & 28 \\ 37 & -41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.97 \end{bmatrix}.$$

Вычисление абсолютных норм для векторов $\Delta\kappa$ и κ дает

$$\|\Delta\kappa\| = \left\| \begin{bmatrix} -0.66 \\ 0.97 \end{bmatrix} \right\| = 1.63, \|\kappa\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 1.$$

Для относительной погрешности $\delta_\theta = \frac{\|\Delta\theta\|}{\|\theta\|} = \frac{1.63}{1} = 1.63 (163\%).$

Сконструируем оценку $\hat{C}\{N\}$ с помощью неравенства (2.164) в предположении его близости к равенству, тогда получим

$$\hat{C}\{N\} = \frac{\delta_\kappa}{\delta_\chi} = \frac{1.63}{7.246} * 10^4 = 2249.4.$$

Таким образом, оценка $\hat{C}\{N\}$ числа обусловленности $C\{N\}$, полученная на основе содержательного его определения как коэффициента усиления относительной погрешности ЛАЗ (2161), совпала с вычисленной на основе определения (2.165) значением $C\{N\}$.

Итак, погрешность представления вектора χ в 0.07246%, в результате плохой обусловленности матрицы N ($C\{N\} = 2249.4$) породила погрешность вычисленного вектора q в 163%, что ровно в 2249.4 раза больше погрешности исходных данных. ■

Теперь воспользуемся возможностями числа обусловленности матриц для оценки абсолютных вариаций элементов алгебраического спектра собственных значений при оцененной по норме погрешности представления исследуемой матрицы. Проблемно эта задача сориентирована на исследование модальной робастности, т.е. робастности спектра собственных значений матрицы $F = A - BK$ состояния системы ((2.137).

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 2.13. Пусть матрица F состояния системы является матрицей простой структуры, тогда оценка $\|\Delta F\|$ вариации ΔF матрицы F и оценка $\|\Delta\lambda\|$ вариации $\Delta\lambda = \text{col}\{\Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ вектора собственных значений $\lambda = \text{col}\{\lambda_i; \det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1, n}\}$, порождаемая вариацией ΔF , связаны неравенством

$$\|\Delta\lambda\| \leq C\{M\} \|\Delta F\|, \quad (2.171)$$

где $C\{M\}$ – число обусловленности матрицы M приведения матрицы F к диагональному виду

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\} \quad (2.172)$$

в силу матричного условия подобия

$$M\Lambda = FM, \quad (2.173)$$

где $M : \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}; M_i$ – i -й столбец M . □

Доказательство утверждения приведено в приложении 4. ■

Следует заметить, что если на неравенстве (2.171) построить оценку $\Delta\lambda_M$ сверху для оценки $\|\Delta\lambda\|$ вариации $\Delta\lambda$, определив ее соотношением

$$\Delta\lambda_M = C\{M\} \|\Delta F\|, \quad (2.174)$$

то неравенство (2.171), записанное в форме

$$\|\Delta\lambda\| \leq \Delta\lambda_M, \quad (2.175)$$

будет в общем случае обладать заметной достаточностью. Действительно, в силу цепочки равенств и неравенств (п. 6.51), появившейся при доказательстве (2.171), итоговый ее фрагмент имеет вид

$$\|\Delta\lambda\| \leq \|M^{-1}\Delta FM\| \leq \|M^{-1}\| \|\Delta F\| \|M\| = C\{M\} \|\Delta F\|, \quad (2.176)$$

в котором содержится переход от нормы произведения матриц к произведению норм матриц. Этот переход обладает в общем случае большой достаточностью.

Пример 2.10. В качестве примера рассматривается матрица $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$, такая, что $\sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -5\}$. Матрица приобретает вариацию ΔF , имеющую представление $\Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ так, что возмущенная матрица $F + \Delta F$ имеет реализацию $F + \Delta F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.5 & -7 \end{bmatrix}$

со спектром собственных значений $\sigma\{F + \Delta F\} = \{\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = -1.8334; \lambda_2 = -5.1667\}$.

Вычисления компонентов неравенства (2.171) дают:

$$\|\Delta F\| = 0.5; \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 + \lambda_1^2)^{-0.5} & 0 \\ 0 & (1 + \lambda_2^2)^{-0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.1961 \\ -0.8944 & -0.9806 \end{bmatrix}.$$

Спектр $\sigma_\alpha\{M\} = \{\alpha_1 = 4.7329; \alpha_2 = 0.6326\}$, откуда для спектрального

числа обусловленности имеем $C\{M\} = \alpha_M(M) \alpha_m^{-1}(M) = 7.48$. Тогда оценочное неравенство (2.171) принимает вид $\|\Delta\lambda\| \leq C\{M\} \|\Delta F\| = 7.48 * 0.5 = 3.74$. Если полученную оценку рассматривать как оценку экстремальной векторной нормы $\|\Delta\lambda = col\{\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2\}\| = \max_{i=1,2} |\Delta\lambda_i| = 3.74$, то в силу этой оценки для $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ получим оценку интервалов принадлежности

$$\lambda_1 + \Delta\lambda_1 \in [-2 - 3.74 = -5.74, -2 + 3.74 = 1.74],$$

$$\lambda_2 + \Delta\lambda_2 \in [-5 - 3.74 = -8.74, -5 + 3.74 = 1.26].$$

Заметим, что если бы матрица M была идеально обусловлена и характеризовалась числом обусловленности $C\{M\} = 1$, то оценочное нера-

венство (2.171) приняло бы вид $\|\Delta\lambda\| \leq C\{M\}\|\Delta F\| = 1 * 0.5 = 0.5$, как следствие, $\lambda_i + \Delta\lambda_i$ принадлежали бы интервалам

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \Delta\lambda_1 &\in [-2 - 0.5 = -2.5, -2 + 0.5 = -1.5], \\ \lambda_2 + \Delta\lambda_2 &\in [-5 - 0.5 = -5.5, -5 + 0.5 = -4.5].\end{aligned}$$

Уменьшение числа обусловленности уменьшает достаточность оценки (2.171), но она сохраняется, что легко обнаруживается при сравнении с

$$\sigma\{F + \Delta F\} = \{\lambda_1 + \Delta\lambda_1 = -2 + 0.1667 = -1.8333; \lambda_2 + \Delta\lambda_2 = -5 - 0.1667 = -5.1667\}.$$

Следует заметить, что обнаруженная избыточность не является методической. Действительно, если воспользоваться начальным фрагментом (п. 6.51), построенным на равенствах, то получим

$$\|\Delta\lambda\| = \left\| \text{col} \left\{ \left(M^{-1} \Delta F M \right)_{ii}; i = \overline{1, n} \right\} \right\| = \left\| \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A_{\Sigma} M \right)_{ii}; i = \overline{1, n} \right\} \right\|.$$

Для формирования этих равенств построим матричный блок

$$M^{-1} \Delta F M = \begin{bmatrix} 3.727 & 0.7453 \\ -3.3993 & -1.6997 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.1961 \\ -0.8944 & -0.9806 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0.073 \\ -0.38 & -0.1666 \end{bmatrix},$$

откуда для элементов приведенного равенства получаем

$$\Delta\lambda = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 \\ \Delta\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1666 \\ -0.1666 \end{bmatrix}; \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A M \right)_{ii}; i = \overline{1, 2} \right\} = \begin{bmatrix} 0.1666 & 0 \\ 0 & -0.1666 \end{bmatrix},$$

