3. НЕАДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ

3.1. Основные положения обобщенного модального управления

Первоначально задача модального управления ставилась как задача обеспечения желаемой локализации собственных значений (мод) матрицы состояния проектируемой системы, которая доставляла бы последней требуемое качество переходных и установившихся процессов. Алгоритмически задача модального управления (МУ) в такой постановке, в основном, решалась путем приведения матрицы состояния модели объекта управления (ОУ) к канонической фробениусовой форме. Такой способ синтез модального управления себя оправдывал для случая систем типа "одномерный вход–выход " (SISO-типа), для случая управления ОУ типа "многомерный вход–выход" (MIMO-типа) способ столкнулся с заметными трудностями. Для преодоления возникших трудностей разработчиками использовались достаточно громоздкие конструкции матриц MIMO объектов управления к представлению во фробениусовом базисе. При этом с ростом размерности многомерных ОУ заметно росло число обусловленности матриц приведения подобия, что порождало проблемы вычислительной устойчивости алгоритмов в целом.

Поиск методов синтеза модального управления, инвариантных относительно базиса представления и размерности входов–выходов, привел к модификации первичной постановки задачи модального управления. В модифицированном виде задача получила формулировку обеспечения векторного и матричного подобия процессов и модальных представлений в синтезируемой системе процессам и модальным представлениям некоторой эталонной системы с желаемой модальной моделью (ММ). В такой постановке алгоритмическое обеспечение процедуры синтеза модального управления определяется как решение неоднородного матричного уравнения Сильвестра.

Использование уравнения Сильвестра при синтезе обнаруживало и заметное расширение возможностей МУ, состоящее в достижении как желаемой структуры мод, так и собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы. Попытки предъявления требований к структуре собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы при условии обеспечения желаемой локализации мод стали появляться по мере интенсификации исследований по использованию геометрических методов в теории управления.

К настоящему моменту потребность разработки алгоритмического обеспечения синтеза обобщенного модального управления (ОМУ), которое доставляет проектируемой системе желаемые структуры мод и собственных векторов, содержательно оформилась.

Возможность обеспечения системе желаемой структуры собственных значений и требуемых значений оценок областей неопределенности их локализации, именуемого задачей обеспечения модальной робастности, средствами ОМУ в условиях параметрической неопределенности объекта является предметом исследования этого типа неадаптивного управления.

Если в задачу необобщенного модального управления включить необходимость обеспечения таких элементов геометрического спектра собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы, которые совпадают со столбцами матрицы входа, соответствующими доминирующим внешним "параметрическим" входам, то достижима параметрическая инвариантность выходов такой системы.

Более того, управление алгебраическим спектром собственных значений и геометрическим спектром собственных векторов матрицы состояния проектируемой системы позволяет контролировать затраты на управление и меру неравномерности распределения этих затрат на сфере начальных состояний $\|x(0)\| = const$ системы. При этом удается решать задачу робастности в общесистемной постановке в соответствии с концепцией: чем меньшими затратами на управление достигается желаемый эффект управления и чем равномернее они распределены на сфере начальных состояний, тем большей робастностью в целом, т.е. по совокупности факторов, вносящих в исходный объект управления неопределенность, обладает спроектированная система.

Проблемы синтеза обобщенного модального управления изложим в виде системы утверждений.

Утверждение 3.1. Пусть тройка матриц (*A, B, C*) с управляемой (*A, B*) и наблюдаемой (*A, C*) парой задает непрерывный объект управления в виде (2.39).

Пусть наблюдаемая пара матриц (Г, Н) задает модальную модель. Перечисленные матрицы имеют следующие характеристики: $A, \Gamma \in R^{n\times n}$ – матрицы состояния соответственно ОУ и ММ;

$B, H^T \in R^{n\times r}$ – матрицы управления ОУ и выхода ММ соответственно; $C \in R^{m\times n}$ – матрица выхода ОУ.

Потребуем выполнения следующего условия: $\sigma\{A\} = \{\lambda_{A_i}; i = \overline{1,n}\}$ и $\sigma\{\Gamma\} = \{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$, алгебраические спектры собственных значений матриц A и Γ не пересекаются $\{\sigma\{A\} \cap \sigma\{\Gamma\} \neq 0\}$, или, что то же самое, характеристические полиномы $\det(\lambda I - A)$ и $\det(\lambda I - \Gamma)$ не являются взаимно аннулирующими.

Тогда матрица K, вычисляемая в форме

$$K = HM^{-1}, \tag{3.1}$$

где M является решением неоднородного матричного уравнения Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH, \tag{3.2}$$

доставляет матрице

$$F = A - BK \tag{3.3}$$

матричное подобие, записываемое в форме:

$$M\Gamma = FM, \tag{3.4}$$

следствием которого является совпадение алгебраических спектров собственных значений этих матриц $\sigma\{F\} = \sigma\{\Gamma\}$. □

Доказательство утверждения 3.1 приведено в приложении 6. ■

Сформулируем утверждение, имеющее важное технологическое значение.

Утверждение 3.2. Если матрица Γ модальной модели является матрицей простой структуры и задается в диагональной форме

$$\Gamma = \Lambda = diag\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}, \tag{3.5}$$

то столбцы M_i матрицы M являются собственными векторами матрицы F. □

Доказательство утверждения строится на столбцовой форме записи (3.1), в результате чего в силу структуры (П.6.81) столбцы Λ_i матрицы Λ получим:

$$FM_i = \lambda_i M_i : i = \overline{1,n}. \quad ■ \tag{3.6}$$

Сформулированные утверждения (3.1) и (3.2) составляют основу построения алгоритмического обеспечения решения задачи обобщенного модального управления. Очевидно, задача ОМУ может иметь две модификации.

В первой модификации задача ОМУ является полной, под которой понимается обеспечение полной структуры желаемых мод $\sigma\{F\}=\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$ и полной структуры желаемых собственных векторов $\{\xi_i = M_i : F\xi_i; i=\overline{1,n}\}$ матрицы F состояния проектируемой системы.

Во второй модификации задачи ОМУ, которая называется неполной, требуется обеспечить полную структуру желаемых мод $\sigma\{F\}=\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$ и неполную структуру мощностью в l элементов собственных векторов $\{\xi_i = M_i = fix; i=\overline{1,l}; l<n\}$ матрицы.

В этой связи сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3.3. Для решения полной задачи обобщенного модального управления достаточно, чтобы матрица управления *B* объекта обладала рангом, равным $n=\dim x$:

$$rangB = n. \tag{3.7}$$

При этом полная задача ОМУ решается с помощью обратной связи по состоянию ОУ с матрицей *K* вида

$$K = B^{-1}(AM - M\Lambda)M^{-1}. \qquad \square \tag{3.8}$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 6. ■

Утверждение 3.4. Пусть $\xi_i; i=\overline{1,l}; l\le r,$ где $r = rangB, r<n$; l – число желаемых собственных векторов, соответствующих их первым желаемым модам из числа n общей структуры желаемых мод $\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}$.

Тогда решение неполной задачи ОМУ достигается с помощью матрицы *K* обратной связи, задаваемой матричным выражением

$$K=\left[\bar{H} \;\vdots\; \tilde{H}\right]\left[\bar{M} \;\vdots\; \tilde{M}\right]^{-1} = \left[(B^TB)^{-1}B^T(A\bar{M}-\bar{M}\bar{\Lambda} \;\vdots\; \tilde{H}\right]\left[\bar{M} \;\vdots\; \tilde{M}\right]^{-1}, \tag{3.9}$$

где

$$\bar{M} = row\{M_i = \xi_i; i=\overline{1,l}\}; \bar{\Lambda} = diag\{\lambda_i; i=\overline{1,l}\}, \tag{3.10}$$

а матрицы $\tilde{M}$ и $\tilde{H}$ связаны матричным уравнением Сильвестра

$$\tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}, \qquad (3.11)$$

в котором

$$\tilde{\Lambda} = diag\left\{\lambda_i; i = \overline{l+1, n}\right\}. \quad \square \qquad (3.12)$$

Доказательство утверждения приведено в приложении 6. ■

Утверждения 3.3. и 3.4 составляют алгоритмическую основу обобщенного модального управления объектами с параметрическими неопределенностями, т.е. управления неадаптивными методами.

3.2. Модальноробастное управление многомерными объектами

Сформулируем постановку задачи модальноробастного управления многомерными объектами.

Рассматривается непрерывный многомерный (MIMO-типа) объект управления, базис представления которого таков, что вся параметрическая неопределенность его физических компонентов модельно представлена в форме неопределенности матрицы состояния так, что он имеет векторно-матричное описание:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t). \qquad (3.13)$$

Объект управления (3.13) агрегируется с законом управления (3.4)

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \qquad (3.14)$$

образуя тем самым систему

$$\dot{x}(t) = (F + \Delta F)x(t) + Gg(t), x(0), y(t) = Cx(t), \qquad (3.15)$$

где

$$F = A - BK, \Delta F = \Delta A, G = BK_g. \qquad (3.16)$$

В силу параметрической неопределенности спроектированной системы (3.15), представленной матричным компонентом ΔF ее матрицы состояния, будут обладать неопределенностью и элементы алгебраического спектра $\sigma\{F + \Delta F\} = \left\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i = \overline{1, n}\right\}$ собственных значений. Построим на системных компонентах (матрица состояния, алгебраический спектр собственных значений), обладающих параметрической неопределенностью, оценки их неопределенности.

Определение 3.1. Оценкой абсолютной параметрической неопределенности матрицы $(F+\Delta F)$, где F – номинальная составляющая этой матрицы, называется скалярная величина Δ_F, определяемая выражением

$$\Delta_F \stackrel{\Delta}{=} \|\Delta F\|. \tag{3.17}$$

Определение 3.2. Оценкой относительной параметрической неопределенности матрицы $(F+\Delta F)$ называется скалярная величина δ_F, определяемая соотношением

$$\delta_F \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} = \frac{\Delta_F}{\|F\|}. \tag{3.18}$$

Определение 3.3. Оценкой абсолютной параметрической неопределенности вектора $(\lambda+\Delta\lambda) = col\left\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i=\overline{1,n}\right\}$ собственных векторов матрицы $(F+\Delta F)$ называется скалярная величина Δ_λ, определяемая соотношением

$$\Delta_\lambda \stackrel{\Delta}{=} \left\|\Delta\lambda = col\left\{\Delta\lambda_i; i=\overline{1,n}\right\}\right\|. \tag{3.19}$$

Определение 3.4. Оценкой относительной параметрической неопределенности вектора $(\lambda+\Delta\lambda) = col\left\{\lambda_i + \Delta\lambda_i; i=\overline{1,n}\right\}$ собственных векторов матрицы $(F+\Delta F)$ называется скалярная величина δ_λ, определяемая выражением

$$\delta_\lambda \stackrel{\Delta}{=} \frac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|} = \frac{\Delta_\lambda}{\|\lambda\|}. \tag{3.20}$$

Необходимо отметить, что в силу соотношений для оценки Δ_F оказывается справедливой запись

$$\Delta_F \stackrel{\Delta}{=} \|\Delta F\| = \|\Delta A\|. \tag{3.21}$$

Утверждение 3.5. Оценки абсолютной параметрической неопределенности Δ_F и Δ_λ матрицы состояния системы (3.15) и ее алгебраического спектра собственных значений соответственно удовлетворяют неравенству

$$\Delta_\lambda \le C\{M\}\Delta_F, \tag{3.22}$$

где $C\{M\}$ – число обусловленности собственных векторов матрицы F единичной нормы так, что

$$M = row\left\{M_i : FM_i = \lambda_i M_i \;\&\; \|M_i\| = 1; i = \overline{1,n}\right\}. \quad \square \tag{3.23}$$

Доказательство утверждения 3.5 с учетом (3.17) и (3.19) проводится по схеме доказательства утверждения 2.13.

■

Нетрудно видеть из (3.22) с учетом (3.21), что эффект введения регулятора с законом управления (3.14) при решении задачи обеспечения модальной робастности системы (3.15) в абсолютной постановке проявляется лишь в управлении числом обусловленности $C\{M\}$, минимальное значение которого $C\{M\}=1$ достигается на ортогональной структуре собственных векторов, доставляемой средствами ОМУ.

Утверждение 3.6. Оценка относительной параметрической неопределенности δ_F и δ_λ матрицы состояния (3.15) и ее алгебраического спектра собственных значений соответственно удовлетворяет неравенству

$$\delta_\lambda \le C^2\{M\}\delta_F. \quad \square \tag{3.24}$$

Доказательство утверждения 3.6 проведено в приложении 6.

■

Нетрудно видеть, что оценочное неравенство (3.24) с учетом (3.18) и (3.21) принимает вид

$$\delta_\lambda \le C^2\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\|F\|} = C^2\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\|A - BK\|}. \tag{3.25}$$

Свяжем значения δ_λ и $\|\Delta A\|$ со значением $\|\Lambda\|$ нормы матрицы состояния модели утверждением.

