Глава 3. Измерения при разработке решений

3.1. Элементы теории измерений

В процессе принятия решений ЛПР и эксперты формируют ситуации, цели, ограничения, варианты решений и производят измерение их характеристик. Эти измерения могут носить качественный или количественный характер и могут быть объективными или субъективными. Объективные качественные или количественные измерения производятся измерительными приборами, действие которых основано на использовании физических законов. Теория объективных измерений достаточно хорошо разработана.

Субъективные измерения производятся человеком, который выполняет как бы роль измерительного прибора. Естественно, что при этом на результаты измерений влияют психологические особенности мышления человека.

Теория измерений позволяет с единых позиций рассматривать как объективные, так и субъективные измерения. В этой теории предлагаются конструктивные методы субъективных измерений. Рассмотрим основные положения теории измерений.

Измерение определяется как процедура сравнения объектов по определенным показателям (признакам). В это определение включены три понятия: объекты, показатели и процедура сравнения. Объектами могут быть предметы, явления, события, решения и т.п. В качестве показателей сравнения объектов используются пространственные, временные, физические, физиологические, социологические, психологические и другие свойства и характеристики объектов. Процедура сравнения включает определение отношений между объектами и способ их сравнения. Введение конкретных показателей сравнения позволяет установить отношения между объектами, например: “больше”, “меньше”, “равны”, “хуже”, “предпочтительнее” и т.д. Существуют различные способы сравнения объектов между собой, например, последовательно с одним объектом, принимаемым за эталон, или друг с другом в произвольной или упорядоченной последовательности.

Для формального описания множества объектов и отношений между ними при фиксированных показателях сравнения вводится понятие **эмпирической системы с отношениями:**

$$M=\langle X, R\rangle,$$

где $X = (x_1,x_2,\ldots,x_m)$ - множество объектов, в качестве которых могут рассматриваться, например, ситуации, цели, решения и т.п.;

$R=(R_1, R_2,\ldots, R_s)$ - множество отношений между объектами.

Отношение является самой общей формой описания связей между объектами. Частным случаем отношения является функция. Запись вида $x_iR_kx_j$ означает, что объекты x_i и x_j находятся между собой в отношении R_k. Такое отношение называется **бинарным** (двухместным), поскольку оно связывает между собой два объекта. Если отношение имеет место одновременно между тремя объектами, то оно называется **тернарным** (трехместным).

Рассмотрим основные типы бинарных отношений, используемых при описании взаимосвязей объектов в задачах принятия решений. Будем рассматривать объекты x_i из множества X и некоторое бинарное отношение R.

Если все объекты из множества X сравнимы между собой по этому отношению, то отношение R называется **полным** (совершенным, линейным). Если не все объекты сравнимы по отношению R, то оно называется **неполным** (несовершенным, нелинейным, частичным).

Различают следующие типы отношений: **эквивалентности**, **строгого порядка** и **нестрогого порядка** (квазипорядка).

Отношение эквивалентности содержательно интерпретируется как взаимозаменяемость, одинаковость объектов. Для обозначения отношения эквивалентности используется символ “~”, т.е. запись вида $x_i \sim x_j$ означает эквивалентность объектов. Отношение эквивалентности порождает разбиение множества объектов на классы. В каждый класс попадают эквивалентные, т.е. неразличимые по показателю (или группе показателей) объекты.

Отношение строгого порядка может интерпретироваться как предпочтительность одного объекта по сравнению с другим объектом, например, “важнее”, “лучше”, “выше”, “больше” и т.п. Для обозначения отношения строгого порядка используется символ “ ϕ ”, например, если объект x_i строго предпочтительнее объекта x_j, то это записывается в виде $x_i \ \phi \ x_j$. Отношение полного строгого порядка порождает строгое упорядочение объектов по предпочтительности.

Отношение нестрогого порядка есть объединение отношений строгого порядка и эквивалентности. Для обозначения этого отношения применяется символ «$\bar{\phi}$». Запись $x_i \ \bar{\phi} \ x_j$ означает, что объект x_i либо строго предпочтительнее, либо эквивалентен объекту x_j; другими словами, можно сказать, что объект x_i не хуже объекта x_j. Отношение полного нестрогого порядка порождает строгое упорядочение классов эквивалентных объектов.

Разнообразие возможных объектов, показателей сравнения и видов отношений, встречающихся в реальных измерениях, привело к необходимости установления универсальной системы с отношениями.

В качестве такой системы используется *числовая система*:

$$N=\langle C, S\rangle,$$

где C – множество действительных чисел; $S=(S_1, S_2,\ldots, S_s)$ – множество отношений между числами. Числовая система называется полной, если C есть множество всех действительных чисел. Отношениям строгого и нестрогого порядка между объектами соответствуют отношения строгого и нестрогого неравенства между числами.

