Министерство образования и науки
Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

Кафедра фотоники и оптоинформатики

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
Часть I. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ВАКУУМЕ

Учебное пособие по дисциплине
«Фотоника и оптоинформатика»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Санкт-Петербург
2005

УДК 538.56
**Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики.
Часть I. Электромагнитные волны в вакууме**
СПб: СПб ГУИТМО, 2005. – 60 с.

На основе уравнений Максвелла систематически изложена теория электромагнитных волн в вакууме с включением актуальных вопросов современной оптики (распространение фронта электромагнитных волн, бесселевы пучки, X-волны, квазиоптическое приближение). Включены задания для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области фотоники и оптоинформатики, а также в других областях оптического профиля.

Учебное пособие одобрено к изданию на заседании кафедры фотоники и оптоинформатики, протокол № 5 от 07.06.2005 г.

Содержание

1. Введение

Основой современной оптики и лазерной физики служит теория электромагнитного поля и электромагнитных волн, существование которых вытекает из уравнений Максвелла. Хотя электромагнитные волны обладают многими чертами, общими с волнами другой природы, следует отметить особую роль электромагнитных волн в физике. Именно скорость света в вакууме служит предельной величиной скорости распространения информации на носителе любой физической природы. Квантовые «единицы» электромагнитного поля – фотоны – принадлежат к числу элементарных частиц, а не «квазичастиц», как волны другой природы (например, фононы для акустических волн). Для распространения электромагнитных волн не требуется присутствия дополнительных сред (необходимых, например, для акустических волн). В этом смысле электромагнитные волны в вакууме элементарны, то есть фундаментальны. Однако, и в вакууме область применимости уравнений Максвелла ограничена, причем более детальное рассмотрение показывает тесную связь теории электромагнитного поля с другими основными разделами физики, прежде всего с квантовой теорией. Вообще говоря, даже вакуум может вести себя как своеобразная оптическая среда.

Хотя уравнения Максвелла являются классическими, сформулированы еще в 1860-х годах и изложены в большом числе учебников и монографий [1-8], появление лазеров и развитие лазерной физики и техники привели к необходимости более подробного анализа некоторых разделов теории электромагнитного поля. Укажем здесь лишь две задачи, ставшие особенно важными в последнее время: (1) распространение фронта электромагнитной волны (в связи с прогрессом в получении предельно коротких импульсов) и (2) квазиоптический подход к задачам дифракции и дисперсии оптических пучков и импульсов (в связи с малой угловой расходимостью лазерного излучения). В данном пособии рассматривается теория электромагнитных волн в вакууме прежде всего в их высокочастотном (оптическом) диапазоне.

Важность классической теории электромагнитных волн в вакууме подчеркивается следующими обстоятельствами:

- Демонстрация свободных электромагнитных полей, для распространения которых наличие среды не обязательно.
- Уравнения электромагнитного поля в вакууме служат основой для вывода уравнений электродинамики сплошной среды (теория Лоренца).
- В ряде случаев структура электромагнитного поля в вакууме и в сплошной среде совпадает. Для весьма высоких частот оптические свойства любых сред такие же, как у вакуума.

Далее приводится достаточно систематическое (но на физическом уровне строгости) изложение классической теории электромагнитных волн в вакууме с включением вопросов, актуальных при описании лазерного излучения. Решение приведенных задач будет способствовать как усвоению теоретического материала, так и развитию практических навыков. Для облегчения понимания в Приложении А собраны основные используемые математические формулы.

2. Уравнения Максвелла и условия их применимости

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \qquad (2.1) \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\;\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \qquad (2.2) \qquad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \qquad (2.3) \qquad \nabla\,\mathbf{H} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0. \qquad (2.4) \qquad \nabla\,\mathbf{E} = 0.$$

Слева и справа – одна и та же система уравнений, справа запись с помощью оператора Гамильтона $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орты, то есть единичные вектора с направлением соответствующих декартовых координат *x, y, z*. $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, *t* – время, *c* – скорость света в вакууме. Вид операторов rot и div в декартовой системе координат дан в Приложении А (П.1). Использована гауссова система единиц с единственной постоянной – скоростью света в вакууме *c*, связь с СИ дана в Приложении Б.

Условия применимости уравнений Максвелла (1)-(4):

1. *Инерциальная система отсчета* (обобщение см. в [7]). В неинерциальных системах отсчета (например, во вращающейся системе координат) в уравнениях появляются дополнительные члены. Введение их может потребоваться, например, для учета вращения Земли.
2. *Гравитационные эффекты.* Поскольку электромагнитное излучение обладает энергией, а по Эйнштейну с энергией связывается тяготеющая масса, то излучение создает гравитационные поля. Как известно, в гравитационном поле ход лучей света и вообще распространение электромагнитного поля испытывает искажения. Поэтому распространение мощного электромагнитного излучения в вакууме подвержено гравитационным искажениям. Практически эти искажения заметны лишь в экстремальных астрофизических условиях.
3. *Квантовые ограничения для слабых и сильных электромагнитных полей.* Для *слабых* полей: уравнения Максвелла отвечают континуальному (а не дискретному) описанию. Поэтому для их справедливости число фотонов в основных модах *N* должно быть велико: *N >> 1*. Этот фактор важен при анализе шумов излучения и сжатых состояний электромагнитного поля (*квантовая оптика* [9]).

Для *сильных* полей: в уравнениях Максвелла не учитываются вероятность рождения электрон-позитронных пар и эффекты поляризации вакуума. Необходимое условие пренебрежения этими эффектами: $E << E_{cr} = \dfrac{m^2c^3}{|e|\eta}$ (изменение энергии заряда |e| в поле напряженности E на расстоянии равном комптоновской длине волны электрона $R_C = h/(mc)$ (см. ниже) должно быть много меньше mc^2, m – масса электрона, h – постоянная Планка, $\eta = h/2\pi$). В мощных лазерных установках достигаются напряженности полей, близкие к критическим. Последовательная теория дается *квантовой электродинамикой* [10]. Приближенно электромагнитное поле в электрон-позитронном вакууме описывается уравнениями электродинамики сплошных сред.

Сильные поля могут возникать и в окрестности зарядов. Так, в литературе принято называть классическим радиусом электрона величину R_0, получающуюся из условия

$$\text{потенциальная энергия} = \frac{e^2}{R_0} \sim mc^2 \quad \Rightarrow R_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 10^{-11}\ см.$$

При меньших расстояниях классическая теория заведомо неприменима. В действительности более существены квантовые ограничения с характерным размером – комптоновской (Compton) длиной волны электрона, характеризующей его «размазанность» $R_C = h/(mc) = 2{,}4 \cdot 10^{-10}\ см >> R_0$. Эти проблемы также решаются *квантовой электродинамикой*. Наше дальнейшее рассмотрение проводится в рамках классической электродинамики.

Интегральная форма уравнений Максвелла

Интегрируя по некоторому объему «дифференциальные» уравнения Максвелла (3), (4) и пользуясь интегральной теоремой Гаусса-Остроградского, можно придти к соотношениям о равенстве нулю потоков векторов электрической и магнитной напряженности через произвольную замкнутую поверхность S:

$$\oint_S E_n dS = 0, \quad \oint_S H_n dS = 0, \qquad (2.5)$$

где E_n и H_n – проекции соответствующих векторов на нормаль к поверхности S. Физический смысл этих соотношений – отсутствие электрических (частный случай теоремы Гаусса) и магнитных зарядов. Математически уравнения (5) эквивалентны уравнениям (3) и (4). Аналогично, интегральные аналоги уравнений (1) и (2) для циркуляции векторов магнитной и электрической напряженности вдоль замкнутого контура выражают закон Био-Саваро-Максвелла о возбуждении магнитного поля током смещения и закон электромагнитной индукции Фарадея [6].

Симметрия уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла инвариантны относительно следующих преобразований:

$$\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{E},$$

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}, \qquad (2.6)$$

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to -\mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to \mathbf{H}.$$

Первое из них демонстрирует, фактически, равноправность в вакууме электрических и магнитных полей, а два других отвечают равноправности направлений течения времени (в вакууме поглощение и диссипация энергии отсутствуют).

Задание 1. Для неподвижного точечного заряда (величина заряда q) найти напряженности электрического и магнитного полей, вычислить для них div и rot и проверить выполнение уравнений Максвелла.
Указание: Поля удобно записать через радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_{x,y,z}$ – единичные вектора – орты соответствующих декартовых осей координат.
Задание 2. При наличии в вакууме зарядов с плотностью ρ уравнение Максвелла (4) заменяется на следующее: $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$. Пользуясь им, найти распределение плотности заряда, если известно распределение напряженности электрического поля: $\mathbf{E} = Ar^n\mathbf{r}$, где A и n – постоянные. Поясните физический смысл результата при $n = -3$.
Указание: см. предыдущую задачу.

3. Ковариантная формулировка уравнений Максвелла, тензоры электромагнитного поля

Напряженности электрического и магнитного полей не абсолютны и имеют разную величину в различных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга со скоростью **V**. Задача этого раздела – показать релятивистскую инвариантность уравнений Максвелла и найти преобразования Лоренца для электромагнитного поля.

Вводим 4-мерное пространство-время с координатами x_k, k = 0, 1, 2, 3:

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z. \qquad (3.1)$$

В другой системе отсчета координаты помечаем штрихами ($x_k^{'}$). Преобразование координат – это известное преобразование Лоренца. В важном частном случае, когда скорость **V** имеет только x-ую компоненту (**V** = V $\mathbf{e}_x$, где $\mathbf{e}_x$ – орт по оси x), зависимость $\mathbf{x}'(\mathbf{x})$ имеет вид

$$x'_0 = \frac{x_0 - \frac{V}{c}x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - \frac{V}{c}x_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3. \tag{3.2}$$

Обратное преобразование $\mathbf{x}(\mathbf{x}')$ получается из (2) изменением знака скорости

$$x_0 = \frac{x'_0 + \frac{V}{c}x'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + \frac{V}{c}x'_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3. \tag{3.3}$$

Форма записи уравнения будет релятивистски инвариантной, если оно записано в терминах скаляров, 4-векторов и тензоров. Последние определяются правилом преобразования при переходе от одной инерционной системы координат (x_k) к другой (x'_k).

Скаляры при таком переходе не меняются. Ковариантный 4-вектор A_i (помечается нижними индексами) характеризуется следующим правилом преобразования

$$A'_i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} A_k, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{3.4}$$

Для преобразования Лоренца производные в сумме (4) – константы, определяемые из соотношений типа (3). Для контравариантного вектора A^i (верхние индексы) правило преобразования

$$A'^i = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A^k. \tag{3.5}$$

Для вычисления производных (тоже констант) в сумме (5) теперь используется (2).

Из 4-тензоров нам потребуются ковариантный (нижние индексы) и контравариантный (верхние индексы) тензоры второго ранга (с двумя индексами), характеризуемые следующими правилами преобразования

$$B'_{ik} = \sum_{j,l=0}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} B_{jl}, \tag{3.6}$$

$$B'^{ik} = \sum_{j,l=0}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} B^{jl}, \tag{3.7}$$

Напряженности электрического и магнитного полей не составляют 4-вектора. Но из них можно составить тензор второго ранга, называемый тензором электромагнитного поля

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Заметим, что и ковариантный, и контравариантный тензоры электромагнитного поля антисимметричны, то есть $F_{ik}=-F_{ki}, F^{ik}=-F^{ki}$. Использование правил преобразования (6) и (7) позволяет теперь пересчитывать значения напряженностей из одной инерциальной системы в другую. Так, для специального вида преобразования Лоренца (2), (3) напряженности преобразуются следующим образом:

$$\begin{gathered} E_x=E'_x, \qquad E_y=\frac{E'_y+\frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z=\frac{E'_z-\frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ H_x=H'_x, \qquad H_y=\frac{H'_y-\frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z=\frac{H'_z+\frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{gathered} \qquad (3.9)$$

Можно проверить, что с помощью тензора электромагнитного поля уравнения Максвелла (2.1)–(2.4) записываются следующим образом

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0, \qquad (3.10)$$

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k}=0. \qquad (3.11)$$

Хотя при преобразовании Лоренца компоненты тензора электромагнитного поля меняются, из них можно составить две неизменяющиеся комбинации – инварианты (это нетрудно доказать, используя преобразование Лоренца):

$$\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=-\frac{1}{2}\sum_{i,k=0}^{3}F_{ik}F^{ik}=inv, \qquad (3.12)$$

$$(\mathbf{E},\mathbf{H})=inv. \qquad (3.13)$$

Тензор электромагнитного поля линеен по компонентам напряженности **E** и **H**. Энергетические характеристики определяются квадратичными по напряженностям величинами. Эти величины составляют тензор энергии-импульса электромагнитного поля с компонентами

$$U^{00}=U_{00}=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2),$$

$$U^{0i}=-U_{0i}=\frac{1}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_i, \qquad (3.14)$$

$$U^{ik}=U_{ik}=-\frac{1}{4\pi}(E_iE_k+H_iH_k)+\frac{1}{8\pi}\delta_{ik}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2), \quad i,k=1,2,3.$$

Здесь $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$ – символ Кронекера. Физический смысл различных компонент тензора поясняется в следующем разделе. Так, компонента U^{00} представляет плотность электромагнитной энергии, а U^{0i} пропорциональны i-м компонентам плотности потока энергии, составляющим трехмерный вектор Пойнтинга. 3-тензор U^{ik} (i,k = 1,2,3) называют тензором натяжений Максвелла, так как он определяет силу, действующую со стороны электромагнитного поля на единичную площадку произвольной ориентации [6, 7] (световое давление на внесенное в поле тело). А именно, на площадку тела с площадью $d\sigma$ и нормалью по оси x_i действует сила с составляющими $F_k d\sigma=U_{ik}d\sigma$ (k = 1,2,3). Заметим, что именно 4-тензор энергии-импульса служит в уравнениях тяготения Эйнштейна источником искривления пространства-времени [7].

Задание 3. Найти напряженности электрического и магнитного полей точечного заряда (величина заряда q), движущегося со скоростью v.
Указание: Использовать решение задачи 1 и преобразования Лоренца для полей.
Задание 4. Проверить инвариантность величин (12), (13), воспользовавшись преобразованиями Лоренца для полей.
Задание 5. Проверить, что уравнения (10) и (11) при различном выборе индексов действительно приводят к уравнениям Максвелла (2.1)-(2.4).

Пример: В (11) положим i = 0, тогда оно запишется так:

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x_0}+\frac{\partial F^{01}}{\partial x_1}+\frac{\partial F^{02}}{\partial x_2}+\frac{\partial F^{03}}{\partial x_3}=0.$$

Из (8) видно, что

$$F^{00}=0, \quad F^{01}=E_1=E_x, \quad F^{02}=E_2=E_y, \quad F^{03}=E_3=E_z$$

(напомним, что $x_0=ct, x_1=x, x_2=y, x_3=z$). Поэтому предыдущее уравнение примет вид

$\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0$, или $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$, то есть получаем (2.4).

Предостережение: В (10) все индексы должны различаться, иначе получится тривиальное тождество 0 = 0.

Задание 6. Вычислить определитель $Det\,F^{ik}$ (выразить через инварианты).

Задание 7. Показать, что $\sum\limits_{i=1}^{3} U^{ii} = U^{00}$.

