ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Векторы и матрицы

П.1.1. Типы матриц

Матрицей A размерности $(m \times n)$ называется таблица элементов a_{ij}, расположенных в m строках и n столбцах.

Транспонированной называется $(n \times m)$-матрица A^T, полученная из $(m \times n)$-матрицы A посредством замены строк столбцами. Напомним, что для операции транспонирования справедливо следующее правило раскрытия скобок:

$$(AB)^T = B^T A^T .$$

В зависимости от соотношения размерностей m и n матрица называется:

– прямоугольной, если $m \neq n$;
– квадратной, если $m = n$;
– вектор-столбцом, если $n = 1$;
– вектор-строкой, если $m = 1$.

Квадратная матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Симметричная $(n \times n)$-матрица называется положительно определенной, если для любого ненулевого n-мерного вектора x справедливо неравенство $x^T Ax > 0$. Напомним, что у симметричной положительно определенной матрицы все собственные значения являются вещественными и положительными.

Матрицей, обратной к $(n \times n)$-матрице A, называется матрица A^{-1}, удовлетворяющая соотношениям $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Если A и B – квадратные матрицы одинаковой размерности, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Матрица A размерности $(n \times n)$ называется ортогональной, если для нее выполняется соотношение

$$AA^T = A^T A = I,$$

где I – единичная $(n \times n)$-матрица. Столбцы $A_i (i = \overline{1,n})$ ортогональной матрицы A образуют ортонормированный базис.

Матрицы A и B размерности $(n \times n)$ являются подобными, если существует такая невырожденная $(n \times n)$-матрица M, что для A и B выполняется матричное равенство

$$MA = BM,$$

при этом матрица M носит название матрицы преобразования подобия. Полученное матричное соотношение имеет следующие эквивалентные представления:

$$A = M^{-1}BM\,,\ MAM^{-1} = B\,,\ AM^{-1} = M^{-1}B\,.$$

П.1.2. Векторные и матричные нормы

Определение П.1.2.1. Пусть функция $\varphi(\bullet)$ сопоставляет каждому вектору $x \in R^n$ – линейного вещественного пространства вещественное число $\|x\|$, называемое нормой (размером) этого вектора, если выполняются условия:

1) $\varphi(x) = \|x\| > 0$ для $\forall x \neq 0$ и $\varphi(x) = \|x\| = 0$ при $x = 0$;
2) $\varphi(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3) $\varphi(x + y) = \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Универсальной векторной нормой является векторная норма Гельдера, задаваемая выражением

$$\|x\|_P = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p};\quad p \text{ – целое положительное.}$$

Наиболее употребительными векторными нормами являются нормы при $p = 1{,}2$ и ∞:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ – абсолютная норма вектора;

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ – квадратичная или евклидова норма вектора;

$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$ – бесконечная норма вектора.

Приведенные векторные нормы эквивалентны в том смысле, что для норм $\|x\|_\mu$ и $\|x\|_\nu$ существуют положительные числа β_1 и β_2 такие, что выполняются неравенства

$$\beta_1 \|x\|_\mu \le \|x\|_\nu \le \beta_2 \|x\|_\mu\,.$$

Так, для норм $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ выполняются оценочные неравенства:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2\,,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty\,,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty\,.$$

Определение П.1.2.2. Пусть функция $\varphi(*)$ сопоставляет каждой $(m \times n)$-матрице A вещественное число $\|A\|$. Тогда оно называется нормой этой матрицы, если выполняются условия:

1) $\varphi(A) = \|A\| > 0$ для $\forall A \neq 0$ и $\varphi(A) = \|A\| = 0$ при $A = 0$;
2) $\varphi(\alpha A) = \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$;
3) $\varphi(A + B) = \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Наиболее употребительными матричными нормами являются:
1. евклидова или фробениусова норма

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |A|^2 \right)^{1/2} = \left| (trA^T A)^{1/2} \right| = \left| (trAA^T)^{1/2} \right|;$$

2. p-ичные индуцированные нормы $\|A\|_p$, задаваемые в форме

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

p-ичные нормы $\|A\|_p$ используются для значений $p = 1$, 2 и ∞;

2.1. $\|A\|_1 = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max\limits_{j=\underline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{m} |A_{ij}|$ – столбцовая норма матрицы;

2.2. $\|A\|_2 = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_{\max}(A)$ – спектральная норма матрицы A, где $\alpha_{\max}(A)$ – максимальное сингулярное число матрицы A;

2.3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\underline{1,m}} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{ij}|$ – строчная форма матрицы A.

Приведенные матричные нормы удовлетворяют оценочным неравенствам:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2;$$

$$\max_{i,j} |A_{ij}| \leq \|A\|_2 \sqrt{nm} \max_{i,j} |A_{ij}|;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty;$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty;$$

$$\|A\|_2 \leq \left(\|A\|_1 \|A\|_\infty \right)^{1/2}.$$

Определение П.1.2.3. Векторные нормы $\|x\|$, $\|y\|$ и матричная норма $\|A\|$ называются согласованными для y, x и A, связанных линейным векторно-матричным соотношением

$$y = Ax,$$

если выполняется неравенство

$$\|y\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$$

Определение П.1.2.3. Матричные нормы $\|(*)\|$ обладают кольцевым свойством, если для них справедливо неравенство

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Кольцевым свойством обладают все p-ичные (индуцированные) матричные нормы, а также фробениусова (евклидова) норма матриц.

П.1.3. Функции векторного аргумента. Производные по вектору. Градиент

Определение П.1.3.1. Пусть функция $f(x)$ реализует отображение $R^n \to R$ действительного n-мерного пространства на множество действительных чисел в том смысле, что f ставит n-мерному вектору x в соответствие действительное число $f(x)$, тогда $f(x)$ называется скалярной функцией векторного аргумента.

Определение П.1.3.2. Производной от скалярной функции $f(x)$ от n-мерного векторного аргумента x по этому вектору называется $(1\times n)$-матрица-строка $f_x^{'}(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$, связывающая скалярный дифференциал $df(x)$ как главное линейное приращение функции с бесконечно малым n-мерным приращением dx аргумента в силу линейного векторно-матричного соотношения

$$df(x) = f_x^{'}(x)dx,$$

где $f_x^{'}(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$ формируется в виде

$$f_x^{'}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Определение П.1.3.3. Градиентом скалярной функции $f(x)$ n-мерного векторного аргумента в точке x называется n-мерный вектор $gradf(x) = \nabla f(x)$, задаваемый выражением

$$gradf(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T .$$

Содержательно градиент как вектор в точке x задает направление наибольшего роста скалярной функции $f(x)$, при этом, если x принадлежит поверхности $f(x) = C$ постоянного значения функции $f(x)$, равного C, то градиент $\nabla f(x)$ как вектор ортогонален в этой точке отмеченной поверхности.

Определение П.1.3.4. Пусть функция $f(x)$ реализует отображение $R^n \to R^m$ действительного n-мерного пространства в действительное m-мерное пространство в том смысле, что f ставит n-мерному вектору $x = [x_1 \quad x_2 \quad \Lambda \quad x_n]^T$ в соответствие m-мерный вектор $f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \Lambda \quad f_m(x)]^T$, тогда $f(x)$ называется векторной функцией векторного аргумента.

Определение П.1.3.5. Производной от m-мерной векторной функции $f(x)$ векторного n-мерного аргумента x по этому аргументу называется $(m \times n)$-матрица $f_x^{'}(x)$, связывающая m-мерный дифференциал $df(x)$ как главное линейное приращение функции с бесконечно малым n-мерным приращением dx аргумента x в силу линейного векторно-матричного соотношения $df(x) = f_x^{'}(x)dx$, где $f_x^{'}(x)$ формируется в следующем виде:

$$f_x^{'}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \hdashline \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \hdashline M & M & M & M \\ \hdashline \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \Lambda & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{array} \right].$$

Матрица $f_x^{'}(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$ приведенного вида именуется матрицей Якоби.

П.1.4. Дифференцирование матриц, их композиций и матричных функций от матриц по скалярному параметру

Определение П.1.4.1. Пусть элементы $(m \times n)$-матрицы зависят от скалярного параметра q $(q \in R)$ так, что она представима в форме

$$A(q) = row\{col(A_{ij}(q)); \quad i = \overline{1,n}); \quad j = \overline{1,m}\}.$$

Тогда производной

$$A_q(q) \overset{\Delta}{=} \frac{\partial A(q)}{\partial q}$$

по скалярному параметру q называется $(m \times n)$-матрица производных $\frac{dA_{ij}(q)}{dq}$ ее элементов, записываемая в форме

$$A(q) = row\left\{col\left[\frac{\partial A_{ij}(q)}{\partial q}\right];\ i = \overline{1,n});\ \ j = \overline{1,m}\right\}.$$

Определение П.1.4.2. Производная суммы

$$A(q) + B(q) = C(q)$$

двух матриц по скалярному параметру q называется сумма производных этих матриц так, что оказывается справедливой запись

$$C_q(q) = A_q(q) + B_q(q).$$

Определение П.1.4.3. Производной от произведения матриц

$$D(q) = A(q)E(q)$$

по скалярному параметру q называется следующее выражение:

$$D_q(q) = A_q(q)E(q) + A(q)E_q(q).$$

Определение П.1.4.4. Производной от степенной матричной функции $A^K(q)$ от $(n \times n)$-матрицы $A(q)$ по скалярному параметру q называется матрица, задаваемая следующим выражением:

$$\frac{\partial}{\partial q}A^K(q) = A_q(q)A^{K-1}(q) + A(q)A_q(q)A^{K-2}(q) + \ldots +$$
$$+ A^{K-2}(q)A_q(q)A(q) + A^{K-1}(q)A_q(q).$$

Примечание. Если коммутируемы матрицы $A_q(q)$ и $A^{\mu}(q)$, где $\mu = \overline{1, K-1}$ так, что оказывается справедливой запись

$$A_q(q)A^{\mu}(q) = A^{\mu}(q)A_q(q),$$

то становится справедливым представление

$$\frac{\partial}{\partial q}A^k(q) = kA^{k-1}(q)A_q(q) = kA_q(q)A^{k-1}(q).$$

Утверждение П.1.1. Пусть $A(q)$ – квадратная $(n \times n)$-матрица такая, что существует обратная ей матрица $A^{-1}(q)$, удовлетворяющая условию

$$A(q)A^{-1}(q) = A^{-1}(q)A(q) = \mathrm{I}.$$

Тогда производная от обратной матрицы $A^{-1}(q)$ по скалярному параметру q задается соотношением

$$\frac{\partial}{\partial q}(A^{-1}(q)) = -A^{-1}(q)A_q(q)A^{-1}(q). \qquad \square$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании по q матричного равенства

$$A^{-1}(q)A(q) = \mathrm{I},$$

в результате чего получим по свойству производной от произведения матриц

$$\frac{\partial}{\partial q}(A^{-1}(q))A(q) + A^{-1}(q)A(q) = 0,$$

откуда следует заявленное в утверждении соотношение. ■

Утверждение П.1.2. Пусть $f\big(A(q)\big)$ – $(n \times n)$-матричная функция от $(n \times n)$-матрицы $A(q)$, элементы которой зависят от скалярного параметра q. Пусть $A(q)$ есть матрица простой структуры так, что она диагонализируема в силу матричного уравнения подобия

$$M(q)\Lambda(q) = A(q)M(q),$$

где $\Lambda(q) = diag\{\lambda_i(q);\ i = \overline{1,n}\}$.