Числовая система используется для унификации процесса измерения. *Измерение* заключается в отображении объектов эмпирической системы на множество чисел в числовой системе таким образом, чтобы отношения между числами, отображающими объекты, сохраняли отношения между самими объектами. Схематически это изображено на рис. 3.1.

$$M=\langle X, R\rangle$$
$$\Downarrow f$$
$$N=\langle C, S\rangle$$

Рис. 3.1
Схема измерения
объектов

С помощью отображения (функции) f каждому объекту эмпирической системы приписывается число

$$c_i=f\,(x_i).$$

При таком отображении отношения между числами должны сохранять отношения между объектами. Например, если $x_i \succeq x_j$, то $c_i=f(x_i) \geq c_j=f(x_j)$.

Представление эмпирической системы с помощью числовой системы осуществляется с использованием различных шкал.

Шкалой называется совокупность эмпирической системы M, числовой системы N и отображения f:

$$Ш=\langle M, N, f\rangle.$$

Один и тот же объект эмпирической системы x_i может быть отображен разными числами с помощью разных шкал, различающихся функциями отображения:

$$c'_i = f_1\ (x_i),\ \ c''_i = f_2\ (x_i),\ \ldots.$$

В зависимости от вида и свойств функции отображения f различают типы шкал измерений.

3.2. Шкалы измерений

Ранее мы ввели понятие шкалы как совокупности эмпирической и числовой системы и отображения f. Тип шкалы определяется видом и свойствами функции отображения f.

Рассмотрим следующие наиболее употребимые в практике измерений **типы шкал**: *наименований; порядковая; интервалов; отношений; разностей; абсолютная.*

Шкала наименований используется для идентификации объектов, а также для описания принадлежности объектов к определенным классам. В последнем случае всем объектам одного и того же класса присваивается одно и то же число, а объектам разных классов – разные числа. В связи с этим шкала наименований часто называется шкалой классификации. Она сохраняет отношения эквивалентности и различия между объектами и используется для индексации номенклатуры изделий, документов и видов информации, нумерации подразделений в организации и т.п. Существует большое число возможных вариантов присвоения чисел объектам или классам эквивалентных объектов. Функцией отображения f для шкалы наименований является взаимооднозначное соответствие между объектами и числами, отображающими эти объекты или их классы. В данной шкале отсутствуют понятия масштаба и начала отсчета.

Шкала порядка применяется для измерения упорядочения объектов по одному или совокупности признаков (например, шкала твердости минералов). Шкала порядка используется при экспертном оценивании для упорядочения объектов. Для порядковой шкалы функцией отображения f является любой монотонный ряд чисел. Числа в шкале определяют порядок следования объектов и не показывают на сколько или во сколько раз один объект предпочтительнее другого. В этой шкале также отсутствуют понятия масштаба и начала отсчета.

Шкала интервалов применяется для отображения величины различия между свойствами объектов. При экспертном оценивании шкала интервалов применяется для оценки полезности объектов. Основным свойством шкалы интервалов является равенство интервалов. Интервальная шкала может иметь произвольные точки отсчета и масштаб. Функцией отображения f для шкалы интервалов является линейное преобразование $f(x)=ax+b$, где a – масштаб; b – начало отсчета. В этой шкале отношение разности чисел в двух числовых системах определяется масштабом измерения.

Примером использования этой шкалы является отображение в градусах Цельсия температуры, представленной в градусах Фаренгейта: $^0C=5/9(^0F-32)$.

Шкала отношений. В этой шкале числа отражают отношения свойств объектов, т.е. во сколько раз свойство одного объекта превосходит это же свойство другого объекта. Функцией отображения для шкалы отношений является преобразование подобия: $f(x)=ax$. Следовательно, шкала отношений является частным случаем шкалы интервалов при выборе нулевой точки отсчета: $b=0$.

Примером использования этой шкалы является представление температуры в градусах Цельсия и Реомюра: $^0C=5/4^0R$.

Шкала разностей используется для измерения свойств объектов при необходимости установления, на сколько отличаются одноименные свойства сравниваемых объектов. Эта шкала является частным случаем шкалы интервалов при выборе единичного масштаба. Следовательно, функция отображения для шкалы разностей есть преобразование сдвига: $f(x)=x+b$. Примером использования этой шкалы является представление температуры в градусах Цельсия и Кельвина: $^0C=^0K-273$.

Абсолютная шкала является частным случаем шкалы интервалов. В этой шкале принимается нулевая точка отсчета и единичный масштаб. Функцией отображения для абсолютной шкалы является тождественное преобразование, т.е. $f(x)=x$. Это означает, что существует одно и только одно отображение объектов в числовую систему. Отсюда и следует название шкалы, т.к. для нее единственность отображения понимается в буквальном, абсолютном смысле. Абсолютная шкала применяется, например, для измерения количества объектов (предметов, событий, решений и т.п.). Количество объектов измеряется единственным образом с помощью натуральных чисел 1,2,…,n.

Шкалы наименований и порядка являются **качественными** шкалами. В шкале наименований описывается различие или эквивалентность объектов, а в шкале порядка – качественное превосходство, отличие объектов. В этих шкалах нет понятия начала отсчета и масштаба измерения.

Шкалы интервалов, отношений, разностей и абсолютная шкала являются **количественными** шкалами. В этих шкалах существуют понятия начала отсчета и масштаба, которые могут выбираться произвольно. Количественные шкалы позволяют измерить, на сколько (шкалы интервалов и разностей) или во сколько раз (шкалы отношений и абсолютная) один объект отличается от другого по выбранному показателю.