Утверждение 3.7. Оценка относительной параметрической неопределенности δ_λ алгебраического спектра собственных значений матрицы состояния спроектированной системы (3.15), вариация ΔA матрицы состояния ОУ (3.13) и матрица Λ состояния ММ в нормах удовлетворяют неравенству

$$\delta_\lambda \le C^3\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|}. \quad \square \tag{3.26}$$

Доказательство утверждения 3.7 приведено в приложении 6. ■

Положим неравенство (3.26) в основу формирования требований к значению $\|\Lambda\|$, для чего (3.26) запишем в форме

$$\delta_{\lambda} \le C^3\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|} = \delta_{\lambda R}, \qquad (3.27)$$

где $\delta_{\lambda R}$ – требуемое значение оценки модальной робастности системы (3.15). Из (3.27) для требуемого значения $\|\Lambda\|_R$ нормы матрицы состояния модальной модели получим:

$$\|\Lambda\| \ge \|\Lambda\|_R = C^3\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}}. \qquad (3.28)$$

Соотношение (3.28) и набор требований к динамическим свойствам номинальной реализации системы (3.15) составляют основу алгоритма синтеза ЗУ вида (3.14) методами обобщенного модального управления.

Для случая реализуемости полной задачи ОМУ может быть предложен следующий алгоритм синтеза модальноробастных систем вида (3.15).

Алгоритм 3.1.

1. Построение (A, B, C) – номинального матричного представления некоторого ОУ в базисе, в котором неопределенность физических параметров приводит к неопределенности значения только матрицы состояния объекта в форме матричного компонента ΔA так, что становится справедливым модальное представление (3.13).
2. Задание требований к качеству переходных и установившихся процессов номинальной версии проектируемой системы, а также величины $\delta_{\lambda R}$ требуемого значения оценки модальной робастности в форме оценки δ_{λ} относительной параметрической неопределенности алгебраического спектра собственных значений матрицы $(F + \Delta A)$ системы (3.15).
3. Формирование матрицы Λ состояния модальной модели из условия

$$\Lambda = \arg\left\{\|\Lambda\| \ge \|\Lambda\|_r = C^3\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda r}} \;\&\; \sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F\}\right\} \qquad (3.29)$$

в предположении, что $C\{M\}=1$.

4. Формирование ортогональной матрицы M собственных векторов номинальной версии матрицы состояния A_{Σ} системы (3.15) из условия

$$M=\arg\left\{C\{M\}=1\right\}. \tag{3.30}$$

Для формирования ортогональной матрицы M размерности $(n\times n)$ достаточно взять любую невырожденную $(n\times n)$-матрицу N и построить ее SVD-разложение

$$N=U_N\sum\nolimits_N V_N^T,$$

где $U_N U_N^T=U_N^T U_N=I$, $V_N V_N^T=V_N^T V_N=I$.

Тогда в качестве матрицы M может быть взята любая из матриц левого U_N или правого V_N сингулярных базисов.

5. Вычисление матрицы K закона управления (3.14) в силу соотношения (3.8).

6. Вычисление матрицы K_g прямой связи по внешнему воздействию ЗУ (3.14) с помощью соотношения

$$\begin{aligned}K_g&=\arg\left\{-CF^{-1}BK_g=(1-\delta)I\right\}=-(1-\delta)(CF^{-1}B)^{-1}=\\&=-(1-\delta)(CM\Lambda^{-1}M^{-1}B)^{-1}\end{aligned} \tag{3.31}$$

где δ – величина статизма отношения "вход–выход" номинальной версии системы (3.15).

7. Вычисление апостериорного значения оценки δ_{λ} в форме (3.20), где с целью минимизации достаточности оценок целесообразно использование бесконечных векторных норм.

8. Формирование реализационной версии закона управления (3.14), записываемой в форме

$$u(t)=K_{\varepsilon}\varepsilon(t)-K_x x(t), \tag{3.32}$$

где $\varepsilon(t)=g(t)-y(t), K_{\varepsilon}=K_g$, а матрица K_x ищется по аналогии с (2.65) в форме

$$K_x=K-K_{\varepsilon}C=K+(1-\delta)(CF^{-1}B)^{-1}. \tag{3.33}$$

Необходимо сделать к приведенному алгоритму следующее примечание. Нетрудно видеть, что множество матриц M. удовлетворяющих условию (3.30) для случая реализуемости полной задачи ОМУ, образует континуум. В этой связи наложим на выбор матрицы M, которая по существу определяет в силу (3.8) выбор матрицы $K = K(M)$ обратной связи по состоянию ОУ, ограничение в форме

$$M = \arg\min_{M}\left\{J_u = C^{1/2}\left\{W_u\right\}\alpha_M^{1/2}\left\{W_u\right\}\right\}. \quad (3.34)$$

В соотношении (3.34) W_u – грамиан затрат на управление, которое при $g(t) \equiv 0$ как элемент функционального пространства L_T^P при $p = 2, \tau = [0,\infty)$ на множестве свободных движений, порождаемых сферой начальных состояний $\|x(0)\| = const$, характеризуется нормой $\|u(t)\|$, удовлетворяющий соотношениям:

$$\|u(t)\|^2 = \int_0^\infty u^T(t)u(t)dt = x^T(0)\int_0^\infty e^{A_\Sigma^T t}K^T K e^{A_\Sigma t}dx(0) = x^T(0)W_u x(0).$$

Грамиан W_u затрат на управление вычисляется в силу матричного уравнения типа уравнения Ляпунова:

$$F^T W_u + W_u F = -K^T K. \quad (3.35)$$

В (3.34) $\alpha_M\left\{W_u\right\}$ – максимальное сингулярное число грамиана W_u затрат на управление, $C\left\{W_u\right\}$ – его число обусловленности. Таким образом, функционал J_u в (3.34) контролирует затраты на управление и обусловленность их распределения на сфере $\|x(0)\| = const$.

В связи со сказанным п. 4 алгоритма 3.1 должен быть модифицирован и записан в следующей форме:

4. Формирование матрицы M собственных векторов матрицы A_Σ состояния системы (3.15) из условия

$$M = \arg\left\{C\left\{M\right\} = 1 \,\&\, \min_{M}\left\{J_u = C^{1/2}\left\{W_u\right\}\alpha_M^{1/2}\left\{W_u\right\}\right\}\right\}. \quad (3.36)$$

Теперь рассмотрим случай реализуемости лишь неполной задачи обобщенного модального управления. Этому случаю соответствует ситуация $rangB = r < n$. При неполной задаче ОМУ исчезает возможность свободного назначения структуры мод матрицы $\Lambda = diag\left\{\lambda_i i = \overline{1,n}\right\}$. Управление числом обусловленности матрицы M осуществляется в форме

$$C\left\{M\right\} = C\left\{M(H) : M\Lambda - AM = -BH : \Lambda = fix, H = \mathrm{var}\right\} \quad (3.37)$$

путем модификации матрицы H в классе наблюдаемых пар (Λ, H) при фиксированной матрице Λ. Причем модификация H осуществляется в силу алгоритмов линейного программирования, таких как алгоритм Нелдера–Мида. Заметим, что в качестве начальной пары матриц M и H может быть взята пара, конструируемая в соответствии с положениями утверждения 3.4.

В итоге матрица M ищется с помощью итерационной процедуры, приводящей к выполнению условия

$$M = \arg\min_{H}\{C\left\{M(H)\right\} : M\Lambda - AM = -BH : \Lambda = fix, H = \mathrm{var}\right\}. \quad (3.38)$$

Таким образом, для случая реализуемости лишь неполной задачи ОМУ может быть предложен следующий алгоритм синтеза модальноробастных систем вида (3.15).

Алгоритм 3.2.

1. Выполнение п.п. 1–3 алгоритма 3.1.
2. Нахождение пары матриц $(M, H) = \arg\min\{C\{M(H)\}\}$ с помощью итерационной процедуры, опирающейся на (3.38). Если $\min_{H} C\{M(H) : \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\} = 1$, то переход к п. 5 алгоритма, иначе – п. 3.
3. Возвращение к п. 3 алгоритма 3.1 с целью формирования новой версии матрицы Λ при заданных $\|\Delta F\| = \|\Delta A\|$, требуемого значения $\delta_{\lambda R}$ модальной робастности и полученного в п. 2 значений числа обусловленности $C\{M\}$ в силу соотношения (3.29).
4. Фиксация результата в форме тройки матриц (Λ, H, M), где Λ удовлетворяет (3.29) при паре (H, M), удовлетворяющей (3.38), выполнение которого позволяет осуществить переход к п. 5, иначе – к п. 2;
5. Выполнение п.п. 5–8.

Следует заметить, что для сокращения объема вычислений при организации итерационной процедуры в теле алгоритма 3.2 целесообразно использовать параметризованное характеристической частотой ω_0 представление используемого распределения мод. Необходимо также отметить, что, если в результате синтеза достигается выполнение условия $\delta_{\lambda} \le \delta_{\lambda R}$, то становится справедливым аппарат теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка. В связи с этим при вычислении в п. 7 алгоритма 3.1 апостериорного значения δ_λ в силу определения (3.20) в последнем целесообразно $\Delta_\lambda = \|\Delta\lambda\|$ вычислять с помощью соотношения (П.6.51) в форме

$$\|\Delta\lambda\| = \left\| col\left\{ (M^{-1}\Delta F M)_{ii}; i = \overline{1,n} \right\} \right\|. \qquad (3.39)$$

Пример 3.1. Процедуру синтеза модальноробастной системы методами ОМУ проиллюстрируем на примере многомерного объекта управления, допускающего решение полной задачи ОМУ. Тогда, следуя алгоритму 3.1, выполним следующие действия.

1. Построение (A,B,C) – номинального представления ОУ, характеризующегося матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметрическая неопределенность проявляется в появлении нежелательных антисимметричных перекрестных связей так, что

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix};\ \|\Delta A\| = 0.5;\ \delta_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 0.5.$$

2. Формирование технических требований в форме:
   - время переходного процесса $t_n \le 0.45c$;
   - перерегулирование $\sigma \le 5\%$;
   - требуемая величина оценки модальной робастности $\delta_{\lambda R} = 0.02$.

3. Выбор в качестве желаемого распределения мод проектируемой системы распределения мод Баттерворта второго порядка, которое в параметризованной характеристической частотой ω_0 форме позволяет для матрицы Λ записать

$$\Lambda = \omega_0 \begin{bmatrix} -0.707 & 0.707 \\ -0.707 & -0.707 \end{bmatrix}.$$

Значение характеристической частоты ω_0 определяется в силу (3.29) и технических требований к проектируемой системе (3.15) из условия

$$\omega_0 = \max\left\{\omega_0 \geq \frac{4.5}{t_n} = 10c^{-1}; \omega_0 \geq \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{\lambda R}} = \frac{0.5}{0.02} = 25c^{-1}\right\} = 25c^{-1}.$$

В итоге матрица Λ принимает вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -17.677 & 17.677 \\ -17.677 & -17.677 \end{bmatrix}.$$

4. Формирование ортогональной матрицы $M : C\{M\} = 1$, которое приводит к матрице

$$M = \begin{bmatrix} 0.8053 & -0.5928 \\ 0.5928 & 0.8053 \end{bmatrix}.$$

Вычисление матрицы K обратных связей по состоянию закона управления (3.14) в силу соотношения (3.8) приводит к результату

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -36.3553 \\ 17.6777 & 18.6777 \end{bmatrix}.$$

5. Вычисление матрицы K_g прямых связей по внешнему воздействию $g(t)$ закона управления (3.14) в силу соотношения (3.8) для случая $\delta = 0$, позволяющее записать:

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & -35.3553 \\ 17.6777 & 17.6777 \end{bmatrix}.$$

6. Вычисление апостериорного значения оценки δ_λ модальной робастности в силу определения (3.20) $\delta_\lambda = \frac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|}$, характеризующееся компонентами $\|\lambda\| = \omega_0 = 25$ и $\|\Delta\lambda\| = 0.5$, полученными с помощью (3.39), приводит к величине $\delta_\lambda = 0.02$.
7. Представление спроектированной системы (3.15) номинальной тройкой матриц (F, G, C), имеющих реализацию

$$F = \begin{bmatrix} -17.677 & 17.677 \\ -17.677 & -17.677 \end{bmatrix};\ G = \begin{bmatrix} 17.677 & -17.677 \\ 17.677 & 17.677 \end{bmatrix};\ C = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

Параметрическая неопределенность проявляется в вариации $\Delta F = \Delta A$ матрицы состояния, которая для спроектированной системы характеризуется оценкой относительной неопределенности δ_F (3.18),компоненты которой $\Delta_F = \|\Delta F\|$ и $\|F\|$ принимают значения $\|\Delta F\| = \|\Delta A\| = 0.5$; $\|F\| = 25$, что приводит к величине $\delta_F = 0.02$.

Закон управления (3.14) не изменил оценки абсолютной неопределенности матрицы состояния, но при этом в двадцать пять раз уменьшил значение оценки относительной параметрической неопределенности этой матрицы.

□

В заключение следует заметить, что если параметрическая неопределенность исходных физических параметров проявляется в неопределенности системных параметров, которыми оказываются элементы как матрицы состояния, так и матрицы управления ОУ, то в этом случае следует воспользоваться приемом, предложенным в параграфе 2.3.4. Этот прием состоит во включении на входе объекта управления буферной системы вида (2.199).

3.3. Синтез параметрически инвариантных систем

Рассматриваются задачи синтеза систем управления, минимизация нежелательного эффекта параметрической неопределенности матричных компонентов модельного представления объектов управления которых достигается в классе неадаптивных законов управления, доставляющих системе инвариантность отношения "параметрический вход – выход (ошибка)". Базовые концепции сведения задачи чувствительности переменных динамической системы к параметрической неопределенности матриц модели ОУ к задаче анализа системных свойств синтезируемой системы (управляемости, наблюдаемости и инвариантности) отношения "параметрический вход – системные переменные" изложены в параграфе 2.3.4. В случае достижения неуправляемости этого отношения, т.е. нулевой его передаточной функции, наблюдается инвариантность его выхода ко входу, что позволяет называть такую систему параметрически инвариантной. Параметрическая инвариантность будет полной, если она зафиксирована на всех сепаратных отношениях отмеченного типа, в противном случае она является частичной.