при этом $\|\Delta\lambda\|_{\infty} = \left\| \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A M \right)_{ii}; i = \overline{1, 2} \right\} \right\|_{\lambda} = 0.1666$, что в точности совпадает с оценкой вариации $\Delta\lambda_1$ и $\Delta\lambda_2$, полученной вычислением спектра $\sigma\{F + \Delta F\}$. Но уже

$\left\| \text{diag} \left\{ \left(M^{-1} \Delta A M \right)_{ii}; i = \overline{1, 2} \right\} \right\|_{\lambda} = 0.1666 < \|M^{-1} \Delta A M\|_{\lambda} = 0.453$. И, наконец,

$$\|M^{-1} F M\|_{\lambda} < \|M^{-1}\| \|F\| \|M\| = C\{M\} \|F\| = 7.48 * 0.5 = 3.74. \quad \blacksquare$$

В заключение данного параграфа рассмотрим проблемную область теории управления, связанную с конструированием систем сравнения в классе экспоненциальных покрытий минимальной достаточности. В системах сравнения минимальной достаточности в классе экспоненциальных покрытий, конструируемых в функциональном базисе фундаментальной матрицы исследуемой системы, число обусловленности оказывается одним из ключевых показателей. Системы сравнения являются эффективным способом сжатия информации о процессах по вектору состояния систем высокого порядка. В основном практиче-

ское использование нашли мажорирующие системы сравнения. Идея конструирования мажорирующей системы сравнения состоит в экспоненциальной мажоризации, осуществляемой средствами функционального базиса фундаментальной матрицы системы, максимального сингулярного числа этой матрицы для каждого момента времени. Проиллюстрируем эту идею на примере свободного движения системы (2.137) $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t); x(0)$, где F – гурвицева матрица простой структуры. Основные положения изложим с помощью утверждений.

Утверждение 2.14. Пусть $\zeta_M(t)$ – решение однородной мажорирующей скалярной экспоненциальной системы сравнения (СЭСС)

$$\dot{\zeta}_M(t) + \mu_M \zeta_M(t) = 0; \zeta_M(0) \geq \beta_M \|x(0)\|. \quad (2.177)$$

Тогда оказываются справедливыми оценочные для решений $x(t) = x(t, x(0), g(t) \equiv 0) = x(t, x(0))$ однородной версии системы (2.137) неравенства

$$\|x(t, x(0))\| \leq \alpha_M \{e^{Ft}\} \|x(0)\| \leq \zeta_M(t), \quad (2.178)$$

при этом экспоненциальное покрытие $\zeta_M(t)$ обладает минимальной достаточностью, т.е. максимальной близостью к эллипсоидной мажоранте, если параметры СЭСС (2.177) определены в силу соотношений

$$\mu_M = \min_i \{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|\}, \beta_M = C\{M\}, \quad (2.179)$$

где λ_i, M_i – соответственно собственные значения и вектор матрицы $F, \|M_i\| = 1; C\{M\}$ – число обусловленности модальной матрицы M , построенной на собственных векторах M_i единичной нормы. \square

Доказательство утверждения 2.14 приведено в приложении 4. \blacksquare

Теперь допустим, что линейная (локально линейная) система (2.137) такова, что матрица F , зависящая от p -мерного вектора параметров $q \in R^p, q = q_0 + \Delta q$, претерпевает вариации, порожденные вариациями Δq вектора параметров относительно его номинального значения так, что

$$F(q) = F(q = q_0 + \Delta q) \neq F(q_0) = F. \quad (2.180)$$

Тогда однородная версия системы (2.136) при $q \neq q_0$ принимает вид

$$\dot{x}(t, q) = F(q)x(t, q); x(t, q)|_{t=0} = x(0), \quad (2.181)$$

при этом Δq такова, что сохраняется корректность аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого поряд-

ка $\Delta q \in [\underline{\Delta q}, \overline{\Delta q}]$, матрица $F(q)$ – гурвицева и простой структуры при вариациях Δq в указанных пределах.

Оценим вариации, которые претерпевают параметры мажорирующей скалярной экспоненциальной системы сравнения. Очевидно, для свободного движения параметрически возмущенной системы (2.181) $x(t, x(0), q = q_0 + \Delta q)$ оказываются справедливыми положения следующего утверждения.

Утверждение 2.15. Мажорирующая СЭСС минимальной достаточности, конструируемая над функциональным базисом фундаментальной матрицы системы (2.181), имеет представление

$$\dot{\zeta}_M(t, q) + \mu_M(q)\zeta_M(t, q) = 0; \zeta_M(0, q) \geq \beta_M(q)\|x(0)\|, \quad (2.182)$$

где

$$\beta_M(q) = C\{M(q)\} \stackrel{\Delta}{=} \|M(q)\| \|M^{-1}(q)\| = \alpha_M(q)\alpha_m^{-1}(q), \quad (2.183)$$

$\alpha_M(q), \alpha_m^{-1}(q)$ – экстремальные сингулярные числа матрицы $M(q)$ собственных векторов матрицы $F(q)$,

$$\mu_M(q) = \min_i \{|\operatorname{Re} \lambda_i(q)|; i = \overline{1, n}\} \quad (2.184)$$

в том смысле, что мажорирующее неравенство

$$\|x(t, x(0), q)\| \leq \beta_M(q)e^{-\mu_M(q)t} \|x(0)\| \quad (2.185)$$

обладает минимальной достаточностью. \square

Доказательство утверждения 2.15 строится по той же схеме, что и доказательство 2.14, с учетом факта $q \neq q_0$. \blacksquare

Для конструирования глобальной мажорирующей СЭСС на векторе вариаций $\Delta q \in [\underline{\Delta q}, \overline{\Delta q}]$ воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 2.16. Глобальная мажоранта минимальной достаточности для процессов по норме $\|x(t, x(0), q)\|$ однородной версии параметрически возмущенной системы (2.181) представима на решениях СЭСС (2.177), (2.182) в форме

$$\max_{\Delta q} \zeta_M(t, q) = \zeta_M(t) + \sum_{j=1}^p \left. \frac{\partial \zeta_M(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} |\Delta q_j| \operatorname{sgn} \left. \frac{\partial \zeta_M(t, q)}{\partial q_j} \right|_{q=q_0} =$$

$$\beta_M \left\{ 1 + \sum_{j=1}^p \left(\alpha_M^{-1} \alpha_{Mq_j} - \alpha_{mq_j}^{-1} - \mu_{Mq_j} t \right) \right\} \left| \Delta q_j \right| \operatorname{sgn} \left\{ \alpha_M^{-1} \alpha_{Mq_j} - \alpha_{mq_j}^{-1} - \mu_{Mq_j} t \right\} e^{M_M t} \|x(0)\|, \quad (2.186)$$

где

$$\alpha_{Mq_j} = \left(U_M^T M_{q_j} V_M \right)_{11}; \alpha_{mq_j} = \left(U_M^T M_{q_j} V_M \right)_{nn}, \quad M = U_M \Sigma_M V_M^T, \quad (2.187)$$

$$\Sigma_{Mq_j} = \operatorname{diag} \left\{ \alpha_i; i = \overline{1, n} \right\}; M_{q_j} = \operatorname{row} \left\{ M_{iq_j}; i = \overline{1, n} \right\}; j = \overline{1, p}, \quad (2.188)$$

$$M_{Mq_j} = \left(M^{-1} F_{q_j} M \right)_{11}; j = \overline{1, p}. \quad \square \quad (2.189)$$

Доказательство утверждения 2.16 строится на непосредственном дифференцировании по элементам q_j вектора параметров q решения (2.182) и выборе сочетания знаков вариаций Δq , дающих максимальное отклонение возмущенной мажоранты от номинальной. ■

Нетрудно видеть, что конструирование глобальной мажоранты

$$\max_{\Delta q} \zeta_M(t, q) \geq \|x(t, q)\| \quad (2.190)$$

строится с использованием функций чувствительности $C_{q_j} \left\{ M(q) \right\} \Big|_{q=q_0}$ числа обусловленности матрицы собственных векторов, что в итоге сводится к вычислению функций чувствительности собственных векторов, ее минимального по модулю собственного значения, а также сингулярных чисел матрицы собственных векторов.