4. Динамика (задача Коши)

Задача Коши отвечает определению по заданным начальным условиям дальнейшей динамики электромагнитного поля. Начальные условия (задание полей в начальный момент времени во всем пространстве, реально – в конечной области, где поля отличны от нуля) имеют вид:

$$\mathbf{E}\,|_{t=0} = \mathbf{E}_0(r), \quad \mathbf{H}\,|_{t=0} = \mathbf{H}_0(r). \tag{4.1}$$

Поскольку уравнения Максвелла – первого порядка по времени, то условия (1) позволяют определить значения напряженностей электрического и магнитного полей в последующие моменты времени. Поясним это, выписав соответствующие разложения Тейлора для малых интервалов времени:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r},0) + \left.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\right|_{t=0} t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n}\right|_{t=0} t^n + \ldots,\\
\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r},0) + \left.\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}\right|_{t=0} t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \mathbf{H}}{\partial t^n}\right|_{t=0} t^n + \ldots
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Первые члены в правых частях (2) заданы условиями (1). Производные по времени (в момент времени $t = 0$) находятся при привлечении уравнений Максвелла (2.1) и (2.2):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E},\\
&\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c\,\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c^2\,\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -c^2\,\mathrm{rot}^2\,\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -c^2\,\mathrm{rot}^2\,\mathbf{H},\\
&\frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3} = -c^3\,\mathrm{rot}^3\,\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^3 \mathbf{H}}{\partial t^3} = c^3\,\mathrm{rot}^3\,\mathbf{H},\\
&\frac{\partial^4 \mathbf{E}}{\partial t^4} = c^4\,\mathrm{rot}^4\,\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^4 \mathbf{H}}{\partial t^4} = c^4\,\mathrm{rot}^4\,\mathbf{H}, \quad \ldots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}c^{2n}\mathrm{rot}^{2\mathrm{n}}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}c^{2n-1}\mathrm{rot}^{2\mathrm{n}\text{-}1}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,t^{2n-1},\\
\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}c^{2n}\mathrm{rot}^{2\mathrm{n}}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})\,t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}c^{2n-1}\mathrm{rot}^{2\mathrm{n}\text{-}1}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,t^{2n-1}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Тем самым мы получили искомые разложения, дающие временное изменение напряженностей электромагнитного поля на малых интервалах времени. Заметим, что при этом кроме начальных условий (1) достаточно было использовать только два из четырех уравнений Максвелла (2.1) и

(2.2), тогда как уравнения (2.3) и (2.4) не привлекались. Роль этих уравнений иная – они служат ограничениями на начальные условия (1). Действительно, начальные распределения напряженностей не произвольны, а должны подчиняться условиям

$$\operatorname{div}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \operatorname{div}\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0. \tag{4.5}$$

При выполнении (5) будут выполнены и уравнения (2.3) и (2.4). Это видно как из разложений (4) (привлекая тождество (П.3)), так и при использовании уравнений Максвелла, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0. \tag{4.6}$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{4.7}$$

Поэтому если условия (2.3) и (2.4) выполнены в начальный момент времени, то они справедливы и во все последующие времена. Привлечение уравнений (2.3) и (2.4) вместе с тождеством (П.4) позволяет упростить вид разложений (4), поскольку в рассматриваемом случае

$$\operatorname{rot}^2\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}^2\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}. \tag{4.8}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа (см. (П.1)). Теперь

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}c^{2n}\,\Delta^n\mathbf{E}_0(\mathbf{r})t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}c^{2n-1}\operatorname{rot}\Delta^{n-1}\mathbf{H}_0(\mathbf{r})t^{2n-1},\\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}c^{2n}\,\Delta^n\mathbf{H}_0(\mathbf{r})t^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}c^{2n-1}\operatorname{rot}\Delta^{n-1}\mathbf{E}_0(\mathbf{r})t^{2n-1}.\end{gathered} \tag{4.9}$$

В силу уравнений (2.3) и (2.4) в начальный момент времени произвольно можно задать только по две компоненты векторов $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$, тогда из (2.3) и (2.4) определится вид третьих компонент. Пусть, например, заданы $H_{0,x}(\mathbf{r})$ и $H_{0,y}(\mathbf{r})$. Тогда из (2.4) находим

$$\frac{\partial H_{0,z}}{\partial z} = -\frac{\partial H_{0,x}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0,y}}{\partial y}. \tag{4.10}$$

Заметим, что правая часть (10) задана. Поэтому, интегрируя обе части (10) по z, получаем вид компоненты $H_{0,z}(\mathbf{r})$:

$$H_{0,z} = -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial H_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial H_{0,y}}{\partial y}\right)dz + f(x,y). \tag{4.11}$$

Здесь z_0 – постоянная интегрирования, а f – произвольная функция координат x,y.

Задание 8. В начальный момент времени $t = 0$ в некоторой пространственной области заданы распределения напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E}\,|_{t=0} = [\mathbf{a}\times\mathbf{r}], \quad \mathbf{H}\,|_{t=0} = [\mathbf{b}\times\mathbf{r}]$$

($\mathbf{r}$ – радиус-вектор, **a, b** – постоянные векторы). Найти последующие значения напряженностей.

Задание 9. В некоторый момент времени заданы две компоненты напряженности электрического поля:

$$E_x = pyz\exp[-(x^2+y^2+z^2)/w^2], \quad E_z = qxy\exp[-(x^2+y^2+z^2)/w^2]$$

(*p, q, w* – постоянные). Найти вид компоненты E_y в тот же момент времени.

5. Уравнение распространения фронта электромагнитной волны

В предыдущем разделе решалась задача Коши, то есть по начальным данным (при t = 0) определялась последующая динамика поля. Это оказалось возможным, так как сами уравнения Максвелла позволяют по значениям напряженностей поля находить их временные производные. Теперь мы обобщим этот подход, что необходимо по следующим соображениям. Во-первых, выделение начального временного момента не является наиболее общим в теории относительности. Более общим служит задание напряженностей на некоторой гиперповерхности в четырехмерном многообразии пространства-времени

$$t = \frac{1}{c} f(x,y,z)\,. \tag{5.1}$$

Например, при f = 0 это будет прежний вариант начальных условий. Во-вторых, вообще говоря, не на всякой гиперповерхности возможно такое задание начальных данных, которое позволило бы определить последующую динамику поля. Более точно, уравнения Максвелла допускают распространение резких фронтов волны, перед которыми все компоненты поля обращаются в нуль, а за которыми хотя бы некоторые компоненты отличны от нуля, так что на самом фронте поля разрывны. В данном разделе выводятся уравнения распространения таких фронтов, которые с математической точки зрения представляют характеристики, а с физической точки зрения – распространение сигналов с предельной (световой) скоростью.

Пусть на гиперповерхности (1) заданы значения некоторой величины (помечается индексом 0)

$$u(x,y,z,f/c) = u_0(x,y,z)\,. \tag{5.2}$$

Тогда на этой же гиперповерхности известны и следующие комбинации производных

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \qquad (x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z)\,. \tag{5.3}$$

В качестве величины u будем брать различные компоненты напряженностей электрического и магнитного полей. Например,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial E_y^{(0)}}{\partial y},$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z}.$$

Сложив эти три соотношения, найдем

$$\operatorname{div}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)=\operatorname{div}\mathbf{E}^{(0)} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)=\operatorname{div}\mathbf{E}^{(0)}. \quad (5.4)$$

Точно так же

$$\operatorname{div}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)=\operatorname{div}\mathbf{H}^{(0)} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)=\operatorname{div}\mathbf{H}^{(0)}. \quad (5.5)$$

Аналогично (комбинируя другие компоненты)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\operatorname{grad} f\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]=\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)}, \qquad (5.6)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}+\frac{1}{c}\left[\operatorname{grad} f\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]=\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}. \qquad (5.7)$$

Шесть скалярных компонент $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$ не могут задаваться произвольно, а должны удовлетворять соотношениям, которые мы сейчас выведем. Для этого умножим (6) и (7) скалярно на $\operatorname{grad} f$ и используем уравнения Максвелла

$$\left(\operatorname{grad} f,\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)}\right)=-\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)=-\operatorname{div}\mathbf{H}^{(0)},$$

$$\left(\operatorname{grad} f,\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}\right)=\frac{1}{c}\left(\operatorname{grad} f,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)=\operatorname{div}\mathbf{E}^{(0)}. \qquad (5.8)$$

Таким образом, на $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$ налагаются следующие условия

$$\operatorname{div}\mathbf{H}^{(0)}+\left(\operatorname{grad} f,\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)}\right)=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}^{(0)}-\left(\operatorname{grad} f,\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}\right)=0. \quad (5.9)$$

При $f=\mathrm{const}$ (9) превращаются в обычные уравнения Максвелла.

С помощью уравнений Максвелла можно переписать (6) и (7) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\left[\operatorname{grad} f\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right]=c\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}, \qquad -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}+\left[\operatorname{grad} f\times\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]=c\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)}.$$

Умножаем эти два соотношения векторно на $\operatorname{grad} f$ и используем векторное соотношение (П.2) и соотношения (8). Тогда

$$(1-(\operatorname{grad} f)^2)\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=c\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}-c(\operatorname{grad} f,\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)})+c[\operatorname{grad} f\times\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)}],$$

(5.10)

$$(1-(\mathrm{grad}\ f)^2)\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c\ \mathrm{rot}\ \mathbf{E}^{(0)} + c(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{rot}\ \mathbf{E}^{(0)}) + c[\mathrm{grad}\ f \times \mathrm{rot}\ \mathbf{H}^{(0)}]. \tag{5.11}$$

В правых частях (10) и (11) присутствуют только известные функции. Поэтому из этих уравнений можно найти временные производные, если только $(1-(\mathrm{grad}\ f)^2) \neq 0$. При этом поля будут непрерывными на гиперповерхности (1). Отсюда следует, что условие разрывности имеет вид

$$(\mathrm{grad}\ f)^2 = 1. \tag{5.12}$$

Если записать уравнение гиперповерхности вместо (1) в виде

$$S(x, y, z, t) = 0, \tag{5.13}$$

то уравнение характеристик (12) примет вид (уравнение распространения фронта):

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (\mathrm{grad}\ S)^2 = 0, \tag{5.14}$$

или (то же уравнение в других формах записи)

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 0, \quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) = 0.$$

Частными решениями (14) служат плоская волна

$$t - t_0 = \frac{1}{c}(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

цилиндрическая волна

$$t - t_0 = \frac{1}{c}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{1/2}$$

и сферическая волна

$$t - t_0 = \frac{1}{c}\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{1/2}.$$

Заметим, что уравнение распространения фронта электромагнитных волн весьма близко к основному уравнению геометрической оптики – уравнению эйконала (см. ниже п. 11). Укажем также, что в теории относительности уравнение распространения фронта (14) преобретает совершенно общий характер, служа математической формулировкой принципа существования предельной скорости любых сигналов. В связи с этим процитируем В.А. Фока «Уравнение распространения фронта волны любой природы, идущей с предельной скоростью и способной передавать сигнал, совпадает с уравнением распространения фронта световой волны в свободном пространстве» [7].

К вопросу о единственности решения уравнений Максвелла мы вернемся в п. 6. А сейчас проведем анализ решений уравнения фронта распространения электромагнитных волн, который поучителен для прояснения соотношений между волновым и лучевым описанием в оптике и для выявления глубокой аналогии между волновым движением поля и механическим движением частиц.

Уравнение распространения фронта волны (14) можно записать в форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \tag{5.15}$$

$$H = c\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \tag{5.16}$$

Выбор определенного знака у квадратного корня не ограничивает общности (если взять другой знак и заменить $S \to -S$, то уравнение будет тем же). В такой форме это известное в механике уравнение Гамильтона-Якоби, причем S имеет смысл действия, а H – гамильтоновой функции [11]. Напомним, что уравнения Ньютона, например, для частицы массы m в поле с потенциалом $U(\mathbf{r})$ с соответствующей силой, действующей на частицу $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}\,U(\mathbf{r})$, обладает гамильтонианом (ср. с полной механической энергией)

$$H = T + U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U = \frac{1}{2m}p^2 + U,$$

где $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ – импульс частицы. Уравнения Гамильтона записываются в форме ($q_{1,2,3} = x, y, z$ – координаты частицы)

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

что применительно к рассматриваемой частице дает

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{m}, \quad \frac{dp_i}{dt} = F_i.$$

В последних двух уравнениях первое – это определение импульса, а второе – второй закон Ньютона.

Безотносительно к механике, чисто математически, (15) является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, теория которых хорошо разработана (в качестве справочника можно рекомендовать [12]). Уравнению в частных производных сопоставляется характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Применительно к (15), поверхность фронта S образуется из точек, движущихся со скоростью света вдоль лучей – нормалей к поверхности фронта, определяемых следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial S_{x_i}} = c\frac{S_{x_i}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}, \tag{5.17}$$

$$\frac{dS_{x_i}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \qquad (x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z) \tag{5.18}$$

Из (18) следует, что величины S_{x_i} постоянны вдоль луча (но меняются от луча к лучу). Поэтому лучи в вакууме оказываются прямыми:

$$x_i - x_{i0} = c\frac{S_{x_i}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}(t - t_0). \tag{5.19}$$

Отсюда следует соотношение, связывающее координаты начальной и конечной точек на каждом луче (уравнение шара с центром в точке x_0, y_0, z_0 и радиусом $R = c(t - t_0)$, пропорциональном времени):

$$c^2(t-t_0)^2 - [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] = 0. \tag{5.20}$$

Для бесконечно близких точек (20) переходит в соотношение, которое следует и прямо из (17):

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0. \tag{5.21}$$

Знание лучей, вместе с заданием исходного фронта волны, позволяет найти и текущий фронт волны достаточно очевидным образом. А именно, по начальному фронту определяются прямые – лучи – как нормали к фронту. Далее на этих лучах откладывается расстояние, пропорциональное времени, что позволяет найти текущее положение фронта волны (соотношение (19)).

Задание 10. В начальный момент времени $t = 0$ электромагнитное поле отлично от нуля внутри эллипсоида, задаваемого уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Выписать уравнения, определяющие фронт волны в момент времени *t*. Какой будет форма фронта при больших временах $ct >> a, b$?

Задание 11. Точечный источник света («фонарик») расположен на расстоянии L от плоского экрана. Направление луча света, исходящего из источника (неподвижная точка), поворачивается с постоянной угловой скоростью Ω, так что луч все время остается в плоскости, ортогональной экрану. С какой скоростью v будет передвигаться по экрану пятно света? Помимо общего случая, рассмотреть случай малых углов между лучом и нормалью к экрану, проходящей через источник света. Сравнить v со скоростью света c.

6. Законы сохранения для электромагнитного поля

Умножим скалярно уравнение Максвелла (2.2) на **–E**, уравнение (2.1) – на **H** и сложим результаты

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mathrm{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]. \tag{6.1}$$

В последнем преобразовании использовано тождество (П.6). Запишем (1) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{S}, \qquad (6.2)$$

где

$$W = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]. \qquad (6.3)$$

Проинтегрируем (2) по объему, ограниченному поверхностью Σ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int W\,dv = -\int \operatorname{div}\mathbf{S}\,dv = -\int\limits_{\Sigma}\mathbf{S}\,d\mathbf{\Sigma}. \qquad (6.4)$$

Объемный интеграл преобразован в (4) в поверхностный на основании формулы Гаусса-Остроградского.

Соотношение (4) представляет интегральную форму закона сохранения энергии. При этом W интерпретируется как объемная плотность электромагнитной энергии, а вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ – как плотность потока энергии. Согласно (4), изменение энергии поля в любом объеме происходит за счет переноса энергии через границы объема (поглощение в вакууме отсутствует). Если поток энергии на границах отсутствует (например, поле на границах области достаточно мало), то энергия электромагнитного поля в области сохраняется $\int W\,dv = const$.

Локальное применение закона сохранения энергии, строго говоря, не оправдано. Вектор Пойнтинга в общем случае не является единственно возможным видом локальной плотности потока энергии, поскольку при добавлении к выражению $\mathbf{S}$ (9) ротора произвольного вектора уравнения (1) и (3) не меняются ввиду тождества (П.3). Другим аргументом против универсальности трактовки вектора Пойнтинга как потока энергии служит то, что он отличен от нуля для однородного статического поля с постоянными напряженностями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. С другой стороны, именно компоненты вектора Пойнтинга входят в тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Кроме того, для плоской монохроматической волны вектор Пойнтинга дает разумное значение потока энергии. Соответственно, трактовка вектора Пойнтинга как плотности потока энергии оправдана для полей, близких к плоской монохроматической волне, то есть для полей с медленно меняющейся во времени и пространстве амплитудой.

Закон сохранения энергии электромагнитного поля можно использовать для доказательства однозначности решений уравнений Максвелла, отличающегося от приведенного в п. 4. А именно, если для момента времени $t = 0$ заданы начальные значения $\mathbf{E}(\mathbf{r},0)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},0)$, то $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ определяются этими уравнениями однозначно. Вообще говоря, оговорок требуют условия на границах рассматриваемой области. Мы будем считать, что начальное поле отлично от нуля в конечной области.

Тогда в связи с конечностью скорости распространения света поле будет отличным от нуля в (более широкой) области в любой момент времени t.

Для доказательства предположим противное, то есть что существуют два различающихся решения $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}_1(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{H}_2(\mathbf{r},t)$, удовлетворяющие тем же самым начальным условиям: $\mathbf{E}_1(\mathbf{r},0)=\mathbf{E}_2(\mathbf{r},0)$, $\mathbf{H}_1(\mathbf{r},0)=\mathbf{H}_2(\mathbf{r},0)$. Ввиду линейности уравнений Максвелла их решением будет и разность этих двух решений

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t)-\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{H}_3(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_2(\mathbf{r},t)-\mathbf{H}_1(\mathbf{r},t). \tag{6.5}$$

Для этого решения начальные условия нулевые

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{r},0)=0, \quad \mathbf{H}_3(\mathbf{r},0)=0. \tag{6.6}$$

Из интегральной формы закона сохранения энергии (4), с учетом того, что на поверхности Σ вектор Пойнтинга $\mathbf{S}=0$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int W\,dv=0 \quad \Rightarrow \quad W=\mathrm{const}. \tag{6.7}$$

Ввиду (6) $\mathrm{const}=0$, так что

$$\int (E_3^2+H_3^2)\,dv=0. \tag{6.8}$$

Но это возможно, только если $\mathbf{E}_3(\mathbf{r},t)\equiv 0$ и $\mathbf{H}_3(\mathbf{r},t)\equiv 0$, что и доказывает единственность решения уравнений Максвелла.