В настоящем параграфе рассматривается проблема погружения процедуры синтеза законов неадаптивного управления, доставляющих системе параметрическую инвариантность с одновременным удовлетворением требований к динамическим свойствам процессов в ней, в алгоритмическую среду синтеза обобщенного модального управления. Это погружение осуществляется на примере двух типов законов неадаптивного управления: модального управления, ориентированного в форме (3.14) относительно внешнего задающего воздействия произвольного вида, и обобщенного изодромного управления для случая конечномерного задающего воздействия.

Для случая синтеза закона управления в форме (3.14) методами обобщенного модального управления, доставляющего проектируемой системе параметрическую инвариантность с одновременным обеспечением требуемых показателей в переходном и установившемся режимах отношению задающий внешних вход – выход системы, может быть предложен следующий алгоритм.

Алгоритм 3.3.

1. Построение (A, B, C) – номинального векторно-матричного представления объекта управления в базисе, в котором неопределенность физических параметров представлена неопределенностью задания только матрицы состояния в форме матричного компонента ΔA так, что становится справедлива векторно-матричная модель ОУ (2.191), (3.13). При этом предпочтительны такие базисы, в которых параметризуемые системные элементы матрицы A, т.е. отличные от нуля и единицы элементы этой матрицы, были размещены в минимальном числе строк. Примеров такого базиса является фробениусов базис строчной версии. Желательно, чтобы матрица C выхода объекта принимала в выбранном базисе вид

$$C = diag\left\{\left[1| \quad 0^T_{n_l-1}\right];\ l=\overline{1,m};\ \sum_{l=1}^{m} n_l = n\right\}, \tag{3.40}$$

здесь n_l – размерность вектора состояния сепаратного l-го канала ОУ MIMO-типа.

2. Построение факторизованного представления матричного компонента ΔA в форме (2.192)

$$\Delta A = \sum_{j=1}^{p} \Delta A_j,\ \ \Delta A_j:\ rang\Delta A_j = 1;\ j=\overline{1,p} \tag{3.41}$$

с максимальным значением p, равным числу ненулевых элементов ΔA. Единичное значение ранга матрицы ΔA_j позволяет представить последнюю в форме (2.194)

$$\Delta A_j = d_j h_j^T : \left\| h_j \right\| = 1;\; j = \overline{1, p}. \qquad (3.42)$$

представление (2.194), (3.42) позволяет ввести в рассмотрение p-мерный вектор $\zeta(t) = col\left\{\zeta_j(t) = h_j^T x(t);\; j = \overline{1, p}\right\}$ внешнего "параметрического" воздействия так, что исходный ОУ (2.191) с параметрической неопределенностью ΔA задания матрицы состояния

$$\dot{x}(t) = \left(A + \Delta A\right) x(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t),$$

получает номинальное векторно-матричное описание (2.198), имеющее вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + D\zeta(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \qquad (3.43)$$

где $D = row\left\{D_j = d_j;\; j = \overline{1, p}\right\}$ – $(n \times p)$-матрица внешнего "параметрического" входа.

3. Формирование матрицы весов P_s (2.201) в виде

$$P_s = row\left\{col\left[\left\| W_{ylj} \right\|;\; l = \overline{,m}\right];\; j = \overline{1, p}\right\}, \qquad (3.44)$$

где W_{ylj} – матрица управляемости, построенная на тройке матриц $\left(C^l, A, D_j\right)$, C^l – l-ая строка матрицы C, D_j – j-ый столбец D, с целью ранжирования параметрических входов ξ_j $\left(j = \overline{1, p}\right)$, а, следовательно, матричных компонентов ΔA_j по степени их влияния на выходы $y_l(t)\left(l = \overline{1, m}\right)$ объекта, оцениваемой с помощью норм $\left\| P_{sj} \right\|$ $\left(j = \overline{1, p}\right)$ столбцов матрицы весов.

4. Модификация представления (3.41) матричного компонента ΔA, а, следовательно, матрицы D, с целью минимизации p – числа столбцов D_j $\left(j = \overline{1, p}\right)$ этой матрицы путем аддитивного агрегирования доминирующих параметрических входов в (3.43) с одновременным обеспечением выполнения условия (2.204) так, что D ищется из условия

$$D = \arg\left\{C^l D_j = 0;\; l = \overline{1, m} \;\&\; p = \min_p \arg\left(\Delta A = \sum_{j=1}^{p} \Delta A_j;\; rang \Delta A_j = 1\right)\right\}. \qquad (3.45)$$

5. Формирование требований к качеству процессов по выходным переменным $y_l(t)\ (l=\overline{1,m})$ в переходном и установившемся режимах при задающем внешнем воздействии $g(t)$ номинальной версии проектируемой системы

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+Gg(t)+D\zeta(t),\quad y(t)=Cx(t) \qquad (3.46)$$

где

$$F=A-BK,\ G=BK_g, \qquad (3.47)$$

выход $y(t)$ инвариантен относительно $\zeta(t)$ так, что выполняются соотношения

$$y(t)=y\{t,g(t),\zeta(t)\neq 0\}=y\{t,g(t),\zeta(t)=0\}. \qquad (3.48)$$

Представление сформулированных требований в виде желаемой структуры мод $\sigma\{F\}=\{\lambda_i;\ i=\overline{1,n}\}$.

6. Проверка условия

$$\dim\zeta(t)=p\leq r=rang B\,. \qquad (3.49)$$

В случае его выполнения переход к п. 7 алгоритма, иначе – к п.11.

7. Конструирование матрицы K отрицательной обратной связи по состоянию ОУ (2.191), (3.43) закона управления (3.14), задаваемого выражением

$$u(t)=K_g g(t)-Kx(t), \qquad (3.50)$$

методами обобщенного модального управления, опирающегося на решение матричного уравнения Сильвестра, так что для K можно записать

$$K=HM^{-1}:\ M=\arg\{M\Lambda-AM=-BH\}, \qquad (3.51)$$

где $(\Lambda,H)=\arg\left\{\Lambda=diag\{\lambda_i;i=\overline{1,n}\}\ \&\ observ(\Lambda,H)\right\}$.

Уравнение Сильвестра в (3.51) в силу специфики задачи синтеза, связанной с обеспечением параметрической инвариантности выходов $y_l(t)\ (l=\overline{1,m})$ относительно параметрических внешних воздействий $\zeta_j(t)\ (j=\overline{1,p})$, которая решается с использованием положений утверждения 2.19 в виде выражения (2.210), приводимого в форме

$$K = \arg\left\{D_j = \xi_j :\ F\xi_j = \lambda_j \xi_j;\ j = \overline{1,p}\ \&\ \sigma\{F\} = \sigma\{\Lambda\}\right\}, \quad (3.52)$$

следует представить в факторизованном по геометрическому и алгебраическому спектрам матрицы F виде

$$\left[D \,|\, \tilde{M}\right]\begin{bmatrix}\Lambda_p & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}\end{bmatrix} - A\left[D \,|\, \tilde{M}\right] = -B\left[H_p \,|\, \tilde{H}\right]. \quad (3.53)$$

Представление уравнения Сильвестра (3.53) в декомпозированном на два уравнения Сильвестра виде

$$D\Lambda_p - AD = -BH_p, \quad (3.54)$$

$$\tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}. \quad (3.55)$$

В матричных уравнениях (3.54), (3.55)

$$\left(\Lambda_p, \tilde{\Lambda}\right):\ \Lambda = diag\left\{\Lambda_p = diag\left(\lambda_i; i = \overline{1,p}\right); \tilde{\Lambda} = diag\left(\lambda_i; i = \overline{p+1,n}\right)\right\}, \quad (3.56)$$

$$\tilde{H} = \arg\left\{observ\left(\tilde{\Lambda}, H\right)\right\}. \quad (3.57)$$

Решение уравнения Сильвестра (3.54) относительно матрицы H_p в форме

$$H_p = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \left(AD - D\Lambda_p\right). \quad (3.58)$$

Решение уравнения Сильвестра (3.55) относительно матрицы $\tilde{M} = \tilde{M}(\tilde{H})$. Конструирование матрицы K обратной связи по состоянию ОУ в силу (3.51), (3.55) и (3.58), определяемой выражением

$$K = \left[(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B})^{-1}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}(\mathrm{AD} - \mathrm{D}\Lambda_{\mathrm{p}}) \,|\, \tilde{\mathrm{H}}\right]\left[D \,|\, \tilde{M}\right]^{-1} \quad (3.59)$$

8. Конструирование матрицы K_g прямой связи по внешнему задающему воздействию $g(t)$ из условия ориентации системы относительно $g(t)$ средствами K_g, удовлетворяющей соотношению

$$K_g = \arg\left\{\Phi(s) = C\left(s\mathrm{I} - F\right)^{-1} BK_g\Big|_{s=0} = \mathrm{I}\right\},$$

что приводит к выражению

$$K_g = -\left(CF^{-1}B\right)^{-1} = -\left\{C\left[D \,|\, \tilde{M}\right]\Lambda^{-1}\left[D \,|\, \tilde{M}\right]^{-1}\right\}^{-1}. \quad (3.60)$$

9. Построение реализационной версии ЗУ (3.50), приводящей к структуре системы с единичной по выходу обратной связи, задаваемой выражением

$$u(t) = K_{\varepsilon}\varepsilon(t) - K_x x(t), \tag{3.61}$$

где $K_{\varepsilon} = K_g$, $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ – ошибка воспроизведения задающего воздействия, матрица K_x модифицированной обратной связи по состоянию ОУ удовлетворяет в силу (3.50), (3.61) соотношению $K = K_{\varepsilon}C + K_x$, позволяющему вычислить матрицу K_x с помощью выражения

$$K_x = K - K_{\varepsilon}C. \tag{3.62}$$

10. Проверка эффективности спроектированного закона неадаптивного управления в формах (3.50), (3.61) на предмет удовлетворения техническим требованиям показателей качества процессов по выходу $y(t)$ и ошибке $\varepsilon(t)$ номинальной версии системы (3.46) (при $\zeta(t) \equiv 0$) в переходном и установившемся режимах средствами среды моделирования Matlab.
Проверка наличия у системы параметрической инвариантности средствами среды моделирования Matlab осуществляется путем придания матрице состояния системы параметрической неопределенности в виде аддитивных матричных компонентов ΔA_j $(j = \overline{1, p})$ и контроля вариаций траекторий системы на ее выходе.
В случае положительного результата проверки переход к п. 16 алгоритма, иначе – к п. 1.
11. Выделение r доминирующих матричных компонентов ΔA_j в представлении (3.41) по степени их влияния на выходы $y_l(t)\,(l = \overline{1, m})$, оцениваемой с помощью норм $\|P_{sj}\|$ $(j = \overline{1, r})$ столбцов матрицы весов (3.44) и формирования редуцированной матрицы D ранга r, столбцы которой согласованы с доминирующими компонентами ΔA_j $(j = \overline{1, r})$ в силу (3.45).
12. Расширение технических требований к проектируемой системе требованием к величине $\delta_F = \dfrac{\|\Delta A\|}{F}$ оценки относительной параметрической неопределенности матрицы состояния

проектируемой системы в форме выполнения условия $\delta_F \le \delta_{FR}$, где задаваемая величина δ_{FR} допускает использование аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка. Отображение заданной величины на требование к норме $\|\Lambda\|$ диагональной матрицы $\left\{\Lambda = diag\left\{\lambda_i;\ i=\overline{1,n}\right\}\right\}$ состояния модальной модели, являющейся носителем желаемых мод $\sigma\{F\} = \left\{\lambda_i;\ i=\overline{1,n}\right\}$ проектируемой системы, в виде условия

$$\|\Lambda\| \ge \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{FR}} C\{M\}. \qquad (3.63)$$

В итоге – выбор матрицы Λ из условия

$$\Lambda = \arg\left\{\sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F\} = \{\lambda_i,\ i=\overline{1,n}\}\ \&\ \|\Lambda\| \ge \frac{\|\Delta A\|}{\delta_{FR}} C\{M\}\right\} \qquad (3.64)$$

13. Допущение в (3.64) $C\{M\}=1$ и конструирование матрицы K закона управления (3.50) с помощью процедуры, описанной в п. 7 алгоритма, положив в нем $p=r$, а также дополнение процедуры синтеза минимизацией числа обусловленности матрицы M, воспользовавшись свободой назначения матрицы $\tilde{H}$ так, что последняя выбирается из условия

$$\tilde{H} = \arg\left\{ C\left\{ \left[D \mid \tilde{M}(\tilde{H})\right] \right\} = \min_{\tilde{H}} \&\ observ\left(\tilde{\Lambda}, \tilde{H}\right)\right\}. \qquad (3.65)$$

14. Выполнение п.п. 8 и 9 алгоритма.
15. Проверка эффективности спроектированного закона неадаптивного управления в формах (3.50), (3.61) по схеме п.10 алгоритма, дополнив его оценкой вариаций показателей качества методами теории чувствительности для вариаций системных параметров ΔA_j $(j=\overline{r+1,p})$, относительно которых параметрическая инвариантность выходов не обеспечена.
    В случае положительного результата проверки переход к п. 16 алгоритма, иначе – к п. 12.
16. Техническая реализация алгоритма. ■

Прежде, чем решать задачу синтеза параметрически инвариантных систем в классе алгоритмов обобщенного изодромного управления для случая конечномерного задающего воздействия, напомним его базовые концепции на примере номинальной реализации ОУ (2.191), (3.13), (3.43), записанной в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t). \tag{3.66}$$

Ставится задача синтеза закона управления, который обеспечивает слежение выхода $y(t)$ за конечномерным входным задающим воздействием $g(t)$, который генерируется автономной системой

$$\dot{z}(t) = Ez(t); \; z(0); \; g(t) = Pz(t) \tag{3.67}$$

с нулевой установившейся ошибкой $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$. В (3.67) $E \in R^{k \times k}, P \in R^{m \times k}$ – соответственно матрица состояния и выхода источника внешнего воздействия (ИВВ).

