Глава 5. Выбор решения

5.1. Последовательность выбора решения

Выбор решения является заключительным и наиболее ответственным этапом процесса принятия решений. Основная работа на этом этапе выполняется ЛПР, которое должно осмыслить всю полученную на этапах постановки задачи и формирования решений информацию и использовать ее для обоснования выбора. Деятельность ЛПР характеризуется большой эмоциональной нагрузкой, связанной с мотивацией предпочтений решений и волевым актом выбора.

В реальных задачах принятия управленческих решений к этапу выбора все еще сохраняется большая неопределенность информации, обусловленная наличием многих ситуаций и целей. Поэтому сразу осуществить выбор единственного решения из множества сформулированных очень сложно. В связи с этим используется **принцип последовательного уменьшения неопределенности**, заключающийся в **последовательном сужении множества решений**.

Различают три последовательные стадии такого сужения. На первой стадии исходное множество альтернативных решений Y сужается до множества допустимых решений $Y_g \subseteq Y$, где символ $\subseteq$ означает, что множество допустимых решений *Yg* является либо подмножеством, т.е. частью множества решений, либо совпадает с ним. На второй стадии множество допустимых решений сужается до множества эффективный решений $Y_0 \subseteq Y_g$. Наконец, на третьей стадии осуществляется выбор единственного решения *Y** из множества эффективных решений. Таким образом, последовательность выбора символически записывается в виде цепочки включений $Y \supseteq Y_g \supseteq Y_0 \supseteq Y^*$. Рассмотрим более подробно осуществление процесса сужения множества решений.

Множество альтернативных решений сужается до множества допустимых решений на основе учета ограничений. **Допустимыми,** или приемлемыми, называются решения, удовлетворяющие множеству ограничений. Например, допустимыми кандидатами на определенную должность могут являться только те лица, которые имеют данные по образованию, опыту работы и другим характеристикам, удовлетворяющие сформулированным ограничениям. Процедура получения множества приемлемых решений из исходного множества может выполняться путем логического мышления или формально, в зависимости от степени формализации информации. Например, при использовании автоматизированной подсистемы «Кадры», в которой имеется информация о резерве кадров на выдвижение, можно сформулировать запрос и получить список кандидатов на должность, удовлетворяющих перечисленным в запросе ограничениям, т.е. получить множество приемлемых решений.

Выполнение ограничений является необходимым условием для выбора решений, поэтому единственное, окончательно принимаемое решение *Y** находится во множестве приемлемых решений. Отсюда следует, что для дальнейшего процесса выбора достаточно рассматривать только множество приемлемых решений.

На практике процесс сужения множества решений до допустимого начинает осуществляться еще на этапе формирования исходного множества. Операция сужения часто осуществляется в неявной, скрытой форме, поэтому она остается незамеченной. Использование ЭВМ обычно требует четкой формулировки ограничений для получения приемлемого множества решений.

Сужение множества допустимых решений до множества эффективных решений осуществляется на основе анализа предпочтений. Решение называется **эффективным**, если не существует более предпочтительного. Множество эффективных решений в литературе называют также **множеством Парето, множеством недоминируемых решений**. Все эффективные решения между собой несравнимы, т.е. нельзя сказать, какое из них предпочтительнее. В частных случаях множество эффективных решений может содержать только одно решение или совпадать с множеством допустимых решений. В первом случае единственное решение является оптимальным, а во втором случае сужение допустимого множества не произошло.

Если измерены в качественной или количественной форме предпочтения решений на множестве показателей достижения целей, то определение множества эффективных решений может быть формализовано и выполнено на ЭВМ.

Непосредственно из определения множества эффективных решений следует, что оптимальное решение содержится только в этом множестве. Поэтому нахождение этого множества решений является необходимой процедурой в процессе выбора решений.

Сужение множества допустимых решений до множества эффективных решений повышает определенность выбора.

Количественно степень этого сужения оценивается **коэффициентом определенности выбора,** вычисляемым по формуле:

$$\gamma = \frac{m_g - m_0}{m_g - 1} ,$$

где m_g – количество допустимых решений (мощность множества допустимых решений); m_0 – количество эффективных решений (мощность множества эффективных решений).

При $\gamma = 1$ множество эффективных решений содержит одно решение ($m_o = 1$), которое и является оптимальным. При $\gamma = 0$, т.е. $m_o = m_g$, сужения допустимого множества не произошло, т.е. определенность выбора оптимального решения не повысилась. В промежуточных случаях $0 < \gamma < 1$.