Закон сохранения энергии электромагнитного поля (2) можно записать с помощью тензора энергии-импульса в виде

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial U^{0k}}{\partial x_k}=0. \tag{6.9}$$

Обобщением (9) служат также вытекающие из уравнений Максвелла соотношения

$$\sum_{k=0}^{3}\frac{\partial U^{ik}}{\partial x_k}=0. \tag{6.10}$$

Это уравнение выражает закон сохранения импульса поля с компонентами

$$P^i=\frac{1}{c}\int U^{i0}dv=\frac{1}{4\pi c}\int[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]_i\,dv. \tag{6.11}$$

Из (9) и (10) с учетом симметрии тензора U^{ik} следует также

$$\frac{\partial}{\partial x_0}(x_iU^{k0}-x_kU^{i0})+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}(x_iU^{km}-x_kU^{im})=0. \tag{6.12}$$

Действительно, левую часть (6.12) можно записать в виде

$$U^{ki}-U^{ik}+x_i\left[\frac{\partial U^{k0}}{\partial x_0}+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial U^{km}}{\partial x_m}\right]-x_k\left[\frac{\partial U^{i0}}{\partial x_0}+\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial U^{im}}{\partial x_m}\right]=U^{ki}-U^{ik}, \tag{6.13}$$

так как выражения в квадратных скобках обращаются в ноль вследствие (10). Соотношение (12) отвечает при k = 1, 2, 3 закону сохранения момента импульса с компонентами (интегрирование по всему объему, занятому полем)

$$M^{ik} = \frac{1}{c}\int (x_i U^{k0} - x_k U^{i0}) dv = const, \quad M^{ik} = -M^{ki}, \tag{6.14}$$

а при $k = 0$ прямолинейному и равномерному движению центра инерции [7]

$$K^i = \frac{1}{c^2}\int (x_i U^{00} - x_0 U^{i0}) dv = const. \tag{6.15}$$

Действительно, введем координаты центра инерции («центра энергии») электромагнитного поля

$$\mathbf{R}_c = \frac{\int \mathbf{r} U^{00}(\mathbf{r}) dv}{\int U^{00}(\mathbf{r}) dv}. \tag{6.16}$$

В знаменателе дроби стоит постоянная величина – полная энергия поля. Декартовы компоненты скорости (прямолинейного и равномерного) движения центра инерции находим из (15):

$$V_{c,i} = c\frac{\int U^{i0}(\mathbf{r}) dv}{\int U^{00}(\mathbf{r}) dv}. \tag{6.17}$$

С учетом (3) трехмерный вектор скорости

$$\mathbf{V}_c = \frac{\int S(\mathbf{r}) dv}{\int U^{00}(\mathbf{r}) dv} = c\frac{2\int [\mathbf{E}\times\mathbf{H}] dv}{\int (E^2 + H^2) dv}. \tag{6.18}$$

Естественно, что эта скорость не обязательно совпадает со скоростью света в вакууме; например, для стоячей волны $\mathbf{V}_c = 0$. Вместе с тем, из (18) вытекает важное ограничение на скорость центра инерции электромагнитного поля (а по сути дела, и любой формы материи):

$$|\mathbf{V}_c| \le c. \tag{6.19}$$

Для вывода укажем, что из очевидного неравенства $\int (|\mathbf{E}| - |\mathbf{H}|)^2 dv > 0$ следует $\int (E^2 + H^2) dv > 2\int |\mathbf{E}||\mathbf{H}| dv \ge 2|\int [\mathbf{E}\times\mathbf{H}] dv|$. Поэтому дробь в правой части (18) по модулю меньше единицы.

7. Потенциалы поля, волновое уравнение и плоские волны

В уравнения Максвелла (2.1)-(2.4) входят два (трехмерных) вектора – напряженности электрического и магнитного полей. Можно, однако, вывести уравнение для каждого из этих векторов в отдельности. Для этого применим оператор rot к правой и левой частям (2.1), после чего используем (2.2):

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Таким образом, с использованием (П.4) и (2.4) приходим к волновому уравнению для напряженности электрического поля

$$\Box \mathbf{E} = 0, \tag{7.1}$$

где введен оператор Даламбера

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{7.2}$$

Аналогичен вид волнового уравнения для напряженности магнитного поля: $\Box \mathbf{H} = 0$. Волновому уравнению (скалярному) будут удовлетворять и отдельные (декартовы) компоненты векторов напряженностей E_x, E_y, …

Замечание 1. Не каждое решение волнового уравнения удовлетворяет уравнениям Максвелла. Нужно еще, чтобы были выполнены уравнения (2.3), (2.4) (достаточно при $t = 0$).

Замечание 2. Начальные условия для волнового уравнения (1):

$$\mathbf{E}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad \left.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathbf{E}_0'(\mathbf{r}).$$

Этого достаточно, чтобы найти начальное распределение напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ с точностью до постоянного вектора (а $\mathbf{H}_0'(\mathbf{r})$ находится из уравнения Максвелла (2.1) однозначно: $\mathbf{H}_0' = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_0$). Статические однородные поля с произвольными (постоянными) напряженностями $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 = const$ являются решениями и волнового уравнения, и уравнений Максвелла, но нас они здесь интересовать не будут.

Анализ векторной структуры электромагнитного поля может быть упрощен при введении вспомогательного векторного $\mathbf{A}$ и скалярного φ потенциалов. Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через эти потенциалы следующим образом:

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi. \tag{7.3}$$

Ввиду этого определения автоматически выполняется уравнение Максвелла (2.3). В определении потенциалов имеется некоторый произвол. Так, напряженности полей **E** и **H** не изменятся при замене потенциалов

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\ f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{7.4}$$

где $f = f(x,y,z,t)$ – произвольная функция координат и времени. Если выбрать $\mathbf{A}$ и φ так, что $\varphi = 0$ и $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$, то будет автоматически выполняться еще одно уравнение Максвелла (2.4), а векторный потенциал (и его отдельные компоненты) будет удовлетворять уравнению Даламбера $\Box \mathbf{A} = 0$.

Обратимся теперь к наиболее простым нетривиальным решениям волнового уравнения.

Для *плоских волн* напряженности зависят только от времени и от одной из пространственных координат, например z (ось z выбрана вдоль направления распространения волны). Тогда в операторе Лапласа сохраняется только производная по *z,* так что волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = 0, \tag{7.5}$$

то есть для любой из декартовых компонент векторов **E** и **H** (а также **A**) справедливо скалярное одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \tag{7.6}$$

7.1. Одномерное волновое уравнение (решение Даламбера)

Перейдем в (5) от переменных (z,t) к переменным (ξ,η) по соотношениям

$$\xi = z - ct, \quad \eta = z + ct \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi).$$

Применим правила преобразования дифференциальных выражений

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Поэтому уравнение (6) можно представить в форме

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{7.7}$$

Если записать (7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = 0,$$

то найдем

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = F(\xi) \quad \Rightarrow \quad f = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad f_1(\xi) = \int F(\xi)\, d\xi.$$

Здесь F, f_1, f_2 – произвольные функции своих аргументов. Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение волнового уравнения (6) в виде суммы двух произвольных функций

$$f(z,t) = f_1(z - ct) + f_2(z + ct). \tag{7.8}$$

Физический смысл приведенного решения Даламбера заключается в том, что поле представляется в виде суммы двух волн, одна из которых распространяется со скоростью света c в положительном направлении оси z (f_1), а другая – в противоположном направлении с той же скоростью c (f_2). Этим и оправдывается смысл величины c в уравнениях Максвелла как скорости света. Математически представление решения волнового уравнения в виде (8) связано с методом характеристик [12,13].

Вид функций f_1, f_2 определяется через задаваемые начальные условия

$$f(z,0) = \psi_0(z), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(z). \tag{7.9}$$

После подстановки (9) в (8) получим

$$f_1(z) + f_2(z) = \psi_0(z), \quad -f_1' + f_2' = \frac{1}{c}\psi_1(z).$$

Интегрируя последнее соотношение и опуская несущественную здесь постоянную интегрирования, найдем

$$f_1(z) = \frac{1}{2}\psi_0(z) - \frac{1}{2c}\int_0^z \psi_1(\zeta)\,d\zeta, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}\psi_0(z) + \frac{1}{2c}\int_0^z \psi_1(\zeta)\,d\zeta.$$

Теперь решение Даламбера (8) примет вид

$$f(z,t) = \frac{1}{2}\left[\psi_0(z-ct) + \psi_0(z+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{z-ct}^{z+ct} \psi_1(\zeta)\,d\zeta. \tag{7.10}$$

7.2. Векторная структура поля

Прежде всего, отметим свойство поперечности плоских волн. Из уравнений Максвелла (2.3) и (2.4) в рассматриваемом случае следует

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_z = E_z(t),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = H_z(t),$$

то есть продольные компоненты напряженностей могут зависеть только от времени (но не от координат). Но и такая зависимость оказывается невозможной, поскольку из уравнений Максвелла (2.1) и (2.2) следует

$$\frac{dE_z}{dt} = c\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_z = 0, \quad \frac{dH_z}{dt} = -c\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{E})_z = 0.$$

Поэтому, опуская не интересующие нас однородные статические поля, найдем, что продольные (по отношению к направлению распространения волны) компоненты поля плоской волны равны нулю

$$E_z = H_z = 0. \tag{7.11}$$

В векторной форме условие поперечности записывается так:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{H}, \mathbf{e}_z) = 0,$$

или, при направлении распространения волны вдоль единичного вектора **m**,

$$(\mathbf{E},\mathbf{m})=(\mathbf{H},\mathbf{m})=0. \qquad (7.12)$$

При этом уравнения Максвелла (2.3) и (2.4) удовлетворяются автоматически.

Поскольку в плоской волне напряженности не зависят от двух поперечных координат (x,y), можно записать

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial E_y}{\partial z}\mathbf{e}_x+\frac{\partial E_x}{\partial z}\mathbf{e}_y=\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}],$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & H_y & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{e}_z\times\mathbf{H}].$$

Теперь уравнения Максвелла (2.1) и (2.2) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{e}_z\times\mathbf{H}]=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \qquad (7.13)$$

Из двух волн (8), распространяющихся в противоположных направлениях, рассмотрим одну, бегущую в положительном направлении оси z. Для нее

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(\xi),\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}(\xi),\quad \xi=z-ct.$$

Тогда уравнения (13) переписываются в виде

$$\frac{d}{d\xi}\{[\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}]-\mathbf{H}\}=0,\quad \frac{d}{d\xi}\{[\mathbf{e}_z\times\mathbf{H}]+\mathbf{E}\}=0.$$

Опуская несущественную постоянную составляющую (статическое однородное поле), находим

$$\mathbf{H}=[\mathbf{e}_z\times\mathbf{E}],\quad \mathbf{E}=-[\mathbf{e}_z\times\mathbf{H}]. \qquad (7.14)$$

Если направление распространения волны определяется единичным вектором $\mathbf{m}$, то соотношение (14), очевидно, записывается в форме

$$\mathbf{H}=[\mathbf{m}\times\mathbf{E}],\quad \mathbf{E}=-[\mathbf{m}\times\mathbf{H}]. \qquad (7.15)$$

Из приведенных соотношений следует, что в плоской волне вектора $\mathbf{E},\mathbf{H},\mathbf{m}$ образуют ортогональную тройку. Модули напряженностей электрического и магнитного полей совпадают, поэтому инвариант (3.12) $\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2=0$. Равен нулю и второй инвариант (3.13) $(\mathbf{E},\mathbf{H})=0$, поскольку вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны.

Вычислим также вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ и плотность электромагнитной энергии W для плоской волны (используется тождество (П.7))

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times[\mathbf{m}\times\mathbf{E}]]=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}^2\mathbf{m}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{H}^2\mathbf{m}=cW\mathbf{m},\\ W&=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)=\frac{\mathbf{E}^2}{4\pi}.\end{aligned} \qquad (7.16)$$

8. Монохроматические волны. Уравнение Гельмгольца. Поляризация. Некорректность задачи Коши

Для монохроматических волн с круговой частотой ω

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f.$$

Поэтому волновое уравнение превращается в *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta f + k^2 f = 0. \qquad (8.1)$$

Здесь $k^2 = (\omega / c)^2$ – квадрат волнового числа, f имеет смысл любой компоненты электрической или магнитной напряженности, а также векторного потенциала. Элементарным решением (1) служат плоские волны

$$f = f_0 \exp[i(\mathbf{k},\mathbf{r})]. \qquad (8.2)$$

При этом

$$\mathbf{k}^2 = k^2 = (\omega / c)^2. \qquad (8.3)$$

Здесь использована комплексная форма записи поля. Более точно, нужно записать $\mathrm{Re}\{\ldots\}$, но в линейных задачах знак вещественной части Re можно опускать.

Далее следует различать однородные и неоднородные плоские волны. Для первых из них вектор $\mathbf{k}$ – вещественный волновой вектор $\mathbf{k} = k\mathbf{m}$, направление которого показывает направление распространения волны. Для неоднородных плоских волн вектор $\mathbf{k}$ – комплексный, $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Для них (2) переписывается в виде

$$f = f_0 \exp[i(\mathbf{k}',\mathbf{r})]\exp[-(\mathbf{k}'',\mathbf{r})]. \qquad (8.4)$$

Как видно из (4), вектор $\mathbf{k}''$ определяет направление изменения амплитуды *f*, а вектор $\mathbf{k}'$ – направление нормали к (плоскому) волновому фронту. Найдем взаимную ориентацию этих векторов. Из (3) следует

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i(\mathbf{k}',\mathbf{k}'') = k^2.$$

Из сравнения мнимых частей правой и левой частей этого соотношения следует, что вектора $\mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}''$ взаимно ортогональны: $(\mathbf{k}',\mathbf{k}'') = 0$.

Произвольное начальное распределение поля может быть разложено в спектр (интеграл) плоских волн. При этом в общем случае возникают как однородные, так и неоднородные плоские волны. Доля неоднородных волн возрастает для мелкомасштабных распределений (с размерами, сравнимыми или меньшими длины волны излучения). Для достаточно плавных и крупномасштабных (в указанном смысле) распределений амплитуды неоднородных волн пренебрежимо малы.

Произвольное монохроматическое электромагнитное поле локально обладает определенной поляризацией. Не будем временно считать излучение плоской волной и запишем компоненты $\mathbf{E}$ в точке с фиксированными координатами

$$E_x = A\cos(\omega t + \alpha), \quad E_y = B\cos(\omega t + \beta), \quad E_z = C\cos(\omega t + \gamma), \qquad (8.5)$$

где $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ не зависят от времени (но они различаются для точек с разными координатами *x*, *y*, *z*). При изменении времени конец вектора **E** прочерчивает в пространстве E_x, E_y, E_z некоторую фигуру. Можно убедиться, что эта фигура – плоская, то есть она лежит в плоскости, проходящей через начало координат $E_x = 0, E_y = 0, E_z = 0$ (точка M_0). Для этого достаточно показать, что точка *M* с координатами (5) (для произвольного момента времени *t*), точка M_0, точка M_1, получающаяся из (5) при $\omega t = 0$, и точка M_2, получающаяся из (5) при $\omega t = \pi/2$, лежат в одной плоскости. Условие этого известно из аналитической геометрии, и его нетрудно проверить в нашем случае:

$$Det\begin{pmatrix} E_x & E_y & E_z \\ E_x - E_x^{(1)} & E_y - E_y^{(1)} & E_z - E_z^{(1)} \\ E_x - E_x^{(2)} & E_y - E_y^{(2)} & E_z - E_z^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

(верхний индекс указывает номер точки). Если направить ось *z* вдоль нормали к этой плоскости, окажется, что $E_z = 0$ (если излучение не является плоской волной, то направление нормали в точках с различными координатами не совпадает). Для поперечных компонент поля можно записать

$$E_x = a_1 \cos(\omega t + \delta_1), \quad E_y = a_2 \cos(\omega t + \delta_2). \tag{8.6}$$

Исключим из (6) время. После тригонометрических преобразований находим

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_1}\frac{E_y}{a_2}\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{8.7}$$

где $\delta = \delta_2 - \delta_1$ (см. [1]). Соотношение (7) относительно E_x и E_y является уравнением конического сечения и в общем случае описывает эллипс. Другими словами, с течением времени траектория, описываемая концом вектора **E**, является эллипсом. Этот эллипс вписан в прямоугольник со сторонами, параллельными осям *x* и *y* с длиной, соответственно, $2a_1$ и $2a_2$. Период обращения конца вектора **E** по эллипсу равен $T = 2\pi/\omega$. Данный общий случай отвечает эллиптической поляризации волны. В частных случаях эллипс вырождается в прямую (линейная поляризация) или в круг (круговая поляризация).