Будем полагать, что объект управления сконструирован так, что спектры $\sigma\{A\}$ и $\sigma\{E\}$ собственных значений матриц состояния ОУ и ИВВ удовлетворяют условию включения

$$\sigma\{E\} \subset \sigma\{A\}. \tag{3.68}$$

Введем в рассмотрение n-мерный вектор $\eta(t)$ ошибки слежения по состоянию, задав его соотношением

$$\eta(t) = Tz(t) - x(t), \tag{3.69}$$

где $T - (n \times k)$-матрица в общем случае особого преобразования. Заметим, что вектор $\eta(t)$, представляющий собой линейную комбинацию векторов состояния, обладает свойствами состояния. Покажем, что поставленная задача слежения за конечномерным задающим воздействием может быть сведена с использованием переменной $\eta(t)$ (3.69) к задаче управления по состоянию (регулятора), одной из версий которого является модальное управление. Для этих целей сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3.8. Если матрица T в (3.69) удовлетворяет матричным соотношениям

$$TE - AT = 0, \; P - CT = 0, \tag{3.70}$$

то оказывается справедливой модальное представление задачи по векторам $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$, записываемое в форме

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - Bu(t); \; \eta(0) = Tz(0) - x(0); \; \varepsilon(t) = C\eta(t). \quad \square \tag{3.71}$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании соотношения (3.69) и подстановке в полученное выражение (3.66) и (3.67), а также на представлении ошибки слежения $\varepsilon(t)$ с использованием (3.69) в форме

$$\varepsilon(t) = C\eta(t) + (P - CT)z(t).$$

Использование матричных соотношений (3.70) приводит к (3.71), при этом гарантия нетривиального разрешения однородного уравнения Сильвестра в (3.70) заложена в (3.68).

Введем в рассмотрение закон управления в виде связи с матрицей K по вектору $\eta(t)$

$$u(t) = K\eta(t). \tag{3.72}$$

Тогда агрегирование (3.71) и (3.72) дает решение

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t);\;\; \eta(0) = Tz(0) - x(0);\;\; \varepsilon(t) = C\eta(t), \tag{3.73}$$

где $F = A - BK$. Таким образом, задача обеспечения нулевой установившейся ошибки

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \lim_{t\to\infty}C\eta(t) = \lim_{t\to\infty}Ce^{Ft}\eta(0) = 0 \tag{3.74}$$

решается структурой собственных значений $\sigma\{F\} = \{\lambda_i,\ i = \overline{1,n}\}$ матрицы состояния автономной системы (3.73). Эта структура определяет темп и характер сходимости (3.74) ошибки слежения к нулю, при этом матрица K может быть сконструирована методами модального управления.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исходный ОУ (3.66) обладает параметрической неопределенностью, представленной аддитивным матричным компонентом ΔA в матрице состояния. Нетрудно видеть, что он будет присутствовать в модальном представлении (3.71) так, что последнее примет вид

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) + \Delta A\eta(t) - Bu(t);\;\; \eta(0);\;\; \varepsilon(t) = C\eta(t). \tag{3.75}$$

Воспользуемся представлением ΔA в форме (3.41) с последующим представлением ΔA_j в форме (3.42) и введением p-мерного вектора $\zeta(t) = col\left\{\zeta_j(t) = h_j^T\eta(t);\ j = \overline{1,p}\right\}$ внешнего "параметрического" воздействия так, что (3.75) имеет вид

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + D\zeta(t) - Bu(t);\;\; \eta(0);\;\; \varepsilon(t) = C\eta(t). \tag{3.76}$$

Введение в (3.76) закона управления (3.72) дает представление процессов по векторам $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$ ошибок, получающее вид

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + D\zeta(t);\ \ \eta(0);\ \ \varepsilon(t) = C\eta(t). \qquad (3.77)$$

Таким образом, задача обеспечения нулевой установившейся ошибки $\varepsilon(t)$ в форме (3.74) будет решена, если система (3.77) будет параметрически инвариантной, т.е. будут выполняться условия

$$\varepsilon(t) = \varepsilon\{t,\ \eta(0),\ \ \zeta(t) \neq 0\} = \varepsilon\{t,\ \eta(0),\ \ \zeta(t) \equiv 0\}. \qquad (3.78)$$

Нетрудно видеть, что задача с точностью до замены переменных свелась к синтезу закона управления (3.50) при $K_g = 0$, который доставляет системе качество переходных процессов и параметрическую инвариантность методами обобщенного модального управления.

Для случая синтеза закона управления в форме (3.72) методами обобщенного модального управления, доставляющего решаемой задаче слежения за конечномерным внешним задающим воздействием с нулевой установившейся ошибкой средствами обобщенного изодромного управления в условиях параметрической неопределенности матрицы состояния ОУ параметрическую инвариантность ошибки с одновременным качеством сходимости этой ошибки к нулю, может быть предложен следующий алгоритм.

Алгоритм 3.4.

1. Построение (E, P) – минимального векторно-матричного представления ИВВ (3.67), генерирующего на своем выходе внешнее задающее воздействие $g(t)$.
2. Выполнение п. 1 алгоритма 3.3, дополнив его контролем и обеспечением условия включения (3.68).
3. Решение матричных уравнений (3.70).
4. Конструирование матрицы K закона управления (3.72) в полном соответствии с конструированием матрицы K закона (3.50) в силу алгоритма 3.3.

В заключение заметим, что к виду (3.77) сводится задача слежения за конечномерным задающим воздействием, если имеется параметрическая неопределенность задания модели ИВВ (3.67), представимая аддитивным компонентом ΔE его матрицы состояния. В этом случае параметрически возмущенная модель по векторам $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$, в отличие от (3.75), примет вид

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - (T\Delta E)z(t) - Bu(t);\ \ \eta(0);\ \ \varepsilon(t) = C\eta(t),$$

что сводится к (3.77).

Пример 3.2.

В качестве примера рассматривается ОУ примера 2.11. Выход этого объекта $y(t)$ должен с нулевой установившейся ошибкой воспроизводить внешнее задающее воздействие полиномиального типа $g(t)=1+t$.

Следуя алгоритму 3.4, осуществим следующие действия.

1. Построение минимального (E,P) представления ИВВ (3.67), которым оказывается цепочка из двух интеграторов так, что

$$E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix};\ P=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};\ \sigma\{E\}=\{\lambda_{E1,2}=0\}.$$

2. Построение $\left(A+\Delta A,B,C\right)$ представления ОУ, которое дает

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}:\ \sigma\{A\}=\left\{\lambda_{A1,2}=0;\ \lambda_{A3}=-1\right\};$$

$$\Delta A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 4 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

   Нетрудно видеть, что условие включения (3.68) $\sigma\{E\}\subset\sigma\{A\}$ выполняется.

3. Декомпозиция вариации ΔA в форме $\Delta A=dh$ с целью конструирования матрицы $D=d$, которая дает

$$D^T=d^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\end{bmatrix},\ h=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

4. Проверка условия $CD=0$, которая показывает его выполнимость:

$$CD=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\end{bmatrix}^T=0.$$

5. Решение матричных уравнений (3.70) $TE-AT=0,\ P-CT=0$, в результате которого получим матрицу T

$$T=\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ -0.75 & 0.5 & 0\end{bmatrix}^T.$$

6. Задание матрицы Γ модальной модели для синтеза обобщенного модального управления в диагональной форме,

$$\Gamma = \Lambda = diag\left\{\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = -5\right\}.$$

7. $\sigma\{\Lambda\}$ не пересекается с $\sigma\{A\}$, поэтому уравнение Сильвестра $M\Lambda - AM = -BH$, где $M = \left[D \mid \tilde{M}\right]$; $H = \left[H_p \mid \tilde{H}\right]$, представим в декомпозированном виде

$$D\Lambda_p - AD = -BH_p,\ \tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}.$$

8. Решение уравнения Сильвестра $D\Lambda_p - AD = -BH_p$ с матрицей $\Lambda_p = [-2]$ относительно матрицы H_p, что дает

$$H_p = \left(B^T B\right) B^T \left(AD - D\Lambda_p\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = 4$$

.

9. Решение матричного уравнения $\tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}$ с матрицей $\Lambda = diag\left\{\lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = -5\right\}$ и матрицей $\tilde{H} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$, образующей с $\tilde{\Lambda}$ наблюдаемую пару $\left(\tilde{\Lambda}, \tilde{H}\right)$, которое дает

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1/9 & -1/3 & 1 \\ 1/25 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

10. В агрегированном виде матрицы $M = \left[D \mid \tilde{M}\right]$ и $H = \left[H_p \mid \tilde{H}\right]$ имеют представления

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 1/25 \\ -2 & -1/3 & -1/5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad H = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Вычисление матрицы K в силу $K = HM^{-1}$, где

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8/3 & 1/3 \\ -45 & -63/2 & -9/2 \\ 25 & 125/6 & 25/6 \end{bmatrix},$$

дает $K = \begin{bmatrix} 30 & 31 & 9 \end{bmatrix}$.

12. Конструирование матрицы $F = A - BK$, которое приводит к результату

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix},$$

$$\det\left(\lambda \mathrm{I} - F\right) = \lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 30 = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+5).$$

13. Построение модели ошибки в форме (3.77), которое приводит к представлению

$$\dot{\eta}(t) = F\eta(t) + D\zeta(t); \;\; \varepsilon(t) = C\eta(t),$$

где $\eta(t) = Tz(t) - x(t) = \begin{bmatrix} 0.5z_1 - 0.75z_2 - x_1 & 0.5z_2 - x_2 & -x_3 \end{bmatrix}^T$.

14. Проверка эффекта достижения параметрической инвариантности системы, т.е. инвариантности $\varepsilon(t)$ относительно параметрического внешнего воздействия $\zeta(t)$ путем вычисления передаточной функции

$$\Phi_{\varepsilon\zeta}(s) \overset{\Delta}{=} \frac{\varepsilon(s)}{\zeta(s)} = C\left(s\mathrm{I} - F\right)^{-1} D = \frac{0}{(s+2)(s+3)(s+5)},$$

которая подтверждает выполнение равенства $\Phi_{\varepsilon\zeta}(s) = 0$. ■

3.4. Алгебраические проблемы параметрической инвариантности: аналитические возможности аппарата траекторной чувствительности

Рассмотрим непрерывный ОУ с неопределенными параметрами. Предположим, что существует такой базис его модельного описания, в котором неопределенность исходных физических параметров ОУ представляется неопределенностью системных параметров только матрицы состояния. В этом случае векторно-матричное описание ОУ принимает вид

$$\dot{x}(t,q) = A(q)x(t,q) + Bu(t); \;\; x(t)_{|t=0} = x(0), \;\; y(t,q) = Cx(t,q), \;\; t \geq 0 \qquad (3.79)$$

в котором $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$ – векторы состояния, управления и выхода, $A(q) \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $C \in R^{m\times n}$ – матрицы состояния, управления и выхода, $q \in R^p$ – вектор параметров вида $q = q_0 + \Delta q$, где Δq – вариация вектора q относительно его номинальной реализации q_0; элементы матрицы $A(q)$ гладко зависят от вектора параметров q. Назовем ОУ (3.79) при $q = q_0$ номинальным и запишем его представление в форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); x(t)|_{t=0} = x(0); A = A(q_0); \; y(t) = Cx(t). \qquad (3.80)$$

Функционирование ОУ (3.79) в составе системы состоит в воспроизведении на его выходе $y(t)$ экзогенного задающего воздействия $g(t)$ с требуемыми показателями качества. Закон управления построим применительно к номинальной версии ОУ (3.80) в форме прямой связи (ПС) по задающему воздействию с матрицей K_g и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния с матрицей K. Предположим также, что переменные состояния и задающее воздействие доступны измерению. Тогда ЗУ принимает вид

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \qquad (3.81)$$

и номинальная версия системы, образованной объединением номинального ОУ (1.2) и ЗУ (1.3), записывается как

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), \; x(t)|_{t=0} = x(0), \; y(t) = Cx(t), \qquad (3.82)$$

где $F = A - BK$, $G = BK_g$.

Требования к показателям качества системы (3.82) в переходном и установившемся режимах отражены на структуру мод $\sigma\{F\} = \{\lambda_i : det(\lambda I - F) = 0; i = \overline{1,n}\}$ матрицы F состояния системы и на матрицу ПС K_g.