Тогда производная $\dfrac{\partial f\big(A(q)\big)}{\partial q}$ от матричной функции от матрицы по скалярному параметру может быть вычислена в силу матричного соотношения

$$\frac{\partial f\big(A(q)\big)}{\partial q} = M_q(q)M^{-1}(q)A(q) - A(q)M_q(q)M^{-1}(q) +$$
$$+M(q)diag\left\{\frac{\partial f\big(\lambda_i(q)\big)}{\partial \lambda_i}\lambda_i(q);\quad i = \overline{1,n}\right\}M^{-1}(q). \qquad \square$$

Доказательство утверждения использует свойство матричных функций от матриц сохранять матричное отношение подобия, которое позволяет записать

$$f\left(A(q)\right) = M(q) f\left(\Lambda(q)\right) M^{-1}(q) = M(q) diag\left\{ f\left(\lambda_i(q)\right);\ \ i = \overline{1,n} \right\} M^{-1}(q).$$

Дифференцирование последнего матричного соотношения по q приводит к представлению производной $\dfrac{\partial f\left(A(q)\right)}{\partial q}$ заявленным в утверждении выражением. ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Определения устойчивости и метод функций Ляпунова

П2.1. Определенные функции

Определение П2.1. *Скалярная функция* $v(x)$ *векторного аргумента* x *называется знакопостоянной положительной, если* $v(x) \geq 0$ *для всех* x *и* $v(0) = 0$.

Определение П2.2. *Скалярная функция* $v(x)$ *векторного аргумента* x *называется определенно положительной, если* $v(x) > 0$ *для всех* $x \neq 0$ *и* $v(0) = 0$.

З*накопостоянные отрицательные* и *определенно отрицательные* функции определяются аналогично с точностью до замены знаков неравенств на противоположные.

В теории функций Ляпунова используют следующие условные обозначения:

$v(x) \geq 0$ или $v(x) \leq 0$ – для знакопостоянных функций;

$v(x) > 0$ или $v(x) < 0$ – для определенных функций.

Наиболее часто в качестве определенно положительных функций используют квадратичные формы вида

$$v(x) = x^T P x, \tag{П2.1}$$

где $P = P^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица. Напомним, что для квадратичной формы (П2.1) справедлива оценка (неравенство Релея)

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_2 \|x\|^2, \tag{П2.2}$$

где λ_1 и λ_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P соответственно.

П2.2. Определения устойчивости

Будем рассматривать *нестационарную нелинейную* систему вида

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{П2.3}$$

где x – n-мерный вектор состояния. Обозначим через x_0 *начальное значение* вектора состояния, т.е. значение вектора x в *начальный момент времени* t_0. Решение системы (П2.3), полученное при *начальных условиях* x_0 и t_0, обозначим через $x(t, x_0, t_0)$.

Замечание П2.1. Более простым является класс *стационарных нелинейных* систем, т.е. систем, правые части дифференциальных уравнений которых не зависят в явном виде от времени t:

$$\dot{x} = f(x). \tag{П2.3.а}$$

Свойства стационарных систем не изменяются с течением времени, и поэтому без потери общности в качестве начального момента времени можно выбрать нулевое значение $t_0 = 0$. При этом начальное значение вектора состояния обозначается $x(0)$. □

Пусть точка $x = 0$ является *состоянием равновесия* системы (П2.3), т.е. $f(0,t) = 0$ для всех t.

Определение П2.3. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) называется:

1) устойчивым по Ляпунову (или просто – устойчивым), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon_1 > 0$ существует число $\delta(\varepsilon_1, t_0) > 0$ (зависящее в общем случае от ε_1 и t_0), такое, что из выполнения неравенства $|x_0| < \delta(\varepsilon_1, t_0)$ следует справедливость неравенства

$$|x(t, x_0, t_0)| < \varepsilon_1 \textit{ для всех } t > t_0; \tag{П2.4}$$

2) асимптотически устойчивым*,* если оно устойчиво по Ляпунову и, дополнительно, для любого положительного числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ существуют положительные числа $\Delta(t_0)$ *и* $T(\varepsilon_1, t_0)$, такие, что из выполнения неравенства $|x_0| < \Delta(t_0)$ следует справедливость неравенства

$$\|x(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon_2 \text{ для всех } t > t_0 + T(\varepsilon_2, t_0); \tag{П2.5}$$

3) равномерно асимптотически устойчивым*,* если оно асимптотически устойчиво и, дополнительно, константы Δ и T не зависят от начального момента времени t_0;

4) экспоненциально устойчивым*,* если существует такое положительное число $\Delta > 0$, что из выполнения неравенства $|x_0| < \Delta$ следует справедливость неравенства

$$x(t, x_0, t_0) < \beta \|x_0\| \exp\big(-\alpha(t - t_0)\big) \text{ для всех } t > t_0, \tag{П2.6}$$

где α *и* β – некоторые положительные константы.

Определение П2.4. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) называется неустойчивым, если оно не является устойчивым по Ляпунову.

Если неравенства (П2.5) и (П2.6) выполняются при любых начальных значениях x_0, то соответствующие свойства устойчивости называются *глобальными*. Если система имеет единственное состояние равновесия с глобальными свойствами устойчивости, то можно говорить об устойчивости самой *системы*.

Обсудим введенные определения. Устойчивость по Ляпунову означает, что для любого сколь угодно малого числа ε_1 всегда найдется множество начальных условий с ненулевым радиусом δ, такое, что любая траектория $x(t, x_0, t_0)$, начавшаяся внутри данного множества, не выйдет за пределы ε_1-окрестности нулевого состояния равновесия (см. рис. П2.1).

Асимптотическая устойчивость означает, что для фиксированного множества начальных условий $\|x_0\| < \Delta(t_0)$ всегда можно найти конечный интервал времени T, такой, что норма вектора состояния станет меньше любого сколь угодно малого числа ε_2 (см. рис. П2.2). Другими словами, это означает сходимость траекторий к нулевому состоянию равновесия, т.е. выполнение условия

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0, t_0) = 0 .$$

Равномерная асимптотическая устойчивость дополнительно означает, что скорость сходимости не зависит от начального момента времени t_0.

Наконец, экспоненциальная устойчивость означает, что скорость сходимости не меньше, чем у показательной функции (см. рис. П2.3).

Напомним также, что из более «сильного» типа устойчивости следует справедливость всех более «слабых» типов (в определении П2.2 типы устойчивости даны в порядке возрастания их «силы»). Обратное утверждение несправедливо, за исключением специальных классов динамических систем. Так, для линейных стационарных систем из асимптотической устойчивости следует равномерная асимптотическая устойчивость и экспоненциальная устойчивость. Для линейных нестационарных систем из равномерной асимптотической устойчивости следует экспоненциальная устойчивость. Для нелинейных стационарных систем из асимптотической устойчивости следует равномерная асимптотическая устойчивость (но не следует экспоненциальная).

Пример П2.1. Проиллюстрируем введенные понятия примерами следующих простых систем:

$$\dot{x} = kx , \tag{П2.7}$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{1+t} x , \tag{П2.8}$$

$$\dot{x} = -x^3 , \tag{П2.9}$$

где x – скалярная переменная, k – постоянный коэффициент.

Линейная стационарная система (П2.7) является устойчивой по Ляпунову при $k \le 0$, асимптотически устойчивой (равномерно асимптотически устойчивой, экспоненциально устойчивой) при $k < 0$ и неустойчивой при $k > 0$. Линейная нестационарная система (П2.8) является асимптотически устойчивой (но не является ни равномерно асимптотически, ни экспоненциально устойчивой), а нелинейная стационарная система (П2.9) является равномерно асимптотически устойчивой (но не является экспоненциально устойчивой). □

П2.3. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова

Метод функций Ляпунова основан на использовании скалярных функций, обладающими вместе со своими производными, вычисленными в силу уравнений исследуемой системы, некоторыми специальными свойствами. При этом для определения типа устойчивости не требуется решения дифференциальных уравнений системы. Заключение делается по свойствам функции Ляпунова и ее производной, вычисленной в силу уравнений системы.

В зависимости от условий конкретной задачи, к функциям Ляпунова могут предъявляться различные требования. Наше рассмотрение мы ограничим функциями Ляпунова $V(x)$, являющимися скалярными функциями векторного аргумента x и обладающими следующими свойствами:

свойство 1: определенная положительность, т. е. $V(x) > 0$;

свойство 2: дифференцируемость по x;

свойство 3: неограниченный рост, т. е. $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$.

Определение П2.5. Производной функции Ляпунова $V(x)$ в силу уравнений системы (П2.3*) называется скалярная функция вектора* x*,* вычисленная как производная по времени сложной функции

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,t).$$

Приведем ряд важных теорем метода функций Ляпунова. Отметим, что все приводимые теоремы определяют *глобальные* свойства устойчивости.

Теорема П2.1. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является устойчивым по Ляпунову, если существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой в силу уравнений системы является знакопостоянной отрицательной, т.е.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,t) \le 0.$$

Теорема П2.2. Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является равномерно асимптотически устойчивым, если существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой в силу уравнений системы является определенно отрицательной, т. е.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,t) < 0.$$

Теорема П2.3 (Теорема Н.Н. Красовского). Состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является экспоненциально устойчивым, если существует функция Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$c_1\|x\|^2 \le V(x) \le c_2\|x\|^2, \tag{П2.10}$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,t) < -c_3\|x\|^2, \tag{П2.11}$$

$$\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \le c_4\|x\|, \tag{П2.12}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – положительные константы.

В ряде приложений (например, в задачах адаптивного управления) большое значение имеет следующая теорема, позволяющая доказать *сходимость по части переменных* у систем, устойчивых по Ляпунову. Чтобы не использовать математические термины, выходящие за рамки программы инженерной подготовки, утверждение теоремы несколько упрощено. Полная формулировка теоремы может быть найдена в литературе.

Теорема П2.4. Если функция $f(x,t)$ является ограниченной для ограниченных x и любых t, и существует функция Ляпунова $V(x)$, производная которой в силу уравнений системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,t) \le -W(x),$$

где $W(x)$ – знакопостоянная положительная функция, то состояние равновесия $x = 0$ системы (П2.3) является устойчивым по Ляпунову и, дополнительно, все решения системы удовлетворяют условию

$$\lim_{t\to\infty} W(x(t,x_0,t_0)) = 0.$$

В завершение проведем исследование устойчивости линейной системы

$$\dot{x} = Ax \tag{П2.13}$$

с помощью квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^T P x, \tag{П2.14}$$

где симметрическая положительно определенная матрица P является решением матричного уравнения

$$A^T P + PA = -Q \tag{П2.15}$$

с произвольной симметрической положительно определенной матрицей Q. Как известно, если матрица A гурвицева (т. е. все собственные значения имеют отрицательные вещественные части), то для произвольной (симметрической положительно определенной) матрицы Q найдется единственная симметрическая положительно определенная матрица P, являющаяся решением уравнения (П2.5). Вычислим производную функции (П2.14) в силу уравнений (П2.13):

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P x = (Ax)^T P x + x^T P^T A x = x^T A P x + x^T P A x =$$
$$= x^T (A^T P + PA) x .$$

Учитывая равенство (П2.15), окончательно получаем

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0 ,$$

откуда следует равномерная асимптотическая устойчивость состояния равновесия. Покажем, что выбранная функция Ляпунова и ее производная в силу уравнений системы удовлетворяют также условиям теоремы Красовского об экспоненциальной устойчивости. Действительно, в силу неравенства Релея имеем:

$$c_1 \|x\|^2 \le x^T P x \le c_2 \|x\|^2$$

и

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x \le -c_3 \|x\|^2 ,$$

где c_1 и c_2 – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P, соответственно, а c_3 – минимальное собственное значение матрицы Q. Наконец,

$$\left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| = \left\| \frac{\partial}{\partial x} x^T P x \right\| = \|2Px\| \le c_4 \|x\|,$$

где $c_4 = 2\|P\|$, а $\|P\|$ – спектральная норма матрицы P.