Удобной характеристикой поляризации служат параметры Стокса. Для рассматриваемого монохроматического излучения они определяются следующим образом [1]:

$$s_0 = a_1^2 + a_2^2, \quad s_1 = a_1^2 - a_2^2, \quad s_2 = 2a_1a_2\cos\delta, \quad s_3 = 2a_1a_2\sin\delta. \tag{8.8}$$

Параметр s_0 пропорционален интенсивности излучения, при этом

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \tag{8.9}$$

так что только три параметра Стокса независимы. Эти параметры определяют ориентацию эллипса, степень эллиптичности и направление вращения. Геометрически параметры Стокса s_1, s_2 и s_3 можно рассматривать как декартовы координаты точки на сфере Пуанкаре радиуса s_0, на которой линейная поляризация отвечает точкам на экваторе, а две чисто круговые поляризации – «северному» и «южному» полюсам.

Выше рассматривался случай полностью когерентного (монохроматического) излучения. Описание излучения с частичной поляризацией тесно связано с представлениями о частичной когерентности излучения, см. [1]. На этот случай обобщается и определение параметров Стокса.

Сделаем теперь предостережение о возможной некорректности постановки задачи Коши для уравнения Гельмгольца (1) (пример Адамара). Пусть мы описываем распространение пучка монохроматического излучения преимущественно вдоль оси *z*. Зададим при $z = 0$ значения f и $\partial f / \partial z$:

$$f\big|_{z=0} = \frac{a}{\kappa}\cos(\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{r}_\perp), \quad \mathbf{r}_\perp = (x, y), \quad \boldsymbol{\kappa}_\perp = (\kappa_x, \kappa_y), \quad \kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}, \quad a = \text{const}. \tag{8.10}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{8.11}$$

Тогда (что легко проверить разделением переменных) решением (1) будет

$$f = \frac{a}{\kappa}\operatorname{ch}(\sqrt{\kappa^2 - k^2}\, z)\cos(\boldsymbol{\kappa}_\perp \mathbf{r}_\perp). \tag{8.12}$$

Перейдем теперь к пределу $\kappa \to \infty$. При этом $f\big|_{z=0} = 0$ и $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$, то есть начальные данные стремятся к нулю. Очевидно, что при нулевых начальных данных имеется тривиальное (нулевое) решение задачи. Однако из (12) следует, что имеется и решение, которое при любом $z > 0$ стремится не к нулю, а к бесконечности. Поэтому здесь нет непрерывной зависимости решения от начальных условий, и постановка задачи Коши для уравнения Гельмгольца некорректна. Сделать постановку корректной можно при иной постановке начальных данных, Так, для однонаправленного распространения пучка в плоскости $z = 0$ в положительном направлении оси *z* должны присутствовать только однородные плоские волны, распространяющиеся также в положительном направлении *z,* и неоднородные плоские волны, убывающие в том же направлении.

При комплексной записи мы часто опускали знак вещественной части, что можно делать при линейных по амплитудам операциях. Интерес представляют и квадратичные по амплитудам величины, например, энергетические. Так, согласно (7.16), поток энергии квадратичен по амплитуде. Обычно нас интересует не мгновенное (быстро осциллирующее по времени) значение потока, а его среднее значение за период оптических колебаний $T = 2\pi/\omega$, часто называемое интенсивностью. Обозначая среднее значение угловыми скобками, найдем, что оно выражается через квадрат модуля комплексной огибающей:

$$< \mathbf{S} > = \frac{c}{4\pi} < \mathbf{E}^2 > \mathbf{m} = \frac{c}{4\pi} < \{\mathbf{E}_0 \exp[i(kr - \omega t)] + \mathbf{E}_0^* \exp[-i(kr - \omega t)]\}^2 > \mathbf{m} =$$

$$= \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{m}. \tag{8.13}$$

При распространении нескольких плоских волн с различными частотами и волновыми векторами

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re} \sum_{m=1}^{M} \mathbf{E}_m \exp[i(\mathbf{k}_m \mathbf{r} - \omega_m t)]. \tag{8.14}$$

Мгновенный вектор Пойнтинга включает биения на разностных частотах. При вычислении интенсивности (с усреднением $< \mathbf{E}^2 >$ по времени) следует различать случай монохроматического (или квазимонохроматического) излучения и случай существенно различающихся частот. В последнем случае биения за период измерения усредняются, и средняя интенсивность равна сумме интенсивностей отдельных волн. Для монохроматического излучения ($\omega_m = \omega$) сохраняются интерференционные (осциллирующие при изменении координат) члены:

$$< \mathbf{E}^2 > = \frac{1}{4} < \{\exp(-i\omega t) \sum_{m=1}^{M} \mathbf{E}_m \exp[i(\mathbf{k}_m \mathbf{r})] + \exp(i\omega t) \sum_{m=1}^{M} \mathbf{E}_m^* \exp[-i(\mathbf{k}_m \mathbf{r})]\}^2 > =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \sum_{m=1}^{M} \mathbf{E}_m \exp[i(\mathbf{k}_m \mathbf{r})] \right|^2. \tag{8.15}$$

Эффект интерференции зависит от поляризации волн. Для двух плоских монохроматических волн (M = 2) интерференционные члены исчезают в случае ортогональных поляризаций волн и максимальны для совпадающих поляризаций. В последнем случае интенсивность периодически меняется при изменении координат, обращаясь в нуль при равенстве амплитуд волн. При большем числе интерферерующих волн суммарное поле может включать «оптические вихри», или винтовые дислокации волнового фронта. В поперечном сечении они представляются точками, в которых интенсивность обращается в нуль, а фаза поля при обходе вокруг точки получает приращение, кратное 2π (см. ниже Задание 13 и раздел 9).

Принципиальным дефектом рассмотренных выше плоских волн является то, что ввиду независимости поля от поперечных координат полная мощность, переносимая такими волнами, бесконечна. Поэтому одиночная плоская волна и даже сумма нескольких плоских волн не отвечают физически реализуемому полю. Однако, привлечение плоских монохроматических волн в действительности позволяет решить широкий круг физически осмысленных задач. Дело в том, что здесь мы рассматриваем линейную область электродинамики, где справедлив принцип суперпозиции. Поэтому мы можем разложить в интеграл по плоским монохроматическим волнам практически любое распределение поля, обладающее конечной мощностью (энергией). Тем самым знание плосковолновых решений дает принципиальную возможность решить аналогичные задачи с пучками и импульсами электромагнитного излучения.

Задание 12. В вакууме распространяются две плоские монохроматические волны с совпадающей линейной поляризацией. Комплексная запись напряженности электрического поля для каждой из волн имеет вид

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{e}_y A \exp(i\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{r} - i\omega t), \quad \mathbf{k}_{1,2} = \pm k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z, \quad k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 / c^2 .$$

Найти компоненты вектора Пойнтинга в плоскости $z = 0$.

Задание 13. В вакууме $\mathbf{H} = [\mathbf{r} \times \mathbf{h}]\cos(\omega t)$. Найти **E** (**h** и ω – постоянные).

Задание 14. Распространяются три плоских монохроматических волны с компланарными (лежащими в одной плоскости) волновыми векторами, совпадающими частотами и поляризациями и с комплексными амплитудами A_1, A_2 и A_3. При каких условиях существуют точки, в которых интенсивность (средний по времени поток энергии) равна нулю?

Ответ: Амплитуды волн должны удовлетворять «правилу треугольника» $| A_m - A_n |< A_l < A_m + A_n$, $m,n,l = 1,2,3$, где среди индексов *m,n,l* нет повторяющихся.

9. Цилиндрические волны (бесселевы пучки)

С математической точки зрения плоская волна служит основным решением уравнения Гельмгольца (или же волнового уравнения) методом разделения переменных в декартовой (прямоугольной) системе координат. Аналогичным образом можно найти решения для цилиндрической и сферической систем координат. Определение структуры поля в цилиндрических координатах требуется в теории оптических волноводов (световодов). Полная задача является векторной; она приближенно сводится к скалярной для поперечных компонент поля и, как мы увидим далее, точно для продольных компонент поля. Поэтому начнем с анализа скалярного уравнения Гельмгольца.

Запишем скалярное уравнение Гельмгольца (8.1) в цилиндрических координатах $(z, \rho, \varphi), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (см. (П.8)). При этом решение ищется в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента $f(z, \rho, \varphi) = Z(z)R(\rho)\Phi(\varphi)$ (метод разделения переменных)

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\left(\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2\right)=0. \qquad (9.1)$$

Выражение в скобках в конце левой части (1) зависит только от z, а все остальные члены этого уравнения от z не зависят. Поэтому выражение в скобках равно константе, или

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+\beta^2=0, \qquad (9.2)$$

откуда

$Z = Z_0 \exp(\pm i\beta z)$.

Далее заменяем выражение $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$ в левой части (1), в соответствии с (2), постоянной $-\beta^2$ и домножаем результат на ρ^2. Аналогичным образом замечаем, что в преобразованном уравнении (1) член $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$ зависит только от φ, тогда как остальные члены этого уравнения от φ не зависят. Поэтому

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2,$$

откуда

$\Phi = \Phi_0 \exp(im\varphi)$.

Поскольку при сдвиге φ на $\pm 2\pi$ величина f не должна изменяться, постоянная m должна быть целой: $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ С учетом этого приходим к следующему виду радиального уравнения для $R(\rho)$:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}R+\kappa^2R=0, \quad \kappa^2=k^2-\beta^2 \qquad (9.3)$$

Общим решением (3) служит цилиндрическая функция с индексом m, которая является линейной суперпозицией функций Бесселя и Неймана

$R(\rho) = Z_m(\kappa\rho) = C_1 J_m(\kappa\rho) + C_2 N_m(\kappa\rho)$.

Для решения, конечного при $r = 0$, постоянная $C_2 = 0$, так что

$$R(\rho) = C_1 J_m(\kappa\rho). \qquad (9.4)$$

Таким образом, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца распределение амплитуды имеет вид

$$f(\rho,\varphi,z) = C\, J_m(\kappa\rho)\exp(im\varphi)\exp(i\beta z). \qquad (9.5)$$

(использована комплексная форма записи, знак Re опущен).

Поскольку поперечный профиль амплитуды при изменении продольной координаты z не меняется, бесселевы пучки иногда называются «нерасходящимися». Такое название неточно, так как характер радиальной зависимости (4) таков (см. П.10), что отвечающая бесселеву пучку мощность, как и для плоской волны, бесконечна. В реальных условиях имеют дело с “обрезанным” бесселевым пучком (с амплитудой, отличной от нуля лишь на конечном диапазоне изменения радиуса ρ), и такие пучки, естественно, характеризуются конечной угловой расходимостью.

Обратим также внимание на описываемую (5) поперечную структуру поля при фиксированном значении продольной координаты *z*. Распределение интенсивности $I \sim |f|^2$ осесимметрично (не зависит от угловой координаты φ). Вблизи оси пучка (малые ρ) согласно (П.9) $I \sim \rho^{2|m|}$, так что при $m = 0$ интенсивность имеет на оси максимум, а при $m \neq 0$ обращается в ноль. В последнем случае волновой фронт (то есть поверхность постоянной фазы) имеет следующую особенность. Если обойти в плоскости $z = const$ вокруг точки $\rho = 0$ по замкнутому контуру (например, окружности), то в соответствии с (5) при возрате в точку с теми же декартовыми координатами фаза поля получит приращение, равное $2\pi m$. Тем самым волновой фронт становится не однозначной, а многолистной (римановой) поверхностью типа винта. В данном случае мы имеем пример «оптического вихря» – винтовой дислокации волнового фронта. Они присутствуют не только в осесимметричных полях, но и, например, в полях с сильно искаженным волновым фронтом. Дислокации первого порядка ($|m| = 1$) устойчивы, а высшего порядка – неустойчивы по отношению к малым возмущениям. Действительно, условием наличия дислокации служит обращение в 0 комплексной амплитуды поля *E*, что эквивалентно двум вещественным условиям Re *E* = 0 и Im *E* = 0. В сечении с фиксированной продольной координатой *z* эти условия имеют вид

$$\mathrm{Re}\, E(x, y) = 0, \quad \mathrm{Im}\, E(x, y) = 0\,.$$

Нас интересуют точки пересечения линий, отвечающих первому и второму условию, и малые окрестности этих точек. Если это простое пересечение, то при малых деформациях вида функций $E(x, y)$ точка пересечения лишь слабо сдвинется. Если две линии касаются, то при малой деформации они либо перестанут пересекаться, либо пересекутся в двух (или более) точках. Последний вариант отвечает расщеплению дислокации второго порядка на две дислокации первого порядка.

Более полное описание требует учета поляризационной структуры поля. При этом с учетом симметрии задачи снова удобно использовать не декартовы (*x,y,z*), а цилиндрические (z, ρ, φ) координаты. В этих координатах, однако, вид оператора Лапласа в применении к векторам весьма сложен. Поэтому будем исходить непосредственно из векторных уравнений Максвелла для случая монохроматического излучения:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \quad \mathrm{rot}\, \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}\,.$$

Ищем решение этих уравнений в виде (в теории световодов β – постоянная распространения)

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_\perp)\exp(i\beta z), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}_\perp)\exp(i\beta z), \quad \mathbf{r}_\perp = (x, y)$.

Распишем эти векторные уравнения по проекциям

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y = -i\frac{\omega}{c}E_x \quad (9.6) \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y = i\frac{\omega}{c}H_x \quad (9.9)$$

$$i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\frac{\omega}{c}E_y \quad (9.7) \qquad i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\frac{\omega}{c}H_y \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\frac{\omega}{c}E_z \quad (9.8) \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\frac{\omega}{c}H_z \quad (9.11)$$

Отсюда можно выразить поперечные компоненты $E_{x,y}$ и $H_{x,y}$ через продольные компоненты E_z и H_z. Так, комбинируя (6) и (10), найдем

$$E_x = \frac{i}{\kappa^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\omega}{c}\frac{\partial H_z}{\partial y}\right), \quad H_y = \frac{i}{\kappa^2}\left(\frac{\omega}{c}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial H_z}{\partial y}\right). \qquad (9.12)$$

Аналогично, из (7) и (9) следует

$$E_y = \frac{i}{\kappa^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\omega}{c}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right), \quad H_x = -\frac{i}{\kappa^2}\left(\frac{\omega}{c}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial x}\right). \qquad (9.13)$$

После подстановки этих выражений в (8) и (11) найдем

$$\Delta_\perp E_z + \kappa^2 E_z = 0, \quad \Delta_\perp H_z + \kappa^2 H_z = 0. \qquad (9.14)$$

Здесь введен поперечный оператор Лапласа, который в декартовых (x,y) и полярных (ρ, φ) координатах (применительно к скалярам) имеет вид

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \qquad (9.15)$$

Заметим, что уравнения (14) можно получить непосредственно как проекции векторных волновых уравнений (7.1) и (7.3а) (в случае монохроматического излучения) на ось z. Видно, что (14) совпадает с изученным выше скалярным уравнением Гельмгольца, так что мы можем сразу выписать его решения

$$E_z = AZ_m(\kappa\rho)\exp(im\varphi)\exp(i\beta z), \quad H_z = BZ_m(\kappa\rho)\exp(im\varphi)\exp(i\beta z). \quad (9.16)$$

Теперь, зная E_z и H_z, дифференцированием можно получить и продольные компоненты поля. Декартовы компоненты поля определяются по соотношениям (12) и (13), а в полярных координатах

$$E_\rho = \frac{i}{\kappa^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\omega}{c}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right), \quad E_\varphi = \frac{i}{\kappa^2}\left(\beta\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\omega}{c}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right), \qquad (9.17)$$

$$H_\rho = -\frac{i}{\kappa^2}\left(\frac{\omega}{c}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right), \quad H_\varphi = \frac{i}{\kappa^2}\left(\frac{\omega}{c}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \beta\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\right). \qquad (9.18)$$

Отметим, что общее решение представляется в виде суперпозиции двух решений, для одного из которых электрическое поле ортогонально оси распространения ($E_z = 0$, поперечно-электрические волны), а для другого ортогональность имеет место для магнитного поля ($H_z = 0$, поперечно-магнитные волны).