Выбор той или иной шкалы для измерения определяется характером отношений между объектами эмпирической системы, наличием информации об этих отношениях и целями принятия решения. Применение количественных шкал требует значительно более полной информации об объектах по сравнению с применением качественных шкал. Следует обратить внимание на правильное согласование выбираемой шкалы измерения с целями решения. Например, если целью решения является упорядочение объектов, то нет необходимости измерять количественные характеристики объектов, достаточно определить только качественные характеристики. Типичным примером такого решения является подведение итогов производственно-хозяйственной деятельности и определение наилучших подразделений, передовиков производства. Для решения этой задачи, как правило, не требуется определять, на сколько или во сколько раз один объект лучше другого. Следовательно, нет необходимости при таком измерении пользоваться количественными шкалами.

3.3. Методы субъективных измерений

При формировании ситуаций, целей, ограничений и вариантов решений ЛПР и эксперты производят объективные и субъективные измерения характеристик достоверности, важности и предпочтительности. Для осуществления субъективных измерений применяются различные методы, наиболее употребительными из которых являются: *ранжирование, парное сравнение, непосредственная оценка и последовательное сравнение.*

При описании перечисленных методов будет предполагаться, что имеется конечное число измеряемых объектов $X=(x_1,\ldots,x_m)$ и сформулирован один или несколько признаков сравнения, по которым осуществляется сравнение свойств объектов. Следовательно, методы измерения будут различаться лишь процедурой сравнения объектов. Эта процедура включает построение отношений между объектами эмпирической системы, выбор отображающей функции f и определение типа шкалы измерений. Рассмотрим все эти вопросы для каждого метода измерения.

Ранжирование представляет собой процедуру упорядочения объектов, выполняемую ЛПР или экспертом. На основе знаний и опыта ЛПР или эксперт располагает объекты в порядке предпочтения, руководствуясь одним или несколькими выбранными показателями сравнения, и приписывает им соответствующие числовые представления. Эти числовые представления могут быть любыми, но должны удовлетворять единственному условию- их последовательность должна быть монотонна.Следовательно, функция отображения совокупности упорядоченных объектов в числовое представление должна обладать свойством монотонности. Но таким свойством функции отображения обладает шкала порядков, поэтому ранжирование объектов есть измерение в порядковой шкале.

В практике ранжирования чаще всего в качестве числового представления последовательности упорядоченных объектов используется натуральный ряд чисел, называемых **рангами** и обозначаемых буквой r. При этом наиболее предпочтительному объекту присваивается ранг 1, а по мере убывания предпочтения значение ранга возрастает. Эквивалентным объектам присваиваются одинаковые ранги.

Например, пусть имеется упорядоченная последовательность объектов:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \sim x_4 \sim x_5 \succ x_6 \succ \ldots \succ x_{m-1} \sim x_m \qquad (3.1)$$

Так как в этой последовательности есть эквивалентные объекты, она образует нестрогий порядок.

Ранжирование объектов этой последовательности может быть произведено следующим образом:

$$r_1=f(x_1)=1;\ r_2=f(x_2)=2;\ r_3=r_4=r_5=3;\ r_6=4; \qquad (3.2)$$

С точки зрения удобства последующей обработки применяется и другой способ присвоения рангов эквивалентным объектам, при котором им назначаются одинаковые ранги, равные среднему арифметическому значению порядковых номеров этих объектов. Такие ранги называют **связанными рангами**.

Для примера упорядочения (3.1) при $m = 10$ ранги эквивалентных объектов x_3, x_4, x_5 будут равными: $r_3 = r_4 = r_5 = (3 + 4 + 5)/3 = 4$. Ранги объектов x_9, x_{10} также одинаковы и равны среднему арифметическому $r_9 = r_{10} = (9 + 10)/2 = 9{,}5$. Как следует из этого примера, связанные ранги могут быть дробными числами.

Удобство использования связанных рангов заключается в том, что сумма рангов m объектов равна сумме натуральных чисел от 1 до m. При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму. Это обстоятельство существенно упрощает обработку результатов ранжирования при групповой экспертной оценке.

При *групповом* ранжировании каждый s-й эксперт присваивает каждому i-му объекту ранг r_{is}. В результате проведения экспертизы получается матрица рангов $\|r_{is}\|$ размерности $m \times d$, где d - число экспертов, m - число объектов ($s = 1, 2, ..., d$; $i = 1, 2, ..., m$). Удобно представить результаты группового экспертного ранжирования в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

Эксперты / Объекты	$Э_1$	$Э_2$	. . .	$Э_d$
X_1	r_{11}	r_{12}	. . .	r_{1d}
X_2	r_{21}	r_{22}	. . .	r_{2d}
X_m	r_{m1}	r_{m2}	. . .	r_{md}

Аналогичный вид имеет таблица, если осуществляется ранжирование объектов одним ЛПР (или экспертом) по нескольким показателям сравнения. В этом случае вместо экспертов в таблице указываются показатели сравнения.