Сингулярное разложение матриц

Определение П.3.1. Сингулярным разложением вещественнозначной матрицы N размерности $(m \times n)$ называется ее факторизация, задаваемая в виде

$$N = U\Sigma V^T, \tag{П.3.1}$$

где U – ортогональная $(m \times m)$-матрица, V – ортогональная $(n \times n)$-матрица, образующие соответственно левый и правый сингулярные базисы и обладающие свойствами

$$UU^T = U^T U = I, \quad VV^T = V^T V = I \tag{П.3.2}$$

Σ – матрица сингулярных чисел α_i, которая принимает вид

$$\Sigma = diag\{\alpha_i; i = \overline{1,m}\} \text{ при } m = n, \tag{П.3.3}$$

$$\Sigma = \left[diag\{\alpha_i; i = \overline{1,m}\} \;\vdots\; 0_{m,n-m}\right] \text{ при } m < n, \tag{П.3.4}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} diag\{\alpha_i; i = \overline{1,n}\} \\ \hdashline 0_{m-n,n} \end{bmatrix} \text{ при } m > n. \quad \square \tag{П.3.5}$$

Положим пока $m = n$ и транспонируем матричное выражение (П.3.1), тогда получим

$$N^T = V\Sigma^T U^T \Big|_{n=m} = V\Sigma U^T. \tag{П.3.6}$$

Умножим (П.3.1) на (П.3.6), тогда с использованием свойства (П.3.2) получим цепочку равенств

$$NN^T = U\Sigma V^T V\Sigma U^T = V\Sigma^2 U^T. \tag{П.3.7}$$

Теперь умножим (П.3.6) слева на (П.3.1), получим

$$N^T N = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T. \tag{П.3.8}$$

Умножим матричное уравнение (П.3.7) на матрицу U справа, тогда с учетом (П.3.2) получим матричное соотношение

$$T\Gamma - FT = GP. \tag{П.3.9}$$

Перейдем в (П.5.9) к столбцовой форме записи правых матричных компонентов:

$$NN^T\{row(U_i; i = \overline{1,m}\} = U\{row(\Sigma^2)_i; i = \overline{1,m})\},$$

что эквивалентно матрично-векторному представлению

$$NN^T U_i = U(\Sigma^2)_i; i = \overline{1,m}. \tag{П.3.10}$$

Если учесть, что столбец $(\Sigma^2)_i$ имеет вид

$$(\Sigma^2)_i = \left[0_{1\times(i-1)} \;\vdots\; \alpha_i^2 \;\vdots\; 0_{1\times(m-i)}\right]^T, \qquad (\text{П.3.11})$$

то с учетом (П.3.11) соотношение (П.3.10) записывается в виде

$$NN^T U_i = \alpha_i^2 U_i ; i = \overline{1,m}. \qquad (\text{П.3.12})$$

Векторно-матричное соотношение (П.3.12) представляет собой полное решение проблемы собственных значений α_i^2 и собственных векторов U_i матрицы NN^T. В результате получаем, что $\alpha_i^2 (i = \overline{1,m})$ ищутся как решения характеристического уравнения

$$\det(\alpha^2 I - NN^T) = 0, \qquad (\text{П.3.13})$$

а матрица U оказывается составленной из собственных векторов U_i матрицы NN^T единичной нормы в форме

$$U = row\{U_i : \|U_i\| = 1; i = \overline{1,m}\}. \qquad (\text{П.3.14})$$

Умножим теперь матричное уравнение (П.3.8) на матрицу V справа, тогда с учетом (П.3.2) получим

$$N^T NV = V\Sigma^2. \qquad (\text{П.3.15})$$

По аналогии с (П.3.9)–(П.3.12) получим соотношение (П.3.15) в форме m матрично-векторных выражений

$$N^T NV_i = \alpha_i^2 V_i ; i = \overline{1,m}, \qquad (\text{П.3.16})$$

которое представляет собой задачу на собственные значения α_i^2 и собственные векторы V_i матрицы NN^T. Последнее позволяет составить характеристическое уравнение

$$\det(\alpha^2 I - N^T N) = 0, \qquad (\text{П.3.17})$$

позволяющее вычислить все $\alpha_i^2 (i = \overline{1,m})$, знание которых в силу (П.5.16) позволяет найти собственные векторы V_i единичной нормы матрицы $N^T N$. Матрица V правого сингулярного базиса в итоге по аналогии с (П.3.14) записывается в форме

$$V = row\{V_i : \|V_i\| = 1; i = \overline{1,m}\}. \qquad (\text{П.3.18})$$

Следует заметить, что в случае $m = n$ матрицы NN^T и $N^T N$ обладают одним и тем же спектром собственных значений так, что $\sigma\{NN^T\} = \sigma\{N^T N\} = \{\alpha_i^2 ; i = \overline{1,m}\}$. Если $m \neq n$, то спектр $\sigma\{N^T N\}$ содержит n собственных значений, а спектр $\sigma\{NN^T\}$ содержит m собственных значений, причем числа ненулевых элементов этих спектров оказываются равными.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию сингулярного разложения матрицы N (П.3.1). Для этой цели умножим (П.3.1) на матрицу V справа и воспользуемся свойствами (П.3.2), тогда получим

$$NV = U\Sigma . \tag{П.3.19}$$

Запишем (П.3.19) по аналогии с (П.3.12) и (П.3.16) в столбцовой форме:

$$NV_i = \alpha_i U_i ; i = \overline{1,m} . \tag{П.3.20}$$

Сконструируем теперь на векторно-матричном соотношении (П.3.20) согласованные тройки $\{V_i, \alpha_i, U_i ; i = \overline{1,m}\}$, которые несут информацию о том, что в силу (П.3.20) эффект действия оператора с матрицей N на *i*-й элемент V_i правого сингулярного базиса V состоит в умножении на *i*-ое сингулярное число α_i *i*-го элемента U_i левого сингулярного базиса U.

Если теперь с помощью матрицы N в силу линейного векторно-матричного соотношения

$$\chi = N\lambda \tag{П.3.21}$$

отобразить сферу $\|\chi\| = 1$, то она отобразится в эллипсоид, положение полуосей которого определяется элементами U_i левого сингулярного базиса U, а длины этих полуосей в силу (П.3.20) будут равны $\alpha_i \|\chi\|$.

В заключение заметим, что в англоязычной литературе сингулярное разложение матриц именуется SVD-разложением (SVD-процедурой). Во всех версиях пакета MATLAB существует функция SVD(N), которая выводит матричные компоненты факторизации (П.3.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Доказательство утверждений

Доказательство утверждения 2.5. Строится на двух эквивалентных представлениях матричных условий подобия матриц $N(q)$ и $\Lambda(q)$, одно из которых записано в форме (2.101), а второе – в форме

$$\Lambda(q)M^{-1}(q) = M^{-1}(q)N(q). \tag{П.4.1}$$

Соотношение (2.101) порождает столбцовое соотношение

$$\lambda_i(q)M_i(q) = N(q)M_i(q), i = \overline{1,n}, \tag{П.4.2}$$

а соотношение (П.4.1) порождает строчное соотношение

$$(M^{-1}(q))^i \lambda_i(q) = (M^{-1}(q))^i N(q). \tag{П.4.3}$$

Запишем соотношения (П.4.2) и (П.4.3) в однородной форме:

$$(N(q) - \lambda_i(q)I)M_i(q) = 0; \quad (M^{-1}(q))^i(N(q) - \lambda_i(q)I) = 0. \tag{П.4.4}$$

Продифференцируем соотношение (П.4.2) по q_j в точке $q = q_0$ и разрешим результат дифференцирования относительно функции чувствительности λ_{iqj}, тогда получим:

$$\lambda_{iqj}M_i = N_{qj}M_i + (N - \lambda_i I)M_{iqj}. \tag{П.4.5}$$

Воспользуемся теперь тем, что матричное соотношение $M^{-1}M = I$ может быть записано в эквивалентной строчно-столбцовой форме:

$$(M^{-1})^i M_l = \delta_{il}, \tag{П.4.6}$$

где δ_{il} – символ Кронекера, обладающий свойством $\delta_{il} = 1$ при $i = l$ и $\delta_{il} = 0$ при $i \neq l$. Умножим (П.6.5) слева на строку $(M^{-1})^i$, тогда

$$\lambda_{iqj}(M^{-1})^i M_i = (M^{-1})^i N_{qj}M_i + (M^{-1})^i(N - \lambda_i I)M_{iqj}. \tag{П.4.7}$$

Воспользуемся в (П.4.7) свойствами символа Кронекера, а также вторым соотношением в (П..4) при $q = q_0$, тогда получим:

$$\lambda_{iqj} = (M^{-1})^i N_{qj}M_i = (M^{-1}N_{qj}M)_{ii} \qquad \blacksquare$$

Доказательство утверждения 2.7. Для доказательства справедливости представления (2.106) коэффициентов γ_{ik}^j разложения вектора функции чувствительности $\xi_{iqj} = M_{iqj}$ по собственным векторам M_k $k \neq i$ умножим соотношение (П.4.5) на строку $(M^{-1})^k$ $k \neq i$. Если воспользоваться теперь соотношением (П.4.6) и вторым соотношением в (П.4.4), то получим

$$(M^{-1})^k M_{iqj} = \frac{(M^{-1})^k N_{qj} M_k}{\lambda_i - \lambda_k}; \;\; k = \overline{1,n}; \; k \neq i. \qquad (П.4.8)$$

Если теперь на строку $(M^{-1})^k$ умножить (2.105), то, используя (П.4.8), переходим к (2.106), а, следовательно, и к (2.107). ■

Доказательство утверждения 2.8 строится на двух эквивалентных записях матричного соотношения (2.95):

$$U(q)\Sigma(q) = N(q)V(q), \qquad (П.4.9)$$

$$\Sigma(q)V^T(q) = U^T(q)N(q). \qquad (П.4.10)$$

Матричные соотношения (П.4.9) и (П.4.10) порождают эквивалентную им столбцовую и строчную записи:

$$\alpha_i(q)U_i(q) = N(q)V_i(q), \qquad (П.4.11)$$

$$\alpha_i(q)(V^T(q))^i = (U^T(q))^i N(q). \qquad (П.4.12)$$

Продифференцируем соотношение (П.4.11) и (П.4.12) по компоненту q_j вектора q в точке $q = q_0$, в результате чего получим:

$$\alpha_{iqj}U_i + \alpha_i V_{iqj} = N_{qj}V_i + NV_{iqj}, \qquad (П.4.13)$$

$$\alpha_{iqj}(V^T)^i + \alpha_i (V^T)^i_{qj} = (U^T)^i_{qj} N + (U^T)^i N_{qj}. \qquad (П.4.14)$$