Носителем желаемой структуры мод $\sigma\{F\}$ назначим матрицу Γ состояния модальной модели (ММ), задаваемой наблюдаемой парой матриц (Γ, L), где $\sigma\{\Gamma\} = \sigma\{F\}$, а матрица L выхода ММ имеет такие же размеры, что и B^T. Модальная форма представления требований к динамическим показателям системы (3.82) в переходном и установившемся режимах позволяет вычислить матрицу K ЗУ (3.81) методом модального управления, алгоритмически основанном на использовании решения матричного уравнения Сильвестра так, что

$$K = arg\{KM = L \; \& \; M\Gamma - AM = -BL\} = LM^{-1}, \qquad (3.83)$$

где матрица M – матрица преобразования подобия матриц Γ и F.

Простейшим требованием к матрице K_g, которое удовлетворяет очень широкому кругу практических задач, является требование обеспечения равенства выхода и входа в неподвижном состоянии, что позволяет формировать матрицу K_g в силу условия

$$K_g = arg\left\{\Phi(s) = C(sI - F)^{-1} BK_{g|s=0} = -CF^{-1}BK_g = I\right\} = \left(-CF^{-1}B\right)^{-1}, \tag{3.84}$$

где обратимость матрицы F гарантирована ее структурой мод, расположенных в левой полуплоскости.

Поставим задачу обеспечения параметрической инвариантности выхода системы к параметрической неопределенности объекта управления (3.79). Указанная задача требует рассмотрения системы, образованной объединением ОУ(3.79) и ЗУ (3.81)

$$\dot{x}(t,q) = F(q)x(t,q) + Gg(t),\ x(t)_{|t=0} = x(0),\ y(t,q) = Cx(t,q), \tag{3.85}$$

где $F(q) = A(q) - BK$.

Очевидно, исходная постановка задачи обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) к параметрической неопределенности ОУ (3.79) принимает вид

$$y(t, g(t), q_0 + \Delta q) = y(t, g(t), q_0),\ \forall \Delta q \neq 0,\ \forall t \geq 0. \tag{3.86}$$

Для решения задачи обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) будем использовать аналитические возможности аппарата траекторной чувствительности. Запишем параметрически возмущенное движение системы по выходу в форме

$$\begin{gathered} y(t, g(t), q_0 + \Delta q) = y(t, g(t), q_0) + \Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) = \\ = y(t, g(t)) + \Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q),\ \forall \Delta q \neq 0,\ \forall t \geq 0. \end{gathered} \tag{3.87}$$

Цепочка равенств (3.87) позволяет сформулировать задачу обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) к параметрической неопределенности Δq в форме

$$\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) \equiv 0 \text{ при } \forall t \geq 0, \tag{3.88}$$

где $g(t)$ – измеримые функции.

Если вариация Δq вектора параметров такова, что можно использовать функции чувствительности первого порядка, то отклонение $\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q)$ может быть выражено через функции траекторной чувствительности $\eta_j(t, g(t), q_0)$ первого порядка выхода системы (3.85 1.7) к вариации $j-$го компонента $q_j \left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q в виде

$$\Delta y(t,g(t),q_0,\Delta q)\approx\sum_{j=1}^{p}\eta_j(t,g(t),q_0)\Delta q_j, \qquad (3.89)$$

где $\eta_j(t,g(t),q_0)=\frac{\partial y(t,g(t),q)}{\partial q_j}|_{q=q_0}$; Δq_j- вариация $j-$го компонента $q_j \left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j}.

Теперь с помощью (3.89) сформулируем условие, выполнение которого необходимо для обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) к параметрической неопределенности Δq в первом приближении:

$$\eta_j(t,g(t),q_0)\equiv 0 \text{ для } \forall t, \forall g(t)\ \forall j=\overline{1,p}. \qquad (3.90)$$

Приведем определения правых и левых собственных векторов, которые помогут понять дальнейших результаты.

Определение 3.5. Ненулевой вектор ξ называется правым собственным вектором квадратной $(n\times n)-$матрицы F, если выполняется векторно-матричное соотношение

$$F\xi=\lambda\xi;\quad \lambda\in\sigma\{F\}=\left\{\lambda_i:\det(\lambda I-F)=0; i=\overline{1,n}\right\}. \qquad (3.91)$$

Определение 3.6. Ненулевая вектор-строка ς^T называется левым собственным вектором квадратной $(n\times n)-$матрицы F, если выполняется векторно-матричное соотношение

$$\varsigma^T F=\lambda\varsigma^T;\ \lambda\in\sigma\{F\}=\left\{\lambda_i:\det(\lambda I-F)=0; i=\overline{1,n}\right\}. \qquad (3.92)$$

Утверждение 3.9. Правые собственные векторы матрицы простой структуры F состояния номинальной версии (3.82) системы (3.85) в силу уравнения

$$M\Lambda=FM \qquad (3.93)$$

являются столбцами $M_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ матрицы M приведения подобия матрицы F к диагональному виду $\Lambda=diag\left\{\lambda_i:det(\lambda I-F)=0; i=\overline{1,n}\right\}$.

Утверждение 3.10. Левые собственные векторы матрицы F являются строками $\left(M^{-1}\right)^k(k=1,n)$ матрицы M^{-1} – обратной матрице M преобразования подобия (3.93).

Утверждение 3.11. Левый собственный вектор-строка ς^T матрицы F совпадает с транспонированным θ^T правым собственным вектором θ матрицы F^T, соответствующим тому же собственному значению λ так, что оказывается справедливым соотношение

$$\theta^T = \varsigma^T . \qquad (3.94)$$

С использованием положений утверждения 3.11 можно обеспечить желаемые левые собственные векторы матрицы F, процедура формирования которых оформлена в виде алгоритма, приведенного в Приложении 2.

В основу решения проблемы обеспечения параметрической инвариантности выхода системы (3.85) относительно параметрической неопределенности исходного ОУ (3.79) в первом приближении положим условие (3.90).

Введем в рассмотрение агрегированные системы, образованные номинальной версией (3.82) синтезируемой системы и моделями траекторной чувствительности к вариации $j-$го компонента $q_j \left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j}, имеющими векторно-матричное описание

$$\dot{\sigma}_j(t) = F\sigma_j(t) + F_{q_j}x(t),\ \sigma_j(0)=0,\ \eta_j(t) = C\sigma_j(t);\ j=\overline{1,p}; \qquad (3.95)$$

в котором $F_{q_j} = \dfrac{\partial F(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0}$; $\sigma_j(t) = \dfrac{\partial x(t,q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0}$ $-j$-я вектор-функция траекторной чувствительности вектора состояния $x(t)$. Агрегированные системы с вектором состояния $\tilde{x}_j(t) = col\{x(t), \sigma_j(t)\}$ и выходом $\eta_j(t)$ имеют описание

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{F}_j\tilde{x}(t) + \tilde{G}g(t), \tilde{x}(t)|_{t=0} = \tilde{x}(0), \eta_j(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), j=\overline{1,p}; \qquad (3.96)$$

где матричные компоненты представимы как

$$\tilde{F}_j = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_{q_j} & F \end{bmatrix}, \tilde{G} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}. \qquad (3.97)$$

Сформируем $\tilde{\Phi}_j(s)$ – передаточную матрицу j-й агрегированной системы, связывающую переменную $\eta_j(t)$ и экзогенное задающее воздействие $g(t)$ с учетом (3.97)

$$\tilde{\Phi}_j(s) = \tilde{C}\left(sI - \tilde{F}_j\right)^{-1}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-F & 0 \\ -F_{q_j} & sI-F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.98)$$

В развернутом виде передаточная матрица $\tilde{\Phi}_j(s)$ (3.98 4) получает представление

$$\tilde{\Phi}_j(s)=\begin{bmatrix}0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(sI-F)^{-1} & 0\\ (sI-F)^{-1}F_{q_j}(sI-F)^{-1} & (sI-F)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}G\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$C(sI-F)^{-1}F_{q_j}(sI-F)^{-1}G. \tag{3.99}$$

Произведем параметризацию матрицы состояния $A(q)$ ОУ (1.1) безразмерными параметрами $q_j\ \left(j=\overline{1,p}\right)$, где p в зависимости от базиса представления матрицы $A(q)$ и поставленной задачи исследования удовлетворяет неравенству $1\le p\le n^2$. Очевидно, если ставится задача анализа инвариантности выхода относительно неопределенности задания всех ненулевых элементов матрицы $A(q)$ одновременно, то выполняется условие $p=1$.если матрица $A(q)$ имеет ненулевыми все n^2 элементов и ставится задача анализа инвариантности выхода относительно неопределенности отдельно каждого из ненулевых элементов матрицы $A(q)$, то выполняется условие $p=n^2$. Если матрица $A(q)$ задана во фробениусовом базисе, то в зависимости от постановки задачи выполняется неравенство $1\le p\le n$.

Будем рассматривать в дальнейшем случай, когда каждый элемент матрицы $A_{l\nu}(q_j;j=\overline{1,p})$, $l,\nu=\overline{1,n}$, а следовательно, и матрицы состояния $F_{l\nu}(q_j)$ системы (1.7), зависит от своего безразмерного параметра q_j. При параметризации такого вида матрица чувствительности F_{q_j} обладает рангом, равным единице так, что становится справедливой запись

$$F_{q_j}=D_\nu h^l, \tag{3.100}$$

Где D_ν, h^l – соответственно ν-й столбец и l-я строка матрицы F_{q_j}, на пересечении которых размещается производная $\frac{\partial F_{l,\nu}(q)}{\partial q_j}\Big|_{q=q_0}$.

Представления (3.99), (3.100) позволяют записать выражение для передаточной матрицы $\tilde{\Phi}_j(s)$ в форме

$$\tilde{\Phi}_j(s)=C(sI-F)^{-1}D_\nu h^l(sI-F)^{-1}G=C(sI-F)^{-1}D_\nu h^l(sI-F)^{-1}BK_g.$$

Следует напомнить, что передаточная матрица $\tilde{\Phi}_j(s)$ связывает переменную $\eta_j(t)$ и экзогенное задающее воздействие $g(t)$ как

$$\eta_j(s)=\tilde{\Phi}_j(s)g(s)=C(sI-F)^{-1}D_\nu h^l(sI-F)^{-1}BK_g g(s), \tag{3.101}$$

где $\eta_j(s)$, $g(s)$ – преобразования лапласа соответственно функции $\eta_j(t)$ траекторной чувствительности выхода системы к вариации $j-$го компонента $q_j\left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} и экзогенного задающего воздействия $g(t)$.

Соотношение (3.101) позволяет сформулировать еще одну постановку задачи параметрической инвариантности выхода $y(t)$ к вариации $j-$го компонента $q_j\left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} в первом приближении в форме выполнения равенства

$$\widetilde{\Phi}_j(s)=C(sI-F)^{-1}D_{\nu}h^l(sI-F)^{-1}BK_g\equiv 0. \tag{3.102}$$

Нетрудно видеть, что для выполнения соотношения (3.102) достаточно выполнения одного из равенств

$$C(sI-F)^{-1}D_{\nu}\equiv 0, \tag{3.103}$$

$$h^l(sI-F)^{-1}BK_g\equiv 0. \tag{3.104}$$

Оценим, какими алгебраическими свойствами должны обладать матричные компоненты равенств (3.103) и (3.104) для того, чтобы они выполнялись, а система (3.85) обладала параметрической инвариантностью выхода $y(t)$ к вариации $j-$го компонента $q_j\left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q. Для этой цели сформулируем утверждения.

Утверждение 3.12. Для того, чтобы система (3.85) обладала инвариантностью выхода $y(t)$ относительно вариации $j-$го компонента q_j $\left(j=\overline{1,p}\right)$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} достаточно, чтобы:

1) столбцы D_{ν}, соответствующие компоненту q_j, были бы правыми собственными векторами матрицы F;
2) столбцы D_{ν} принадлежали ядру матрицы C, т.е. выполнялось соотношение

$$CD_{\nu}=0. \tag{3.105}$$

Доказательство. Если D_{ν} является правым собственным вектором матрицы F, соответствующим ее собственному значению λ_{ν}, то становится справедливой запись

$$FD_\nu = \lambda_\nu D_\nu . \quad (3.106)$$

Использование свойства матричной функции $f((*,s))$ от матрицы (*) сохранять спектр собственных векторов исходной матрицы (*) и иметь в качестве элементов алгебраического спектра собственных значений компоненты $f(\lambda_\nu, s)$ делает справедливым соотношение

$$f(F,s)D_\nu = f(\lambda_\nu, s)D_\nu . \quad (3.107)$$

В рассматриваемом случае матричной функцией $f(F,s)$ от матрицы F является резольвента $f(F,s) = (sI - F)^{-1}$, применение которой к соотношениям (3.106), (3.107) позволяет для выражения (3.103) записать цепочку равенств

$$Cf(F,s)D_\nu = C(sI - F)^{-1}D_\nu = C(s - \lambda_\nu)^{-1}D_\nu = (s - \lambda_\nu)^{-1}CD_\nu . \quad (3.108)$$

Подстановка в (3.108) условия (3.105) утверждения приводит к выполнению равенства (3.103).

Утверждение 3.13. Для того, чтобы система (3.85) обладала инвариантностью выхода $y(t)$ относительно вариации $j-$го компонента $q_j \left(j = \overline{1,p}\right)$ вектора параметров q относительно его номинального значения q_{0j} путем выполнения условия (3.104) достаточно, чтобы:

1) строки h^l были бы левыми собственными векторами матрицы F;

2) строки h^l принадлежали левому ядру матрицы B, т.е. выполнялось соотношение

$$h^l B = 0 . \quad (3.109)$$

Доказательство утверждения 3.13 аналогично доказательству утверждения 3.12.