10. Сферические волны

Такие волны имеют важное значение в задаче о рассеянии излучения на сферических частицах (теория Ми, см., например, [1]). Так же, как в случае цилиндрических координат, начнем с анализа скалярного уравнения Гельмгольца. Сферические координаты (r, θ, φ) вводятся обычными соотношениями

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi. \qquad (10.1)$$

Оператор Лапласа (применительно к скалярным функциям) имеет вид (П.8). Уравнение Гельмгольца (8.1) для сферически симметричных (не зависящих от угловых переменных) распределений поля упрощается

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + k^2 f = 0. \qquad (10.2)$$

Нетрудно проверить, что общее (содержащее две произвольные постоянные) решение (2) имеет вид

$$f = C_1 \frac{1}{r}\exp(ikr) + C_2 \frac{1}{r}\exp(-ikr). \qquad (10.3)$$

С учетом комплексной формы записи поля и опущенного временного множителя $\exp(-i\omega t)$ замечаем, что первый член в (3) отвечает расходящейся сферической волне, а второй – сходящейся. Обе волны имеют особенность в начале координат; можно, однако, построить их линейную комбинацию, конечную в начале координат $f = C\sin(kr)/(kr)$. Энергия поля, пропорциональная $\int |f|^2\, dv = \int |f|^2\, r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = = 4\pi\int |f|^2\, r^2 dr$ бесконечна из-за недостаточно быстрого убывания поля на бесконечности.

Перейдем теперь к строгой векторной теории [1]. Прежде всего, заметим, что сферически симметричные распределения электрического и магнитного полей монохроматического излучения невозможны (это можно, в частности, увидеть из приводимых ниже уравнений (10.6)). Поэтому структура поля в векторном случае более сложна.

Как и в случае бесселевых пучков, исходим из уравнений Максвелла для монохроматического излучения:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad \mathrm{rot}\ \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \qquad (10.4)$$

Соотношения между компонентами любого вектора **V** в декартовых и сферических координатах следующие:

$$V_r = V_x \sin\vartheta \cos\varphi + V_y \sin\vartheta \sin\varphi + V_z \cos\vartheta,$$
$$V_\vartheta = V_x \cos\vartheta \cos\varphi + V_y \cos\vartheta \sin\varphi + V_z \sin\vartheta, \qquad (10.5)$$
$$V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi.$$

Применяя (5) к входящим в (4) векторам $\mathbf{V} = \mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, запишем (4) по компонентам

$$E_r = i\frac{1}{kr^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial(rH_\varphi \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(rH_\vartheta)}{\partial\varphi}\right],\ H_r = -i\frac{1}{kr^2 \sin\vartheta}\left[\frac{\partial(rE_\varphi \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(rE_\vartheta)}{\partial\varphi}\right],$$
$$E_\vartheta = i\frac{1}{kr\sin\vartheta}\left[\frac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rH_\varphi \sin\vartheta)}{\partial r}\right], \qquad H_\vartheta = -i\frac{1}{kr\sin\vartheta}\left[\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rE_\varphi \sin\vartheta)}{\partial r}\right],$$
$$E_\varphi = i\frac{1}{kr}\left[\frac{\partial(rH_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\vartheta}\right], \qquad H_\varphi = -i\frac{1}{kr}\left[\frac{\partial(rE_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right].$$
$$(10.6)$$

Так же, как для цилиндрических координат, решение системы (6) можно представить как суперпозицию двух линейно независимых полей ($\mathbf{E}^{(e)}, \mathbf{H}^{(e)}$ – электрическая волна) и ($\mathbf{E}^{(m)}, \mathbf{H}^{(m)}$ – магнитная волна), каждое из которых удовлетворяет (6) и обладает нулевой радиальной компонентой либо электрического, либо магнитного поля:

$$H_r^{(e)} = 0, \quad E_r^{(m)} = 0. \qquad (10.7)$$

Для каждого из двух типов волн снова удается выразить компоненты поля через скалярную функцию – потенциал Дебая $\Pi = \Pi^{(e)}, \Pi^{(m)}$, удовлетворяющий скалярному волновому уравнению

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0. \qquad (10.8)$$

В сферических координатах (8) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Pi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} + k^2\Pi = 0. \qquad (10.9)$$

Явный вид для выражения компонент поля через потенциалы Дебая следующий

$$E_r = \frac{\partial^2(r\Pi^{(e)})}{\partial r^2} + k^2 r\Pi^{(e)}, \qquad H_r = \frac{\partial^2(r\Pi^{(m)})}{\partial r^2} + k^2 r\Pi^{(m)},$$
$$E_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Pi^{(e)})}{\partial r\,\partial\vartheta} + ik\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(r\Pi^{(m)})}{\partial\varphi}, \quad H_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Pi^{(m)})}{\partial r\,\partial\vartheta} - ik\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(r\Pi^{(e)})}{\partial\varphi},$$
$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(r\Pi^{(e)})}{\partial r\,\partial\vartheta} - ik\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Pi^{(m)})}{\partial\vartheta}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(r\Pi^{(m)})}{\partial r\,\partial\vartheta} + ik\frac{1}{r}\frac{\partial(r\Pi^{(e)})}{\partial\vartheta}.$$
$$(10.10)$$

Уравнение (9) решаем методом разделения переменных, то есть разлагаем решение по парциальных решениям вида

$$\Pi = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi). \qquad (10.11)$$

После подстановки (11) в (9) получаем для R, Θ, Φ обыкновенные дифференциальные уравнения (α и m – постоянные)

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\alpha}{r^2}\right)(rR) = 0, \qquad (10.12)$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left(\alpha - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0, \qquad (10.13)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0. \qquad (10.14)$$

Уравнение (14) совпадает с полученным в п. 9 для цилиндрической геометрии, откуда следует, что $\Phi = \exp(im\varphi)$ (в вещественной форме $\Phi = c_m\cos(m\varphi) + s_m\sin(m\varphi)$, где c_m, s_m – постоянные) и для однозначности решения m должно быть целым числом:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (10.15)$$

Уравнение (13) называется уравнением сферических гармоник. Условием однозначности решения служит соотношение (l – целое число):

$$\alpha = l(l+1), \quad l > |m|. \qquad (10.16)$$

При этом решение выражается через полином от $\cos\vartheta$, а именно – присоединенный полином Лежандра

$$\Theta = P_l^{(m)}(\cos\vartheta) \quad m = -l, -l+1, ... l-1, l. \qquad (10.17)$$

При $m < 0$ обычно полагают $\Theta_{l,-|m|} = (-1)^m\Theta_{l,|m|}$. Определение присоединенных полиномов Лежандра следующее ($m \ge 0$):

$$P_l^{(m)}(\cos\vartheta) = (\sin\vartheta)^m \frac{d^m P_l(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m}, \qquad (10.18)$$

где P_l – полином Лежандра (знак [] здесь означает целую часть)

$$P_l(\cos\vartheta) = \sum_{m=0}^{[l/2]}(-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!}(\cos\vartheta)^{l-2m}. \qquad (10.19)$$

При $m < 0$ обычно полагают $\Theta_{l,-|m|} = (-1)^m\Theta_{l,|m|}$.

Радиальное уравнение (12) снова сводится к уравнению Бесселя, но теперь, с учетом (16), индекс цилиндрических функций полуцелый:

$$R = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{l+1/2}(kr). \qquad (10.20)$$

В этом случае цилиндрические функции выражаются через элементарные. Например, при $l = 0$ конечная в нуле радиальная функция имеет вид

$$R = \frac{\sin(kr)}{kr}. \qquad (10.21)$$

Таким образом, общее решение уравнения (9) для потенциалов Дебая таково:

$$\Pi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{C_{l,m}}{\sqrt{kr}} Z_{l+1/2}(kr) P_l^{(m)}(\cos\vartheta) \exp(im\varphi), \qquad (10.22)$$

где $C_{l,m}$ – постоянные. Далее поля находятся по соотношениям (10). Отметим, что член суммы в (22) с $l = 0$ (а тогда и $m = 0$) приводит к нулевому парциальному полю, **E** = **H** = 0. Из асимптотики цилиндрических функций (при $kr >> 1$) следует, что мощность, переносимая парциальными волнами, бесконечна.

Итак, простейшие точные решения уравнений Максвелла и Гельмгольца не вполне физичны, поскольку отвечают бесконечной энергии. Описание более реальных структур поля – пучков и импульсов излучения с конечной мощностью и энергией – будет далее проведено приближенными методами.

11. Высокочастотная асимптотика. Геометрическая оптика

Рассмотрим приближенное описание для квазимонохроматического электромагнитного поля, отвечающее пределу $k \to \infty$ ($k = \omega / c = 2\pi / \lambda$ – волновое число, λ – длина волны излучения). Физически это означает, что рассматриваются поля с плавным (в масштабе длины волны) изменением амплитуды (огибающей). Начнем с хорошо известного варианта высокочастотной асимптотики – приближения геометрической оптики.

Будем исходить из скалярного волнового уравнения (8.1) для компонент напряженности электрического или магнитного поля f:

$$\Box f = \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \qquad (11.1)$$

Как мы уже знаем, это уравнение имеет решение в виде плоской волны (комплексная форма записи, знак вещественной части опущен)

$$f = A \exp(i\Psi), \qquad (11.2)$$

где A – постоянная (не зависящая от координат и времени) амплитуда, которую можно считать вещественной, а эйконал $\Psi = (\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega t$ – вещественная линейная функция координат и времени, так что

$$\Box \Psi = 0. \qquad (11.3)$$

Будем теперь искать решение (1), отвечающее волне, близкой к плоской монохроматической. Для этого считаем амплитуду A и *эйконал* Ψ зависящими от координат и времени. Подставив (2) в (1) и разделив в полученном уравнении вещественную и мнимую части, найдем

$$\Box A - A\left[(\nabla\Psi)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 \right] = 0, \qquad (11.4)$$

$$2\left(\nabla A\nabla\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)+A\,\Box\,\Psi=0\,. \qquad (11.5)$$

Оценим члены в (4). Первый член $\sim A/w^2$, где w – характерный масштаб изменения амплитуды, который в принятых условиях существенно больше длины волны. Члены в квадратных скобках пропорциональны k^2 (или ω^2). Поэтому там, где амплитуда поля

$$A\neq 0\,, \qquad (11.6)$$

можно перенебречь первым членом в(4) и получить *уравнение эйконала*:

$$(\nabla\Psi)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=0\,. \qquad (11.7)$$

Заметим, что это уравнение совпадает по математической форме с уравнением фронта волны (5.14), хотя и записано для другой величины. Поэтому решается оно теми же способами, которые были обсуждены в п. 5. Однако физический смысл и условия применимости этих двух уравнений радикально отличаются. Напомним, что уравнение фронта волны является точным и определяет положение поверхности, до которой к данному моменту времени дошло излучение, первоначально имевшееся только к более узкой области. Уравнение же эйконала является приближенным (излучение близко к плоской монохроматической волне) и определяет волновой фронт – поверхность постоянной фазы квазимонохроматической электромагнитной волны. Отметим также, что уравнение эйконала несправедливо в окрестности нулевой амплитуды (условие (6)), где фаза и волновой фронт излучения не определены. В окрестности этих точек возможны дислокации волнового фронта (см. п. 9).

После решения (7) и определения эйконала *уравнение переноса* (5) позволяет найти амплитуду поля. Уравнения геометрической оптики заметно упрощаются в случае монохроматического излучения, когда можно положить

$$\Psi=\frac{\omega}{c}\psi(\mathbf{r})-\omega t\,. \qquad (11.8)$$

Безрамерная не зависящая от времени величина ψ также называется эйконалом. Теперь (7) и (5) принимают вид

$$(\nabla\psi)^2=1\,, \qquad \text{или} \qquad (\mathrm{grad}\,\psi)^2=1\,, \qquad (11.9)$$

$$\nabla(A^2\nabla\psi)=0\,, \qquad \text{или} \qquad \mathrm{div}(A^2\mathrm{grad}\,\psi)=0\,. \qquad (11.10)$$

В рассмотренном низшем приближении структура поля локально подобна плоской волне, направление распространения которой дается лучем – вектором $\nabla\psi=\mathrm{grad}\,\psi$. Этот вектор ортогонален поверхности постоянной фазы $\psi=const$. Для вакуума (или же однородной среды) решение уравнения эйконала (9) описывает распространение света по прямым лучам. Уравнение переноса (10) отвечает сохранению световой мощности в пределах лучевой трубки. Из него следует, что пропорциональная квадрату амплитуды интенсивность излучения обращается в бесконечность на каустиках – поверхностях, где соседние лучи касаются друг друга. Частным случаем каустики являются фокуса (пересечения лучей). В области каустик и фокусов исходное предположение о плавности изменения амплитулы поля нарушается, поэтому подход геометрической оптики нуждается в уточнении (необходим учет дифракции).

12. Квазиоптическое (параксиальное) приближение

Как указывалось выше, метод геометрической оптики в ряде случаев приводит к физически неправильным выводам, например вблизи фокусов пучков. Мы начнем с простейшего варианта учета дифракции – отклонений от геометрической оптики, вызванных конечностью длины волны излучения. Этот метод был предложен и развит Леонтовичем и Фоком [8], см. также Приложение А книги [14].

12.1. Скалярное квазиоптическое уравнение

Для монохроматического излучения исходным служит уравнение Гельмгольца (8.1) для компонент векторов напряженности электрического или магнитного поля

$$\Delta f + k^2 f = 0, \quad k = \omega / c = 2\pi / \lambda. \tag{12.1}$$

Как мы видели выше, уравнение (1) имеет решение в виде плоской волны, которое запишем в форме

$$f = A \exp(ikz), \quad A = const. \tag{12.2}$$

Здесь мы выбрали ось z в качестве направления распространения волны, знак вещественной части опущен.

Основным предположением (и условием применимости) метода квазиоптического приближения служит близость излучения к плоской монохроматической волне. Точнее, предполагается, что величина f может быть представлена в виде

$$f = A(x, y, z) \exp(ikz), \tag{12.3}$$

где комплексная амплитуда $A(x,y,z)$ уже не постоянна, но меняется медленно (в масштабах длины волны излучения λ). В том числе масштаб поперечного изменения огибающей w должен значительно превосходить длину волны, $w >> \lambda$. Пучки излучения с такой амплитудой обладают малой угловой расходимостью $\sim \lambda / w << 1$. Ввиду выделенности направления преимущественного распространения излучения z удобно представить оператор Лапласа в (1) в форме

$$\Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{12.4}$$

Точное выражение для второй производной функции f по z имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} - k^2 A \right) \exp(ikz). \qquad (12.5)$$

При подстановке (4), (5) в (1) члены порядка k^2 сокращаются. Для оценки оставшихся членов введем характерную длину дифракционных искажений огибающей L_d. По условиям применимости квазиоптического приближения $L_d >> \lambda$. Тогда по порядку величины

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \sim \frac{A}{L_d^2}, \quad k\frac{\partial A}{\partial z} \sim \frac{A}{\lambda L_d}, \quad \left. \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \middle/ k\frac{\partial A}{\partial z} \right. \sim \frac{\lambda}{L_d} << 1. \qquad (12.6)$$

Ввиду оценки (6) можно пренебречь членом со второй производной от медленно меняющейся амплитуды A, после чего и получаем квазиоптическое уравнение в его простейшей форме

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_\perp A = 0. \qquad (12.7)$$

Ввиду важности этого уравнения дадим еще один вывод его, исходя из «дисперсионного соотношения». Если ввести огибающую соотношением (3), то она может быть представлена суперпозицией плоских волн вида

$$A \sim \exp[i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp + i(k_z - k)z]. \qquad (12.8)$$

Здесь $\mathbf{k}_\perp = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y$ – «поперечный» волновой вектор. Следующее из уравнения Гельмгольца точное дисперсионное соотношение имеет вид

$$k^2 = k_\perp^2 + k_z^2. \qquad (12.9)$$

Предположим теперь, что излучение состоит преимущественно из волн, направленных под малыми углами к оси z, так что

$$k_\perp^2 << k^2. \qquad (12.10)$$

Это предположение отвечает условию квазиоптичности. Тогда

$$k_z - k = \sqrt{k^2 - k_\perp^2} - k \approx -\frac{k_\perp^2}{2k}. \qquad (12.11)$$

Выбранный знак перед корнем отвечает волнам, распространяющимся в направлении, близком к положительному направлению оси z (для встречных волн знак противоположен). Теперь заметим, что для волн вида (8)

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i(k_z - k)A, \quad \Delta_\perp A = -k_\perp^2 A.$$

Поэтому домноженное на i уравнение (11) записывается в виде $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k}\Delta_\perp A,$ что эквивалентно (7). Более точно, из левого равенства в (11) следовало бы такое «точное» символическое уравнение

$$i\frac{\partial A}{\partial z}+\sqrt{k^2+\Delta_\perp}A-kA=0\,. \qquad (12.12)$$

Разлагая квадратный корень в ряд Тейлора и сохраняя различное число членов, можно получить уточненное квазиоптическое уравнение. Так, при учете только низшей «непараксиальной» поправки вместо (7) получим

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z}+\Delta_\perp A-\frac{1}{(2k)^2}\Delta_\perp^2 A=0. \qquad (12.13)$$

В принятом приближении широкого пучка «непараксиальная» поправка мала по сравнению с предыдущим членом. Однако в нелинейной оптике имеются ситуации, когда учет «непараксиальных» поправок принципиален. Заметим также, что плоская волна (8) с соотношением между продольной и поперечными компонентами волнового вектора (11) служит точным решением квазиоптического уравнения (7).