Полученная оценка совокупного эффекта вариаций параметров Δq_j относительно q_0 обладает минимальной достаточностью и может быть в силу структуры (2.186) оценена в процентах.

2.2.4. Сведение задачи чувствительности к задаче анализа структурных свойств – управляемости, наблюдаемости и инвариантности

Возможность сведения задачи исследования чувствительности объектов и систем управления к вариации параметров их функциональных компонентов к анализу структурных свойств динамических систем: управляемости по состоянию и выходу уже рассматривалась в разделе, посвященном аппарату функций траекторной чувствительности. При этом предметом исследования была составная система "номинальный объект – модель траекторной чувствительности". В настоящем разделе эта проблема решается в рамках исследуемого объекта или системы управления с использованием факторизации вариации матричных компонентов векторно-матричного модельного представления,

позволяющей ввести в рассмотрение внешний "параметрический" вход.

Рассмотрим непрерывный объект управления вида (2.39), который представлен в таком базисе, что вариация параметров приводит к возмущению только матрицы состояния ОУ так, что он получает модельное представление

$$x(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t). \quad (2.191)$$

Представим вариацию ΔA матрицы состояния ОУ в аддитивной форме

$$\Delta A = \sum_{j=1}^p \Delta A_j, \quad (2.192)$$

где каждый j -й матричный компонент ΔA_j полной вариации удовлетворяет условию

$$\text{rang} \Delta A_j = 1, j = \overline{1, p}. \quad (2.193)$$

Удовлетворение $(n \times n)$ -матричных компонентов ΔA_j условию (2.193) позволяет записать

$$\Delta A_j = d_j h_j^T \quad (2.194)$$

где $d_j, h_j \in R^n$, при этом представление в форме (2.194) не является единственным. Необходимо отметить, что каждое из представлений (2.194) может характеризоваться своим значением p , определяемым числом компонентов ΔA_j в структуре параметрически неопределенной матрицы состояния объекта (2.191), характером их размещения в строках матрицы и выбранным базисом. Так, в случае использования фробениусова базиса со строчным представлением сопровождающей формы матрицы число p компонентов (2.192) может равняться единице, в случае диагонального — n , а в случае произвольного базиса достигать значения n^2 .

Если теперь (2.194), (2.192) подставить в (2.191), то получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^p d_j h_j^T x(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) \quad (2.195)$$

Введем в рассмотрение p -мерную векторную переменную

$$\zeta(t) = \text{col} \left\{ \zeta_j(t) = h_j^T x(t); j = \overline{1, p} \right\}, \quad (2.196)$$

а также $(n \times p)$ -матрицу D , сконструированную на столбцах d_j в форме

$$D = \text{row}\{d_j; j = \overline{1, p}\} \quad (2.197)$$

Введенные с помощью (2.196) и (2.197) вектор $\zeta(t)$ и матрица D позволяют представить (2.195) векторно-матричной моделью

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D\zeta(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t), \quad (2.198)$$

где вектор $\zeta(t)$ будем именовать внешним параметрическим воздействием. Сформулируем следующую концепцию.

Концепция 2.1. Компонент $Y_l(t); l = \overline{1, m}$, будет робастным по отношению к вариации $\Delta A_j; j = \overline{1, p}$, j -го компонента матрицы A , т.е. обладать нулевой чувствительностью к вариации ΔA_j , если l -ый компонент $y_l(t)$ вектора $y(t)$ будет полностью неуправляемым по j -му входу приложения внешнего параметрического воздействия, или тройка матриц $\{D_j, A, C^l\}$ была бы полностью неуправляемой, другими словами, если l -ый компонент $y_l(t)$ вектора $y(t)$ будет инвариантен относительно j -го компонента внешнего параметрического воздействия.

Составим на указанной тройке матриц матрицу управляемости " l -й выход – j -й параметрический вход"

$$W_{ylj}^{\Delta} = \begin{bmatrix} C^l D_j & C^l A D_j & C^l A^2 D_j & L & C^l A^{n-1} D_j \end{bmatrix}. \quad (2.199)$$

Полная неуправляемость $y_l (l = \overline{1, m})$ по входу $\zeta_j (j = \overline{1, p})$ означает вырождение W_{ylj} в O -матрицу – строку

$$W_{ylj} = \text{row}\{(W_{ylj})_i = O; i = \overline{1, n}\}. \quad (2.200)$$

Если полной неуправляемости выходов $y_l (l = \overline{1, m})$ по всем входам $\zeta_j (j = \overline{1, p})$ не наблюдается, т.е. все матрицы $W_{ylj} (l = \overline{1, m}; j = \overline{1, p})$ не вырождаются в нулевые и представляют собой n -мерные вектор-строки, то для них можно вычислить нормы и построить матрицу весов

$$P_S = \text{row}\left\{ \text{col}\left[\|W_{ylj}\|; l = \overline{1, m}\right]; j = \overline{1, p}\right\}, \quad (2.201)$$

при этом для сравнимости результатов в (2.194) следует положить $h_j : \|h_j\| = 1$ для всех $j = \overline{1, p}$.

Матрица P_S (2.201) позволяет ранжировать параметры $q_j (j = \overline{1, p})$, порождающие вариации ΔA_j матрицы A , по степени управляемости l -го выхода этим параметром. Доминирующий параметр (домини-

рующая вариация ΔA_j) определяется по максимальной норме столбцов матрицы P_S , а наиболее управляемый (чувствительный) выход – по максимальной норме строк этой матрицы.

Таким образом,

$$\text{dom}\{\Delta A_j V q_j\} = \arg \max_j \left\| \text{col} \left[\left\| (W_{ylj}) \right\| \right] ; l = \overline{1, m} \right\|, \quad (2.202)$$

$$\text{domsens}\{y_l\} = \arg \max_l \left\| \text{row} \left\| W_{yjl} \right\| ; j = \overline{1, p} \right\|. \quad (2.203)$$

В (2.202) и (2.203) $\text{dom}\{(*)\}$ определяет элемент l максимальным эффектом реализации управляемости по всем выходам средствами элемента $(*)$, $\text{domsens}\{(\bullet)\}$ определяет собой выход (\bullet) , на котором наблюдается максимальный совокупный эффект управления по всем $j = \overline{1, p}$ параметрическим входам.

Для целей дальнейших исследований, а также поиска путей синтеза алгоритмов управления, доставляющих неуправляемость l -го выхода $y_l(t)$ по входу $\zeta_j(t)$, сформулируем утверждение.

Утверждение 2.16. Для полной неуправляемости тройки матриц $\{D_j, A, C^l\}$, где C^l – l -я строка матрицы C , формирующая выход $y_l(t)$, D_j – j -й столбец матрицы D приложения параметрического входа $\zeta_j(t)$, достаточно, чтобы:

1. столбец D_j был собственным вектором матрицы A ;
2. выполнялось условие

$$C^l D_j = 0. \quad \square(2.204)$$

Доказательство утверждения 2.16 приведено в приложении 6. ■

Нетрудно видеть, что тот же результат можно сформулировать в терминах передаточных функций сепаратного канала " $\zeta_j - y_l$ " ОУ (2.198).