Напомним, что ранги объектов определяют только порядок расположения объектов по показателям сравнения. Ранги как числа не дают возможности сделать вывод о том, на сколько или во сколько раз предпочтительнее один объект по сравнению с другими. Если, например, ранг объекта равен трем, то отсюда не следует, что объект с рангом 1 в три раза предпочтительнее, чем объект с рангом 3.

Достоинством ранжирования как метода субъективного измерения является простота осуществления процедур, не требующая какого-либо трудоемкого обучения экспертов. Недостатком ранжирования является практическая невозможность упорядочения большого числа объектов. Как показывает опыт, при числе объектов, большем 15-20, эксперты затрудняются в построении ранжировки. Это объясняется тем, что в процессе ранжирования эксперт должен установить взаимосвязь между всеми объектами, рассматривая их как единую совокупность. При увеличении числа объектов количество связей между ними растет пропорционально квадрату числа объектов. Сохранение в памяти и анализ большой совокупности взаимосвязей между объектами ограничиваются психологическими возможностями человека. Поэтому при ранжировании большого числа объектов эксперты могут допускать существенные ошибки.

Парное сравнение представляет собой процедуру установления предпочтения объектов при сравнении всех возможных пар. В отличие от ранжирования, в котором осуществляется упорядочение всех объектов, парное сравнение объектов представляет собой более простую задачу. При сравнении пары объектов возможно либо отношение строгого порядка, либо отношение эквивалентности. Отсюда следует, что парное сравнение, так же как и ранжирование, есть измерение в порядковой шкале.

В результате сравнения пары объектов x_i, x_j эксперт упорядочивает ее, высказывая либо $x_i \ \phi \ x_j$, либо $x_i \ \pi \ x_j$, либо $x_i \sim x_j$. Выбор числового представления $f(x_i)$ можно произвести так: если $x_i \ \phi \ x_j$, то $f(x_i) > f(x_j)$; если предпочтение в паре обратное, то знак неравенства заменяется на обратный, т.е. $f(x_i) < f(x_j)$. Наконец, если объекты эквивалентны, то естественно считать, что $f(x_i) = f(x_j)$.

В практике парного сравнения используются следующие числовые представления:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \ \phi \ x_j \\ 0, \text{ если } x_i \ \pi \ x_j \end{cases} \quad \left(i,\ j = \overline{1,m}\right) \tag{3.3}$$

или

$$c_{ij} = \begin{cases} 2, \ \textit{если} \ x_i \succ x_j \\ 1, \ \textit{если} \ x_i \sim x_j \\ 0, \ \textit{если} \ x_i \prec x_j \end{cases} \quad (i, j = \overline{1,m}) \tag{3.4}$$

Результаты сравнения всех пар объектов удобно представлять в виде матрицы. Пусть, например, имеется пять объектов x_1, ..., x_5 и проведено парное сравнение этих объектов по предпочтительности. Результаты сравнения представлены в виде $x_1 \succ x_2$, $x_1 \succ x_3$, $x_1 \succ x_4$, $x_1 \prec x_5$, $x_2 \succ x_3$, $x_2 \succ x_4$, $x_2 \prec x_5$, $x_3 \sim x_4$, $x_3 \prec x_5$, $x_4 \prec x_5$. Используя числовое представление (3.3), составим матрицу измерения результатов парных сравнений (табл. 3.2). В табл. 3.2 на диагонали всегда будут расположены единицы, поскольку объект эквивалентен себе.

Представление (3.4) характерно для отображения результатов спортивных состязаний. За выигрыш дается два очка, за ничью - одно и за проигрыш - ноль очков. Предпочтительность одного объекта перед другим трактуется в данном случае как выигрыш одного участника турнира у другого. В качестве примера в табл. 3.3 приведены результаты измерения рассматриваемых пяти объектов с использованием представления (3.4).

Таблица 3.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1	0
x_3	0	0	1	1	0
x_4	0	0	1	1	0
x_5	1	1	1	1	1

Таблица 3.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	2	2	2	0
x_2	0	1	2	2	0
x_3	0	0	1	1	0
x_4	0	0	1	1	0
x_5	2	2	2	2	1

Если сравнение пар объектов производится отдельно по различным показателям или сравнение осуществляет группа экспертов, то по каждому показателю или эксперту составляется своя таблица результатов парных сравнений. Поэтому образуется пакет таблиц.

Сравнение во всех возможных парах не дает полного упорядочения объектов. Поэтому возникает задача ранжировки объектов по результатам их парного сравнения. Решение этой задачи возможно различными способами, простейшим из которых является следующий.

Производят суммирование элементов матрицы парных сравнений в пределах каждой строки. В результате получают значения сумм по каждой строке матрицы. Полученные суммы располагают в порядке убывания их значений, что соответствует расположению объектов по убыванию их предпочтительности. Упорядоченные таким образом объекты могут быть отранжированы по рассмотренным ранее правилам.

Для данных табл. 3.2 получим: суммы элементов по строкам $C_1 = 4$; $C_2 = 3$; $C_3 = 2$; $C_4 = 2$;$C_5 = 5$. Соответствующее этим значениям сумм упорядочение объектов по предпочтительности будет: $x_5 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_3 \sim x_4$.