Напомним, что свойство ортогональности сингулярных базисов в $V(q)$ и $U(q)$ для любого q может быть записано в форме

$$(V^T(q))^l V_i(q) = \delta_{li}; \;\; (U^T(q))^l U_i(q) = \delta_{li}. \qquad (П.4.15)$$

Дифференцирование по q_i в точке $q = q_0$ соотношения (П.4.15) дает

$$(V^T)^l_{qj} V_i + (V^T)^l V_{iqj} = 0; \;\; (U^T)^l_{qj} U_i + (U^T)^l U_{iqj} = 0. \qquad (П.4.16)$$

Для случая $l = i$ соотношения (П.4.16) приводят к равенствам

$$(V^T)^i_{qj} V_i + (V^T)^i V_{iqj} = 0; \;\; (U^T)^i_{qj} U_i + (U^T)^i U_{iqj} = 0. \qquad (П.4.17)$$

Для вычисления функции чувствительности α_{iqj} i-го сингулярного числа $\alpha_i(q)$ к вариации умножим выражения (П.4.13) на $(U^T)^i$ слева, а (П.4.14) на V_i справа, затем учтем соотношения (П.4.12) и (П.4.11), а также (П.4.17), тогда для α_{iqj} получим:

$$\alpha_{iqj} = (U^T)^i N_{qj} V_i = (U^T N_{qj} V)_{ii}. \qquad ■ \quad (П.4.18)$$

Доказательство утверждения 2.10. Для доказательства утверждения введем в рассмотрение агрегированную автономную систему с составным вектором состояния $\tilde{x} = col\{x, z\}$, для которого в силу (2.137) и (2.138) оказываются справедливыми соотношения:

$$R_x(\tau); \;\; \tilde{x}(t) = col\{x(0), z(0)\}; \tag{П.4.19}$$

$$x(t) = \tilde{C}_x \tilde{x}(t); y(t) = \tilde{C}_y \tilde{x}(t); \;\; \Sigma(t) = \tilde{C}_\Sigma \tilde{x}(t); \;\; z(t) = \tilde{C}_z \tilde{x}(t), \tag{П.4.20}$$

где

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} F & GP \\ \hline 0 & \Gamma \end{array}\right]; \tag{П.4.21}$$

$$\tilde{C}_x = \left[I_{n\times n} \mid 0_{l\times l}\right]; \tilde{C}_y = \left[C \mid 0_{m\times l}\right]; \tilde{C}_\Sigma = \left[-C \mid P\right]; \tilde{C}_z = \left[0_{n\times n} \mid I_{l\times l}\right]. \tag{П.4.22}$$

Тогда для векторных переменных систем (2.137), (2.138) оказываются справедливыми представления:

$$x(t) = \tilde{C}_x e^{\tilde{F}t} \tilde{x}(0); y(t) = C_x x(t); \;\; \Sigma(t) = \tilde{C}_\Sigma e^{\tilde{F}t} \tilde{x}(0). \tag{П.4.23}$$

Ключевым моментом в соотношениях систем (П.4.23) является вычисление матричной функции $e^{\tilde{F}t}$, для чего докажем следующую лемму.

Лемма 1П.4. Пусть скалярный ряд

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_\rho \alpha^\rho + \ldots \tag{П.4.24}$$

порождает матричный ряд

$$f(\tilde{F}) = a_0 I + a_1 \tilde{F} + a_2 \tilde{F}^2 + \ldots + a_\rho \tilde{F}^\rho + \ldots \;\;, \tag{П.4.25}$$

где матрица $\tilde{F}$ имеет вид (П.4.21), причем его матричные компоненты связаны уравнением Сильвестра (2.139):

$$T\Gamma - FT = GP, \tag{П.4.26}$$

тогда для $f(\tilde{F})$ можно записать

$$f(\tilde{F}) = \left[\begin{array}{c|c} f(F) & Tf(\Gamma) - f(F)T \\ \hline 0 & f(\Gamma) \end{array}\right]. \tag{П.4.27}$$

Доказательство леммы использует представление матрицы (П.4.21) на основе (П.4.26) в форме

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{c|c} F & T\Gamma - FT \\ \hline 0 & \Gamma \end{array}\right] \tag{П.4.28}$$

для целей конструирования степенных представлений этой матрицы, что приводит их к виду

$$\widetilde{F}^2=\left[\begin{array}{c:c} F & T\Gamma-FT \\ \hdashline 0 & \Gamma \end{array}\right]^2=\left[\begin{array}{c:c} F^2 & FT\Gamma-F^2T+T\Gamma^2-FT\Gamma \\ \hdashline 0 & \Gamma^2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} F^2 & T\Gamma^2-AF^2T \\ \hdashline 0 & \Gamma^2 \end{array}\right],$$

$$\widetilde{F}^3=\widetilde{F}^2\widetilde{F}=\left[\begin{array}{c:c} F^3 & F^2T\Gamma-F^3T+T\Gamma^3-F^2T\Gamma \\ \hdashline 0 & \Gamma^3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} F^3 & T\Gamma^3-F^3T \\ \hdashline 0 & \Gamma^3 \end{array}\right],$$

M

$$\widetilde{F}^\rho=\widetilde{F}^{\rho-1}\widetilde{F}=\left[\begin{array}{c:c} F^\rho & T\Gamma^\rho-F^\rho T \\ \hdashline 0 & \Gamma^\rho \end{array}\right]. \tag{П.4.29}$$

Подстановка полученных степеней $\widetilde{F}^\rho$ матрицы $\widetilde{F}$ в ряд (П.4.25) и последующая группировка блоковых клеток матрицы $f(\widetilde{F})$ приводит к (П.4.27). □

Применим положения леммы к матричной экспоненте $e^{\widetilde{F}t}$, тогда получим

$$e^{\widetilde{F}t}=\left[\begin{array}{c:c} e^{Ft} & Te^{\Gamma t}-e^{Ft}\Gamma \\ \hdashline 0 & e^{\Gamma t} \end{array}\right]. \tag{П.4.30}$$

Если теперь (П.4.30) подставить в (П.4.23), а также учесть представление (П.6.22) матриц $\mathcal{C}^0_x$, $\mathcal{C}^0_\Sigma$, $\mathcal{C}^0_z$, то получим систему соотношений (2.140)–(2.142). ■

Доказательство утверждения 2.11. По определению (2.21), для матрицы $S_x(j\omega)$ спектральной плотности стохастической составляющей вектора состояния $x(t)$ можно записать:

$$S_x(j\omega)\overset{\Delta}{=}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\omega. \tag{П.4.31}$$

Если в (П.4.31) подставить выражение для корреляционной матрицы $R_x(\tau)$ с учетом знака τ , то получим:

$$S_x(j\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{-F\tau}D_xe^{-j\omega\tau}d\tau+\int_0^{\infty}e^{F\tau}D_xe^{-j\omega\tau}d\tau=$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{-(F+j\omega I)\tau}D_xd\tau+\int_0^{\infty}e^{(Fj\omega I)\tau}D_xd\tau= \tag{П.4.32}$$
$$=\left\{-(F+j\omega I)(F-j\omega I)^{-1}\right\}D_x$$

Умножим выражение в фигурных скобках (П.4.32) справа на единичную матрицу, записанную в форме

$$I=(F+j\omega I)(F-j\omega I)(F^2+\omega^2 I)^{-1}, \tag{П.4.32.1}$$

тогда получим с учетом коммутативности первых двух членов

$$S_x(j\omega) = -2F(F^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x . \qquad (\text{П.4.33})$$

Для матрицы спектральных плотностей $S_y(j\omega)$ стохастической составляющей выхода системы (2.137) получим

$$S_y(j\omega) = CS_x(j\omega)C^T = -2CF(A^2 + \omega^2 I)^{-1} D_x C^T . \qquad ■(\text{П.4.34})$$

Доказательство утверждения 2.12. Запишем линейную алгебраическую задачу (ЛАЗ) (2.126) с учетом представления матричного и векторных компонентов:

$$\kappa + \Delta\kappa = (N + \Delta N)(\chi + \Delta\chi) . \qquad (\text{П.4.35})$$

Перейдем на основе (П.4.35) и (2.161) к представлению ЛАЗ в вариациях, для чего вычтем из левых и правых частей (П.4.35) соответственно левую и правую части (2.126). В результате получим матричное уравнение в вариациях (2.162). Если в (2.162) осуществить переход к согласованным векторным и матричным нормам, то получим неравенство

$$\|\Delta\kappa\| \le \|N\| \cdot \|\Delta\chi\| + \|\Delta N\| \cdot \|\chi\| + \|\Delta N\| \cdot \|\Delta\chi\| . \qquad (\text{П.4.36})$$

Правая часть равенства (П.6.36) представляет собой мажоритарную оценку (оценку сверху) нормы $\|\Delta\kappa\|$ абсолютной погрешности (вариации) $\Delta\kappa$ решения ЛАЗ (2.161). Сконструируем теперь оценку относительной погрешности $\delta\kappa$ (2.163) как функцию относительных погрешностей δ_N и δ_χ (2.163) компонентов N и χ задачи. С этой целью в предположении невырожденности матрицы N запишем исходную ЛАЗ (2.161) в инверсной форме:

$$\chi = N^{-1}\kappa , \qquad (\text{П.4.37})$$

откуда в согласованных нормах получим

$$\|\chi\| \le \left\|N^{-1}\right\| \cdot \|\kappa\| . \qquad (\text{П.4.38})$$

Разрешим неравенство (П.4.38) относительно $\|\kappa\|$ – нормы вектора κ, тогда получим:

$$\frac{\|\Delta\kappa\|}{\|\kappa\|} \le \frac{1}{\left\|N^{-1}\right\|}\|\chi\| . \qquad (\text{П.4.39})$$

Разделим левую и правую части неравенства (П.4.36) соответственно на левую и правую части неравенства (П.4.39), тогда получим неравенство:

$$\frac{\|\Delta\kappa\|}{\|\kappa\|} \le \|N\|\cdot\|N^{-1}\| \left\{ \frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|} + \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|} + \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|}\cdot\frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|} \right\}. \tag{П.4.40}$$

Если в неравенстве (П.4.40) учесть (2.163) и (2.165), то получим неравенство (2.164) ■

Доказательство утверждения 2.13. Для доказательства воспользуемся возмущенной версией матричного условия подобия (2.173), которая принимает вид

$$(M + \Delta M)(\Lambda + \Delta\Lambda) = (F + \Delta F)(M + \Delta M). \tag{П.4.41}$$

Если ограничиться вариацией (погрешностью) ΔF, позволяющей допустить справедливость малости членов $\Delta M \Delta\Lambda$ и $\Delta F\, \Delta M$, то матричное уравнение (П.4.41) с учетом (2.173) приводит к матричному линейному уравнению относительно вариации компонентов, записываемому в виде

$$M\Delta\Lambda + \Delta M\Lambda = \Delta F M + F\Delta M. \tag{П.4.42}$$

Перейдем в (П.6.42) к столбцовой форме записи, тогда получим:

$$M(\Delta\Lambda)_i + \Delta M\Lambda_i = \Delta F M_i + F(\Delta M)_i; i = \overline{1,n}. \tag{П.4.43}$$