Утверждение 2.17. Для того, чтобы передаточная функция $\varphi_{y_l \zeta_j}(s)$ сепаратного канала управления ОУ (2.184) " $\zeta_j - y_l$ ", связывающего j -й вход приложения параметрического внешнего воздействия $\zeta_j(t)$ и l -й выход, равнялась нулю, т.е. выполнялось равенство

$$\varphi_{y_l \zeta_j}(s) = C^l (sI - A)^{-1} D = 0_j, \quad (2.205)$$

достаточно, чтобы выполнялись условия утверждения 2.16. □

Доказательство утверждения 2.17 приведено в приложении 4. ■

Результат в форме утверждений 2.16 и 2.17 использует неполную управляемость пары матриц (A, D_j) , пространство управляемости которого характеризуется рангом, равным единице. Очевидно, тот же результат может быть получен на неполной наблюдаемости пары (C^l, A) , когда ранг матрицы наблюдаемости этой пары оказывается равным единице, а подпространство наблюдаемости совпадает с линейной оболочкой, натянутой на вектор $(C^l)^T$.

Утверждение 2.18. Для полной нечувствительности l -того компонента $y_l(t)$ вектора выхода к j -той вариации ΔA_j полной вариации ΔA матрицы состояния ОУ (2.198), достигаемой выполнением условий (2.200) или (2.205), достаточно:

1. чтобы матрица C^l была левым собственным вектором матрицы A объекта управления (2.198),
2. выполнения матричного соотношения (2.204). □

Доказательство утверждения 2.18 приведено в приложении 4. ■

Необходимо отметить, сравнивая условия утверждений 2.16 и 2.18, что второе требует от исходного объекта управления неполной наблюдаемости, что в случае неполной непосредственной измеримости вектора состояния ОУ не позволит построить динамическое наблюдающее устройство для оценки неизмеримых компонентов этого вектора. В этой связи пользовательской ценностью обладают положения лишь утверждения 2.16, которые и будут далее разрабатываться при синтезе закона управления ОУ (2.191).

Ограничимся ЗУ в виде линейной композиции составляющих вектора $U(t)$ управления ОУ (2.191), одна из которых порождается прямой связью с матрицей K_g по вектору внешнего воздействия $g(t)$, а другая – отрицательной обратной связью с матрицей K по вектору состояния $x(t)$ ОУ так, что закон принимает вид

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \quad (2.206)$$

Агрегирование ОУ (2.191) и ЗУ (2.206) образует систему

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \Delta Fx(t) + Gg(t); \quad y(t) = Cx(t), \quad (2.207)$$

где $F = A - BK$; $G = BK_g$

Нетрудно видеть, что оказывается справедливым следующее утверждение.

Утверждение 2.19. Если параметрическая неопределенность исходного ОУ (2.39) такова, что она проявляется в форме вариации ΔA матрицы состояния объекта, то эта вариация оказывается инвариант-

ной относительно реализаций матриц K_g и K закона управления (2.206), агрегирование которого с объектом управления (2.191) образует систему (2.207) так, что

$$\Delta F = \Delta A. \quad \square(2.208)$$

Доказательство утверждения строится на подстановке (2.206) в (2.191) и установлении факта равенства в форме (2.207). ■

В силу (2.208) сохраняется факторизация вариации $\Delta F = \Delta A$ матрицы состояния системы в формах (2.192) и (2.194). Сохраняется концепция введения в систему внешнего "параметрического" входа $\zeta(t)$ так, что система в итоге получает описание

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + D\zeta(t) + Gg(t), \quad y(t) = Cx(t). \quad (2.209)$$

Постановка задачи синтеза ЗУ в форме (2.206) предъявляет к его матричным компонентам K и K_g следующие требования.

Матрица K , если она, к примеру, синтезируется методами модального управления, должна доставлять матрице F желаемый спектр собственных значений $\sigma\{F\} = \left\{ \lambda_{Fi}; i = \overline{1,4} \right\}$, обеспечивающий необходимые динамические и точностные показатели, а также элементы геометрического спектра собственных векторов $\{\xi_j\}$ матрицы F с тем, чтобы они совпадали со столбцами матрицы D так, чтобы выполнялось равенство

$$\xi_j = D_j; j = \overline{1,p}. \quad (2.210)$$

Требование выполнения условия (2.210) для всех j от 1 до p является очень сильным, при его реализации будет наблюдаться резкое ослабление управляемости системы (2.207) со стороны всех компонентов вектора $\xi(t)$ "параметрического" внешнего воздействия. Теоретически это может быть достигнуто лишь при ранге матрицы B управления ОУ (2.39), (2.191), равном размерности его вектора состояния.

Практически это недостижимо, поэтому при формировании ОУ (2.39) необходимо изыскивать все возможности максимизировать ранг матрицы управления, что достигается путем максимизации числа регулирующих органов. Если возможности размещения на ОУ большого количества регулирующих органов ограничены, то надо стараться структурными методами обеспечивать ОУ (2.39), (2.177) с парой матриц (A, B) свойства нормальности этой пары, при котором оказываются полностью управляемыми все пары $(A, B_k; k = \overline{1,r})$. Если и это невозможно, то у разработчика системы остается еще одна возможность:

"обмен части динамических показателей на робастность", т.е. обмен требований к элементам геометрического спектра $\{\xi_j\}$ собственных векторов матрицы F на некоторое "ухудшение" структуры $\sigma\{F\} = \{\lambda_{F_i}; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений этой матрицы системы. Но в любом случае все параметры исходного ОУ, приводящие к вариациям ΔA_j , $j = \overline{1, p}$, должны быть проранжированы с помощью матрицы весов P_S (2.201).

Как всегда, к матрице K_g предъявляется требование правильной ориентации системы (2.143), (2.209) относительно внешнего воздействия $g(t)$ с тем, чтобы гарантировалось свойство равенства входа и выхода системы в неподвижном положении.

Что касается необходимости выполнения условия (2.204), то при формировании исходного объекта (2.39), (2.191) следует предусмотреть возможность введения передаточных нулей (j, l) -сепаратных каналов, связывающих j -ый параметрический вход ζ_j и l -ый выход y_i

По существу, сказанное выше содержит доказательство следующего утверждения.

Утверждение 2.20. Система управления (2.209), образованная агрегатным объединением ОУ (2.191), (2.198) и закона управления (2.206), нечувствительна к вариации ΔA_j матрицы состояния объекта, если матричные компоненты ЗУ (2.206) выбраны из соображений

$$K = \arg \left\{ D_j = \xi_j : F\xi_j = \lambda_{\Sigma_j} \xi_j; j = \overline{1, p} \ \& \ CD_j = 0 \right\}, \quad (2.211)$$

$$K_g = \arg \left\{ \Phi(0) = -CF^{-1}Bk_g = I; F = A - BK \right\}. \quad \square(2.212)$$

Если исходный ОУ (2.39) не позволяет параметрическую неопределенность представить только в виде вариации ΔA матрицы состояния, то на входе ОУ достаточно включить буферную систему

$$\dot{x}_B(t) = A_B x_B(t) + B_B u_B(t); y(t) = C_B^0 x_B(t), \quad (2.213)$$

минимальной размерности $\dim x_B = \dim u = r$, тем самым задача сводится к рассмотренному случаю. Действительно, если ввести в рассмотрение составной вектор $x = \text{col}\{x, x_B\}$, то получим систему

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t); y(t) = C x(t), \quad (2.214)$$

где

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} A & BC_B \\ 0 & A_B \end{bmatrix}; \mathcal{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ B_B \end{bmatrix}; \mathcal{C} \equiv [C \ 0]. \quad (2.215)$$

Вариации ΔA или ΔB матричных компонентов A или B исходного ОУ (2.39) представим вариацией $\Delta \mathcal{A}$ матрицы \mathcal{A} , следовательно, (2.214) приводим к виду

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + \mathcal{B}\zeta(t); y(t) = \mathcal{C}x(t).$$

При этом, следуя методологии обобщенного изодромного управления, в качестве буферной системы (2.212) следует использовать или интеграторы в каждом сепаратном канале управления для повышения порядка астатизма, или модель источника конечномерного компонента входного воздействия.