Коэффициент определенности выбора является характеристикой полезности выделения множества эффективных решений. При $\gamma = 1$ эта полезность идеальная – найдено сразу оптимальное решение. При $\gamma = 0$ выделение эффективных решений ничего не дало с точки зрения выбора единственного решения.

Определение единственного оптимального решения является заключительным этапом процедуры выбора. Оно должно выбираться из множества эффективных решений, поскольку оптимальное решение содержится именно в этом множестве. Вся исходная информация полностью использована для выделения эффективных решений из множества допустимых решений, поэтому выбор единственного решения осуществляется в зависимости от возможности получения новой информации, способа и формы ее представления. В соответствии с этим существуют следующие альтернативные пути выбора.

Если получить новую информацию о предпочтительности эффективных решений нельзя, например, из-за ограниченности времени или ресурсов, то в качестве окончательного решения можно выбрать любое из эффективных решений. Такой выбор обеспечит гарантию, что выбранное решение не хуже любого другого.

Если имеется возможность получения новой дополнительной информации (например, с помощью проведения дополнительных исследований, экспериментов, анализа распорядительной и учетной документации, экспертного опроса), то ЛПР на основе этой информации оценивает предпочтительность эффективных решений и делает выбор окончательного решения. В процессе анализа новой информации ЛПР учитывает дополнительные неформальные факторы и их влияние на оценку решений.

Если новая информация о предпочтительности эффективных решений получена в явной форме, это дает возможность применения математических методов и ЭВМ для определения единственного решения.

Уточнение предпочтений решений преследует цель возможного сужения множества эффективных решений. Для этого необходимо провести анализ: какие предпочтения привели к образованию множества эффективных решений; какое из эффективных решений является наиболее подходящим кандидатом на наилучшее решение; какие решения являются наиболее вероятными для исключения и т.п. Практически уточнение предпочтений решений приводит лишь к некоторому сужению множества эффективных решений. Ожидать получения единственного оптимального решения на основе уточнения предпочтений маловероятно.

Опыт показывает, что выбор оптимального из множества эффективных решений (если их не больше 10) непосредственно самим ЛПР является рациональным как с точки зрения трудозатрат, так и с точки зрения психологических факторов свободы выбора. При большем количестве эффективных решений необходимо получать и анализировать дополнительную информацию о влиянии различных показателей и их приоритетов на выбор эффективных решений.

5.2. Индивидуальный выбор решения

Рассмотрим индивидуальный выбор решения для задач с одной целью и несколькими ситуациями, т.е. задачи типа IS. Постановка задачи выбора состоит в следующем. Пусть имеется несколько возможных ситуаций $S = (S_1,...,S_n)$ с вероятностями их появления $p = (p_1,..., p_n)$ и множество допустимых решений $Y_g = (Y_1, …,Y_m)$. Произведено измерение предпочтений решений на множестве ситуаций, т.е. определены значения функции предпочтения $f(Y_i, S_j) = f_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

Наличие альтернативных ситуаций порождает неопределенность выбора оптимального решения. Для устранения этой неопределенности можно использовать два пути.

Если можно предвидеть появление конкретных ситуаций, то для каждой из них определяется свое оптимальное решение. Применение конкретного решения связано с появлением конкретной ситуации. Очевидно, что этот путь возможен только в случае, когда можно ждать появления конкретной ситуации. Характерным примером такого подхода является инструкция действий при возникновении пожара или другой чрезвычайной ситуации.

Второй путь устранения неопределенности применяется в случае, когда решение должно быть принято до получения информации о том, какая же в действительности ситуация имеет место. Сущность этого пути заключается в учете влияния всех ситуаций на выбор оптимального решения. Возможны различные способы учета этого влияния, которые отличаются между собой характером принятой стратегии действий ЛПР и выбором конкретного критерия оптимальности.

Различают три **вида стратегий**: осторожная (пессимистическая), оптимистическая и рациональная (рассчитанная на средние условия).

При **осторожной** стратегии ЛПР руководствуется девизом «рассчитывай на худшее». Соответственно при **оптимистической** стратегии действий ЛПР руководствуется девизом «рассчитывай на лучшее». Девизом действий ЛПР при **рациональной** стратегии является «рассчитывай на наиболее вероятные условия». Выбор того или иного вида стратегии осуществляет ЛПР на основе характера решаемой проблемы, сформулированных целей и индивидуальных особенностей своего мышления.