В силу структуры столбцов $\Lambda_i = \left[0_{i-1}^T, \lambda_i, 0_{n-i}^T\right]^T$ и $\Delta\Lambda_i = \left[0_{i-1}^T, \Delta\lambda_i, 0_{n-i}^T\right]^T$ векторно-матричное уравнение (П.4.43) принимает вид

$$\Delta\lambda_i M_i = \Delta F M_i + (F - \lambda_i I)(\Delta M_i); i = \overline{1,n}. \tag{П.4.44}$$

Для разрешения уравнения (П.4.44) относительно вариации $\Delta\lambda_i$ собственного значения λ_i матрицы F воспользуемся представлением матричного условия подобия (2.173) в эквивалентной форме:

$$\Lambda M^{-1} = M^{-1}F. \tag{П.4.45}$$

Строчная форма представления (П.4.45):

$$\Lambda^i M^{-1} = (M^{-1})^i F, \tag{П.4.46}$$

где (Λ^i, M^i) – i-я строка матрицы (Λ, M). В силу структуры строки $\Lambda^i = \left[0_{i-1}^T, \lambda_i, 0_{n-i}^T\right]$ матричное соотношение (П.4.46) приобретает строчное векторно-матричное представление:

$$(M^{-1})^i (F - \lambda_i I_i) = 0. \tag{П.4.47}$$

Учтем теперь, что матричное соотношение $M^{-1}M = I$ имеет эквивалентное строчно-столбцовое представление

$$(M^{-1})^j M_i = \delta_{ji}, \qquad (П.4.48)$$

где δ_{ji} – символ Кронекера [2.14, 2.29]. Умножим матричное уравнение (П.4.44), разрешенное относительно вариации $\Delta\lambda_i$, на i-ю строку M^i матрицы M слева. Тогда с учетом (П.4.47) и (П.4.48) для $\Delta\lambda_i$ получим

$$\Delta\lambda_i = (M-1)^i \Delta F M_i = (M^i \Delta F M)_{ii}. \qquad (П.4.49)$$

Сконструируем вектор $\Delta\lambda$, составленный из вариаций $\Delta\lambda_i (i = \overline{1,n})$, тогда с учетом (П.4.49) получим представление этого вектора

$$\Delta\lambda = col\{\Delta\lambda_i; i = \overline{1,n}\} = col\{(M^{-1}\Delta F M)_{ii}; i = \overline{1,n}\}. \qquad (П.4.50)$$

Переход в (П.4.50) к согласованным нормам позволяет построить цепочку из равенств и неравенств:

$$\begin{aligned}&\|\Delta\lambda\| = \left\|col\{(M^{-1}\Delta F M)_{ii}; i = \overline{1,n}\}\right\| = \left\|diag\{(M^{-1}\Delta F M)_{ii}; i = \overline{1,n}\}\right\| \le \\ &\le \left\|M^{-1}\Delta F M\right\| \le \left\|M^{-1}\right\| \cdot \|\Delta F\| \cdot \|M\| = C\{M\}\|\Delta F\|.\end{aligned} \quad ■ \ (П.4.51)$$

Доказательство утверждения 2.14. Пусть D_j – собственный вектор матрицы A, тогда оказывается справедливой цепочка равенств:

$$AD_j = \lambda_j D_j, \qquad (П.4.52)$$

$$A^2 D_j = AAD_j = \lambda_j AD_j = \lambda_j^2 D_j, \qquad (П.4.53)$$

$$\vdots$$

$$A^{n-1} D_j = A^{n-2} AD_j = \lambda_j A^{n-2} D_j = \ldots = \lambda_j^{n-1} D_j. \qquad (П.4.54)$$

Если теперь с использованием (П.4.52)–(П.4.54), а также (2.190) сформировать матрицу управляемости сепаратного канала управления (2.185), то получим

$$W_{\chi lj} = \left[C^l D_j \mid \lambda_j C^l D_\chi \mid \lambda_j^2 C^l D_j \mid \ldots \mid \lambda_j^{n-1} C^l D_j\right] = row\{(W_{\chi lj})_i = 0; i = \overline{1,n}\}$$

■ (П.4.55)

Доказательство утверждения 2.15. Доказательство утверждения опирается на свойство матричной функции $f(A)$ от квадратной матрицы A сохранять геометрический спектр матрицы так, что выполняются равенства

$$A\xi_j = \lambda_j \xi_j, f(A)\xi_i = f(\lambda_j)\xi_j. \qquad (П.4.56)$$

Применим (П.4.56) к (2.191), в котором собственным вектором ξ_j матрицы является столбец D_j, а функцией от матрицы $f(A)$ является резольвента $(sI - A)^{-1}$. Таким образом, в силу (П4.56), а также условий утверждения 2.15 становится справедливой запись

$$(sI - A)^{-1} D_j = (s - \lambda_j)^{-1} D_j. \qquad (\text{П}.4.57)$$

Подстановка (П.4.57) в (2.191) приводит к цепочке соотношений:

$$\Phi_{\chi l \xi j}(s) = C^l (sI - A)^{-1} D_j = C^l (s - \lambda_j)^{-1} D_j = (s - \lambda_j)^{-1} C^l D_j = (s - \lambda_j)^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$\blacksquare \quad (\text{П}.4.58)$$

Доказательство утверждения 2.16. Пусть C^l – левый собственный вектор матрицы A, соответствующий ее собственному значению λ_l, тогда выполняется система равенств:

$$C^l A = \lambda_l C^l, \qquad (\text{П}.4.59)$$

$$C^l A^2 = C^l A A = \lambda_l C^l A = \lambda_l^2 C^l, \qquad (\text{П}.4.60)$$

$$\vdots$$

$$C^l A^{n-1} = C^l A A^{n-2} = \lambda_l C^l A^{n-2} = \ldots = \lambda_l^{n-1} C^l. \qquad (\text{П}.4.61)$$

Если теперь с использованием (П.4.59) – (П.4.61), а также (2.190) сформировать матрицу управляемости "вход-выход" $W_{\chi lj}$ (2.185), то получим

$$W_{\chi lj} = \left[C^l D_j \;\vdots\; \lambda_l C^l D_j \;\vdots\; \lambda_l^2 C^l D_j \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; \lambda_l^{n-1} C^l D_j \right] = row\left\{ (W_{\chi lj})_i = 0; i = \overline{1,n} \right\}.$$

$$\blacksquare \quad (\text{П}.4.62)$$

Доказательство утверждения 2.1.4. Свободное движение $x(t) = x(t, x(0), g(t) \equiv 0) = x(t, x(0))$ системы (2.137) задается выражением

$$x(t, x(0)) = e^{Ft} x(0). \qquad (\text{П}.4.63)$$

Если в (П.4.63) осуществить переход к евклидовым векторным нормам и согласованным с ними матричным нормам, то на основании свойств SVD-разложения матричной экспоненты получим цепочку равенств и неравенств

$$\| x(t, x(0)) \| = \| e^{Ft} x(0) \| = \alpha_M \{ e^{Ft} \} \| x(0) \| = \| e^{Ft} \| \| x(0) \|. \qquad (\text{П}.4.64)$$

Воспользуемся свойством матричной функции от матрицы $f(F)$ сохранять отношение матричного подобия $M\Lambda = FM$, где $\Lambda = diag\{ \lambda_i; i = \overline{1,n} \}$, записываемого в одной из форм

$$Mf(\Lambda) = f(F)M, \quad f(F) = Mf(\Lambda)M^{-1}. \qquad (\text{П}.4.65)$$

Тогда в силу (П.4.64) оказывается справедливым равенство

$$e^{Ft} = Me^{\Lambda t} M^{-1} = Mdiag\{ e^{\lambda_i t};\; i = \overline{1,n} \} M^{-1}. \qquad (\text{П}.4.66)$$

Подстановка (П.4.66) в (П.4.64) для $x(t, x(0))$ дает

$$\begin{aligned}\|x(t,\ x(0))\| &= \|Me^{\Lambda t}M^{-1}x(0)\| \le \|M\|\cdot\|e^{\Lambda t}\|\cdot\|M^{-1}\|\cdot\|x(0)\| = \\ &= C\{M\}\|e^{\Lambda t}\|\cdot\|x(0)\| = \beta_M e^{-\lambda_M t}\cdot\|x(0)\|,\end{aligned} \qquad (П.4.67)$$

где $\beta_M = C\{M\}$; $\lambda_M = \min\limits_i\{|\mathrm{Re}\lambda_i|\}$. ■

Доказательство утверждения 3.1. Зададим модальную модель с матрицами (Γ, H) в форме автономной системы

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t); \qquad z(0); \ \eta(t) = Hz(t), \qquad (П.4.68)$$

а непрерывный ОУ с тройкой матриц (A, B, C) – в форме (2.39)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \ x(0); \ y(t) = Cx(t). \qquad (П.4.69)$$

Потребуем, чтобы управление $u(t)$ обеспечивало при выполнении условия $x(0) = Mz(0)$ подобие процессов по вектору $x(t)$ состояния ОУ процессам по вектору $z(t)$ состояния ММ, записываемое в форме

$$x(t) = Mz(t), \quad \forall t, \qquad (П.4.70)$$

где $M - (n\times n)$ – неособая матрица подобия так, что существует M^{-1}.

Дифференцирование (П.4.70) по t дает равенство

$$\dot{x}(t) = M\dot{z}(t). \qquad (П.4.71)$$

Подстановка в (П.4.71) выражений (П.4.68) и (П.4.69) приводит с использованием (П.4.70) к выражению

$$Bu(t) = (M\Gamma - AM)z(t), \qquad (П.4.72)$$

которое может быть разрешено относительно управления $u(t)$ в функции $z(t)$ состояния ММ:

$$u(t) = \left(B^T B\right)^{-1} B^T(M\Gamma - AM)z(t). \qquad (П.4.73)$$

Таким образом, (П.4.73) является решением задачи модального управления, обеспечивающего выполнение векторного подобия (П.4.70) в форме прямого программного управления программным задатчиком желаемых траекторий в ОУ (П.4.69), порождаемых множеством начальных состояний $x(0)$. Программным задатчиком является ММ (П.4.68) с начальным состоянием $z(0) = M^{-1}x(0)$ с прямой связью по вектору состояния $z(t)$ с матрицей связей

$$K_z = (B^T B)^{-1} B^T(M\Gamma - AM). \qquad (П.4.74)$$

Если пара матриц (Γ, H) полностью наблюдаема, то прямая связь по вектору $z(t)$ состояния ММ может быть заменена на прямую связь по вектору $\eta(t)$ выхода ММ, для чего на матрицу M подобия необходимо наложить ограничение в форме матричного соотношения, являющегося уравнением Сильвестра

$$M\Gamma - AM = -BH\,. \tag{П.4.75}$$

Подстановка (П.4.75) в закон (П.4.72) дает его реализацию в форме

$$u(t) = -(B^T B)^{-1} B^T BHz(t) = -Hz(t)\,. \tag{П.4.76}$$

Подставим теперь задачу поиска модального управления в форме отрицательной обратной связи по вектору состояния $x(t)$ ОУ (2.3а), (П.4.69) с матрицей связей K так, что она записывается в форме

$$u(t) = -Kx(t). \tag{П.4.77}$$

Нетрудно видеть, что, если в (П.4.76) подставить (П.4.70), то получим матричное соотношение

$$H = KM, \tag{П.4.78}$$

из которого следует (3.1). Подставим (П.4.78) в уравнение Сильвестра (3.2), (П.4.75), тогда с учетом (3.3) получаем матричное условие подобия матриц Γ и F в форме (3.4).