В заключение заметим, что полученные условия нечувствительности l -го выхода $y_l(t)$ системы (2.209) к вариации ΔA_j матрицы состояния объекта в общесистемной постановке можно трактовать как условие инвариантности выхода $y_l(t)$ относительно "параметрического" внешнего входа $\zeta_j(t)$. Систему (2.209), обладающую такими свойствами, можно именовать параметрически инвариантной полностью или частично.

Пример 2.11. В качестве примера рассматривается ОУ

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$$

с матричными компонентами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \Delta A = \Delta A(q) = \begin{bmatrix} q & q & 0 \\ -2q & -2q & 0 \\ 4q & 4q & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [2 \ 3 \ 1].$$

При $\forall q \text{ rang } \Delta A(q) = 1$, поэтому определенности ради положим $q = 1$, тогда получим факторизацию $\Delta A(q)$ в форме

$$\Delta A(q)|_{q=1} = \Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} [0 \ 1 \ 0]$$

так, что ОУ в форме (2.191) характеризуется

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}; h_1 = [1 \ 0 \ 0]; h_2 = [0 \ 1 \ 0];$$

$\zeta_1 = h_1 x; \zeta_2 = h_2 x$, при этом в силу $D_1 = D_2$ положим, что (2.191) характеризуется $D = D_1 = D_2; \zeta = \zeta_1 + \zeta_2$.

Проверка условия (2.204) показывает его выполнимость, так как

$$CD = [2 \ 3 \ 1][1 \ -2 \ 4]^T = 0.$$

Сконструируем закон управления (2.206):

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t),$$

где

$$K = \arg\{F = A - BK : \sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5\}; FD = \lambda_1 D\},$$

так что для K получаем $K = [30 \ 31 \ 9]$, что дает матрицу F вида

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix} : \sigma\{F\} = \{\lambda_1 = -2; \lambda_2 = -3; \lambda_3 = -5\},$$

а также собственный вектор $\xi_1 : A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1$ такой, что $\xi_1 = D$. Действительно,

$$FD = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda_1 D.$$

Матрица прямых связей K_g ищется из условия

$$K_g = \arg\{C(SI - F)^{-1} BK_g \Big|_{s=0} = -CF^{-1} BK_g = I\},$$

получаем реализацию $K_g = [15]$.

Таким образом, условие нулевой параметрической чувствительности выхода системы $y(t)$ к вариации $\Delta A = \Delta A(q)$ при $\forall q$, которое было формализовано как условие полной неуправляемости по выходу системы со стороны параметрического внешнего входа $\zeta(t)$ в сочетании с выполнением условия $CD = 0$, выполнено, что подтверждается матрицей управляемости сепаратного канала " $\zeta - y$ "

$$W_{y\zeta y} = [CD \quad CFD \quad CF^2 D] = [0 \ 0 \ 0].$$

Подтвердим достигнутый результат вычислением передаточных функций сепаратного канала " $\zeta - y$ ": исходного объекта управления

$$\Phi_{y\xi}(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y(s)}{\xi(s)} \Big|_{K=[0 \ 0 \ 0]} = C(sI - A)^{-1}D = \frac{4}{s^2}$$

и спроектированной системы

$$\Phi_{y\xi}(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{y(s)}{\xi(s)} \Big|_{K=[30 \ 31 \ 9]} = C(sI - F)^{-1}D = \frac{0}{(s+2)(s+3)(s+5)} = 0. \blacksquare$$

2.3. Системы с интервальными параметрами. Метод В.Л. Харитонова

Рассматривается линейная динамическая система вида (2.55) с тем отличием, что ее модельное представление характеризуется параметрической неопределенностью задания только матрицы состояния так, что векторно-матричное описание такой системы принимает вид

$$\dot{x}(t) = F(q)x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t). \quad (2.202)$$

В (2.202) матрица

$$F(q) = \text{row} \left\{ \text{col} \left[A_{ij}(q_{ij}); i = \overline{1, n} \right]; j = \overline{1, n} \right\}, \quad (2.203)$$

при этом системный параметр $A_{ij}(q_{ij})$ задается в форме

$$A_{ij}(q_{ij}) = \underline{A}_{ij}(1 - q_{ij}) + \overline{A}_{ij}q_{ij}; q_{ij} \in [0, 1]. \quad (2.204)$$

Таким образом,

$$A_{ij}(q_{ij}) \in [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}]: \underline{A}_{ij} \leq \overline{A}_{ij}, \quad (2.205)$$

при этом переменная q_{ij} в (2.205) выполняет функцию интервализирующего параметра, изменение которого в пределах интервала $[0, 1]$ порождает континуум реализаций $A_{ij}(q_{ij})$. Значения $\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}$ представляют собой граничные реализации $A_{ij}(q_{ij})$, медианная реализация характеризуется медианным значением

$$A_{0ij} = 0.5(\underline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}), \quad (2.206)$$

которое наблюдается при медианном значении $q_{0ij} = 0.5$ параметра q_{ij} .

Нетрудно видеть, что если в системе (2.202) в качестве номинальных значений системных параметров принять медианные (2.206), представить интервализирующий параметр q_{ij} в вариациях Δq_{ij} относительно медианного значения q_{ij} в форме

$$q_{ij} = q_{0ij} + \Delta q_{ij}, |\Delta q_{ij}| \leq 0.5, \quad (2.207)$$

то будет подготовлена схема использования аппарата теории чувствительности в любой из приведенных в разделе 2.3 реализаций. Однако

заметим, что максимальная относительная вариация $\delta_{q_{ij}} = \frac{\Delta \| \Delta q_{ij} \|}{\| q_{0ij} \|}$ интер-

вализирующего параметра составляет 100%. В этом диапазоне вариаций Δq_{0ij} аппарат теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка становится некорректным. Тем не менее, разработчик получит полезную информацию о динамической системе, если построит или вычислит функции чувствительности траекторий, собственных значений матрицы состояния F и показателей качества системы (2.202).

Для решения задачи при значениях системных параметров во всем диапазоне их вариаций, задаваемом (2.202), несколько сузим ее, ограничившись проблемой робастной устойчивости в рамках гурвицевой устойчивости (Н-устойчивости). С этой целью введем в рассмотрение характеристический полином $D(\lambda, q)$ матрицы состояния $F(q)$ (2.203) системы (2.202)

$$D(\lambda, q) = \det(\lambda I - F(q)) = \lambda^n + a_1(q_1)\lambda^{n-1} + a_2(q_2)\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}(q_{n-1})\lambda + a_n(q_n), \quad (2.208)$$

где

$$a_1(q_1) = \underline{a}_1(1 - q_1) + \bar{a}_1 : q_1 \in [0, 1]. \quad (2.209)$$

Таким образом,

$$a_1(q_1) \in [\underline{a}_1, \bar{a}_1] : \underline{a}_1 \leq \bar{a}_1; 1 = \overline{1, n}, \quad (2.210)$$

где $\underline{a}_1, \bar{a}_1$ – граничные значения системного параметра $a_1(q_1)$. Нетрудно видеть, что в пространстве системных параметров $a = \text{col}\{a_1; 1 = \overline{1, n}\}$ полная совокупность из n параметров образует выпуклый многогранник типа прямоугольного параллелепипеда Q , каждое ребро которого задано в параметризованной форме (2.209).