Оценка дифракционной длины

Определим характерную длину дифракционных искажений L_d для пучка излучения с характерным масштабом поперечных изменений w (таким масштабом может служить ширина пучка). Для этого оценим первый и второй члены квазиоптического уравнения (7)

$$\frac{\partial A}{\partial z}\sim\frac{A}{L_d}, \quad \Delta_\perp A\sim\frac{A}{w^2}.$$

Приравнивая их по порядку величины, найдем

$$L_d\sim kw^2\sim w^2/\lambda.$$

На трассе меньшей длины дифракционные искажения еще не проявятся, огибающая изменится слабо.

11.2. Решение квазиоптического уравнения

Основное отличие квазиоптического уравнения (7) от исходного уравнения Гельмгольца состоит в том, что квазиоптическое уравнение содержит только первую производную по продольной координате z, а уравнение Гельмгольца – вторую. Физически это означает, что квазиоптическое уравнение уже не описывает волн, распространяющихся во встречном направлении $-z$.

С этим связано и отличие в постановке задачи решения уравнений распространения. Для квазиоптического уравнения (с первой производной по z) достаточно задать при $z = 0$ начальное распределение комплексной амплитуды поля (огибающей) A

$$A(x,y,0)=A_0(x,y), \qquad (12.14)$$

после чего распределение огибающей при других z определяется уже однозначно. Приведем вывод соответствующего решения.

Как мы видели выше, плоская волна служит точным решением квазиоптического уравнения (7), если компоненты ее волнового вектора подчиняются соотношению (10). Поэтому, пользуясь линейностью задачи и принципом суперпозиции, можно разложить искомое решение в интеграл по плоским волнам, причем их (комплексные) амплитуды будут определяться начальным условием (14), также разложенном в интеграл по плоским волнам. Совокупность (интеграл) таких волн и дает решение задачи.

Разложение поля в спектр плоских волн в плоскости $z = 0$ отвечает двумерному фурье-преобразованию функции A_0 (14):

$$A_0(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \, B_0(k_x,k_y)\exp(ik_x x + ik_y y), \tag{12.15}$$

где угловой спектр дается обратным фурье-преобразованием

$$B_0(k_x,k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, A_0(x,y)\exp(-ik_x x - ik_y y). \tag{12.16}$$

Огибающая соответствующей парциальной плоской волны в сечении z

$$B(k_x,k_y,z) = B_0(k_x,k_y)\exp[i(k_z - k)z]. \tag{12.17}$$

Соответственно, огибающая в том же сечении

$$\begin{gathered}
A(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \, B(k_x,k_y,z)\exp(ik_x x + ik_y y) = \\
\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \, B_0(k_x,k_y)\exp[i(k_z - k)z]\exp(ik_x x + ik_y y) = \\
\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \, B_0(k_x,k_y)\exp\left(-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}z\right)\exp(ik_x x + ik_y y).
\end{gathered} \tag{12.18}$$

Упростим полученное решение, подставив в него явный вид функции B_0 (16) и выполнив интегрирование по k_x и k_y:

$$\begin{aligned}
A(x,y,z) = &\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, A_0(x',y') \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \, \exp\left(-i\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}z\right)\exp[ik_x(x - x') + ik_y(y - y')] = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, A_0(x',y')\exp\left(\frac{ik}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2]\right) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \, \exp\left(-i\frac{z}{2k}\{[k_x - \frac{k}{z}(x - x')]^2 + [k_y - \frac{k}{z}(y - y')]^2\}\right).
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Интегралы в последней строке вычисляются по формуле (П.11); сходимость приведенных в (П.11) интегралов Френеля доказывается в [13,15].Таким образом, окончательно получим

$$A(x,y,z)=\frac{1}{i\lambda z}\int\int A_0(x',y')\exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z}[(x-x')^2+(y-y')^2]\right)dx'\,dy'. \qquad (12.20)$$

В частном случае «щелевых» пучков (огибающая зависит только от одной из поперечных координат x) эта формула трансформируется в следующую

$$A(x,z)=\frac{1}{\sqrt{i\lambda z}}\int A_0(x')\exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z}(x-x')^2\right)dx'. \qquad (12.21)$$

Если начальное поле задано не при z = 0, а при $z = z_0$, в формулах (20), (21) делается замена $z \to z - z_0$. Задание поля в некоторой плоскости z = 0 позволяет определить его как «за», так и «перед» этой плоскостью ($z > 0$ и $z < 0$).

Приведем упрощенные выражения для поля в дальней и ближней зонах по отношению длины трассы к определенной выше длине дифракционных искажений.

Дальняя зона (дифракция Фраунгофера)

При $z \gg L_d$ (число Френеля $N = w^2/\lambda z \ll 1$) в области, отвечающей условиям применимости квазиоптического уравнения (небольшие углы наблюдения $|x|/|z| \ll 1$) можно пренебречь квадратичными по x' и y' членами в показателе экспоненты в (20). Тогда дифракционный интеграл (20) сведется к преобразованию Фурье начального распределения огибающей

$$A(x,y,z)=\frac{1}{i\lambda z}\exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)\right)\int\int A_0(x',y')\exp\left(-\frac{2i\pi}{\lambda z}(xx'+yy')\right)dx'\,dy'.$$

(12.22)

Отсюда, в частности, следует, что на оси пучка ($x = y = 0$)

$$A(0,0,z)=\frac{1}{i\lambda z}\int\int A_0(x',y')\;dx'\,dy'. \qquad (12.23)$$

Ближнее поле

При $z \ll L_d$ (число Френеля $N \gg 1$) удобнее пользоваться не дифракционным интегралом, а непосредственно квазиоптическим уравнением. Поскольку на малых расстояниях огибающая мало отличается от исходного распределения (14), можно искать решение в виде степенного ряда по z (ряд Тейлора)

$$A(x,y,z)=A_0(x,y)+\left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_{z=0} z+\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right|_{z=0} z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n A}{\partial z^n}\right|_{z=0} z^n.$$

Производные по z нетрудно найти из квазиоптического уравнения (7), продифференцировав его по z нужное число раз:

$$\frac{\partial A}{\partial z}=\frac{i}{2k}\Delta_{\perp}A,\quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=\left(\frac{i}{2k}\right)^2\Delta_{\perp}^2 A,\quad \ldots\quad \frac{\partial^n A}{\partial z^n}=\left(\frac{i}{2k}\right)^n\Delta_{\perp}^n A..$$

Поэтому

$$A(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2k}\right)^n z^n\Delta_{\perp}^n A_0(x,y)=\exp\left(i\frac{z}{2k}\Delta_{\perp}\right)A_0(x,y)\,. \qquad (12.24)$$

Задание 15. Найти распределение поля в дальней зоне, если при $z = 0$ амплитуда постоянна и равна B в прямоугольнике размерами $a\times b$ и нулю вне этого прямоугольника.

Задание 16. Найти поле в дальней зоне, если при $z = 0$ $A(x,y,0)=B\cos(q_x x)\cos(q_y y)$ внутри прямоугольника размерами $a\times b$ и нулю вне этого прямоугольника. Как изменится результат при неограниченном возрастании a и b?

Задание 17. Найти поле в произвольной точке, а также на оси, в ближней и дальней зонах при $A(x,y,0)=B\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$.

Указание: воспользоваться формулой (П.12).

12.3. Гауссовы пучки

Сейчас мы уже можем, воспользовавшись квазиоптическим уравнением и его решением, рассмотреть пучки излучения с конечной мощностью, которые хорошо описывают излучение некоторых типов лазеров. Начнем с наиболее простого (низшего) типа гауссовых пучков.

Зададим в плоскости $z=0$ распределение излучения с плоским волновым фронтом (фаза в этой плоскости постоянна) и гауссовым профилем амплитуды и интенсивности

$$A_0(x,y)=A(x,y,0)=A^{(0)}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}\right). \qquad (12.25)$$

Здесь $A^{(0)}$ – амплитуда в центре пучка, величина w_0 характеризует ширину пучка (по уровню $1/e$ от максимальной амплитуды $A^{(0)}$) в плоскости $z=0$. Тогда по соотношению (20)

$$A(x,y,z)=\frac{A^{(0)}}{i\lambda z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x'^2+y'^2}{w_0^2}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z}[(x-x')^2+(y-y')^2]\right)dx'\,dy'.$$

Этот двукратный интеграл представляется как произведение двух однократных, которые вычисляются по формуле (П.12). Таким образом находим

$$A(x,y,z) = -iA^{(0)} \frac{p}{z-ip} \exp\left[i \frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda(z-ip)} \right], \tag{12.26}$$

где $p = \pi w_0^2 / \lambda$ – параметр конфокальности. Это соотношение удобно представить в виде

$$A(x,y,z) = A^{(0)} \frac{w_0}{w(z)} \exp\left\{ i \left[\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda R(z)} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \right] \right\} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} \right]. \tag{12.27}$$

Здесь введены ширина пучка $w(z)$ и радиус кривизны волнового фронта $R(z)$

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right], \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \tag{12.28}$$

Определив угловую расходимость излучения как $\theta = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{w(z)}{z}$, найдем из (28), что расходимость определяется отношением длины волны излучения к ширине пучка:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{12.29}$$

Согласно (26) и (27), распределение огибающей поля, как и заданное в исходной плоскости, осесимметрично. Распределение интенсивности $I = |A|^2$ остается гауссовым в плоскости с любым значением z, но его ширина зависит от продольной кординаты z, будучи минимальной при z = 0 (это плоскость перетяжки). При удалении от оси в сечении с фиксированным z интенсивность монотонно убывает до нуля (при бесконечном удалении). При изменении координаты z на оси пучка ($x = y$ = 0) интенсивность максимальна при z = 0 и убывает при отклонении z на масштабе $z \sim p$. Распределение интенсивности симметрично относительно плоскости z = 0, то есть не меняется при изменении знака z (а знак радиуса кривизны .волнового фронта при этом меняется).

Гауссовы пучки высших порядков

Помимо рассмотренного выше основного гауссова пучка (низшего порядка) имеются и другие, отличающиеся числом нулей интенсивности в поперечной плоскости. Интересно, что выражение для ширины пучка (28) для них то же. В декартовой системе координат методом разделения переменных можно получить следующий набор мод

$$A(x,y,z) = A^{(0)}\,\frac{w_0}{w} H_n\left(\frac{x}{w}\sqrt{2}\right) H_m\left(\frac{y}{w}\sqrt{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{ i\left[\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda R} - (m+n+1)\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)\right]\right\}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right],\quad m,n = 0,1,2,\ldots \tag{12.30}$$

Здесь $H_n(z)$ – полиномы Эрмита

$$H_0(z) = 1,\quad H_1(z) = 2z,\quad H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z). \tag{12.31}$$

При $m = n = 0$ (30) переходит в (27), то есть основная мода входит в семейство мод Гаусса-Эрмита; с увеличением индексов m и n увеличивается число нулей поля в поперечном сечении. Это семейство образует полную систему ортогональных фунций, линейная суперпозиция которых дает в рамках квазиоптики решение задачи о распространении пучков излучения произвольной формы. В цилиндрической системе координат удобнее пользоваться модами Гаусса-Лагерра, которые можно представить в виде линейных комбинаций мод Гаусса-Эрмита типа (30) с заменой произведения полиномов Эрмита на следующее выражение [16]

$$L_n^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\exp(im\varphi),\quad m,n = 0,1,2,\ldots \tag{12.32}$$

где полиномы Лагерра вводятся соотношениями

$$\begin{gathered} L_0^m(z) = 1,\quad L_1^m(z) = m+1-z, \\ (n+1)L_{n+1}^m(z) - (2n+m+1-z)L_n^m(z) + (n+m)L_{n-1}^m(z) = 0. \end{gathered} \tag{12.33}$$

Как и бесселевы пучки, моды Гаусса-Лагерра включают дислокации волнового фронта при $m \neq 0$.

Гауссовы пучки как автомодельные решения квазиоптического уравнения

Здесь мы выведем распределение поля для гауссовых пучков иным способом, решая квазиоптическое уравнение в цилиндрической системе координат

$$2ik\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{12.34}$$

Положим (частичное разделение переменных) $A(r,\varphi,z) = B(r,z)\Phi(\varphi)$. Тогда после очевидного преобразования (34) получим

$$\frac{r^2}{B}\left(2ik\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0. \tag{12.35}$$

Поскольку последний член в левой части уравнения (35) зависит только от φ, а остальные члены от φ не зависят, то этот член равен константе, которую обозначим как $-m^2$. Тогда

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0, \quad \Phi = \exp(im\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{12.36}$$

После такого исключения угловой зависимости для B находим

$$2ik\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}B = 0. \tag{12.37}$$

Автомодельное решение этого уравнения найдем для случая основного гауссова пучка, то есть при $m = 0$. Будем искать такое решение в виде

$$B(r,z) = a(z)\exp[-f(z)r^2]. \tag{12.38}$$

В соответствии с (25) при $z = 0$ должно быть

$$a(0) = A^{(0)}, \quad f(0) = w_0^{-2}. \tag{12.39}$$

Подстановка (38) в (37) приводит к следующим уравнениям (штрих означает производную по z):

$$2ika' - 4fa = 0, \quad 2ikf' - 4f^2 = 0. \tag{12.40}$$

Сначала решаем второе уравнение в (40)

$$f = \frac{1}{w_0^2}\frac{1}{1 + i\dfrac{\lambda z}{\pi w_0^2}}. \tag{12.41}$$

После этого нетрудно найти решение и первого уравнения в (40). В результате получаем в согласии с (26)-(28)

$$A(r,z) = \frac{A^{(0)}}{1 + i\dfrac{2z}{kw^2(z)}}\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z) + i\dfrac{2z}{k}}\right), \quad w^2(z) = w_0^2\left[1 + \frac{2z}{kw_0^2}\right]. \tag{12.42}$$

Гауссовы волновые пакеты

Модифицированные распределения поля гауссова типа служат точным решением волнового уравнения (7.1). Напомним, что для компонент напряженностей электрического и магнитного полей f справедливо скалярное волновое уравнение

$$\Box f = 0, \qquad \Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{12.43}$$

Рассмотрим осесимметричные решения (43), отвечающие сгустку поля, движущемуся вдоль оси z [А.П. Киселев, М.В. Перель. Опт. спектроск. 1999, т. 86, с. 357]. Введем переменные $\xi = z - ct, \quad \eta = z + ct$ (см. раздел 7.1) и

$$\theta(x,y,z,t) = \xi + \frac{x^2 + y^2}{\eta - i\delta},$$

где δ – произвольная постоянная размерности длины, смысл которой поясняется далее. Проверкой можно убедиться, что функция

$$f(x,y,z,t)=\frac{F(\theta)}{\eta-i\delta} \tag{12.44}$$

служит решением (43) при произвольной функции $F(\theta)$. Выберем $F(\theta)$ так:

$$F(\theta)=\exp(2ik\sqrt{i\delta\theta-\delta^2}). \tag{12.45}$$

Итак, (44) и (45) представляют точное решение волнового уравнения в виде осесимметричного волнового пакета, который движется вдоль оси z со скоростью c. Анализ решения при малых временах t показывает, что пакет заполнен «оптическими» осцилляциями, частота которых определяется волновым числом k, и имеет огибающую гауссова типа. Ширина огибающей в продольном направлении $\Delta_{\|}=2\sqrt{\delta/k}$ постоянна, что связано с отсутствием частотной дисперсии в вакууме. В поперечном направлении ширина $\Delta_{\perp}$ минимальна при t = 0 ($\Delta_{\perp\min}=\sqrt{\delta/k}$, что и раскрывает физический смысл постоянной δ) и увеличивается с увеличением $|t|$: $\Delta_{\perp}=\sqrt{\dfrac{\eta^2+\delta^2}{k\delta}}$. При больших временах убывание поля при удалении от центра пакета имеет гауссов характер.