Теперь докажем корректность требования непересекаемости алгебраических векторов $\sigma\{A\} \mathrm{I}\ \sigma\{\Gamma\} = 0$ собственных значений матрицы A и Γ. Для этих целей предположим, что матрица Γ задана в диагональной форме:

$$\Gamma = \Lambda = diag\{\lambda_i;\ i = \overline{1,n}\}, \tag{П.4.79}$$

так что матричное уравнение Сильвестра (3.2), (П.4.75) примет вид

$$M\Lambda - AM = -BH\,. \tag{П.4.80}$$

Решим это уравнение, для чего запишем его в столбцовой форме:

$$M\Lambda_i - AM_i = -BH_i;\ i = \overline{1,n}. \tag{П.4.81}$$

Для случая матрицы $\Gamma = \Lambda$ простой структуры столбец Λ_i имеет вид

$$\Lambda_i = \left[0_{i-1}^T \mid \lambda_i 0_{n-i}^T\right]^T, \tag{П.4.82}$$

подстановка которого в (П.6.81) дает представление последнего в форме

$$(\lambda_i \mathrm{I} - A)M_i = -BH_i, \tag{П.4.83}$$

откуда для матрицы M получим

$$M = row\left\{M_i = -(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1} BH_i;\ i = \overline{1,n}\right\}. \tag{П.4.84}$$

Таким образом, только в случае выполнения условия $\sigma\{\Gamma\} \cap \sigma\{A\} = 0$ матричные блоки $(\lambda_i \mathrm{I} - A)$; $i = \overline{1,n}$ оказываются обратимыми, а, следовательно, существует решение матричного уравнения Сильвестра (3.2), (П.4.75).

И, наконец, покажем справделивость требования управляемости пары (A, B). Для этих целей воспользуемся разложением Фаддеева–Леверье матрицы $(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1}$ в (П.4.84), которое имеет вид

$$\begin{gathered}(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1} = \frac{1}{d_n(\lambda_i)} \times \\ \times \left[d_{n-1}(\lambda_i)\mathrm{I} + d_{n-2}(\lambda_i)A + d_{n-3}(\lambda_i)A^2 + \ldots + d_0(\lambda_i)A^{n-1}\right],\end{gathered} \tag{П.4.85}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&d_n(\lambda_i) = \det(\lambda \mathrm{I} - A) = \lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + a_2\lambda_i^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda_i + a_n;\\
&d_{n-1}(\lambda_i) = \lambda_i^{n-1} + a_1\lambda_i^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\lambda_i + a_{n-1};\\
&d_{n-2}(\lambda_i) = \lambda_i^{n-2} + a_1\lambda_i^{n-3} + \ldots + a_{n-3}\lambda_i + a_{n-2};\\
&\vdots\\
&d_1(\lambda_i) = \lambda_i + a_1;\\
&d_0(\lambda_i) = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{П.4.86}$$

Введем обозначения

$$\bar{d}_j(\lambda_i) = \frac{d_j(\lambda_i)}{d_n(\lambda_i)};\ j = \overline{0, n-1}. \tag{П.4.87}$$

Используя (П.4.85) и (П.4.87), выражение (П46.85) можно представить в форме

$$(\lambda_i \mathrm{I} - A)^{-1} = \left[\mathrm{I} \,|\, A \,|\, A^2 \,|\ldots|\, A^{n-1}\right] col\left\{\bar{d}_j(\lambda_i);\ j = \overline{n-1,0}\right\}. \tag{П.4.88}$$

Тогда матрица M, записанная в форме (П.4.84), получает представление

$$M = -\left[B \,|\, AB \,|\ldots|\, A^{n-1}B\right] row\left\{col\left[\bar{d}_j(\lambda_i)H_i;\ j = \overline{n-1,0}\right];\ i = \overline{1,n}\right\}. \tag{П.4.89}$$

Из (П.4.89) следует, что $\exists M^{-1}$, если $rang\left[B \,|\, AB \,|\ldots|\, A^{n-1}B\right] = n$, то есть пара (A, B) управляема. ■

Доказательство утверждения 3.3. Зададим желаемую структуру мод $\left\{\lambda_i;\ i = \overline{1,n}\right\}$ и желаемую структуру собственных векторов

$\{\xi_i; i=\overline{1,n}\}$. Сконструируем на λ_i матрицу состояния ММ, заданную в диагональной форме

$$\Gamma = \Lambda = diag\{\lambda_i; i=\overline{1,n}\}. \qquad (П.4.90)$$

Сконструируем матрицу M преобразования подобия в форме

$$M = row\{M_i = \xi_i; i=\overline{1,n}\}. \qquad (П.4.91)$$

Подставим (П.4.90) и (П.4.91) в уравнение Сильвестра (3.2). Решим полученное уравнение относительно матрицы H, при этом, если матрица B удовлетворяет условию (3.7), то для H можно записать

$$H = B^{-1}(AM - M\Lambda). \qquad (П.4.92)$$

Подстановка (П.4.92) в (3.1) приводит к (3.8). ■

Доказательство утверждения 3.4. Доказательство утверждения строится на представлении матричного уравнения Сильвестра (3.2) в форме

$$\left[\overline{M} \mid \tilde{M}\right]\begin{bmatrix} \overline{\Lambda} & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda} \end{bmatrix} - A\left[\overline{M} \mid \tilde{M}\right] = -B\left[\overline{H} \mid \tilde{H}\right], \qquad (П.4.93)$$

которое декомпозируется на два матричных уравнения Сильвестра:

$$\overline{M\Lambda} - A\overline{M} = -B\overline{H}, \quad \tilde{M}\tilde{\Lambda} - A\tilde{M} = -B\tilde{H}. \qquad (П.4.94)$$

Первое из этих уравнений при заданных $\overline{M}$ и $\overline{\Lambda}$ решается относительно матрицы $\overline{H}$ с учетом того, что $rangB = r < n$ в форме

$$\overline{H} = \left(B^T B\right)^{-1}\left(\overline{M\Lambda} - A\overline{M}\right). \qquad (П.4.95)$$

Второе уравнение Сильвестра (П.4.94) при заданных $\left(\tilde{\Lambda}, \tilde{H}\right)$, решается относительно матрицы $\tilde{M}$. Композиция матриц $\left[\overline{H} \mid \tilde{H}\right]$, где $\overline{H}$ имеет вид (П.4.95), и матриц $\left[\overline{M} \mid \tilde{M}\right]$, подставленных в (3.1), дают (3.9). ■

Доказательство утверждения 3.6. Доказательство утверждения опирается на использование неравенства (3.22) и представление матрицы F в форме

$$F = M\Lambda M^{-1}. \qquad (П.4.94)$$

Если в (П.4.94) осуществить переход к матричным нормам, то получим неравенство

$$\|F\| \le \|M\| \cdot \|\Lambda\| \cdot \left\|M^{-1}\right\| = C\{M\}\|\Lambda\|,$$

разрешив которое относительно $\|\Lambda\|$, получим:

$$\|\Lambda\| \geq C^{-1}\{M\}\|F\|. \qquad (\text{П.4.95})$$

Учтем то обстоятельство, что все матричные нормы диагональной матрицы $\|\Lambda\| = \left\|diag\left\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\right\}\right\|$ совпадают с бесконечной нормой $\|\lambda\|_\infty = \left\|col\left\{\lambda_i; i = \overline{1,n}\right\}\right\|$ вектора λ из собственных значений матрицы F так, что (П.4.95) можно записать:

$$\|\lambda\|_\infty = \|\Lambda\| \geq C^{-1}\{M\}\|F\|. \qquad (\text{П.4.96})$$

Если теперь левую часть (3.22) поделить на левую часть (П.4.96), а правую часть (3.22) – на правую часть (П.4.96), то получим:

$$\frac{\|\Delta\Lambda\|}{\|\lambda\|} = \delta_\lambda \leq C^2\{M\}\frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} = C^2\{M\}\delta_F. \qquad \blacksquare(\text{П.4.97})$$

Доказательство утверждения 3.7. Доказательство утверждения основано на использовании (3.24), (П.4.97), а также равенства $\Delta F = \Delta A$, что в итоге позволяет записать неравенство

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\}\frac{\|\Delta F\|}{\|F\|}. \qquad (\text{П.4.98})$$

Если теперь матричное соотношение (П.4.94) разрешить относительно матрицы Λ в форме

$$\Lambda = M^{-1}FM, \qquad (\text{П.4.99})$$

затем в (П.6.99) перейти к матричным нормам, то получим неравенство

$$\|\Lambda\| \leq \left\|M^{-1}\right\| \cdot \|F\| \cdot \|M\| = C\{M\}\|F\|. \qquad (\text{П.4.100})$$

Неравенство (П.4.99) может быть записано в форме

$$\|F\| \geq C^{-1}\{M\}\|\Lambda\|. \qquad (\text{П.4.101})$$

Нетрудно видеть, что неравенства (П.4.98) и (П.4.101) позволяют построить цепочку неравенств:

$$\delta_\lambda \leq C^2\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\|F\|} \leq C^3\{M\}\frac{\|\Delta A\|}{\|\Lambda\|}. \qquad (\text{П.4.102})$$

Если в (П.4.102) ограничиться крайними слева и справа элементами неравенства, то получим (3.26). ■

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Элементы интервальных вычислений

Определение П.5.1. Пусть числа $\underline{\rho}$, $\overline{\rho}$ такие, что f, $\overline{\rho} \in R$ и при этом $\underline{\rho} \le \overline{\rho}$, задают вещественное число ρ в параметризованной относительным параметром $q \in [0,1]$ форме

$$\rho = \underline{\rho}(1-q) + \overline{\rho}q\,, \tag{(П.5.1)}$$

Тогда вещественное интервальное число $[\rho]$ образуется экстремальными реализациями этого числа

$$\underline{\rho} = \min_q\{\rho(q); q \in [0,1]\},\ \overline{\rho} = \max_q\{\rho(q); q \in [0,1]\} \tag{П.5.2}$$

так, что оно может быть записано в форме

$$[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}]. \quad \square \tag{П.5.3}$$

Определение П.5.2. Интервальным комплексным числом $[\gamma = \rho + j\delta]$ называется комплексное число, у которого интервальными являются вещественная и мнимая части так, что становится справедливым представление

$$[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta]\,, \tag{П.5.4}$$

где $[\rho] = [\underline{\rho}, \overline{\rho}]$; $[\delta] = [\underline{\delta}, \overline{\delta}]$. □

Ниже, в основном, рассматриваются вещественные интервальные числа.