Утверждения 3.10–3.13 содержат алгоритмическую основу синтеза параметрически инвариантных по выходу систем вида (3.85), полученных агрегированием ОУ (3.79) с АФСУ вида (3.81), матричные компоненты которого вычисляются с помощью матричных соотношений (3.83) и (3.84) с той лишь разницей, что в матричном уравнении Сильвестра в (3.83) матрицу состояния модальной модели следует задать в диагональной форме, положив $\Gamma = \Lambda$, а матрицу M задать в форме $M = row\{D, \overline{M}\}$, где $D = row\{D_\nu; \nu = \overline{1,n}\}$, для случая (3.103) или $M^{-1} = col\{H, T\}$, где $H = col\{h^l; l = \overline{1,n}\}$, для случая (3.104).

Пример 3.3. Рассмотрим объект управления вида (3.79) с матрицами

$A(q)=\begin{bmatrix} q & q+1 & 0 \\ -2q & -2q & 1 \\ 4q & 4q & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, в которых матрица $A(q)$ отвечает случаю $p=1$; параметр q имеет вид $q=q_0+\Delta q$, где $q_0=0$; Δq – вариация параметра q относительно его номинального значения q_0; $A=A(q)\big|_{q=q_0=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Пара матриц (A,B) – управляемая.

Для этого ОУ сконструируем замкнутую систему, обладающую параметрической инвариантностью выхода. Заметим, что матрица A объекта оказывается заданной во фробениусовой форме, а матрица управления B такова, что матрица состояния $F=A\text{-}BK$ проектируемой системы сохраняет фробениусову форму. Известно, что собственные вектора матрицы, представленной во фробениусовой форме, строятся по схеме Вандермонда, в соответствии с которой правый собственный вектор ξ_{i} может иметь вид $\xi_{\mathrm{i}}=col\left\{\lambda_i^k;k=\overline{0,n-1}\right\}$.

Сформируем матрицу–столбец D. Для этого вычислим матрицу

$$F_{q_j}=\frac{\partial F(q)}{\partial q_j}\big|_{q=q_0} \qquad (j=1):$$

$$F_q=\frac{\partial F(q)}{\partial q}\big|_{q=q_0}=\frac{\partial(A(q)-BK)}{\partial q}\big|_{q=q_0}=\frac{\partial A(q)}{\partial q}\big|_{q=q_0};$$

$$F_q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ откуда } D=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что столбец D построен по схеме Вандермонда для $\lambda_{\mathrm{D}}=-2$, поэтому для того, чтобы столбец D был бы собственным вектором матрицы F, в спектр ее собственных значений должно быть включено $\lambda_{\mathrm{D}}=-2$. В соответствии со сказанным зададим спектр мод матрицы состояния F проектируемой системы как $\sigma\{F\}=\{\lambda_1=-2;\lambda_2=-5;\lambda_3=-7\}$. В рассматриваемом примере ограничимся равенством (3.103), т.е. утверждениями 3.10 и 3.12.

Обеспечим выполнение первого условия утверждения 3.12. Для этого воспользуемся утверждением 1 и преобразуем уравнения (3.83) с учетом представления матриц M, L и Λ как $M = row\{D, \overline{M}\}$, $L = row\{L_D, \overline{L}\}$,

$$\Lambda = \Gamma = diag\{\Lambda_D, \overline{\Lambda}\} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_D = [-2], \quad \overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $D\Lambda_D - AD = -BL_D$ решим при заданной матрице $D = [1 \quad -2 \quad 4]^T$, в результате чего получим $L_D = 4$. Уравнение $\overline{M}\,\overline{\Lambda} - A\overline{M} = -B\overline{L}$ решим относительно $\overline{M}$, задавая $\overline{L} = [1 \quad 1]$, тогда $\overline{M} = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 1/294 \\ -1/20 & -1/42 \\ 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$. Матрицы M и L исходного уравнения Сильвестра (3.83) принимают вид $M = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}01 & 1/294 \\ -2 & -1/20 & -1/42 \\ 4 & 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$ и $L = [4 \quad 1 \quad 1]$. Рассчитаем матрицу K обратной связи по формуле $K = LM^{-1}$ и получим $K = [70 \quad 59 \quad 13]$. В соответствии с (3.84) матрица $K_g = 35$. Матрица состояния F номинальной версии спроектированной системы принимает вид $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -70 & -59 & -14 \end{bmatrix}$; матрица $F(q) = \begin{bmatrix} q & q+1 & 0 \\ -2q & -2q & 1 \\ -70+4q & -59+4q & -14 \end{bmatrix}$. Проверим теперь, является ли D собственным вектором F, воспользовавшись (3.106): $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -70 & -59 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Т. о., D является собственным вектором матрицы F, соответствующим значению $\lambda_1 = -2$.

Проверим выполнение соотношения (3.105): произведение матриц $C = [2 \quad 3 \quad 1]$ и $D = [1 \quad -2 \quad 4]^T$ оказывается нулевым.

Следовательно, утверждения 1 и 4 выполняются, и спроектированная система должна обладать параметрической инвариантностью выхода, что означает равенство нулю функции траекторной чувствительности $\eta(t)$ по выходу $y(t)$. Дополним модель номинальной версии системы моделью траекторной чувствительности к вариации параметра q и произведем моделирование полученной агрегированной системы.

Результаты моделирования иллюстрируют равенство нулю функции траекторной чувствительности по выходу при единичном ступенчатом (рис. 3.1) и гармоническом экзогенном задающем воздействии $g(t)$ (рис. 3.2).

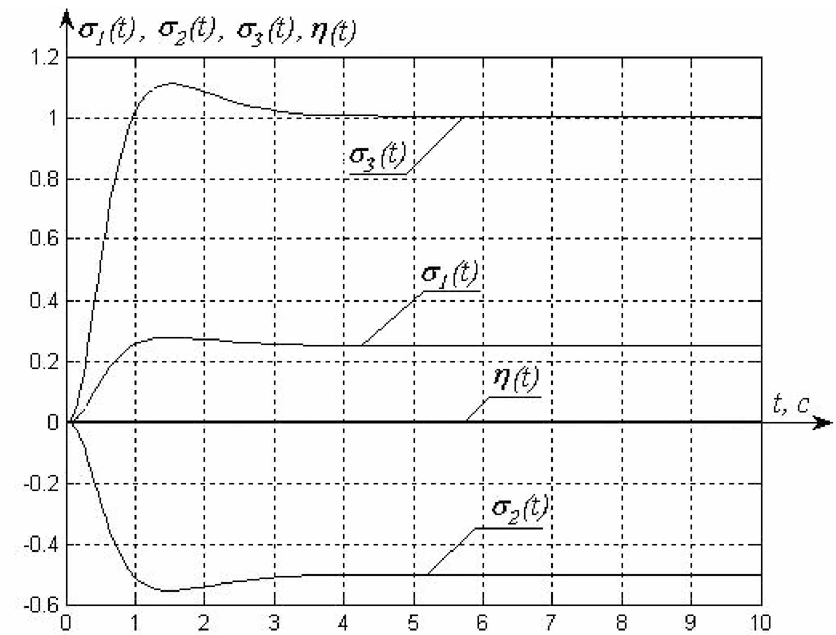

Рис. 3.1 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при $g(t)=1$ для параметрически инвариантной системы

Рассмотрим теперь контрпример. Сравним полученную систему с системой, матрица состояния которой обладает спектром собственных значений $\sigma\{F\}=\{\lambda_1=-3;\lambda_2=-5;\lambda_3=-7\}$, при этом утверждения 3.10 и 3.12 не выполняются. В этом случае матрицы F, K и K_g принимают вид $F=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -105 & -71 & -15 \end{bmatrix}$, $K=[105 \quad 71 \quad 14]$, $K_g=52{,}632$. Результаты моделирования, представленные на рис.3.3, показывают, что выход модели траекторной чувствительности не равен нулю, то есть эта система не обладает параметрической инвариантностью выхода относительно неопределенности параметров ее матрицы состояния и вариация выхода примет вид $\Delta y(t, g(t), q_0, \Delta q) = \eta(t, g(t), q_0)\,\Delta q\big|_{\Delta q \neq 0} \neq 0.$

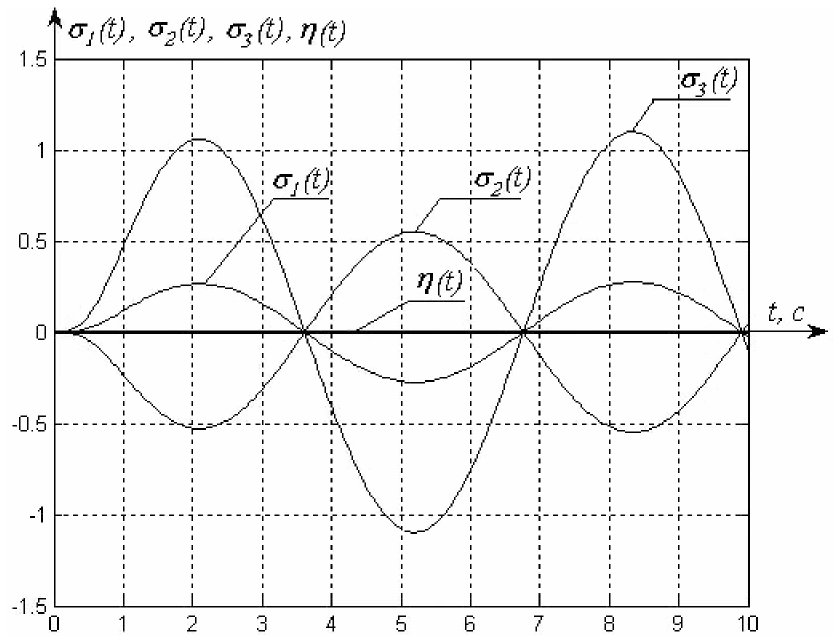

Рис. 3.2 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при $g(t) = \sin t$ для параметрически инвариантной системы

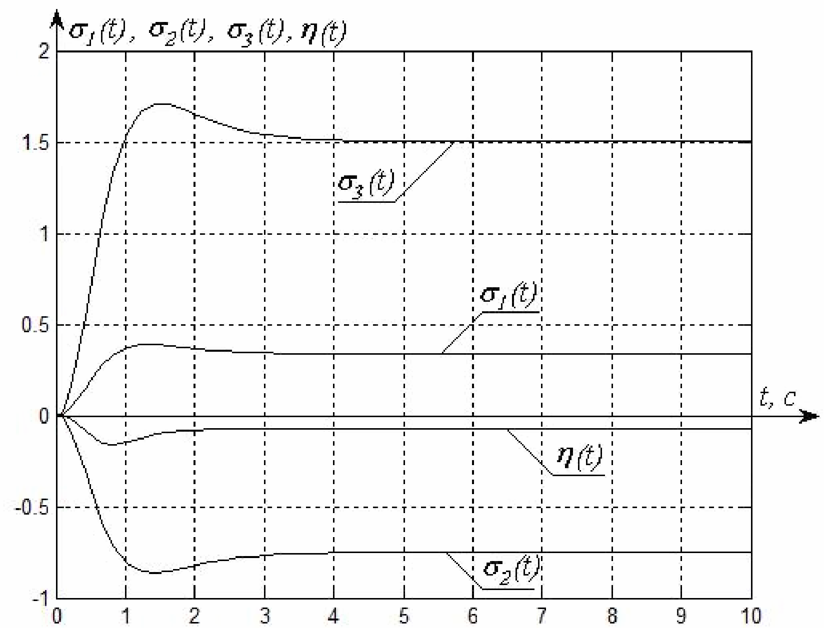

Рис.3.3 Функции траекторной чувствительности по состоянию и выходу при $g(t) = 1$ для параметрически неинвариантной системы

Примечание. Для обеспечения желаемого левого собственного вектора-строки ς_R^T матрицы состояния системы F, соответствующего собственному значению λ_ς, можно предложить следующий алгоритм. Предполагается, что заданы матрицы $\Lambda = diag\{\lambda_i; i = \overline{1, n-1}; \lambda_n = \lambda_\varsigma\}$ и L, желаемый левый собственный вектор ς_R^T, обладающий единичной нормой и соответствующий собственному значению λ_ς, требуемое значение $\Delta_{\varsigma R}$ невязки $\Delta_\varsigma = \left\|\varsigma_R^T - \theta_\varsigma^T\right\|$ левых векторов матрицы F, пара (Λ, L) наблюдаема, размерность L равна размерности B^T.

Алгоритм 3.5.

Шаг 1. Вычислить матрицу $M = \arg\{M\Lambda - AM = -BL \,\&\, \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}$.

Шаг 2. Вычислить матрицу состояния системы $F = M\Lambda M^{-1}$.

Шаг 3. Вычислить и произвести нормирование правого собственного вектора θ_ς матрицы F^T, соответствующего собственному значению λ_ς, обеспечив тем самым ему единичную норму $\|\theta_\varsigma\| = 1$.

Шаг 4. Вычислить функцию $\Delta_\varsigma = \left\|\varsigma_R^T - \theta_\varsigma^T\right\|$ невязки собственных левых векторов матрицы F.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $\Delta_\varsigma \le \Delta_{\varsigma R}$, где $\Delta_{\varsigma R}$ – требуемое значение невязки.