12.4. Энергетические соотношения

Вернемся к квазиоптическому приближению. Энергетические величины квадратичны по напряженности поля. Для рассматриваемого монохроматического или квазимонохроматического излучения используем комплексную форму записи электрического и магнитного полей:

$$\mathbf{E}=\mathrm{Re}\{\mathbf{A}\exp(-i\omega t)\}=\frac{1}{2}\{\mathbf{A}\exp(-i\omega t)+\mathbf{A}^*\exp(i\omega t)\},$$

$$\mathbf{H}=\mathrm{Re}\{\mathbf{B}\exp(-i\omega t)\}=\frac{1}{2}\{\mathbf{B}\exp(-i\omega t)+\mathbf{B}^*\exp(i\omega t)\}. \tag{12.46}$$

Целесообразно ввести усредненный за период оптических колебаний вектор Пойнтинга (усреднение обозначаем угловыми скобками)

$$<\mathbf{S}>=\frac{c}{4\pi}<[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]>=$$

$$=\frac{c}{16\pi}<[(\mathbf{A}\exp(-i\omega t)+\mathbf{A}^*\exp(i\omega t))\times(\mathbf{B}\exp(-i\omega t)+\mathbf{B}^*\exp(i\omega t))]>=$$

$$=\frac{c}{16\pi}(\mathbf{AB}^*+\mathbf{A}^*\mathbf{B})=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}(\mathbf{AB}^*).$$

Для излучения, близкого к плоской волне, распространяющейся вдоль оси *z*, поток энергии направлен преимущественно вдоль той же оси *z* и амплитуды электрического и магнитного полей близки: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, так что

$$< S_z >= \frac{c}{8\pi} I, \tag{12.47}$$

где $I = |A|^2$ – интенсивность излучения. Отклонения излучения от плоской волны приводят к появлению поперечных компонент вектора Пойнтинга $< \mathbf{S}_\perp >$, а также к поправкам к продольной компоненте. Будем считать излучение близким к линейно поляризованному $\mathbf{A} \approx A\mathbf{e}_x$ и выделим вещественные амплитуду и фазу поля $A = |A| \exp(i\Phi)$. Тогда, поскольку вектор Пойнтинга направлен по нормали к поверхности волнового фронта,

$$< \mathbf{S}_\perp >= \frac{c}{8\pi} I \nabla_\perp \Phi = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Im}(A^* \nabla_\perp A). \tag{12.48}$$

В п. 6 мы уже выводили закон сохранения энергии из уравнений Максвелла. Теперь выясним его вид в приближении квазиоптики. Домножим (7) на A^* и вычтем из результата комплексно сопряженное выражение

$$\frac{\partial}{\partial z} |A|^2 = \frac{i}{2k} (A^* \Delta_\perp A - A \Delta_\perp A^*). \tag{12.49}$$

Проинтегрируем (49) по поперечным координатам по сечению, охватываемому контуром *L*. Двойной интеграл от правой части (49) преобразуем в контурный, пользуясь формулой Грина (П.13). Таким образом находим

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{8\pi}{ck} \int_L < \mathbf{S}_\perp > d\mathbf{L}. \tag{12.50}$$

Здесь градиент вычисляется в поперечной плоскости. Величина $P = \int |A|^2 \, dx\, dy$ пропорциональна мощности излучения в пучке, переносимой через сечение с координатой *z*. В правой части (50) стоит (погонный) поток энергии в боковом направлении. Если амплитуда *A* достаточно быстро убывает при удалении от оси в поперечном направлении (например, экспоненциально) и контур *L* выбран достаточно далеко от оси, то поток пренебрежимо мал и мощность излучения не зависит от *z*. В этом случае мощность является интегралом движения (сохраняющейся при изменении *z* величиной):

$$\frac{dP}{dz} = 0. \tag{12.51}$$

Физически сохранение энергии связано с отсутствием поглощения и выходящих за пределы рассматриваемой области потоков излучения. При тех же условиях имеется и другой интеграл движения

$$\frac{dQ}{dz} = 0, \tag{12.52}$$

где

$$Q = \iint |\nabla_\perp A|^2 \, dx\, dy = \iint \left(\left|\frac{\partial A}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial A}{\partial y}\right|^2 \right) dx\, dy\,. \tag{12.53}$$

Квазиоптическое уравнение допускает преобразование подобия. Во-первых, ввиду линейности этого уравнения амплитуда поля может быть умножена на произвольное постоянное число. Во-вторых, возможно согласованное изменение масштабов координат:

$$x \to qx, \quad y \to qy, \quad z \to q^2 z\,. \tag{12.54}$$

При такой замене квазиоптическое уравнение сохраняет свой вид. Это позволяет перейти к безразмерным переменным и записать квазиоптическое уравнение в виде

$$2i\frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_\perp A = 0\,,$$

где дифференцирование в операторе Лапласа также происходит по безразмерным координатам.

Еще одно важное и нетривиальное свойство симметрии квазиоптического уравнения – это преобразование фокусировки, или линзовое преобразование

$$(\mathbf{r}_\perp, z) \to (\mathbf{s}_\perp, \eta), \quad \eta = \frac{zF}{z+F}, \quad \mathbf{s}_\perp = \frac{\eta}{z}\mathbf{r}_\perp,$$
$$\widetilde{A}(\mathbf{s}_\perp, \eta) = \frac{z(\eta)}{\eta} A\left(\frac{z(\eta)}{\eta}\mathbf{s}_\perp, z(\eta) \right) \exp\left[i\left(1 - \frac{z(\eta)}{\eta}\right)\frac{\mathbf{s}_\perp^2}{2\eta} \right]. \tag{12.55}$$

Соотношения (55) показывают, что структура поля при его фокусировке линзой с фокусным расстоянием F на отрезке $(0,F)$ подобна с изменением масштаба структуре поля без фокусировки на отрезке $(0,\infty)$ и имеет дополнительную кривизну волнового фронта.

12.5. Векторное квазиоптическое уравнение

Для описания поляризационной структуры излучения нужно исходить из векторного волнового уравнения, которое позволяет также учесть немонохроматичность излучения:

$$\Delta\,\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{12.56}$$

Теперь, в отличие от случая (3), огибающая поля (медленно меняющаяся амплитуда) является вектором и зависит от времени:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(\mathbf{r}_\perp, z, t)\exp(ikz - i\omega t), \qquad \mathbf{r}_\perp = (x, y)\,. \tag{12.57}$$

Здесь ω – некоторая центральная (несущая) частота, выбор ее в определенной мере произволен. Временная медленность понимается в масштабе периода оптических колебаний $2\pi/\omega$, так что длительность фронтов импульсов τ_{fr} должна удовлетворять соотношению

$$\omega\tau_{fr} >> 1. \qquad (12.58)$$

Прежде всего сравним величину продольной и поперечных компонент напряженности поля. Для этого преобразуем уравнение Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$:

$$\operatorname{div}_{\perp}\mathbf{A}_{\perp} + ikA_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0, \qquad \operatorname{div}_{\perp}\mathbf{A}_{\perp} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}. \qquad (12.59)$$

Оценим члены первого уравнения (59), используя п. 12.1. Первый член $\sim A_{\perp}/w$, второй $\sim kA_z$, третий $\sim A_z/L_d \sim A_z/kw^2$. Отсюда следует, что третьим членом можно пренебречь по сравнению со вторым, так что

$$A_z = \frac{i}{k}\operatorname{div}_{\perp}\mathbf{A}_{\perp}, \qquad A_z \sim A_{\perp}/(kw) << A_{\perp}. \qquad (12.60)$$

Таким образом, продольная компонента поля определяется через поперечные и в случае широких пучков много меньше поперечных компонент. Это обстоятельство позволяет ограничиться рассмотрением только поперечных компонент поля.

Теперь обратимся к учету временной зависимости огибающей поля. Сохраняя пока что все производные, для вектора поперечных компонент огибающей $\mathbf{A}_{\perp}$ мы можем записать (56) в виде

$$2ik\left(\frac{\partial\mathbf{A}_{\perp}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_{\perp}}{\partial t}\right) + \Delta_{\perp}\mathbf{A}_{\perp} + \left[\frac{\partial^2\mathbf{A}_{\perp}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_{\perp}}{\partial t^2}\right] = 0. \qquad (12.61)$$

Оценивая величину членов, как это делалось ранее, для случая достаточно длинного и гладкого импульса, найдем, что основным служит член в круглых скобках. Поэтому приближенно

$$\frac{\partial\mathbf{A}_{\perp}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_{\perp}}{\partial t} \approx 0. \qquad (12.62)$$

Это уравнение переноса с решением $\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{f}(z - ct)$, где $\mathbf{f}$ – произвольная векторная функция (определяемая начальными и граничными условиями). Согласно этому решению, импульс излучения распространяется без искажения формы (в вакууме дисперсия отсутствует). С учетом (62) член уравнения (61) в квадратных скобках обращается в нуль. Поэтому без потери точности (61) можно переписать в виде

$$2ik\left(\frac{\partial\mathbf{A}_{\perp}}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}_{\perp}}{\partial t}\right) + \Delta_{\perp}\mathbf{A}_{\perp} = 0. \qquad (12.63)$$

Если теперь ввести систему координат, движущуюся вдоль оси z со скоростью света c, то в ней запись (63) упрощается:

$$2ik\frac{\partial \mathbf{A}_{\perp}}{\partial z}+\Delta_{\perp}\mathbf{A}_{\perp}=0. \qquad (12.64)$$

Видно, что (64) для каждой из двух поперечных компонент поля имеет прежний вид (7). Соответственно, решение этого уравнения тоже имеет прежний вид. Однако для импульсного излучения соответствующую дифракционную задачу необходимо решить многократно, поотдельности для каждой временной точки импульса входного излучения. Заметим, что при численном решении квазиоптического уравнения при достаточно больших числах Френеля наиболее эффективно использование алгоритма быстрого преобразования Фурье.

13. Сверхсветовые структуры (Х-волны)

Вернемся к точным уравнениям Максвелла и обсудим вопрос о совместимости сверхсветовых скоростей с теорией относительности [Н.Н. Розанов. УФН, **175**, 181 (2005)]. Под сверхсветовыми мы будем понимать скорости, превышающие скорость света в вакууме c. Сразу укажем, что теория относительности не запрещает таких скоростей, пример которых приводится в Задании 11. Запрет существует на скорость передачи информации, которая действительно не может превышать c. Еще одно важное релятивистское ограничение, полученное в разделе 6, относится к скорости движения центра инерции электромагнитного поля (соотношение (6.19)). Хотя оно и было выведено для электромагнитного поля в вакууме, естественно считать его справедливым для и произвольных полей и сред. В данном разделе мы рассмотрим популярные в последнее время объекты – локализованные полихроматические структуры, или Х-волны в вакууме и обсудим кажущийся парадокс сверхсветового движения этих структур.

Начнем с обсуждения самой возможности локализованных структур (нерасплывающихся при распространении вследствие дифракции) электромагнитного излучения в вакууме в рамках классических уравнений Максвелла. Убедимся, что в трехмерном пространстве уравнения Максвелла действительно допускают существование нерасплывающихся («недифрагирующих») структур излучения, движущихся в вакууме с постоянной сверхсветовой скоростью $V > c$. В каждый момент времени поле может быть представлено как суперпозиция (интеграл Фурье) однородных плоских волн с (вещественными) волновыми векторами $\mathbf{k}$. Тогда для любого момента времени компоненты векторного потенциала, отвечающие отдельной плоской (монохроматической) волне, в комплексном представлении имеют вид $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{r})-i\omega t]$. При этом из уравнений Максвелла следует условие поперечности $(\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}),\mathbf{k})=0$ и дисперсионное соотношение $k^2=\omega^2/c^2$ между частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Общее же решение волнового уравнения для векторного потенциала определяется спектральным разложением вида

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int \widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k})\exp[i(\mathbf{k},\mathbf{r})-i\omega t]d\mathbf{k}\,. \qquad (13.1)$$

Нас будут интересовать локализованные (с конечной энергией) структуры поля, движущиеся вдоль оси z с неизменной скоростью V и обладающие неизменным профилем. Векторный потенциал для них имеет форму

$$\mathbf{A}(x,y,z,t)=\mathbf{A}(x,y,z-Vt)\,. \qquad (13.2)$$

Введем продольную z и поперечные $\mathbf{r}_\perp=(x,y)$ координаты и соответствующие компоненты волнового вектора $k_\parallel$ и $\mathbf{k}_\perp=(k_x,k_y)$. Условие (2) приводит к соотношению

$$\omega=Vk_\parallel, \qquad (13.3)$$

после чего дисперсионное соотношение связывает продольные и поперечные компоненты волновых векторов следующим образом:

$$k_\perp^2=\left(\frac{V^2}{c^2}-1\right)k_\parallel^2\,. \qquad (13.4)$$

Из (4) следует, что стационарные структуры могут быть только сверхсветовыми: $V^2>c^2$. В цилиндрических координатах (r,φ,z) суперпозиции волн примут вид

$$\mathbf{A}(r,\varphi,z-Vt)=\int \widetilde{\mathbf{A}}(k_\parallel,\alpha)\exp\{ik_\parallel[\sqrt{(V/c)^2-1}\,r\cos(\alpha-\varphi)+(z-Vt)]\}dk_\parallel d\alpha\,. \qquad (13.5)$$

Интегрирование по $k_\parallel$ проводится в бесконечных пределах, а по углу α – по интервалу длиной 2π. Определяемые (5) распределения поля служат точными решениями уравнений Максвелла при произвольной весовой функции $\widetilde{\mathbf{A}}(k_\parallel,\alpha)$ (при указанном выше условии поперечности). От вида этой функции зависит конкретный вид распределения поля. Таким образом, точные решения уравнений Максвелла описывают стационарные сгустки электромагнитного поля, обладающие конечной энергией и распространяющиеся с постоянной сверхсветовой скоростью. Из (5) нетрудно видеть, что величина скорости влияет лишь на масштаб координат и времени. Если ввести новые переменные

$$\rho=r\sqrt{(V/c)^2-1},\quad \varsigma=z-Vt\,, \qquad (13.6)$$

то скорость V вообще не будет входить в выражения для распределения поля:

$$\mathbf{A}(\rho,\varphi,\varsigma)=\int \widetilde{\mathbf{A}}(k_\parallel,\alpha)\exp\{ik_\parallel[\rho\cos(\alpha-\varphi)+\varsigma]\}dk_\parallel d\alpha\,. \qquad (13.7)$$

В связи с указанным выводом возникают два вопроса. Во-первых, как объяснить отсутствие дифракционного расплывания сгустка излучения? Ответ может быть следующим. Дифракция обычного (например гауссова) пучка монохроматического излучения происходит вследствие различия (при фиксированной частоте света) продольных составляющих волнового вектора или же фазовой скорости отдельных плоских волн, на которые раскладывается пучок в исходном сечении. Из-за этого с увеличением длины трассы z происходит расфазировка этих плоских волн, сопровождающаяся дифракционным расплыванием пучка. Если же поле составлено из плоских волн с различной частотой ω, направление распространения которых обеспечивает выполнение соотношения (3), то продольная компонента фазовой скорости для всех таких волн совпадает, так что они продолжают оставаться сфазированными и при последующем распространении. Можно сказать, что для создания локализованной структуры нужно засветить достаточно большой объем пространства (характерный размер L) широкополосным излучением со специально подобранным соотношением между парциальными частотами и волновыми векторами, таким образом, чтобы в локальной области интерференция этих волн была конструктивной, а в остальной области деструктивной. Со временем область конструктивной интерференции будет перемещаться по засвеченному объему со скоростью V. Из такого рассуждения ясно, что эти структуры фактически не распространяются, то есть нельзя ожидать, что структура, созданная в начальный момент времени в определенном объеме, будет затем перемещаться в «незасвеченном» вакууме на неограниченные расстояния. Действительно, так как граница между засвеченным и незасвеченным объемами движется со скоростью света в вакууме c, то время жизни локализованной структуры ограничено величиной $\sim L/c$. Структура сохраняется, пока ее центр далек от границ засвеченной области (движущихся со скоростью c, меньшей скорости перемещения структуры V). Можно сказать, что такие структуры неустойчивы по отношению к обрезанию их периферийной области на сколь угодно малом уровне амплитуды.

Второй вопрос относится к соотношению сверхсветовой скорости движения структуры с предсказываемым теорией относительности ограничением на скорость движения центра инерции. Здесь следует напомнить, что ограничение было выведено для структур, у которых поле достаточно быстро убывает на бесконечности, так что его можно считать отсутствующим для достаточно больших удалений от центра структуры. Однако, строго говоря, для X-волн поле всюду отлично от нуля, и это обстоятельство существенно сказывается на движении центра инерции. Отсюда опять же следует вывод о неустойчивости структур типа X-волн к неизбежному при постановке экспериментов обрезанию периферийной области. Однако, реальные структуры метастабильны, то есть могут существовать достаточно долгое время при их достаточно больших начальных размерах. В пределах времени жизни эти структуры в высокой степени локализованы и слабо расплываются.