Каждому виду стратегии можно поставить в соответствие совокупность критериев выбора оптимального решения. Поэтому выбор ЛПР конкретной стратегии поведения определяет и выбор критериев, соответствующих данной стратегии. Критерий выбора однозначно определяет правило выбора оптимального решения. Следует отметить, что однозначность правила выбора не гарантирует получения единственного оптимального решения, их может оказаться несколько.

В каком соответствии находится критерий выбора оптимального решения и цель решения проблемы? Одну и ту же цель можно достичь, действуя осторожно, рискованно или рационально. При этих стратегиях в зависимости от проблемной ситуации можно получить разную степень достижения цели. Цель определяет желаемый конечный результат или состояние. Стратегия выбора – это характер поведения ЛПР при достижении цели. Критерий выбора – это конкретизация характера действий, поведения ЛПР. Наконец, оптимальное решение – это само действие по достижению цели. Таким образом, для достижения одной и той же цели в зависимости от выбора стратегии и конкретного критерия может быть определено разное оптимальное решение.

Рассмотрим типовые критерии выбора оптимального решения для трех видов стратегии поведения.

Для унификации изложения этих критериев поставим в соответствие каждому решению Y_i численный **коэффициент важности решения** β_i. В зависимости от вида критерия содержательный смысл коэффициентов важности решений будет различным, но общее правило выбора оптимального решения можно записать для всех критериев в одном и том же виде

$$Y^* \Leftarrow \underset{i}{extremum}\{\beta_i\}, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5.1}$$

Эта запись означает, что необходимо из множества чисел βi выбрать экстремальное число и по номеру этого числа определить, какое из альтернативных решений является оптимальным (поскольку номер решения совпадает с номером коэффициента важности решения).

Если коэффициенты важности решений определены так, что чем больше их значение, тем лучше решение, то операции нахождения экстремума соответствует операция нахождения максимума, т.е. в этом случае соотношение (5.1) имеет вид

$$Y^* \Leftarrow \max_{i}\{\beta_i\}, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5.2}$$

Эта запись означает, что из совокупности чисел β_i находится наибольшее число и в соответствии с номером этого числа определяется оптимальное решение.

Если коэффициенты важности решений определены так, что чем меньше их значение, тем более значимо решение, то операция нахождения экстремума превращается в операцию нахождения минимума. В этом случае соотношение (5.1) имеет вид

$$Y^* \Leftarrow \min_i \{\beta_i\}, \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{5.3}$$

В соответствии с этим выражением из множества чисел β_i находится наименьшее число, по которому и определяется оптимальное решение.

Различным стратегиям поведения при выборе решений соответствуют различные критерии.

Критерий пессимизма (критерий Вальда) соответствует осторожной стратегии поведения. Применение критерия пессимизма не требует знания вероятностей ситуаций, и в этом его преимущество, поскольку часто эти вероятности неизвестны.

Для того, чтобы использовать общее правило выбора оптимального решения в частном случае критерия пессимизма, необходимо определить коэффициенты важности решений. Пусть имеются оценки предпочтений решений в каждой j-й ситуации. Поскольку критерий пессимизма соответствует правилу «рассчитывай на худший случай», то в качестве коэффициента важности i-го решения следует выбрать наихудшее значение функции предпочтения по всем ситуациям. Если функция предпочтения измеряется так, что ее наилучшему значению соответствует наибольшее число, то, очевидно, что наихудшее значение предпочтения есть ее наименьшее значение. Поэтому вычисление коэффициентов важности решений производится по соотношению

$$\beta_i = \min_j f_{ij}, \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{5.4}$$

где f_{ij} – функция предпочтения i-го решения в j-ой ситуации.

Используя общее правило выбора решения (5.2) и соотношение (5.4), правило нахождения оптимального решения по критерию пессимизма можно записать в виде

$$Y^* \Leftarrow \max_i \min_j f_{ij}. \tag{5.5}$$

В соответствии с этим правилом последовательно для каждого решения выполняются операции нахождения минимального значения функции предпочтения во всех ситуациях, а затем из полученных чисел находится максимальное число, номер которого и определяет оптимальное решение. Критерий пессимизма, исходя из правила (5.5), называют **максиминным критерием**.