Под задачей робастной устойчивости в этом случае будем понимать задачу отыскания условий, при выполнении которых оказываются Н-устойчивыми все полиномы $D(\lambda, q)$, принадлежащие континууму полиномов с коэффициентами из многогранника Q .

Для решения задачи робастной устойчивости заметим, что многогранник Q , представляющий собой прямоугольный параллелепипед в n -мерном параметрическом пространстве с ребрами (2.209), обладает целочисленными характеристиками в виде числа углов $N_c = 2^n$ и числа ребер $N_R = n2^{n-1}$.

В задаче робастной устойчивости встает важная технологическая проблема поиска возможности перехода от континуума полиномов к выборке конечной мощности из этого континуума.

Первый результат в этой области получен Л. Заде. Работая над проблемой робастной устойчивости полиномов (2.208) в частотной области, т.е. используя характеристический комплекс

$$D(j\omega, q) = (j\omega)^n + a_1(q_1)(j\omega)^{n-1} + a_2(q_2)(j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(q_{n-1})(j\omega) + a_n(q_n), \quad (2.211)$$

Л. Заде сформулировал следующее утверждение.

Утверждение 2.21. Любое ребро прямоугольного параллелепипеда Q , отображается в отрезок на комплексной плоскости значений $D(j\omega, q)$, при этом концы этого отрезка суть образы соседних углов, между которыми находится отображаемое ребро. \square

Доказательство. Зафиксируем в (2.211) значение частоты ω и $n-1$ интервализирующих параметров $q_1, \dots, q_{\mu-1} = \overline{1, n} \& 1 \neq \mu$, оставив изменяющимся только q_μ , тогда (2.211) примет вид

$$D(j\omega, q_\mu) = (1 - q_\mu)D(j\omega, \underline{a}_\mu) + q_\mu D(j\omega, \bar{a}_\mu). \quad (2.212)$$

Нетрудно видеть, что (2.212) задает отрезок прямой на плоскости $D(j\omega)$ при $\omega = fix$, концы которого задаются векторами $D(j\omega, \underline{a}_\mu)$ и $D(j\omega, \bar{a}_\mu)$. \blacksquare

Если теперь для анализа устойчивости полинома $D(\lambda, q)$ (2.208) воспользоваться критерием устойчивости А.В. Михайлова, то на основании утверждения 2.21 становится справедливым утверждение.

Утверждение 2.22. Характеристический полином $D(\lambda, q)$ (2.208) оказывается строго устойчивым для всех $q \in Q$, если будут удовлетворять условиям устойчивости критерия устойчивости А.В. Михайлова все годографы, построенные на комплексной плоскости в силу $D(j\omega, q)$ при $\omega \in [0, \infty)$ для всех 2^n угловых реализаций параметра q . \blacksquare

Позже результат Л. Заде был подкреплён так называемой реберной теоремой А.С. Бартлетта.

Таким образом, задача робастной устойчивости сводится к обеспечению устойчивости интервального характеристического полинома (ИХП) $[D(\lambda)]$, задаваемого в форме

$$[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [F]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + [a_2]\lambda^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n], \quad (2.213)$$

где $[F]$ – интервальная матрица состояния системы (2.208), представляемая в форме

$$[F] = \text{row} \left\{ \text{col} \left([F_{ij}] = [\underline{F}_{ij}, \overline{F}_{ij}]; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n} \right) \right\}, \quad (2.214)$$

$$[a_0] = [1, 1] = 1, [a_1] = [\underline{a}_1, \overline{a}_1]. \quad (2.215)$$

Правила математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты $[(*)] = [\underline{(*)}, \overline{(*)}]$, где $(*)$ принимает смысл скаляров, векторов и матриц, приведены в приложении 7, более подробная информация об интервальной арифметике содержится в приложении 5.

Переход от континуума характеристических полиномов (2.208) к множеству угловых реализаций ИХП (2.213), мощность которого составляет величину 2^n , где $n = \dim x$, заметно сократил объем вычислительных проблем при решении задачи робастной устойчивости в условиях параметрической неопределенности. Однако этот объем достаточно велик и растет с увеличением размерности n системы.

Конструктивный прорыв в этой проблеме совершил профессор Санкт-Петербургского государственного университета В.Л. Харитонов, опубликовавший в 1978 году работу, которая составляет суть его метода.

Для целей дальнейших исследований рассмотрим полином с вещественными фиксированными коэффициентами

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0). \quad (2.216)$$

Представим полином (2.216) в факторизованной форме

$$D(z) = h(z^2) + zg(z^2). \quad (2.217)$$

Поставим задачу выяснить, каким требованиям должны удовлетворять полиномы $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ с тем, чтобы полином $D(z)$ (2.216) был бы гурвицевым. Заметим, что полиномы $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ имеют степень ν , если $n = 2\nu + 1$, а в случае $n = 2\nu$ $h(\zeta)$ имеет степень ν , а полином $g(\zeta)$ – степень $(\nu - 1)$. Ответ на поставленный вопрос содержится в теореме Эрмита–Билера.

Теорема Эрмита-Билера. Чтобы полином $D(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы полиномы $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ составляли положительную пару, т.е. чтобы корни этих полиномов, соответственно h_i и g_i , при $i = \overline{1, \nu}$; $j = \overline{1, \nu}$ в случае $n = 2\nu + 1$ и при $i = \overline{1, \nu}$; $j = \overline{1, \nu - 1}$ в случае $n = 2\nu$ были простыми, вещественными, отрицательными и перемежались следующим образом:

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \langle \dots \langle g_\nu \langle h_\nu \langle 0 \text{ при } n = 2\nu + 1, \quad (2.218)$$

$$g_1 \langle h_1 \langle g_2 \langle h_2 \langle \dots \langle g_{\nu-1} \langle h_\nu \langle 0 \text{ при } n = 2\nu. \quad \square (2.219)$$

Доказательство теоремы Эрмита-Билера в терминах вещественнозначных представлений можно найти в литературе, тем не менее, дадим следующий комментарий.