Непосредственная оценка представляет собой процедуру приписывания объектам числовых значений в шкале интервалов. ЛПР или эксперту необходимо поставить в соответствие каждому объекту точку на определенном отрезке числовой оси. При этом эквивалентным объектам приписываются одинаковые числа. Удобно результат приписывания объектам чисел представить графически. На рис. 3.2 в качестве примера приведено такое представление пяти объектов на отрезке числовой оси [0, 1].

Поскольку за начало отсчета выбрана нулевая точка, то в данном примере измерение производится в шкале отношений. ЛПР или эксперт соединяет каждый объект линией с точкой числовой оси. Из рисунка следует, что числовые представления объектов равны: $f(x_1) = 0{,}28$; $f(x_2) = f(x_5)=0{,}75$; $f(x_3)=0{,}2$; $f(x_4) = 0{,}5$.

Измерения в шкале интервалов могут быть осуществлены с достаточной точностью при полной информированности ЛПР (экспертов) о свойствах объектов. Эти условия на практике встречаются редко, поэтому часто для измерения применяют *балльную оценку*. При этом вместо непрерывного отрезка числовой оси рассматривают участки, каждому из которых приписывается свой балл. ЛПР или эксперт, приписывая объекту балл, тем самым измеряет его с точностью до определенного участка числовой оси.

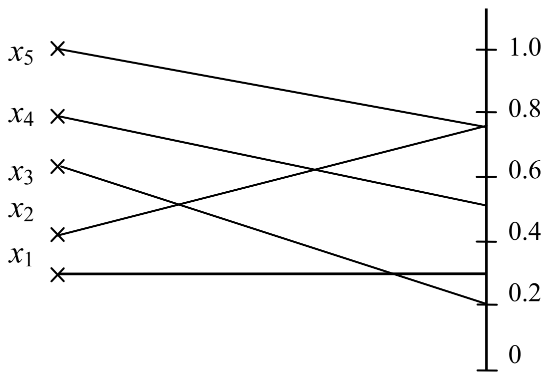

Рис. 3.2. Непосредственная оценка объектов.

Применяются 5-, 10- и 100-балльные шкалы.

Последовательное сравнение представляет собой комплексную процедуру измерения, включающую как ранжирование, так и непосредственную оценку. При последовательном сравнении ЛПР (эксперт) выполняет следующие операции:

а) осуществляет ранжирование объектов;

б) производит непосредственную оценку объектов на отрезке [0,1], полагая, что числовая оценка первого в ранжировке объекта равна единице, т.е. $f(x_1) = 1$;

в) решает, будет ли первый объект превосходить по предпочтительности все остальные объекты вместе взятые. Если да, то эксперт увеличивает значение числовой оценки первого объекта так, чтобы она стала больше суммы числовых оценок остальных объектов, т.е. $f(x_1) > \sum_{i=2}^{m} f(x_i)$. В противном случае он изменяет величину $f(x_1)$ так, чтобы она стала меньше, чем сумма оценок остальных объектов;

г) решает, будет ли второй объект предпочтительнее, чем все последующие вместе взятые объекты, и изменяет $f(x_2)$ так же, как это описано для $f(x_1)$ в п. в;

д) продолжает операцию сравнения предпочтительности последующих объектов и изменяет числовые оценки этих объектов в зависимости от своего решения о предпочтении;

е) повторяет п.п. в, г, д до тех пор, пока не будут выполнены указанные условия.

В табл. 3.4 показан пример измерения пяти объектов методом последовательного сравнения в предположении, что выполняется условие „в" для всех объектов.

Таблица 3.4

Объекты	Исходные оценки	1я итерация	2я итерация	Нормированные оценки (приведенные к интервалу [0,1])
x_1	1	2	2,5	1
x_2	0,8	1,2	1,2	0,48
x_3	0,5	0,6	0,6	0,24
x_4	0,3	0,3	0,3	0,12
x_5	0,2	0,2	0,2	0,08

Кроме описанной процедуры последовательного сравнения, существует несколько ее модификаций, которые незначительно отличаются от рассмотренной.

Рассмотренные четыре метода измерения - ранжирование, парное сравнение, непосредственная оценка и последовательное сравнение - обладают различными качествами, но приводят к близким результатам. Экспериментальная сравнительная оценка этих методов показала, что наиболее эффективным является комплексное применение всех методов для решения одной и той же задачи. При этом следует учитывать, что методом, требующим минимальных трудозатрат, является ранжирование, а наиболее трудоемким – метод последовательного сравнения. Метод парного сравнения без дополнительной обработки не дает полного упорядочения объектов.

3.4. Измерение достоверности ситуаций

При описании проблемной ситуации может иметь место неопределенность, обусловленная неполнотой или недостоверностью информации об условиях, в которых возникла проблема. Для устранения этой неопределенности необходимо сформулировать полную группу альтернативных ситуаций. Описание альтернативных ситуаций дополняется количественными характеристиками, среди которых важное значение имеет характеристика достоверности – **вероятность ситуаций**. Для полной группы альтернативных ситуаций сумма вероятностей их появления равна единице.