При измерении предпочтений в порядковой шкале наихудшее предпочтение по всем ситуациям соответствует максимальному значению функции предпочтения. Следовательно, коэффициент важности решений при измерении предпочтений в рангах вычисляется по формуле

$$\beta_i = \max_j f_{ij}, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5.6}$$

Соответственно правило выбора оптимального решения по критерию пессимизма при измерении предпочтений в порядковой шкале имеет вид

$$Y^* \Leftarrow \min_i \max_j f_{ij}, \tag{5.7}$$

где f_{ij} – ранг i-го решения в j-й ситуации.

Содержательный смысл операций в соотношении (5.7) состоит в том, что просматриваются ранги каждого решения по всем ситуациям и определяется наибольший ранг, т.е. наихудшая оценка решения (операция $\max\limits_j f_{ij}$). Далее из всех чисел $\beta_i = \max\limits_j f_{ij}$ выбирается наименьшее, т.е. наивысший ранг. Номер коэффициента важности решения β_i, имеющего этот наивысший ранг, указывает на оптимальное решение.

Таким образом, оптимальное по критерию пессимизма решение определяется путем отыскания для каждого решения наихудшей оценки по всем ситуациям и наилучшей из этих наихудших оценок, которая и указывает на оптимальное решение.

Критерий оптимизма соответствует оптимистической стратегии выбора. В соответствии с девизом этой стратегии «рассчитывай на

лучший случай» коэффициенты важности решений определяются как наилучшие оценки предпочтений по всем ситуациям. Если измерение производится в количественных шкалах таким образом, что чем выше предпочтение, тем больше соответствующее ему число, то коэффициенты важности решений определяются следующим способом:

$$\beta_i = \max_j f_{ij}, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5.8}$$

где f_{ij} – значения функции предпочтения, измеренные в количественной шкале и отражающие полезность i-го решения в j-й ситуации. В соответствии с общей формулой правила выбора решения (5.2) правило выбора решения, соответствующее критерию оптимизма, имеет вид

$$Y^* \Leftarrow \max_i \max_j f_{ij} \tag{5.9}$$

Если измерение предпочтений производится в порядковой шкале и f_{ij} есть ранг i-го решения в j-й ситуации, то коэффициенты важности решений вычисляются путем применения операции минимума к множеству рангов оценки решения по всем ситуациям:

$$\beta_i = \min_j f_{ij}, \qquad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5.10}$$

Правило выбора решения в случае измерения предпочтений в рангах и критерия оптимизма имеет вид

$$Y^* \Leftarrow \min_i \min_j f_{ij}. \tag{5.11}$$

Как следует из правила выбора оптимального решения по критерию оптимизма, в качестве исходной информации используются только значения функции предпочтения, т.е. оценки решений по достижению цели в различных ситуациях. Знание вероятностей ситуаций при этом критерии выбора, так же как и при критерии пессимизма, не требуется. Это является положительным свойством данного критерия выбора.

Критерий максимума среднего выигрыша (критерий Байеса-Лапласа) соответствует рациональной стратегии. При его использовании требуется устанавливать вероятности возникновения альтернативных ситуаций, т.е. имеет место задача выбора оптимального решения в условиях риска. Общее правило выбора решения (5.2) или (5.3) остается справедливым и для этого критерия. Конкретный вид правила выбора решения требует определения коэффициентов важности решений. С содержательной точки зрения коэффициенты важности решений при данном критерии представляют собой средний выигрыш (результат), получаемый при каждом решении по всем ситуациям.

Если предпочтения решений на множестве ситуаций измеряются в интервальной шкале (или в шкале отношений), то средний выигрыш каждого решения вычисляется как математическое ожидание выигрыша:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} p_j f_{ij} \qquad \left(\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}}\right) \tag{5.12}$$

где p_j – вероятность j-й ситуации, f_{ij} – значение функции предпочтения i-го решения в j-й ситуации.

Тогда правило выбора оптимального решения заключается в нахождении максимума или минимума среднего результата:

$$Y^* \Leftarrow \max_i \left(\min_i \right) \sum_{j=1}^{n} p_j f_{ij} \tag{5.13}$$

Частным случаем критерия Байеса-Лапласа является **критерий «недостаточного основания»**. Он используется, когда ЛПР не может точно определить вероятности появления различных ситуаций и оценивает их как равновероятные, т.е.

$$p_j = \frac{1}{n} \qquad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

В этом случае средние выигрыши решений вычисляем по формуле:

$$\beta_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}, \tag{5.14}$$

а правило выбора оптимального решения будет иметь вид:

$$Y^* \Leftarrow \max_i \left(\min_i\right) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \qquad (5.15)$$

Множитель 1/n в формуле (5.15) может быть опущен, т.к. не влияет на результат выбора.