Нетрудно видеть, что теорема Эрмита-Билера содержит вещественнозначную версию критерия устойчивости А.В. Михайлова, сформулированного в форме требования перемежаемости корней на положительной вещественной оси ($\omega \in [0, \infty)$) вещественной $\text{Re}D(j\omega)$ и мнимой $\text{Im}D(j\omega)$ частей характеристического полинома $D(j\omega)$. Действительно, если в (2.217) положить $z = j\omega$, то получим для $D(j\omega)$ представление

$$D(j\omega) = h(-\omega^2) + j\omega g(-\omega^2) = \text{Re}D(j\omega) + j\text{Im}D(j\omega). \quad (2.220)$$

Если в (2.220) придавать значения $\omega \in [0, \infty)$, то в случае гурвицевости полинома $D(z)$ корни уравнений

$$\text{Im}D(j\omega) = \omega g(-\omega^2) = 0, \quad (2.221)$$

$$\text{Re}D(j\omega) = h(-\omega^2) = 0, \quad (2.222)$$

начиная с корня $\omega = 0$ уравнения (2.221), будут чередоваться. Исключим из рассмотрения нулевой корень (2.222) и произведем в (2.225) и (2.226) замену $-\omega^2 = \zeta$, тогда получим условие теоремы Эрмита-Билера. При этом в полном соответствии с критерием устойчивости А.В. Михайлова ближайшим слева к нулю корень будет корень $\zeta = h_\nu$ уравнения $h(\zeta) = 0$, что представлено условием (2.218) и (2.219). ■

Вернемся к интервальному характеристическому полиному $[D(\lambda)]$ (2.213), на котором построим четыре угловых реализации полиномов $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ вида

$$h(\zeta, \underline{a}_n) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-2}\zeta + \underline{a}_{n-4}\zeta^2 + \bar{a}_{n-6}\zeta^3 + \dots + L, \quad (2.223)$$

$$h(\zeta, \bar{a}_n) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-2}\zeta + \bar{a}_{n-4}\zeta^2 + \underline{a}_{n-6}\zeta^3 + L, \quad (2.224)$$

$$g(\zeta, \underline{a}_{n-1}) = \underline{a}_{n-1} + \bar{a}_{n-3}\zeta + \underline{a}_{n-5}\zeta^2 + \bar{a}_{n-7}\zeta^3 + L, \quad (2.225)$$

$$g(\zeta, \bar{a}_{n-1}) = \bar{a}_{n-1} + \underline{a}_{n-3}\zeta + \bar{a}_{n-5}\zeta^2 + \underline{a}_{n-7}\zeta^3 + L. \quad (2.226)$$

Построим на $[D(\lambda)]$ также интервальные версии $[h(\zeta)]$ и $[g(\zeta)]$ полиномов $h(\zeta)$ и $d(\zeta)$, записываемые в форме

$$[h(\zeta)] = [a_n] + [a_{n-2}]\zeta + [a_{n-4}]\zeta^2 + [a_{n-6}]\zeta^3 + L, \quad (2.227)$$

$$[g(\zeta)] = [a_{n-1}] + [a_{n-3}]\zeta + [a_{n-5}]\zeta^2 + [a_{n-7}]\zeta^3 + L \quad (2.228)$$

Если теперь воспользоваться схемой доказательства утверждения 2.19 применительно к вещественно-значимым функциям $h(\zeta)$ и $g(\zeta)$ для значений $\zeta \in [0, -\infty)$, то обнаруживается справедливость положений следующего утверждения.

Утверждение 2.23. Для области значений аргумента $\zeta \in [0, -\infty)$ значения всех угловых реализаций $(h(\zeta))_{cl}$ и $(g(\zeta))_{cl}$ интервальных полиномов $[h(\zeta)]$ и $[g(\zeta)]$ удовлетворяют неравенствам

$$h(\zeta, \underline{a}_n) \leq (h(\zeta))_{cl} \leq h(\zeta, \bar{a}_n); g(\zeta, \underline{a}_{n-1}) \leq (g(\zeta))_{cl} \leq g(\zeta, \bar{a}_{n-1}),$$

$$1 = \overline{1, 2}^v. \quad \blacksquare (2.229)$$

Утверждение 2.21, в свою очередь, делает справедливым положение следующего утверждения.

Утверждение 2.24. Если четыре пары полиномов $\{h(\zeta, \underline{a}_n), g(\zeta, \underline{a}_{n-1})\}$, $\{h(\zeta, \underline{a}_n), g(\zeta, \bar{a}_{n-1})\}$, $\{h(\zeta, \bar{a}_n), g(\zeta, \underline{a}_{n-1})\}$ и $\{h(\zeta, \bar{a}_n), g(\zeta, \bar{a}_{n-1})\}$ являются положительными в смысле теоремы Эрмита-Билера, то образуют положительные пары любые композиции

$$\left\{ (h(\zeta))_{cl}, (g(\zeta))_{cp} \right\}, c, p = \overline{1, 2}^v \quad (2.230)$$

угловых реализаций $(h(\zeta))_{cl}$ и $(g(\zeta))_{cp}$ интервальных полиномов $[h(\zeta)]$ и $[g(\zeta)]$.

Последнее утверждение позволяет сформулировать основной результат исследования робастной устойчивости системы (2.202), сведенный к обеспечению гурвицевости интервального характеристического полинома (2.213), влекущей за собой гурвицевость континуума характеристических полиномов $D(\lambda, q)$ вида (2.208), в форме теоремы В.Л. Харитонова.

Теорема В.Л. Харитонова. Чтобы интервальный характеристический полином (2.213) был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевыми четыре его угловые версии, имеющие представления

$$D_1(\lambda) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \overline{a}_{n-2}\lambda^2 + \overline{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.231)$$

$$D_2(\lambda) = \overline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \overline{a}_{n-3}\lambda^3 + \overline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.232)$$

$$D_3(\lambda) = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\lambda + \underline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \overline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad (2.233)$$

$$D_4(\lambda) = \underline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\lambda + \overline{a}_{n-2}\lambda^2 + \underline{a}_{n-3}\lambda^3 + \underline{a}_{n-4}\lambda^4 + L \quad \blacksquare \quad (2.234)$$

В завершении рассмотрения метода В.Л. Харитонова, который позволил свести задачу робастной устойчивости системы

$$\dot{x}(t) = [F](q)x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t) \quad (2.235)$$

с интервальной матрицей $[F]$ состояния системы к обеспечению гурвицевости четырех характеристических полиномов (2.231)–(2.234), затронем проблемы оценки показателей качества процессов в системе (2.202), сводящихся к проблемам устойчивости. Первоочередным показателем качества процессов динамической системы вида (2.202) является темп, с которым процессы сходятся к равновесному состоянию. Этот темп в основном определяется степенью устойчивости η . Для обеспечения системе (2.202) степени устойчивости η достаточно обеспечить эту степень устойчивости интервальной матрице $[F]$. Для этого воспользуемся свойством спектра собственных значений матричных функций $f(N)$ от квадратной матрицы N . В соответствии с этим свойством, если $(n \times n)$ -матрица N обладает спектром собственных значений $\sigma\{N\} = \{\lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$, то спектр собственных значений матрицы $f(N)$ принимает вид $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}); i = \overline{1, n}\}$.

Сконструируем матричную функцию $f(N)$ от матрицы N вида

$$f(N) = \eta I + N, \quad (2.236)$$

порожденную скалярной функцией $f(\alpha) = \eta + \alpha$. Алгебраический спектр $\sigma\{f(N)\}$ собственных значений матрицы $f(N) = \eta I + N$ принимает вид $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{ni}) = \eta + \lambda_{ni}; i = \overline{1, n}\}$. Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.25. Чтобы система (2.202) обладала степенью устойчивости η , достаточно, чтобы интервальная матрица $[F] + \eta I$ была гурвицевой или чтобы гурвицевым был ИХП этой матрицы

$$\det\{(\lambda - \eta)I - [F]\} = [a_0](\lambda - \eta)^n + [a_1](\lambda - \eta)^{n-1} + L + [a_{n-1}](\lambda - \eta) + [a_n] \quad \blacksquare \quad (2.237)$$

Нетрудно видеть, что после приведения ИХП (2.237) к каноническому виду $[D(\lambda)] = [d_0]\lambda^n + [d_1]\lambda^{n-1} + L + [d_{n-1}]\lambda + [d_n]$ можно воспользоваться теоремой В.Л. Харитоновой, в соответствии с которой проверить гурвицевость полиномов (2.231)–(2.234). Гурвицевость этих полиномов гарантирует наличие у системы (2.235), а, следовательно, и (2.202) степени устойчивости не ниже заданной η .