Шаг 6. Если неравенство шага 7 не выполняется, то с помощью методов недифференцируемой оптимизации (метод деформированного многогранника, Нелдера-Мида) сформировать вариацию $\Delta L(k)$ матрицы L, где k – номер итерации алгоритма, и вернуться к шагу 1 алгоритма, в противном случае перейти к шагу 7.

Шаг 7. Вычислить матрицы формирователя сигнала управления (ФСУ): $K = LM^{-1}$, $M = \arg\{M\Lambda - AM = -BL \,\&\, \|M_i\| = 1; i = \overline{1, n}\}$; $K_g = \arg\{-CF^{-1}BK_g = I\}$, причем обратимость матрицы F обеспечивается тем, что все ее собственные значения являются ненулевыми.

Шаг 8. Сформировать систему, образованную объединением ОУ и ФСУ $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$ $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), y(t) = Cx(t)$, в которой $F = A - BK$, $G = BK_g$, при этом матрица F системы обладает желаемым левым собственным вектором ς_R^T.

3.5. Робастное интервальное управление

Рассматриваются многомерные непрерывные объекты управления, матричные компоненты векторно-матричного представления которых характеризуются параметрической неопределенностью, задаваемой в интервальной форме. Предполагается, что модельная параметрическая неопределенность может быть за счет выбора базиса или включения на входе буферной системы с фиксированными параметрами представлена неопределенностью (интервальностью) задания только матрицы состояния объекта управления. Таким образом, объект управления с интервальными параметрами задается векторно-матричной моделью

$$\dot{x}(t)=[A]x(t)+Bu(t);\ x(0);\ y(t)=Cx(t), \tag{3.109}$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m -$ соответственно векторы состояния, управления и выхода ОУ; $[A], B, C -$ интервальная матрица состояния, матрица управления и выхода, согласованные по размерности с переменными модели (3.109). Для интервальной матрицы $[A]$ состояния используются два представления:

$$\begin{gathered}[A]=\left[\underline{A}, \overline{A}\right]: \underline{A}=row\left\{col\left(\underline{A}_{ij}; i=\overline{1,n}\right); j=\overline{1,n}\right\};\\ \overline{A}=row\left\{col\left(\overline{A}_{ij}; i=\overline{1,n}\right); j=\overline{1,n}\right\};\end{gathered}, \tag{3.110}$$

$$[A]=A_0+[\Delta A]=A_0+\left[\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}\right], \tag{3.111}$$

где

$$A_0=row\left\{col\left(\underline{A}_{0ij}; i=\overline{1,n}\right); j=\overline{1,n}\right\}, \tag{3.112}$$

$$\begin{gathered}\underline{\Delta A}=row\left\{col\left(\underline{\Delta A}_{ij}; i=\overline{1,n}\right); j=\overline{1,n}\right\};\\ \overline{\Delta A}=row\left\{col\left(\overline{\Delta A}_{ij}; i=\overline{1,n}\right); j=\overline{1,n}\right\};\end{gathered} \tag{3.113}$$

$$A_{0ij}=0.5(\underline{A_{ij}}+\overline{A}_{ij});\ \underline{\Delta A_{ij}}=\underline{A}_{ij}-A_{0ij};\ \overline{\Delta A_{ij}}=\overline{A}_{ij}-A_{0ij}. \tag{3.114}$$

В приведенных выражениях $A_0, A_{0ij} -$ медианные компоненты соответственно интервальных матрицы $[A]$ и ее (i, j)-го компонента $\left[A_{ij}\right]$; $[\Delta A],\left[\Delta A_{ij}\right] -$ интервальные матричный элемент и его (i, j)-й скалярный компонент, задающие ширину $\left(wid[A]\right),\left(wid\left[A_{ij}\right]\right)$

соответственно интервальной матрицы $[A]$ и ее (i,j)-го интервального скалярного компонента $[A_{ij}]$. Будем именовать A_0 и $[\Delta A]$ соответственно медианой и интервальной составляющей интервальной матрицы $[\Delta A]$.

Ставится задача синтеза неадаптивного регулятора, реализующего закон управления в виде обратной связи с матрицей *K* по состоянию *x(t)* и прямой связи с матрицей K_g по внешнему задающему воздействию *g(t)*, записываемый в форме

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t). \qquad (3.115)$$

Здесь K_g, K – матрицы с фиксированными параметрами, так что их интервальные представления $[K_g] = [K_g, K_g], [K] = [K, K]$ характеризуются медианами $K_{g0} = K_g, K_0 = K$ и нулевой шириной $wid[K_g] = 0, wid[K] = 0$. Закон управления (3.115) должен доставить системе

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); x(0); y(t) = Cx(t), \qquad (3.116)$$

образованной агрегированием ОУ (3.109) и ЗУ (3.115), значения показателей $\{I_\rho; \rho = \overline{1,\mu}\}$ качества процессов в переходном и установившемся режимах, которые, будучи интервальными и представимыми в формах

$$[\pi_\rho] = [\underline{\pi}_\rho, \overline{\pi}_\rho] = \pi_{0\rho} + [\Delta\underline{\pi}_\rho, \Delta\overline{\pi}_\rho]; (\rho = \overline{1,\mu}),$$

удовлетворяли бы по медианной составляющей квалификационному неравенству $\pi_{0\rho} \le \pi_{0\rho R}$ и характеризовались шириной $wid[\pi_\rho] = 2|\Delta\underline{\pi}_\rho| = 2\Delta\overline{\pi}_\rho$, которая удовлетворяет технологический процесс, в который встраивается проектируемая система.

Основная часть публикаций, связанных с проблемами синтеза законов неадаптивного управления вида (3.115), использует формулировку задачи синтеза, сводящую ее к проблеме робастной устойчивости, факт достижения которой контролируется методом В.Л. Харитонова. Необходимо отметить, что при представлении интервальных матриц в основном, за редким исключением, используется форма (3.110).

Вернемся к модели (3.116) спроектированной системы, в которой для интервальной матрицы состояния $[F]$ запишем

$$[F]=[\underline{F},\overline{F}]=F_0+[\Delta F], \tag{3.117}$$

$$[F]=[A]-BK=A_0+[\Delta A]-BK=A_0-BK+[\Delta A]. \tag{3.118}$$

Матричные соотношения (3.87), (3.88), по существу, содержат доказательство следующего утверждения.

Утверждение 3.13. Закон управления вида (3.115) изменяет лишь медианную составляющую F_0 интервальной матрицы $[F]$ состояния системы (3.116) в силу соотношения

$$F_0=A_0-BK, \tag{3.119}$$

оставляя неизменной ее интервальную составляющую так, что выполняется равенство

$$[\Delta F]=[\Delta A]. \quad \blacksquare \tag{3.120}$$

Отметим важное свойство интервальной составляющей $[\Delta(*)]$ интервальной матрицы $[(*)]$.

Свойство 3.1. Норма $\|[\Delta(*)]\|$ интервальной составляющей $[\Delta(*)]$ интервальной матрицы $[(*)]$ не является интервальной и совпадает с нормой любой ее угловой реализации $\|\{(\Delta(*))_c\}_\nu\|;\nu=\overline{1,2^{n\times n}}$ так, что выполняется равенство

$$\|[\Delta(*)]\|=\|\{(\Delta(*))_c\}_\nu\|;\nu=\overline{1,2^{n\times n}}. \tag{3.121}$$

Теперь введем две характеристики интервальной матрицы $[(*)]$, задав их с помощью определений.

Определение 3.5. Оценкой абсолютной интервальности интервальной матрицы $[(*)]=(*)_0+[\Delta(*)]$ называется положительное число $\Delta_I(*)$, задаваемое соотношением

$$\Delta_I(*)\overset{\Delta}{=}\|[\Delta(*)]\|. \tag{3.122}$$

Определение 3.6. Оценкой относительной интервальности интервальной матрицы $[(*)]=(*)_0+[\Delta(*)]$ называется положительное число $\delta_I(*)$

$$\delta_I(*) \overset{\Delta}{=} \frac{\|[\Delta(*)]\|}{\|(*)_0\|} = \frac{\Delta_I(*)}{\|(*)_0\|}. \qquad \square$$

Нетрудно видеть, что введенные оценки интервальности интервальной матрицы $[(*)]$ применительно к $[(*)]=[F]$ интервальной матрице состояния спроектированной системы (3.116) совместно с положениями утверждения 3.13 содержат доказательство следующего утверждения.

Утверждение 3.14. Закон управления (3.115) не изменяет значения оценки абсолютной интервальности матрицы состояния, так что выполняется равенство

$$\Delta_I F = \Delta_I A, \tag{3.123}$$

но при этом изменяется значение оценки относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ состояния системы (3.116) в силу соотношения

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_0 - BK\|}. \qquad \blacksquare$$

Теперь сформулируем постановку задачи синтеза закона управления объектом с интервальными параметрами – сконструировать матрицы K и K_g закона управления (3.115) такие, чтобы:

1. медианная составляющая $F_0 = A_0 - BK$ матрицы $[F]$ спроектированной системы (3.116) доставляла медианные значения $\pi_{0\rho}\left(\rho=\overline{1,\mu}\right)$ показателей качества процессов в переходном и установившемся режимах, удовлетворяющих требованиям
$$\pi_{0\rho} \le \pi_{0\rho R}\left(\rho=\overline{1,\mu}\right); \tag{3.124}$$
2. оценка относительной интервальности $\delta_I F$ матрицы $[F]$ состояния спроектированной системы (3.116) удовлетворяла условию
$$\delta_I F \le \delta_I F_R, \tag{3.125}$$
при этом $\delta_I F_R$ была такой, что становится корректным использование аппарата теории чувствительности в рамках функций чувствительности первого порядка;

3. для медианной составляющей F_0 матрицы состояния $[F]$ выполнялось условие обеспечения единичного отношения "вход – выход" в неподвижном состоянии

$$K_g = \left\{ \arg \Phi_0(s) = C(sI - F_0)^{-1} BK_g \Big|_{s=0} = I \right\} = -\left(CF_0^{-1}B \right)^{-1}. \quad (3.126)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся возможностями обобщенного модального управления (ОМУ). При этом, как указывалось ранее, в зависимости от ранга матрицы B, когда ранг матрицы $B = n$, возможно решение полной задачи ОМУ так, что свободно назначаются желаемые спектры собственных значений медианной версии $\sigma\{F_0\} = \{\lambda_i; i = \overline{1,n}\}$ матрицы F системы и собственных векторов $\{\xi_i = M_i : M\Lambda = F_0 M; i = \overline{1,n}\}$ этой матрицы. В противном случае, когда $rangB = r \langle n$, возможно решение неполной задачи ОМУ, в которой назначается спектр $\sigma\{F_0\}$, а матрица M собственных векторов $M = row\{M_i = \xi_i; F_0\xi_i = \lambda_i\xi_i; i = \overline{1,n}\}$ ищется из соображений

$$M = \arg\min\{C\{M\}\}. \quad (3.127)$$

Напомним, что потребность контролировать число обусловленности $C\{M\}$ матрицы собственных векторов вызвана поиском возможности априори с помощью оценки нормы $\|\Lambda\|$ матрицы состояния модальной модели, задаваемой наблюдаемой парой (Λ, H), оценить норму $F_0 = \|A_0 - BK\|$ с тем, чтобы удовлетворить требованию (3.125).

В основу этой оценки кладутся соотношения матричного подобия

$$M\Lambda = F_0 M, \quad (3.128)$$

которые в нормах приводят к оценочным неравенствам

$$C^{-1}\{M\}\|\Lambda\| \le \|F_0\| \le C\{M\}\|\Lambda\|, \quad (3.129)$$

и требованию (3.125), записываемому в силу (3.129) в виде

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|A_{\Sigma 0}\|} \le \delta_I F_R. \quad (3.130)$$

Объединение (3.129) и (3.130) порождает цепочку неравенств

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} \le C\{M\} \frac{\|[\Delta A]\|}{\|\Lambda\|} \le \delta_I F_R. \qquad (3.131)$$

Правая часть неравенства (3.131) приводит к оценке требуемой нормы $\|\Lambda\|$ матрицы состояния ММ

$$\|\Lambda\| \ge C\{M\} \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I F_R}. \qquad (3.132)$$

Полученные соотношения позволяют предложить алгоритм синтеза закона управления в виде (3.115) методами обобщенного модального управления для случая $rang\ B = n$.