Рассмотрим теперь измерение функции предпочтения в порядковой шкале, осуществляемое методами ранжирования или парного сравнения. В случае ранжирования всегда можно его результаты представить в виде матрицы парных сравнений с элементами

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, \text{если} & f(Yi) \le f(Yj) \\ 0, \text{если} & f(Yi) > f(Yj) \end{Bmatrix} \qquad (i,\ j = \overline{1,m}), \qquad (5.16)$$

где $f(Y_i)$ и $f(Y_j)$ – ранги i-го и j-го решений соответственно. Поэтому в дальнейшем критерий максимума среднего выигрыша будем рассматривать для случая измерения предпочтений решений методом парных сравнений.

При каждой k-й ситуации результаты оценки предпочтений представляют собой матрицу парных сравнений с элементами $\left\| x_{ij}^k \right\|$, $(k = \overline{1,n})$.

Совокупность матриц парных сравнений можно рассматривать как точки в пространстве ранжирования решений. В этом пространстве можно ввести понятие расстояния между точками – матрицами парных сравнений как число несовпадений значений элементов матриц. Расстояние между двумя матрицами парных сравнений вычисляется по формуле

$$d_{ks} = \sum_{i,j=1}^{m} \left| x_{ij}^k - x_{ij}^s \right|, \qquad (5.17)$$

где d_{ks}– расстояние между матрицами парных сравнений решений, полученных для k-й и s-й ситуаций, x_{ij}^k - ij-й элемент матрицы для k-й ситуации.

Для построения средней матрицы парных сравнений $\left\| y_{ij} \right\|$ воспользуемся условием минимума суммарного расстояния этой матрицы от матриц парных сравнений для всех ситуаций

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k \left| x_{ij}^k - y_{ij} \right| \Rightarrow \min_{y_{ij}}, \qquad (5.18)$$

где p_k – вероятности ситуаций. Вычислим операцию минимума путем выбора элементов y_{ij} искомой средней матрицы. Учитывая, что величины x_{ij}^k, y_{ij} могут принимать значения только ноль или единица, представим модуль разности как квадрат разности,

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k \left| x_{ij}^k - y_{ij} \right| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k (x_{ij}^k - y_{ij})^2 \ . \qquad (5.19)$$

Возведем выражение в круглых скобках в квадрат и примем во внимание, что

$$(x_{ij}^k)^2 = x_{ij}^k, \quad (y_{ij})^2 = y_{ij}.$$

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k \left[(x_{ij}^k)^2 - 2x_{ij}^k y_{ij} + (y_{ij})^2 \right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k (x_{ij}^k - 2x_{ij}^k y_{ij} + y_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k x_{ij}^k - 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{m} p_k y_{ij} (x_{ij}^k - \frac{1}{2}).$$

При заданных матрицах парных сравнений решений первый член в этом выражении является постоянным. Поэтому минимальное значение суммы расстояний соответствует максимальному значению второго члена, т.е. условию (5.18) соответствует условие

$$\sum_{i,j=1}^{m} y_{ij} \sum_{k=1}^{n} p_k (x_{ij}^k - \frac{1}{2}) \Rightarrow \max_{y_{ij}} \quad . \tag{5.20}$$

Максимальное значение суммы достигается выбором значений y_{ij} по следующему правилу:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k x_{ij}^k \geq \frac{1}{2} \\ 0, \textit{если} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k x_{ij}^k < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{5.21}$$

В справедливости можно убедиться непосредственно проверкой этого правила. Действительно, если сумма произведений $p_k x_{ij}^k$ меньше ½, то для получения максимального значения необходимо положить $y_{ij} = 0$. Если же сумма произведений $p_k x_{ij}^k$ больше ½, то следует принять $y_{ij} = 1$.

Выбранные по правилу (5.21) элементы средней матрицы обеспечивают минимальную удаленность в пространстве ранжировок этой матрицы от матриц парных сравнений предпочтений решений для всех ситуаций с учетом вероятностей этих ситуаций.