Возможна и обратная задача, если в соответствии с (2.237) составить четыре полинома В.Л. Харитоновой (2.231)–(2.234), параметризованные η , в форме

$$D_1(\lambda, \eta) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \underline{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \quad (2.238)$$

$$D_2(\lambda, \eta) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \bar{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \bar{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \quad (2.239)$$

$$D_3(\lambda, \eta) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \underline{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \bar{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L, \quad (2.240)$$

$$D_4(\lambda, \eta) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}(\lambda - \eta) + \bar{a}_{n-2}(\lambda - \eta)^2 + \underline{a}_{n-3}(\lambda - \eta)^3 + \underline{a}_{n-4}(\lambda - \eta)^4 + L. \quad (2.241)$$

Если найти на множестве значений η для каждого полинома (2.238)–(2.241) условие границы устойчивости, то получим четыре оценки η , на которых строится ее интервальное представление $[\eta] = [\underline{\eta}, \bar{\eta}] = \eta_0 + [\underline{\Delta\eta}, \bar{\Delta\eta}]$.

Если желаемое значение η не достигается реализацией матриц закона управления (2.57), рассчитанных на основе медианной версии A_0 матрицы ОУ, то эти матрицы следует модифицировать.

Развивая тот же подход, можно сконструировать вещественнозначную матричную функцию от матрицы $f(N) = N^K$, где K – целое нечетное положительное число. Алгебраический спектр $\sigma\{f(N) = N^K\}$ собственных значений принимает вид $\sigma\{f(N)\} = \{f(\lambda_{Ni}) = \lambda_{Ni}^K; i = \overline{1, n}\}$. Таким образом, становится очевидной справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.26. Пусть гурвицева матрица N в своем спектре $\sigma\{f(N)\} = \{\lambda_{Ni}; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений содержит комплексно-сопряженные компоненты, в результате чего распределение

$\{\lambda_{Ni}; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений этой матрицы характеризуется колебательностью μ , при этом матрица N^K также гурвицева, но близка к границе устойчивости колебательного типа при значении

$$K = \max \arg \left\{ \operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^K) < 0 \operatorname{Re}(\lambda_{Ni}^K) \neq 0; i = \overline{1, n} \right\}, \quad (2.242)$$

тогда для колебательности μ матрицы N справедливо оценочное неравенство

$$\mu \leq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2\nu} \right) = \hat{\mu}. \quad \blacksquare \quad (2.243)$$

Применительно к системам (2.202), (2.235) оказывается справедливым утверждение.

Утверждение 2.27. Если ИХП интервальной матрицы $[F^K]$, где K – целое нечетное положительное число, является гурвицевым, при этом K – максимальное число, при котором гурвицевость матрицы $[F^K]$ сохраняется, тогда система (2.202), (2.235) обладает колебательностью μ , определяемой (2.243). \blacksquare

Необходимо теперь остановиться на проблемах объема вычислений при формировании ИХП $[D(\lambda)]$ интервальной матрицы $[F]$ системы. Очевидно, если размерность матрицы $[F]$ составляет $(n \times n)$, тогда максимальная мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций матрицы $[F]$ составляет $2^{n \times n}$, а минимальная мощность этого множества составляет 2^n , что имеет место при использовании таких канонических представлений матрицы, как диагональное и фробениусово. Однако независимо от базиса мощность множества $\{(F)_c\}$ угловых реализаций может быть зафиксирована на уровне 2^p , где p – число исходных интервальных физических параметров. Мощность множества угловых реализаций может быть заметно сокращена, если разработчик проведет предварительное ранжирование первичных физических параметров с помощью процедуры, предложенной в параграфе 2.3.4.

Следует также заметить, что в силу формализма правил интервальной арифметики (см. приложение 5) в процессе математических преобразований выражений, содержащих интервальные компоненты, может происходить резкий рост ширины $\operatorname{wid}[a_1]$ системных интервальных параметров $[a_1]$. Наибольший вклад в этот рост вносят операции вычисления разности $[a_1] - [a_1]$ и частного от деления $[a_1]/[a_1]$.

Очевидно, в силу параметризованных представлений (2.204) $a_1(q) - a_1(q) = 0$ и $a_1(q) = 1$, в том числе и при $q = 0$ и $q = 1$. Таким образом, без нарушения существа интервальных вычислений они могут быть модифицированы допущением $[a_1] - [a_1] = 0, [a_1]/[a_1] = 1$.

Пример 2.12. В качестве примера рассматривается ОУ с интервальной матрицей состояния $[A] = A_0 + [\Delta A]$, для которого спроектирован регулятор, реализующий закон управления (2.57) так, что матрица состояния системы (2.202), (2.235) имеет вид $[F] = F_0 + [\Delta F] = (A_0 - BK) + [\Delta A]$.

Пусть ЗУ (2.57) доставляет медианной части F_0 распределение мод Баттерворта порядка $n = 3$ с характеристической частотой $\omega_0 = 4c^{-1}$ так, что матрица F_0 , заданная во фробениусовом базисе, имеет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & -32 & -8 \end{bmatrix}.$$

Пусть интервальная часть $\Delta F = [\Delta A]$ матрицы состояния имеет представление

$$[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ [-25, 25] & [-15, 15] & [-10, 10] \end{bmatrix},$$

так что

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-89, -39] & [-47, -17] & [-18, 2] \end{bmatrix}.$$

Матрица $[F]$ обладает ИХП

$$[D(\lambda)] = [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3],$$

$$[a_0] = [1, 1]; [a_1] = [-2, 18]; [a_2] = [17, 47]; [a_3] = [39, 89].$$

Полиномы В.Л. Харитонова (2.231)–(2.234) в этом случае записываются в форме

$$D_1(\lambda) = 39 + 17\lambda + 18\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_2(\lambda) = 89 + 17\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_3(\lambda) = 89 + 47\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$D_4(\lambda) = 39 + 47\lambda + 18\lambda^2 + \lambda^3.$$

Нетрудно видеть, что ИХП $[D(\lambda)]$ не является гурвицевым. Модифицируем матричные компоненты закона управления (2.57) с тем, чтобы он обеспечивал распределение мод Баттерворта порядка $n=3$ с характеристической частотой $\omega_0 = 10c^{-1}$. Тогда медианная часть интервальной матрицы $[F] = F_0 + [\Delta F] = F_0 + [\Delta A]$ примет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1000 & -200 & -20 \end{bmatrix}.$$

Так как $[\Delta F] = [\Delta A]$, то для $[F]$ получим

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ [-1025, -975] & [-215, -185] & [-30, -10] \end{bmatrix}.$$

ИХП новой версии $[F]$ $[D(\lambda)] = \det(\lambda I - [F]) = [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3]$ обладает интервальными коэффициентами $[a_0] = [1, 1]; [a_1] = [10, 30]; [a_2] = [185, 215]; [a_3] = [975, 1025]$. Полиномы (2.231)–(2.234) записываются в форме

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= 975 + 185\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3, \\ D_2(\lambda) &= 1025 + 185\lambda + 10\lambda^2 + \lambda^3, \\ D_3(\lambda) &= 1025 + 215\lambda + 10\lambda^2 + \lambda^3, \\ D_4(\lambda) &= 975 + 215\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3. \end{aligned}$$

Все полиномы В.Л. Харитонова гурвицевы, следовательно, гурвицев ИХП $[D(\lambda)]$. Система робастно устойчива. ■