Часто возникают случаи, когда сформулирован набор ситуаций, но большой уверенности в том, что он составляет полную группу, нет. Естественным выходом является определение недостающих альтернативных ситуаций. Однако часто это нельзя сделать из-за недостатка информации или времени на ее получение. В этих случаях необходимо сформулировать альтернативную ситуацию "остальные неизвестные ситуации", которая включает все возможные неизвестные события и дополняет уже сформулированные ситуации до полной группы. Для этой дополнительной ситуации также определяется вероятность ее свершения.

Рассмотрим теперь возможные способы измерения вероятностей ситуаций. Постановка задачи на измерение формулируется следующим образом. Пусть определена полная группа альтернативных ситуаций $S=(S_1,S_2,...,S_n)$, необходимо измерить значения вероятностей этих ситуаций $p_1,p_2,...,p_n$. Сумма вероятностей равна единице: $p_1+p_2+...+p_n=1$.

Возможны два способа измерения значений вероятностей ситуаций. Первый из них основан на использовании статистических данных о частотах появления ситуаций. Если в прошлом возникали подобные ситуации и накоплены определенные статистические данные об их свершении, то на основе этих данных оценки вероятностей ситуаций определяются как относительные частоты ситуаций:

$$p_j = \frac{n_j}{n}, \qquad (3.5)$$

где p_j - вероятность ситуации S_j; n_j - количество случаев появления ситуации S_j; n - общее количество случаев.

Измерение вероятностей ситуаций на основе статистических данных носит объективный характер, поскольку базируется на закономерностях случайных событий, наблюдаемых на опыте. В связи с этим будем называть вероятности ситуаций, измеренные на основе статистических данных, **объективными вероятностями** ситуаций. Точность измерения объективных вероятностей зависит от объема статистических данных и возможности их использования для будущих событий, т.е. от сохранения условий, в которых происходили прошлые события.

В задачах принятия решений во многих случаях статистические данные о частотах появления ситуаций весьма малы по объему либо вообще отсутствуют. Поэтому используется второй способ измерения вероятностей ситуаций, основанный на субъективных измерениях ЛПР (экспертов). Измеряемые таким путем вероятности называют **субъективными вероятностями** ситуаций. Субъективные вероятности представляют собой числовые оценки достоверности ситуаций и выражают мнение ЛПР(экспертов) о шансах появления этих ситуаций. Это мнение основывается на понимании ЛПР объективных причинно-следственных связей между ситуациями и условиями их появления. Используя свои знания и опыт, ЛПР определяет закономерности причинно-следственных связей и оценивает шансы появления ситуаций в виде субъективных вероятностей.

Субъективные вероятности при выполнении некоторых предположений обладают свойствами объективных вероятностей. Поэтому с ними можно производить обычные операции, определенные в теории вероятностей.

Практическое измерение субъективных вероятностей осуществляется методом непосредственной оценки при дополнительном требовании, чтобы сумма вероятностей полной группы альтернативных ситуаций была равна единице. Измерение производится в шкале отношений на отрезке числовой оси [0,1].

Точность измерения субъективных вероятностей определяется способностью ЛПР(эксперта) правильно понимать причинно-следственные зависимости событий, что в свою очередь, существенно зависит от уровня знаний и опыта человека. Для повышения точности измерения субъективных вероятностей целесообразно проводить групповую экспертизу с необходимой обработкой высказываний экспертов. Такая экспертиза обеспечивает использование коллективного знания и опыта.

Неопределенность в задаче принятия решений может иметь место не только при описании проблемной ситуации, но и оценке степени достижения целей, получения ожидаемого эффекта. Различные случайные события и факторы, обусловленные объективными условиями и субъективными действиями людей, могут приводить к различным последствиям решений. Для устранения этой неопределенности также строят возможные гипотезы о последствиях решений и измеряют вероятности этих гипотез. Построение таких гипотез и измерение их вероятностей осуществляется точно так же, как и для ситуаций.

3.5. Измерение важности целей

В ЗПР после определения проблемной ситуации формируется множество конкретных целей, преследуемых при выборе решения. Только в очень простых и частных случаях удается ограничиться одной целью. Как правило, реальное решение проблемной ситуации связано с достижением нескольких целей. Однако не все цели одинаково важны при решении проблем, поэтому возникает объективная необходимость в процессе принятия решений измерения важности целей.

Измерение важности целей является *личной прерогативой ЛПР*. Это обусловлено, во-первых, тем, что оценки важности целей оказывают существенное влияние на выбор оптимального решения и, во-вторых, многоцелевой характер решения проблемы в определенной степени связан с решением других проблем. Оба эти фактора могут и должны учитываться ЛПР, поскольку именно оно несет ответственность за принятое решение и возможные его последствия. Конечно, ЛПР может привлекать *экспертов* для измерения важности целей в качестве *консультантов*.