14. Электромагнитное поле в вакууме с зарядами

Уравнения Максвелла в вакууме в присутствии электрических зарядов с плотностью ρ и токов с плотностью **j** имеют вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{14.1}$$

$$\operatorname{rot}\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{14.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{14.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho\,. \tag{14.4}$$

Уравнение непрерывности выражает сохранение электрического заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{14.5}$$

Оно следует из (2) и (4):

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j}\right) = 0.$$

Можно вывести это уравнение и из «микротеории» (набор точечных зарядов, см. [4]).

Из плотности заряда и плотности тока можно составить 4-вектор (преобразующийся при переходе в другую инерциальную систему по формулам Лоренца для 4-вектора)

$$s^0 = 4\pi\rho, \quad s^i = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14.6}$$

Ковариантная формулировка уравнения непрерывности (5) следующая:

$$\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial s^i}{\partial x_i} = 0. \tag{14.7}$$

Уравнения Максвелла (1)-(4) тоже можно записать в ковариантной форме [7].

Скалярный и векторный потенциал

В разделе 7 мы ввели вспомогательный 4-вектор (φ, **A)** (скалярный и векторный потенциалы), через которые соотношениями (7.3) определяются напряженности электрического и магнитного полей. Эти соотношения сохраняются и в случае электромагнитного поля с зарядами. Однако, теперь потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{14.8}$$

Для неподвижного точечного заряда в соответствии с законом Кулона

$$\mathbf{A} = 0, \quad \varphi = \frac{q}{R}, \quad R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \tag{14.9}$$

Решение волновых уравнений (запаздывающие потенциалы)

Общее решение неоднородного волнового уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Решения однородного уравнения (в него заряды не входят) мы рассматривали ранее, а здесь будем искать частное решение неоднородного уравнения.

Делим пространство на бесконечно малые участки с тем, чтобы затем использовать принцип суперпозиции. Заряд в элементарном участке равен *de*. При выборе начала координат в рассматриваемом элементе плотность заряда

$$\rho = de(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{14.10}$$

Здесь $\mathbf{R}$ – радиус-вектор из начала координат, δ – дельта-функция (Дирака).

Волновое уравнение для скалярного потенциала имеет вид

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{14.11}$$

Вне заряда ($R \neq 0$) правая часть (11) обращается в нуль и (11) принимает вид однородного волнового уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{14.12}$$

Нас интересует сферически симметричное решение (12). В этом случае, используя вид оператора Лапласа в сферических координатах (П.8), перепишем (12) в форме

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{14.13}$$

В (13) можно устранить член с первой производной заменой

$$\varphi = \frac{\chi(r,t)}{r} \tag{14.14}$$

Тогда (15) примет вид одномерного волнового уравнения (7.4)

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0, \tag{14.15}$$

общее решение которого выражается через две произвольные функции $f_{1,2}$

$$\chi(r,t) = f_1(t - r/c) + f_2(t + r/c). \tag{14.16}$$

Смысл функций $f_{1,2}$ пояснялся в п. 7.1. Поскольку нас интересует излучение, порождаемое движением частицы, следует положить $f_2 = 0$. Тогда

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \tag{14.17}$$

В случае неподвижного заряда из этой формулы должно следовать выражение (9). Поэтому естественно предположить, что $\chi(t) = de(t)$. Тогда

$$\varphi = \frac{de\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{14.18}$$

Теперь для определения потенциала, создаваемого произвольным распределением зарядов с плотностью $\rho(x, y, z, t)$, достаточно, с учетом соотношения $de = \rho\, dV$, где dV – элемент объема, просуммировать потенциалы от элементарных зарядов вида (18), то есть проинтегрировать (18) по всему пространству. Общее решение

$$\varphi(x, y, z, t) = \int \frac{1}{R} \rho(x', y', z', t - \frac{R}{c})\, dV' + \varphi_0, \tag{14.19}$$

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad dV' = dx'\, dy'\, dz'.$$

Здесь R – расстояние от элемента объема dV до точки наблюдения, в которой ищется значение потенциала, а φ_0 – решение однородного уравнения. Краткая запись (19)

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV + \varphi_0 \tag{14.20}$$

Индекс $t – R/c$ показывает, что значение ρ нужно брать в момент времени $t – R/c$, штрих опущен.

Аналогично для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0 \tag{14.21}$$

Интегралы в (20) и (21) называются запаздывающими потенциалами. Математически строго эти выражения можно доказать, проверив, что они удовлетворяют соответствующим волновым уравнениям. Применим теперь эти формулы для определения поля, создаваемого одним произвольно движущимся зарядом. При последовательном рассмотрении следует рассмотреть заряд конечных размеров и затем перейти к пределу со стремлением этих размеров к нулю. Мы используем упрощенный подход.

Если t – момент наблюдения, то вклад в потенциал дают поле зарядов в предшествовавшие моменты t', находящиеся на расстоянии от точки наблюдения $R(t')$, такие, что

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t \tag{14.22}$$

В системе отсчета, в которой в момент времени t' скорость заряда равна нулю, потенциалы в момент t в точке наблюдения имеют вид (9), где R – расстояние от заряда до точки наблюдения в момент времени t' в этой системе отсчета. Переход к «лабораторной» системе отсчета дает потенциалы поля, создаваемые произвольно движущимся точечным зарядом:

$$\varphi = \frac{e}{R - \dfrac{\mathbf{vR}}{c}}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \dfrac{\mathbf{vR}}{c}\right)}. \tag{14.23}$$

Здесь $\mathbf{R}$ – радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда в точку наблюдения P. Все величины в правых частях (23) берутся в момент времени t', определяемый условием (23). Это потенциалы Лиенара-Вихерта [4].

Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через потенциалы по общим формулам (7.3). При этом дифференцирование производится по координатам x, y, z и моменту t наблюдения. Результат

$$\mathbf{E} = e\frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(R - \dfrac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R - \dfrac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{14.24}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{R} \times \mathbf{E}], \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} \tag{14.25}$$

Все величины в правых частях берутся в момент времени t' (см. (22)). Магнитное поле перпендикулярно электрическому. Если ускорение равно нулю, для электрического поля остается только первый член. При больших удалениях от заряда ($R \to \infty$) первый член ~ R^{-2}, а второй ~ R^{-1}, то есть является основным (если только ускорение отлично от нуля).

Примером служит излучение колеблющейся заряженной частицы. Если заданы периодические колебания частицы, средний за период поток энергии в установившемся режиме постоянен, а энергия во всем пространстве оказывается бесконечной. Реально потери энергии на излучения приводят к затуханию колебаний. Другой важный пример – излучение диполя [6].

Усреднением уравнений Максвелла (с зарядами) в пустоте по физически малым объемам (содержащим большое число зарядов) могут быть получены основные уравнения электродинамики сплошной среды [5]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{14.26}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{14.27}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{14.28}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho. \tag{14.29}$$

К этим уравнениям должны быть добавлены материальные уравнения, выражающие индукции **D, B** и плотность тока **j** как функции **E, H.** Простейший вариант (вакуум)

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}. \tag{14.30}$$

В общем случае электрическая индукция **D**, например, зависит и от **E,** и от **H.** Однако, в обычных средах, в которых скорости движения электронов много меньше скорости света, влияние магнитного поля невелико, тогда **D** зависит только от **E.**

В изотропной среде без дисперсии материальные уравнения линейные и с постоянными диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями среды:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{14.31}$$

В этом случае уравнения Максвелла (26)-(29) в сплошной среде сводятся в изученным для вакуума. Действительно, их можно переписать в форме

$$\mathrm{rot}\,(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}) = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial(\sqrt{\mu}\mathbf{H})}{\partial t}, \tag{14.32}$$

$$\mathrm{rot}\,(\sqrt{\mu}\,\mathbf{H}) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\frac{\partial(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi\sqrt{\mu}}{c}\mathbf{j}, \tag{14.33}$$

$$\mathrm{div}(\sqrt{\mu}\mathbf{H}) = 0, \tag{14.34}$$

$$\mathrm{div}\,(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}) = 4\pi\sqrt{\varepsilon}\rho. \tag{14.35}$$

Видно, что при переобозначении

$$\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \sqrt{\mu}\mathbf{H} \to \mathbf{H}, \quad c/\sqrt{\varepsilon\mu} \to c, \quad \sqrt{\varepsilon}\rho \to \rho, \quad \mathbf{j}/\sqrt{\varepsilon} \to \mathbf{j} \tag{14.36}$$

получаются уравнения (1)–(4). Тем самым, решения, полученные для вакуума, могут быть использованы и в случае электродинамики сплошных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. М., Наука, 1970.
2. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. М., Наука, 1991.
3. Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. М., Сов. радио, 1957.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М., Физматлит, 1960.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Физматлит, 1982.
6. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М., Техтеорлит, 1956.
7. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматлит, 1961.
8. В.А. Фок. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Сов. радио, 1970.
9. Л. Мандель, Э. Вольф. Оптическая когерентность и квантовая оптика. М., 2001.
10. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1989.
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. М., Физматлит, 1958.
12. Э. Камке. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, М., Наука, 1966.
13. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, том 2. М., Гостехиздат, 1957.
14. Н.Н. Розанов. Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах. М., Наука, 1997.
15. В.И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. 2 и 3, часть 2. М., Гостехтеорлит, 1957.
16. Ю.А. Ананьев. Оптические резонаторы и лазерные пучки. М., Наука, 1990.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Некоторые математические формулы

Вид некоторых операторов векторного анализа в декартовой системе координат (**A** – произвольная векторная функция с компонентами A_x, A_y, A_z; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ – единичные орты по соответствующим осям, $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$; V – произвольная скалярная функция, вектора выделяются полужирным шрифтом):

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = (\nabla, \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \operatorname{grad} V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = [\nabla \times \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{П.1}$$

Векторные тождества

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{П.2}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0, \tag{П.3}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}, \tag{П.4}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} V = 0. \tag{П.5}$$

$$\operatorname{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B}, \operatorname{rot}\mathbf{A}) - (\mathbf{A}, \operatorname{rot}\mathbf{B}). \tag{П.6}$$

$$[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \tag{П.7}$$

Вид оператора Лапласа в цилиндрических (ρ, φ, z) и сферических (r, θ, φ) координатах применительно к скалярным функциям:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{П.8}$$

Функции Бесселя:

разложение Тейлора при малых аргументах

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{П.9}$$

асимптотика при больших значениях аргумента

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{П.10}$$

Векторные тождества

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{A}) = u\operatorname{rot}\mathbf{A} + (\operatorname{grad} u) \times \mathbf{A}. \tag{П.10a}$$

Интеграл Френеля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iax^2)\,dx = \sqrt{\frac{i\pi}{a}}. \tag{П.11}$$

В частности, при переходе от двумерных распределений поля к одномерным в дифракционном интеграле используется соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}x^2\right]dx = \sqrt{i\lambda z}.$$

Интеграл гауссова типа

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c)\,dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right)\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \operatorname{Re} a \geq 0. \qquad (\text{П.12})$$

Формула Грина (V и Σ – объем и поверхность, ограничивающая область)

$$\int\limits_V [(\Delta U_1)U_2 - U_1\Delta U_2]\,dv = \int\limits_\Sigma [(\operatorname{grad} U_1)U_2 - U_1 \operatorname{grad} U_2]\,d\boldsymbol{\Sigma}. \qquad (\text{П.13})$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{V}) = U \operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\operatorname{grad} U \qquad (\text{П.14})$$

Б. Уравнения Максвелла и энергетические величины в СИ и гауссовой системах единиц

Гауссова система	Система СИ
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$,	$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$,
$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$,	$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$,
$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$,	$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$,
$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$,	$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$,
$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$,	$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$
	$\varepsilon_0\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$,
$\mathbf{S} = \dfrac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$,	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$
$w = \dfrac{c}{8\pi}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})$,	$w = \dfrac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})$.

О ФАКУЛЬТЕТЕ

Факультет фотоники и оптоинформатики призван обеспечивать подготовку бакалавров и магистров по одноименному образовательному направлению “Фотоника и оптоинформатика”, инициатива создания которого в начале XXI века в России принадлежит именно профессорско-преподавательскому и научному коллективу факультета.

“Фотоника” — это область науки и техники, связанная с использованием светового излучения (или потока фотонов) в оптических элементах, устройствах и системах, в которых генерируются, усиливаются, модулируются, распространяются и детектируются оптические сигналы.

“Оптоинформатика” — это недавно выделившаяся и доминирующая в последние годы область фотоники, в которой создаются новые технологии передачи, приема, обработки, хранения и отображения информации на основе фотонов.

Таким образом, в рамках образовательного направления “Фотоника и оптоинформатика” готовят специалистов для одной из самых инновационных областей современной науки и техники, в которой разрабатываются оптические технологии сверхбыстрой передачи, обработки и записи информации, создаются сверхбыстродействующие оптические процессоры, оптические системы искусственного интеллекта и другие информационно-телекоммуникационные системы нового поколения, строящиеся на оптических материалах и технологиях. Фотоника и оптоинформатика – это энергично развивающаяся высокотехнологическая отрасль, ежегодный доход от продаж устройств и систем которой составляет в мире десятки миллиардов долларов США.

В состав факультета входят пять кафедр. Три выпускающие:

- кафедра Фотоники и оптоинформатики;
- кафедра Оптоинформационных технологий и материалов;
- кафедра Компьютерной фотоники,

и две помогающие обеспечивать учебный процесс:

- кафедра Оптической физики и современного естествознания;
- кафедра Оптики квантоворазмерных систем.

Профессорско-преподавательский состав факультета включает более пятидесяти докторов и кандидатов наук, имеющих богатый опыт преподавания дисциплин по современным проблемам оптики и информатики. Профессорами факультета являются академики РАН Е.Б.Александров – признанный лидер квантовой магнетометрии, член-корреспондент РАН А.М.Бонч-Бруевич – выдающийся ученый-физик, специалист в области квантовой электроники и физической оптики. Научным консультантом по направлению “Оптическая информатика. Голография” является основоположник объемной голографии академик РАН Ю.Н.Денисюк. Научную поддержку образовательному направлению

“Фотоника и оптоинформатика” оказывает являющийся структурным подразделением Университета НИИ Оптоинформатики во главе с профессором Н.В.Никоноровым.

В процессе обучения бакалавры и магистры получают глубокие знания и практические навыки, как в традиционных общих дисциплинах высшей школы, так и в области оптической физики, теории информации и кодирования, архитектуры вычислительных систем, оптического материаловедения, оптической информатики, систем и технологий фотоники, по различным технологиям программирования, а также по инновационному менеджменту в области высоких технологий.

Важнейшим компонентом подготовки специалистов факультетом является политика активного сотрудничества с фирмами и компаниями, стремящимися получить этих специалистов. В соответствии с учебными планами направления “Фотоника и оптоинформатика”, включающими сквозную систему курсовых исследовательских работ и научно-технических практик, уже со второго курса студенты факультета получают возможность участвовать в работе этих фирм, а также в научно-исследовательских и опытно конструкторских проектах Университета ИТМО, ВНЦ “ГОИ им. С.И.Вавилова” и других научно-инновационных центров Санкт-Петербурга, проводимых в области фотоники и оптоинформатики по госзаказу Министерства РФ, российским и международным грантам и контрактам.

Важным компонентом в подготовке высококлассных молодых специалистов и ученых является организация и проведение факультетом совместно с другими образовательными и научными организациями и обществами Международных молодежных школ и конференций, создание и развитие молодежных научных ассоциаций и Российских и Международных отделений научных обществ. Среди студентов и аспирантов факультета – стипендиаты Президента РФ и Правительства РФ, победители конкурсов лучших научных работ, проводимых Российской Академией наук, Министерством образования РФ, крупнейшими мировыми научными обществами и фондами, такими как INTAS (Фонд научно-исследовательских работ Европейского сообщества), SPIE (Международное общество инженеров-оптиков), CRDF (Американский фонд гражданских исследований и развития), OSA (Оптическое общество Америки) и др.

Декан факультета фотоники и оптоинформатики
профессор С.А. Козлов

Научное издание

Николай Николаевич Розанов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть I. Электромагнитные волны в вакууме

Учебное пособие

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка
Дизайн обложки А.С. Киселев

Редакционно-издательский отдел СПб ГУИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 17.10.05
Тираж 100 экз. Заказ № 872 Отпечатано на ризографе