Алгоритм 3.5

1. Построение (A, B, C) представления ОУ в базисе, в котором интервальность первичных физических параметров приводит к интервальности только матрицы состояния так, что объект получает $([A], B, C)$ представление. Запись интервальной матрицы $[A]$ в форме $[A] = A_0 + [\Delta A]$.
2. Формирование требований к показателям качества процессов в переходном и установившемся режимах в виде набора их медианных значений $\left\{\pi_{0\rho}\left(\rho = \overline{1,\mu}\right)\right\}$ для системы с медианной матрицей состояния F_0, а также задания требуемой величины $\delta_I F_R$ оценки относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ проектируемой системы $\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} \le \delta_I F_R$.
3. Формирование требований к матрице состояния Λ модальной модели, задаваемой в диагональной форме $\Lambda = diag\left\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\right\}$ со структурой и реализацией λ_i, доставляющих системе набор требуемых показателей качества $\left\{\pi_{0\rho}\left(\rho = \overline{1,\mu}\right)\right\}$, образующих вектор π_0 так, что $\Lambda = \Lambda(\pi_0)$.
4. Формирование матрицы Λ модальной модели со структурой мод п. 3 алгоритма, но с нормой $\|\Lambda\|$ при известной $\|[\Delta A]\|$ норме интервальной составляющей матрицы состояния $[A]$ ОУ (3.109) в силу (3.131), в котором в силу достижимости

произвольной матрицы M собственных векторов следует положить $C\{M\}=1$, что приводит (3.131) к виду

$$\|\Lambda\| \ge \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I F_R}. \qquad (3.133)$$

5. Конструирование окончательной версии матрицы Λ состояния модальной модели из условия

$$\Lambda = \arg\max\left\{\|\Lambda\| = \|\Lambda(\pi_0)\|, \|\Lambda\| \ge \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I F_R}\right\}. \qquad (3.134)$$

6. С использованием SVD-процедуры произвольной невырожденной $(n \times n)$-матрицы формирование матрицы

$$M = \arg\{C\{M\}\} = 1. \qquad (3.135)$$

7. Решение уравнение Сильвестра $M\Lambda - A_0M = -BH$ относительно матрицы H в форме

$$H = B^{-1}(A_0M - M\Lambda). \qquad (3.136)$$

8. Формирование матрицы ОС K закона управления (3.115), вычисленной в силу соотношения

$$K = HM^{-1} = B^{-1}(A_0M - M\Lambda)M^{-1}. \qquad (3.137)$$

Примечание 3.1. Так как п. 6 порождает континуум матриц M, то, как и в случае синтеза модальноробастного управления (см. параграф 3.1), на M следует наложить ограничения на затраты по управлению в виде $\|u(t)\|$ для $t \in [0,\infty)$ и равномерности их распределения на сфере $\|x(0)\| = fix$. Тогда M ищется из условия

$$M = \arg\left\{K = B^{-1}(A_0M - M\Lambda)M^{-1} \,\&\, \min_M\left\{J_n = C^{1/2}\{W_n\}\alpha_M^{1/2}(W_n)\right\}\right\}, \qquad (3.138)$$

где W_n– грамиан затрат на управление, вычисляемый с помощью уравнения Ляпунова

$$F_0^T W_n + W_n F_0 = -K^T K. \qquad (3.139)$$

9. Формирование матрицы K_g прямой связи с помощью соотношения (3.126), которому можно придать вид

$$K_g = -\left(CM\Lambda^{-1}M^{-1}B\right)^{-1}. \qquad (3.140)$$

10. Вычисление реально достигнутой величины оценки $\delta_I F$ относительной интервальности матрицы $\left[F\right]$ системы в соответствии с определением (3.124) и условием (3.121) и проверка неравенства (3.130)

$$\delta_I F = \frac{\left\|[\Delta A]\right\|}{\left\|F_0 = A_0 - BK\right\|} \le \delta_R F_R. \qquad (3.141)$$

11. Построение реализационной версии ЗУ (3.115), записываемой в форме

$$u(t) = K_\varepsilon \varepsilon(t) - K_X x(t), \qquad (3.142)$$

где

$$K_\varepsilon = K_g, K_X = K - K_X C. \qquad (3.143)$$

12. Представление элементов $\left[F_{ij}\right] = F_{ij0} + \left[\Delta F_{ij}\right]$ матрицы состояния спроектированной системы $\left[F\right] = F_0 + \left[\Delta F\right]$ в параметризованном параметром q_{ij} виде

$$F_{ij}\left(q_{ij}\right) = 0.5(\underline{F}_{ij} + \overline{F}_{ij}) + \left(\overline{F}_{ij} - \underline{F}_{ij}\right)q_{ij}, \qquad (3.144)$$

где $q_{ij} \in \left[-0.5; 0.5\right]$; $q_{ij0} = 0$, так, что

$$F_{ij}\left(q_{ij}\right)\Big|_{q_{ij}=-0.5} = 0.5(\underline{F}_{ij} + \overline{F}_{ij}) - \left(\overline{F}_{ij} - \underline{F}_{ij}\right)0.5 = \underline{F}_{ij},$$

$$F_{ij}\left(q_{ij}\right)\Big|_{q_{ij}=0.5} = 0.5(\underline{F}_{ij} + \overline{F}_{ij}) + \left(\overline{F}_{ij} - \underline{F}_{ij}\right)0.5 = \overline{F}_{ij}.$$

13. Вычисление функций чувствительности показателей качества

$$\pi_{\rho q_{ij}} \overset{\Delta}{=} \frac{\partial \pi_\rho\left(q_{ij}\right)}{\partial q_{ij}}\Bigg|_{q_{ij}=0}. \qquad (3.145)$$

Построение на функциях чувствительности (3.145) полных экстремальных вариаций

$$\Delta\pi_\rho = \sum_{i,j}^{n}\left|\pi_{\rho q_{ij}}\right|0.5. \qquad (3.146)$$

Вычисление медианного значения $\pi_{\rho 0}$ показателя $\pi_{\rho 0}$ с целью конструирования достигнутой оценки $\delta_I \pi_\rho$ относительной интервальности показателя

$$\delta_I \pi_\rho = \frac{\Delta \pi_\rho}{\pi_{\rho 0}}. \qquad (3.147)$$

При неудовлетворении $\delta_I \pi_\rho$ по основным показателям требованиям технологического процесса, в который встраивается проектируемая система, осуществить переход к п. 3 алгоритма, иначе п. 14.

14. Техническая реализация регулятора с законом управления (3.142) ■.

Для случая, когда $rangB = r \langle n$, возможно достижение решения лишь задачи неполного обобщенного модального управления, которая не позволяет при заданной структуре мод $\Lambda = diag\left\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\right\}$ свободно назначать геометрический спектр $\left\{\xi_i\right\}$ собственных векторов образующих матрицу. В теле алгоритма появляется итерационная процедура при конструировании матрицы

$$M = M(H) = \arg\min_H \left\{C\{M\} = C\{M(H)\}\right\}. \qquad (3.148)$$

В основном предлагаемый для этого случая алгоритм совпадает с алгоритмом 3.5.

Алгоритм 3.6

1. Выполнение п.п. 1–5 алгоритма 3.5.
2. Организация итерационной процедуры с целевой функцией (3.148) на решениях уравнения Сильвестра

$$M\Lambda - A_0 M = -BH. \qquad (3.149)$$

Фиксация значения $C\{M\}$, если $C\{M\} \neq 1$, то переход к п.5 алгоритма 3.5 с целью увеличения нормы $\|\Lambda\|$ в $C\{M\}$ раз, иначе – переход к п. 8 алгоритма 3.5.

3. Выполнение п.п.8–11 алгоритма 3.5.

В заключении следует отметить, что интервальное представление может быть использовано для "интервальной линеаризации" нелинейных систем. Для иллюстрации такого подхода рассмотрим нелинейный ОУ

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t). \qquad (3.150)$$

Введем в рассмотрение сферу S_x

$$S_x : \|x\| \le d_S, \qquad (3.151)$$

покрывающую область пространства состояния R^n процессов $x\{x(0), g(t), t\}$, где $g(t)$ – внешнее конечномерное задающее воздействие. Найдем такие $\left[A_{ij}\right] = \left[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\right]$, что в области, покрываемой сферой (3.151), выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{A}_{ij} x_{ij} \le f_i(x) \le \sum_{j=1}^{n} \overline{A}_{ij} x_j . \qquad (3.152)$$

Тогда на элементах $\left[A_{ij}\right] = \left[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\right]$ может быть сконструирована матрица

$$[A] = row\left\{col\left(\left[A_{ij}\right]; i = \overline{1,n}\right); j = \overline{1,n}\right\}, \qquad (3.153)$$

порождающая линейное интервальное представление нелинейного ОУ (3.150), записываемое в форме $\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); x(0); y(t) = Cx(t)$, к которому могут быть применены предложенные алгоритмы синтеза ЗУ.

Пример 3.3. В качестве примера рассматривается задача синтеза закона управления (3.115) для объекта MIMO типа "двумерный вход – двумерный выход" с вектором состояния третьего порядка, таким образом $rank\, B = r = 2$, $n = 3$. В связи с этим воспользуемся алгоритмом 3.6 синтеза ЗУ неадаптивного управления на основе ОМУ, следуя которому, выполним следующие действия.

1. Формирование $([A], B, C)$-представления ОУ (3.109) с матрицами

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ [-0.5; 0.5] & 1 & 0 \\ 0 & [-0.5; 0.5] & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $[\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ [-0.5; 0.5] & 0 & 0 \\ 0 & [-0.5; 0.5] & 0 \end{bmatrix}$, которые характеризуются $\|A_0\| = 1; \|[\Delta A]\| = 0.5$; $\Delta_I A = 0.5; \delta_I A = 0.5$.

2. Формирование требований к системе, которая должна доставлять переходной характеристике медианной версии системы (3.116) время переходного процесса $t_П \le 0,45\,c$, перерегулирование $\sigma \le 5\%$, а также обладать оценкой $\delta_I F$ относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ состояния не более $\delta_I F_R = 0.02$.
3. Назначение матрицы Λ модальной модели с распределением мод Баттерворта, характеризующееся характеристической частотой ω_0 такой, что $\|\Lambda\| = \omega_0$. Тогда в силу (3.134) получим:

$$\Lambda = \arg\max\left\{\|\Lambda\| = \arg\left\{t_П(\omega_0) \le 0.45; \sigma \le 5\%\right\} = 13.88; \|\Lambda\| \ge \frac{\|[\Delta A]\|}{\delta_I A_{\Sigma R}} = 25\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} -31.0024 & 0 & 0 \\ 0 & -15.5012 & 26.8489 \\ 0 & -26.8489 & -15.5012 \end{bmatrix}.$$

4. Организация итерационной процедуры на паре матриц (M,H) такой, что $(M,H) = \arg\min\limits_H \left\{C\{M\} = C\{M(H)\} : M\Lambda - A_0 H = -BH\right\}$, которая дает

$$H = \begin{bmatrix} 30.9515 & 29.6993 & 8.8293 \\ -0.6588 & -9.4584 & 0.5003 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.0535 & 0.0020 & -0.0269 \\ -0.0206 & -0.0211 & -0.0041 \\ 0.9984 & 0.2323 & 0.9720 \end{bmatrix}; C\{M\} = 66.4814.$$

В соответствии с алгоритмом 3.6 в случае $C\{M\} \ne 1$ рекомендуется вернуться к п. 3 с тем, чтобы в $C\{M\}$ раз увеличить $\|\Lambda\|$. Однако в связи с тем, что оценка нормы $\|F_0\|$ (3.134) обладает заметной достаточностью, рискнем не менять $\|\Lambda\|$, предполагая тем самым возможность замыкания алгоритма после вычисления реально достижимой $\delta_I F$.
5. Формирование матрицы K обратной связи в законе (3.115) в силу

$$K = HM^{-1} = \begin{bmatrix} 16.7683 & -1361.1055 & 3.8349 \\ 21.4862 & 37.6836 & 1.2675 \end{bmatrix}.$$

6. Формирование матрицы K_g прямых связей по задающему внешнему воздействию в законе (3.115) в силу (3.140), которое дает

$$K_g = \begin{bmatrix} 16.7683 & -1357.22 \\ 21.4862 & 37.9511 \end{bmatrix}.$$

7. Формирование (F_0, G, C) представления спроектированной системы, которое приводит к матрицам

$$F_0 = \begin{bmatrix} -21.4863 & -37.6836 & -0.2675 \\ -21.4863 & -36.6836 & -1.2675 \\ -16.7684 & 1361.055 & -3.8349 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 21.4862 & 37.9512 \\ 21.4862 & 37.9512 \\ 16.7683 & -1357.22 \end{bmatrix}$$

при этом $\|F_0\| = 1435.3727$, что близко к мажорантной оценке $C\{M\}\|\Lambda\| = 2060.9234$.

8. Вычисление достигнутой оценки относительной интервальности интервальной матрицы $[F]$ состояния спроектированной системы дает

$$\delta_I F = \frac{\|[\Delta A]\|}{\|F_0\|} = 3.48 * 10^{-4}.$$

9. В качестве параметра π_ρ приняты собственные значения $\pi_\rho = \lambda_\rho \left(\rho = \overline{1,3}\right)$ с целью вычисления функций чувствительности $\lambda_q = \left(M^{-1} A_q M\right)_{\rho\rho}$ и оценки их полных авиаций для угловой реализации интервальной матрицы $[\Delta A]$ с последующим вычислением относительной интервальности $\delta_I \lambda = \dfrac{\|\Delta\lambda\|}{\|\lambda\|}$, что в итоге дало значение этой оценки $\delta_\lambda = 0.011 \quad (1.1\%)$.

10. Формирование реализационной версии ЗУ (3.115) в форме (3.142), что дает для его матриц $K_\varepsilon = K_g$; $K_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.8349 \\ 0 & 0 & 1.2675 \end{bmatrix}$.

11. Передача синтезированного закона неадаптивного управления в среду технической реализации. ■

Примечание 3.2. Заканчивая рассмотрение возможностей неадаптивных методов достижения параметрической инвариантности выхода системы относительно неопределенности модели объекта управления вида (3.13), приводимого к виду (3.43), и переходя к рассмотрению возможностей адаптивных методов, необходимо сформулировать алгебраическое условие реализуемости адаптивных алгоритмов. Очевидно, этим алгебраическим условием является включение $D \in Im(B)$.