Необходимо иметь в виду, что измерение важности целей, осуществляемое ЛПР, носит *субъективный характер* и в большой степени зависит от правильности понимания им целей и задач как конкретной хозяйственной системы, так и всего общества в целом. Но ведь и окончательное принятие решения - тоже прерогатива и ответственность руководителя.

Числовая характеристика свойства важности целей называется **приоритетом**. Приоритеты обычно измеряются в порядковой шкале или в шкале отношений. При измерении приоритетов в порядковой шкале эмпирической системой является множество целей с бинарным отношением нестрогого порядка. Для того, чтобы иметь возможность упорядочить все цели, необходимо принять, что все цели между собой сравнимы по свойству важности. Это естественное предположение, которое выполняется на практике. В качестве числовой системы принимается множество натуральных чисел с бинарным отношением нестрогого неравенства. Измерение приоритетов в порядковой шкале производится методом ранжирования или парного сравнения с последующей обработкой для построения ранжировки. Обычно при решении проблемных ситуаций количество целей не превышает десяти, поэтому непосредственно проводится их ранжировка с присвоением рангов. Наиболее важная цель получает первый ранг, вторая по важности - второй ранг и т.д.

При измерении приоритетов в шкале отношений обычно величины приоритетов выбирают на отрезке от нуля до единицы, таким образом, чтобы сумма числовых значений приоритетов для всех целей была равна единице. Так измеренные приоритеты называют **коэффициентами относительной важности целей** или сокращенно **коэффициентами важности целей**. Эти коэффициенты дают возможность оценивать, во сколько раз каждая цель превосходит другие по свойству важности, т.е. являются относительными весами целей. Например, пусть имеются четыре цели A_1,A_2,A_3,A_4 и измерены их коэффициенты важности $k_1=0.4$; $k_2=0.25$; $k_3=0.2$; $k_4=0.15$. Сумма коэффициентов равна единице: 0.4+0.25+0.2+0.15=1. Таким образом, измерение коэффициентов важности заключается в распределении долей единицы на все цели.

Для измерения коэффициентов важности целей можно использовать методы непосредственной оценки и последовательного сравнения. Эти методы позволяют сразу получить значения коэффициентов важности целей. Измерение этих коэффициентов возможно также на основе применения метода парных сравнений с последующей обработкой его результатов. Измерение отношения предпочтительности на паре объектов человек производит с достаточно высокой точностью. Свойство важности целей является весьма сложным, поэтому его измерение целесообразно начать с применения метода парных сравнений. Обработкой результатов парных сравнений можно получить количественные оценки важности целей. Рассмотрим простейший способ обработки результатов парных сравнений для получения коэффициентов важности целей.

Пусть имеется n целей и проведено их парное сравнение по отношению важности. Результаты этого измерения представлены в виде матрицы с элементами

$$Z_{ij}=\begin{cases} 1, \text{если } A_i \succeq A_j \\ 0, \text{если } A_i \prec A_j \end{cases} \qquad (i,j = 1..n)\ . \tag{3.6}$$

Эта запись означает, что если цель A_i не менее предпочтительна в смысле важности, чем цель A_j, т.е. $A_i \succeq A_j$, то на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы Z ставится единица; если же цель A_j строго предпочтительнее цели A_i, т.е. $A_i \prec A_j$, то в ij-й ячейке матрицы ставится ноль.

Просуммируем элементы Z_{ij} по всем столбцам. Величины

$$Z_i=\sum_{j=1}^{n} Z_{ij} \qquad (i=1..n) \tag{3.7}$$

представляют собой сумму единиц в i-й строке матрицы Z. Содержательно эту сумму можно интерпретировать как количество целей, которые "голосуют" за большую важность цели A_i, т.е. сумма Z_i есть количество целей, по отношению к которым цель A_i более важна.

Просуммируем величины Z_i по всем строкам и поделим величины Z_i на эту сумму. В результате получим значения коэффициентов относительной важности целей

$$K_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Z_{ij}} = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i} \qquad (i=1..n) \qquad (3.8)$$

Содержательно эта формула определяет коэффициенты важности целей как относительное число "голосов", поданных за важность цели A_i (i=1..n). Действительно, в числителе величина Z_i есть количество "голосов", поданных за большую важность цели A_i , а в знаменателе общее число голосов.

Как следует из формулы (3.8), обработка результатов парных сравнений целей по важности весьма проста и может быть выполнена достаточно быстро вручную для не более чем десяти целей. Существуют и другие способы определения коэффициентов важности целей.

Пример. Для конкретной проблемной ситуации сформулированы ЛПР пять целей A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Для измерения коэффициентов важности целей было проведено парное сравнение целей, результаты которого ЛПР представило в виде: $A_1 \pi A_2$; $A_1 \pi A_3$; $A_1 \pi A_4$; $A_1 \sim A_5$; $A_2 \phi A_3$; $A_2 \sim A_4$; $A_2 \phi A_5$; $A_3 \pi A_4$; $A_3 \phi A_5$; $A_4 \phi A_5$. В соответствии с этим матрица парных сравнений, построенная по соотношению (3.6), имеет вид

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0	0	0	1
A_2	1	1	1	1	1
A_3	1	0	1	0	1
A_4	1	1	1	1	1
A_5	1	0	0	0	1

По формуле (3.7) определяем значения сумм в каждой строке матрицы: $Z_1=2$; $Z_2=5$; $Z_3=3$; $Z_4=5$; $Z_5=2$. Далее определяем сумму всех единиц в матрице, т.е. суммируем все Z_i: 2+5+3+5+2=17. По формуле (3.8) вычисляем значения коэффициентов важности целей, которые после округления будут следующие: $k_1=0.1$; $k_2=0.3$; $k_3=0.2$; $k_4=0.3$; $k_5=0.1$. Таким образом, наиболее важными признаны вторая и четвертая цели.