Определение П.5.3. Интервальным вектором $[x]$ размерности n называется вектор с интервальными компонентами $[x_i] = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ так, что становится справедливой запись

$$[x] = col\{[x_i]; i = \overline{1,n}\} \quad \square \tag{П.5.5}$$

Определение П.5.4. Интервальной $(n \times m)$-матрицей $[A]$ называется матрица, составленная из интервальных скалярных компонентов

$$[A_{ij}] = [\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}],\ [A[= row\{col([A_{ij}]; \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}); j = \overline{1,m}\} \tag{П.5.6}$$

при этом оказывается справедливым представление

$$[A] = [\underline{A}, \overline{A}]\,, \tag{П.5.7}$$

где

$$\begin{aligned} \underline{A} &= row\{col(\underline{A}_{ij}; i = \overline{1,n}); j = \overline{1,m}\}, \\ \overline{A} &= row\{col(\overline{A}_{ij}; i = \overline{1,n}); j = \overline{1,m}\} \end{aligned} \quad \square \tag{П.5.8}$$

Определение П.5.5. Произведением

$$[a]\cdot[b]=[c] \tag{П.5.9}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[c]=[\underline{c},\overline{c}]$, граничные значения которого $\underline{c}$ и $\overline{c}$ вычисляются в силу соотношений

$$\underline{c}=\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}, \tag{П.5.10}$$

$$\overline{c}=\max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}. \quad \square \tag{П.5.11}$$

Определение П.5.6. Суммой

$$[a]+[b]=[d] \tag{П.5.12}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[d]=[\underline{d},\overline{d}]$, граничные значения которого $\underline{d}$ и $\overline{d}$ вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\underline{d}&=\min\{\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\overline{b},\overline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}\}=\underline{a}+\underline{b},\\ \overline{d}&=\max\{\underline{a}+\underline{b},\underline{a}+\overline{b},\overline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}\}=\overline{a}+\overline{b}.\end{aligned} \quad \square \tag{П.5.13}$$

Определение П.5.7. Частным от деления

$$\frac{[a]}{[b]}=[f] \tag{П.5.14}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[f]=[\underline{f},\bar{f}]$, граничные значения которого $\underline{f}$ и $\bar{f}$ вычисляются в силу выражений

$$\begin{aligned}\underline{f}&=\min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\},\\ \bar{f}&=\max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right\}.\end{aligned} \quad \square \tag{П.5.15}$$

Определение П.5.8. Разностью

$$[a]-[b]=[h] \tag{П.5.16}$$

интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называется интервальное число $[h]=[\underline{h},\overline{h}]$, граничные значения которого $\underline{h}$ и $\overline{h}$ определяются с помощью выражений

$$\begin{aligned}\underline{h}&=\min\{\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\};\\ \overline{h}&=\max\{\underline{a}-\underline{b},\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}\}.\end{aligned} \quad \square \tag{П.5.17}$$

Определение П.5.9. Фиксированное число g имеет интервальное представление $[g]=[\underline{g},\overline{g}]$, которое характеризуется выполнением равенства

$$\underline{g}\equiv\overline{g}\,. \qquad \square \qquad (П.5.18)$$

Утверждение П.5.1. Частное от деления интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ на самое себя является интервальное число $[1_a]=[\underline{1}_a,\overline{1}_a]$

$$\frac{[a]}{[a]}=[1_a], \qquad (П.5.19)$$

граничные значения которого $\underline{1}_a$ и $\overline{1}_a$ в силу (П.5.15) вычисляются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\underline{1}_a&=\min\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}},\frac{\underline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\},\\ \overline{1}_a&=\max\left\{\frac{\underline{a}}{\overline{a}},\frac{\underline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\underline{a}},\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right\}.\end{aligned} \qquad \blacksquare \qquad (П.5.20)$$

Утверждение П.5.2. Разностью интервальных чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$

$$[a]-[a]=[0_a] \qquad (П.5.21)$$

является интервальное число $[0_a]=[\underline{0}_a,\overline{0}_a]$, граничные значения которого $\underline{0}_a$ и $\overline{0}_a$ в силу (П.5.17) задаются соотношениями

$$\begin{aligned}\underline{0}_a&=\min\{\underline{a}-\underline{a},\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a}\},\\ \overline{0}_a&=\max\{\underline{a}-\underline{a},\underline{a}-\overline{a},\overline{a}-\overline{a},\overline{a}-\underline{a}\}.\end{aligned} \qquad \blacksquare \qquad (П.5.22)$$

Определение П.5.10. Медианой $mid[a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ называется фиксированное число a_0, задаваемое соотношением

$$mid[a]=a_0=0.5(\overline{a}+\underline{a}). \qquad \square \qquad (П.5.23)$$

Определение П.5.11. Интервальным компонентом $wid[a]$ интервального числа $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ называется интервальное число $[\Delta a]=[\underline{\Delta a},\overline{\Delta a}]$, граничные значения которого $\underline{\Delta a}$ и $\overline{\Delta a}$ задаются с помощью соотношений

$$\underline{\Delta a}=\underline{a}-a_0,\ \overline{\Delta a}=\overline{a}-a_0. \qquad (П.5.24)$$

так, что $wid[a]=[\Delta a]=[\underline{\Delta a}=\underline{a}-a_0,\ \overline{\Delta a}=\overline{a}-a_0]$. $\square$

Утверждение П.5.3. Интервальное число $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ в силу (П.5.23), (П.5.24), а также (П.5.13) и (П.5.18) представимо аддитивной композицией

$$[a]=a_0+[\Delta a], \qquad (\text{П.5.25})$$

где $a_0 = mid[a]$, $[\Delta a]=wid[a]$. ■

Определение П.5.12. Медианой $mid[a]$ интервальной $(n\times m)$ – матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ называется матрица A_0 с фиксированными скалярными компонентами A_{oij}

$$A_0 = row\left\{col\left(A_{oij};\ i=\overline{1,n}\right);\ j=\overline{1,m}\right\}, \qquad (\text{П.5.26})$$

где элементы A_{oij} матрицы A_0 задаются соотношением

$$A_{oij}=mid\left\{[A_{ij}]=[\underline{A}_{ij},\ \overline{A}_{ij}]\right\}=0.5\left(\underline{A}_{ij}+\overline{A}_{ij}\right). \quad \square \qquad (\text{П.5.27})$$

Определение П.5.13. Интервальным матричным компонентом $wid[A]$ интервальной матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ называется интервальная матрица $[\Delta A]=[\underline{\Delta A},\overline{\Delta A}]$, граничные реализации которой $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta A}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \underline{\Delta A} &= \underline{A}-A_0 = col\left\{row\left(\underline{\Delta A_{ij}}=\underline{A_{ij}}-A_{0ij};\ i=\overline{1,n}\right);\ j=\overline{1,m}\right\}, \\ \overline{\Delta A} &= \overline{A}-A_0 = col\left\{row\left(\overline{\Delta A_{ij}}=\overline{A}_{ij}-A_{0ij};\ i=\overline{1,n}\right);\ j=\overline{1,m}\right\}. \end{aligned} \qquad (\text{П.5.28})$$

так, что $wid[A]=[\Delta A]=[\underline{\Delta A}=\underline{A}-A_0,\ \overline{\Delta A}=\overline{A}-A_0]$. □

Утверждение П.5.4. Интервальная $(n\times m)$-матрица $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ в силу (П.5.26), (П.5.28), а также (П.5.27) и (П.5.8) представима в аддитивной форме

$$[A]=A_0+[\Delta A], \qquad (\text{П.5.29})$$

где $A_0 = mid[A]$, $[\Delta A]=wid[A]$. ■

Определение П.5.14. Произведением интервальных $(n\times m)$-матрицы $[A]=[\underline{A},\overline{A}]$ и $(m\times k)$-матрицы $[B]=[\underline{B},\overline{B}]$

$$[A]\times[B]=[C] \qquad (\text{П.5.30})$$

называется интервальная $(n\times k)$-матрица $[C]=[\underline{C},\overline{C}]$ с интервальными скалярными элементами $[C_{il}]=[\underline{C}_{il},\overline{C}_{il}]$, вычисляемыми в силу соотношений

$$[C_{il}]=\sum_{j=1}^{m}\left[A_{ij}\right]\cdot\left[B_{jl}\right];\ i=\overline{1,n};\ l=\overline{1,k}, \qquad (\text{П.5.31})$$

где произведение $\lfloor A_{ij} \rfloor \cdot \lfloor B_{jl} \rfloor$ интервальных чисел определяется в соответствии с (П.5.9)–(П.5.11), а суммирование этих произведений осуществляется в соответствии с (П.5.12), (П.5.13).

Определение П.5.15. Угловой реализацией $(A_c)_\nu$ $(n \times m)$-интервальной матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}] = A_0 + [\Delta A]$, получаемой в результате ν-й выборки $\nu = \overline{1, 2^{nm}}$ из множества мощности, равной (nm) пар $\{\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}\}, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ граничных значений интервальных скалярных компонентов $[A_{ij}]$ матрицы $[A]$, называется матрица

$$(A_c)_\nu = row\{col((A_{cij})_\nu \in \{\underline{A}_{ij}, A_{ij}\}; i = \overline{1, n}\}; j = \overline{1, m}\} \qquad (\text{П.5.32})$$

с фиксированными на этой реализации компонентами. □

Утверждение П.5.5. Пусть $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta \mathrm{A}}]$ – интервальный матричный компонент матрицы $[A]$ в силу факторизации в форме (П.5.29), тогда интервальные компоненты $[\Delta A_{ij}] = [\underline{\Delta A}_{ij}, \overline{\Delta \mathrm{A}}_{ij}]$, $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$, обладают тем свойством, что

$$\left|\underline{\Delta A}_{ij}\right| = \left|\overline{\Delta A}_{ij}\right|, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}, \qquad (\text{П.5.33})$$

которое выполняется в силу (П.5.27), (П.5.28). ■

Утверждение П.5.6. Угловые реализации $(\Delta A_c)_\nu$ и $(\Delta A_c)_\mu$ $(n \times m)$-интервальной матрицы $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta \mathrm{A}}]$ с граничными компонентами $\underline{\Delta A}$ и $\overline{\Delta \mathrm{A}}$ (П.5.28), полученные в результате ν-й и μ-й выборок $\nu, \mu = \overline{1, 2^{mn}}$ в силу (П.5.32) и свойства (П.5.33), обладают равными матричными нормами так, что выполняется равенство

$$\left\|(\Delta A_c)_\upsilon\right\| = \left\|(\Delta A_c)_\mu\right\|; \nu, \mu = \overline{1, 2^{mn}} \qquad \blacksquare \quad (\text{П.5.34})$$

Определение П.5.16. Интервальным полиномом $[D(z)]$ степени n называется полином, коэффициенты которого являются интервальными числами так, что он принимает вид

$$[D(z)] = [a_0]z^n + [a_1]z^{n-1} + [a_2]z^{n-2} + \mathrm{K} + [a_{n-1}]z + [a_n] \qquad (\text{П.5.35})$$

где $[a_i] = [\underline{a}_i, \overline{a}_i]; i = \overline{0, n}$. □

Определение П.5.17. Интервальным характеристическим полиномом (ИХП) $[D(\lambda)]$ интервальной $(n \times n)$-матрицы $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ называется интервальный полином степени n, получаемый в силу определения характеристического полинома произвольной $(n \times n)$-квадратной матрицы

$$\det(\lambda \mathrm{I} - [A]) = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + [a_2]\lambda^{n-2} + \mathrm{K} + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] \quad (\text{П.5.36})$$

так, что

$$[D(\lambda)] = \det(\lambda \mathrm{I} - [A]). \qquad \square$$

Приведем несколько способов вычисления коэффициентов ИХП интервальной $(n \times n)$-матрицы $[A]$.

Способ 1. Способ основан на обобщенной теореме Ф. Виета. Пусть спектр собственных значений интервальной матрицы $[A]$

$$\sigma\{[A]\} = \left\{[\lambda_i] = \left[\underline{\lambda}_i,\ \overline{\lambda}_i\right]:\ \det\left(\lambda \mathrm{I} - [A]\right) = 0;\ i = \overline{1, n}\right\} \qquad (\text{П.5.37})$$

известен, тогда ИХП (П.5.36) представим в форме

$$\left[D(\lambda)\right] = [a_0]\lambda^n + [a_1]\lambda^{n-1} + \ldots + [a_{n-1}]\lambda + [a_n] = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - [\lambda_i]\right), \qquad (\text{П.5.38})$$

где $[a_0] = [1, 1] = 1$.

Обощенная теорема Виета устанавливает связь собственных значений $[\lambda_i]$ с коэффициентами $[a_i]; i = \overline{1, n}$ в форме

$$[a_1] = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -tR[A]; \qquad (\text{П.5.39})$$

$$[a_2] = \sum_{\substack{i1=1\\ i2=2\\ i1<i2}}^{n} [\lambda_{i1}] \cdot [\lambda_{i2}]; \qquad (\text{П.5.40})$$

$$[a_3] = -\sum_{\substack{i1=1\\ i2=2\\ i3=3\\ i1<i2<i3}}^{n} [\lambda_{i1}] \cdot [\lambda_{i2}] \cdot [\lambda_{i3}]; \qquad (\text{П.5.41})$$

$$\vdots$$

$$[a_{n-1}] = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i1=1\\ i2=2\\ \vdots\\ i(n-1)=n-1\\ i1<i2<\ldots<i(m-1)}}^{n} [\lambda_{i1}] \cdot [\lambda_{i2}] \ldots [\lambda_{im-1}]; \qquad (\text{П.5.42})$$

$$[a_n] = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} [\lambda_i]. \qquad \square \qquad (\text{П.5.43})$$

Способ 2. Способ Г. Крамера главных миноров.

$$[a_1] = -tR[A] = -\left[\sum_{i=1}^{n} \underline{A}_{ii},\ \sum_{i=1}^{n} \overline{A}_{ii}\right]; \qquad (\text{П.5.44})$$

$$[a_k] = (-1)^k \sum_{i=1}^{k} [M_{ii}], \qquad (\text{П.5.45})$$

где $[M_{ii}]$ – алгебраическое дополнение (ii)-го элемента $[A_{ii}]$ матрицы $[A]$;

$$[a_n] = (-1)^n \det[A]. \qquad \square \qquad (П.5.46)$$

Способ 3. Способ У.Ж.Ж. Леверье.

$$[a_k] = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}[a_{i-1}]tr[A^{k-i+1}];\ k = \overline{1,n}; \qquad (П.5.47)$$

$$[a_0] = 1. \qquad \square$$

Способ 4. Способ Д.К. Фаддеева:

$$[a_k] = -\frac{1}{k}tr\{[A][H_{k-1}]\};\ k = \overline{1,n}, \qquad (П.5.48)$$

где

$$[H_k] = [A][H_{k-1}] + [a_k]\mathrm{I};\ [H_0] = \mathrm{I}. \qquad \square \qquad (П.5.49)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Свойство строгой положительной вещественности

Рассмотрим передаточную функцию вида

$$H(s) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \Lambda + b_o}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \Lambda + a_0}. \qquad (\text{П}6.1)$$

Критерий строгой положительной вещественности: передаточная функция $H(s)$ является строго положительно вещественной (СПВ-функцией) только в том случае, если

(У1) она не имеет полюсов в области $\mathrm{Re}[s] \geq 0$;

(У2) $\mathrm{Re}[H(j\omega)] > 0$ для всех $-\infty < \omega < \infty$;

(У3) $\lim \omega^2 \,\mathrm{Re}[H(j\omega)] > 0$ при $\omega \to \infty$.

Для пояснения приведенного критерия рассмотрим передаточную функцию апериодического звена первого порядка

$$H_A(s) = \frac{k}{Ts+1}, \qquad (\text{П}6.2)$$

где $k > 0$ – коэффициент усиления, а $T > 0$ – постоянная времени. Покажем, что передаточная функция (П6.2) удовлетворяет условиям (У1)–(У2). Действительно, единственный полюс функции (П6.2) $s = -1/T$ лежит вне области $\mathrm{Re}[s] > 0$. Как известно, частотный годограф апериодического звена первого порядка полностью лежит в четвертом квадранте комплексной плоскости, что гарантирует выполнение условия (У2) (см. рис. П6.1). Наконец, рассмотрим частотную передаточную функцию звена:

$$H_A(j\omega) = \frac{k}{jT\omega + 1} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j\frac{kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Тогда

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^2 \left(\frac{k}{T^2\omega^2 + 1} \right) = \frac{k}{T^2} > 0,$$

что означает выполнение условия (У3).

Таким образом, можно сделать вывод, что СПВ-функции обладают почти такими же частотными свойствами, что и звено первого порядка. Так, их частотные годографы лежат в правой полуплоскости (следовательно, фазовый сдвиг, вносимый динамическим звеном с такой передаточной функцией, не превышает 90^0). Кроме того, скорость убывания вещественной части частотной передаточной функции при $\omega \to \infty$ не быстрее, чем у $1/\omega^2$. Из сделанного вывода видно, что класс строго положительно вещественных передаточных функций является достаточно узким, и далеко не все линейные модели реальных объектов будут удовлетворять условиям (У1)–(У2).

Отметим следующие свойства строго положительно вещественных передаточных функций:

1) если $H(s) = A(s)/B(s)$ является СПВ-функцией, то оба многочлена $A(s)$ и $B(s)$ гурвицевы, а их степени отличаются не больше, чем на единицу;

2) если $H(s)$ является СПВ-функцией, то $1/H(s)$ – также СПВ-функция;

3) если $H_1(s)$ и $H_2(s)$ – СПВ-функции, то $\alpha H_1(s) + \beta H_2(s)$ – также СПВ-функция для любых положительных α и β;

4) если $H_1(s)$ и $H_2(s)$ являются передаточными функциями прямой и отрицательной обратной связи, то передаточная функция замкнутой системы $H(s) = H_1(s)/(1 + H_1(s)H_2(s))$ также является СПВ-функцией.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Свойства многомерных адаптивных систем управления

Для исследования свойств адаптивной системы, состоящей из объекта (4.50), (4.51), эталонной модели (4.53), (4.54), настраиваемого регулятора (4.59) и алгоритма адаптации (4.61), используем функцию Ляпунова

$$V(e,\tilde{\vartheta}) = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{\beta}{2\gamma}\tilde{\vartheta}^T\tilde{\vartheta}. \tag{П7.1}$$

Неизвестный положительный параметр β может быть включен в выражение для функции Ляпунова, так как в теоремах об устойчивости используется только факт существование функции Ляпунова, но не требуется точного вычисления ее значений.

Производная функции (П7.1) в силу уравнений модели ошибки

$$\dot{e} = A_M e + \beta h\omega^T\tilde{\vartheta}, \tag{П7.2}$$

$$\dot{\tilde{\vartheta}} = -\gamma\omega h^T P e \tag{П7.3}$$

имеет вид

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{e}^T P e + \frac{1}{2}e^T P\dot{e} + \frac{\beta}{\gamma}\tilde{\vartheta}^T\dot{\tilde{\vartheta}} =$$
$$= -e^T(A_M^T P + P A_M)e + \beta\tilde{\vartheta}^T\omega h^T P e - \beta\tilde{\vartheta}^T\omega h^T P e = -e^T Q e \le 0.$$

Последнее неравенство означает устойчивость по Ляпунову нулевого состояния равновесия модели ошибки (П7.2), (П7.3) (теорема П2.1 из приложения 2) и справедливость предела (4.63) (теорема П2.4 из приложения 2).

Для исследования свойств нелинейной робастной системы, состоящей из объекта (4.50), (4.51), эталонной модели (4.53), (4.54) и нелинейного регулятора (4.72), используем функцию Ляпунова

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T P e. \tag{П7.4}$$

Подставляя управление (4.72) в уравнение (4.57) и добаляя внешнее возмущение δ, получаем модель ошибки замкнутой системы нелинейного робастного управления

$$\dot{e} = A_M e + \beta h(\omega^T q - \gamma|\omega|^2 h^T P e + \delta). \tag{П7.5}$$

Вычисляя производную функции (П7.4) в силу уравнения (П7.5), получаем

$$\dot{V} = -e^T Q e + \beta q^T\omega h^T P e - \gamma|\omega|^2|h^T P e|^2 + e^T P h\delta.$$

Переходя к нормам и выделяя в правой части неравенства полный квадрат разности, получим:

$$\dot{V} \le -\lambda_Q |e|^2 + \beta |q||\omega||h^T Pe| - \gamma |\omega|^2 |h^T Pe|^2 + |e||Ph|\bar{\delta} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda_Q |e|^2 - \left(\gamma |\omega|^2 |h^T Pe|^2 - \beta |q||\omega||h^T Pe| + \frac{\beta}{4\gamma}|q|^2 \right) + \frac{\beta}{4\gamma}|q|^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\lambda_Q |e|^2 - |e||Ph|\bar{\delta} + \frac{1}{2\lambda_Q}|Ph|^2\,\bar{\delta}^2 \right) + \frac{1}{2\lambda_Q}|Ph|^2\,\bar{\delta}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\lambda_Q |e|^2 - \left(\sqrt{\gamma}\,|\omega||h^T Pe| - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\,|q| \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\lambda_Q}{2}}\,|e| - \frac{1}{\sqrt{2\lambda_Q}}|Ph|\bar{\delta} \right)^2 +$$

$$+\frac{\beta}{4\gamma}|q|^2 + \frac{1}{2\lambda_Q}|Ph|^2\,\bar{\delta}^2,$$

где λ_Q – минимальное собственное значение матрицы Q, а $\bar{\delta}$ – верхняя оценка ограниченного возмущения δ (т.е. $|\delta(t)| \le \bar{\delta}$ для всех $t \ge 0$). Усиливая неравенство, пренебрежем квадратными членами. Окончательно получим

$$\dot{V} \le -\frac{1}{2}\lambda_Q |e|^2 + \frac{\beta}{4\gamma}|q|^2 + \frac{1}{2\lambda_Q}|Ph|^2\,\bar{\delta}^2 \qquad (П7.6)$$

или

$$\dot{V} \le -\frac{\lambda_Q}{\lambda_P}V + \frac{\beta}{4\gamma}|q|^2 + \frac{1}{2\lambda_Q}|Ph|^2\,\bar{\delta}^2 \qquad (П7.7)$$

(переход от выражения (П7.6) к формуле (П7.7) осуществлен с использованием неравенства Релея). Из (П7.6) видно, что при нарушении неравенства (4.73) производная функции Ляпунова становится отрицательной. Это доказывает сходимость ошибки слежения к предельному установившемуся множеству (4.73). Проинтегрировав неравенство (П7.7), получим, что скорость сходимости к предельному множеству является экспоненциальной (решение аналогичной задачи приведено в п. 5.1.4). Наконец, обнулив в выражении (4.73) величину $\bar{\delta}$, убеждаемся, что предельное значение установившейся ошибки может быть сделано произвольно малым за счет увеличения коэффициента нелинейной обратной связи γ.