3.6. Измерение предпочтений решений

Для осуществления выбора наилучшего решения необходимо дать оценку предпочтений альтернативных вариантов решений. Измерение предпочтений есть отображение решений на числовую ось. Это отображение осуществляется *функцией предпочтения*. Значение функции предпочтения $f(Y_i, S_j, A_k)$ определяет предпочтительность решения Y_i в ситуации S_j для достижения цели A_k. Функция предпочтения описывает комплексную оценку положительных и отрицательных последствий решения и, следовательно, характеризует его эффективность и качество.

Для обеспечения *комплексной оценки* предпочтений решений необходимо сформулировать *полное множество* целей и конкретизировать их путем назначения *показателей степени достижения*. Принцип комплексной оценки решений требует учета всех существенных направлений и факторов: экономических, политических, социальных, технических, экологических и других. Односторонняя оценка возможных последствий, например, только технических или экономических, может привести к большим просчетами в принятии решений. Декомпозиция оценки предпочтений решений по показателям достижения целей способствует реализации комплексного подхода и более точному измерению.

Многогранность всесторонней оценки вариантов решений при комплексном подходе требует *привлечения экспертов*. Групповая экспертная оценка возможных последствий решений позволяет использовать коллективные знания и опыт специалистов и помогает ЛПР глубоко и критически осмыслить свои предпочтения вариантов решений.

Для построения функции предпочтения решений необходимо вначале измерить предпочтительность решений *по каждому показателю достижения целей для каждой ситуации.* В зависимости от характера задачи измерение может производиться *объективно* или *субъективно* в *количественных* или *качественных* шкалах. При комплексной оценке, как правило, имеет место сочетание этих видов измерения, поэтому для части показателей определяются ранжировки решений, а для другой части - количественные объективные данные.

После оценки предпочтительности решений по каждому показателю и ситуации необходимо дать *интегральную* оценку, т.е. *построить функцию предпочтения*. Для этого необходимо свести разнородные показатели степени достижения целей в *общую оценку эффективности*. Получение функциональной зависимости эффективности решения от частных показателей в виде формулы возможно только в простейших случаях, редко встречающихся в реальных задачах. Как правило, эта зависимость носит более сложный характер причинно-следственных связей и не описывается простыми формальными соотношениями. Например, соотношение между затратами и степенью достижения целей существенно зависит от важности целей, прямых и опосредованных последствий их достижения и располагаемых ресурсов.

В связи с этим существенная роль в установлении соотношений между частными показателями и общей оценкой предпочтений решений принадлежит ЛПР и экспертам.

Во многих случаях имеет место *неопределенность* в оценке ожидаемых положительных и отрицательных последствий решений. Для устранения этой неопределенности рассматриваются несколько *гипотетических вариантов последствий решений* и оцениваются *вероятности их свершения*. В этом случае ожидаемые последствия решений формулируются по показателям степени достижения целей в виде наборов гипотез последствий с вероятностями их свершения.

Возможны также случаи, когда положительные и отрицательные последствия решений являются вполне определенными, но существуют случайные объективные и субъективные факторы, которые не дают полной гарантии в реализации рассматриваемых вариантов решений. Для количественной оценки реализуемости решений вводят *вероятности реализации решений*. Эти вероятности позволяют учесть при выборе не только положительные и отрицательные последствия, но и реализуемость решения.

Контрольные вопросы к главе 3

1. Что понимается под “измерением”?
2. Что такое “эмпирическая система с отношениями”?
3. Какие отношения называются “полными” и “неполными”?
4. Назовите типы отношений между объектами и охарактеризуйте их.
5. Какая система принята в теории измерений в качестве универсальной системы с отношениями?
6. Что такое “шкала измерения”?
7. Чем определяется тип шкалы измерения?
8. Назовите типы шкал измерений и охарактеризуйте их.
9. Какие шкалы измерений являются качественными, а какие количественными?
10. Чем определяется выбор шкалы измерения?
11. Назовите методы субъективных измерений и дайте их характеристику.

12. Что является характеристикой достоверности ситуаций?
13. Какие возможны способы измерения вероятностей ситуаций и как в этих случаях называются эти вероятности?
14. Как называется числовая характеристика важности целей?
15. В каких шкалах и какими методами измеряются приоритеты целей?
16. Как могут быть измерены коэффициенты важности целей?
17. Чем определяются предпочтения решений?
18. Как могут быть измерены предпочтения решений?
19. Какими показателями характеризуются возможные последствия решений и их реализуемость?