Вычисление коэффициентов важности решений производится с использованием элементов y_{ij} по формуле

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} y_{ij}} \qquad (i = \overline{1, m}) \tag{5.22}$$

Таким образом, процедура вычисления коэффициентов важности решений заключается в умножении каждой матрицы парных сравнений решений на свою вероятность ситуации, сложении полученных после умножения матриц, сравнении каждого элемента суммарной матрицы с порогом ½, и если он больше или равен порогу, то заменяется единицей, в противном случае – нулем. Далее определяется сумма элементов (единиц) в каждой i-й строке матрицы $\left\| y_{ij} \right\|$ и делится на общую сумму единиц в матрице (значение знаменателя в формуле (5.22)). Полученный результат деления и является коэффициентом важности i-го решения.

Полученные значения коэффициентов важности решений для критерия максимума среднего выигрыша позволяют использовать общее правило выбора (5.2) для определения оптимального решения.

Следует отметить, что критерий максимума среднего выигрыша может быть использован и в случае, когда имеется всего одна ситуация, но реализация решений осуществляется с определенными вероятностями. В этом случае оценки предпочтений решений соответствуют условию идеальной реализации решений. Поскольку в действительности каждое решение может дать ожидаемый эффект только с определенной вероятностью, то ожидаемая полезность каждого решения определяется как произведение значения функции предпочтения на вероятность реализации решения. Это означает, что для подобного рода задач можно использовать критерий максимума среднего выигрыша и соответствующее ему правило выбора решения. Вероятности ситуаций в формулах (5.12), (5.21) при вычислении ожидаемой полезности должны быть заменены на вероятности реализации решений.

Критерий пессимизма – оптимизма (критерий Гурвица) также соответствует рациональной стратегии выбора решений. Применение этого критерия не требует знания вероятностей ситуаций. Данный критерий представляет собой взвешенную комбинацию критериев пессимизма и оптимизма. Правило выбора оптимального решения по критерию пессимизма – оптимизма имеет вид

$$Y^* \Leftarrow \max_i \left[h \min_j f_{ij} + (1-h) \max_j f_{ij} \right] \tag{5.23}$$

где f_{ij} - значения функции предпочтений при оценке i-го решения в j-й ситуации, измеренные в количественной шкале так, что чем больше предпочтение, тем больше значение числа; h – коэффициент веса пессимизма, изменяющийся в диапазоне 0 ≤ h ≤ 1. При h=0 критерий пессимизма – оптимизма превращается в критерий оптимизма. При h=1 соответственно имеем критерий пессимизма. Выбор значения коэффициента веса пессимизма осуществляет ЛПР в соответствии со своими представлениями о доле оптимизма и пессимизма при выборе решения.

Заметим, что выражение в квадратных скобках (5.23) – коэффициенты важности решений в случае критерия пессимизма – оптимизма:

$$\beta_i = \left[h \min_j f_{ij} + (1-h) \max_j f_{ij} \right] \tag{5.24}$$

Если предпочтения измеряются в порядковой шкале и величины f_{ij} есть ранги, то использование критерия пессимизма – оптимизма для выбора оптимального решения заключается в следующем. Определяются коэффициенты важности решений для критерия пессимизма в соответствии с формулой (5.6) и по ним производится ранжировка решений. Далее вычисляются коэффициенты важности решений для критерия оптимизма по формуле (5.10) и по ним производится ранжировка решений. В результате имеем две ранжировки решений: одна – по критерию пессимизма, другая – по критерию оптимизма. Эти ранжировки преобразуются в матрицы парных сравнений по правилу (5.16). Матрица парных сравнений, соответствующая критерию пессимизма, умножается на коэффициент h, а матрица парных сравнений для критерия оптимизма – на коэффициент (1-h). Полученные в результате умножения на коэффициенты матрицы складываются. Далее в полученной матрице элементы заменяются на ноль или единицу по правилу:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } hx_{ij}^1 + (1-h)x_{ij}^2 \geq \dfrac{1}{2} \\ 0, \textit{если } hx_{ij}^1 + (1-h)x_{ij}^2 < \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{5.25}$$

где x_{ij}^1 - элементы матрицы парных сравнений решений для критерия пессимизма, x_{ij}^2 - элементы матрицы парных сравнений решений для критерия оптимизма.

Коэффициенты важности решений для критерия Гурвица вычисляются с использованием элементов y_{ij} по формуле

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}} \qquad (i = \overline{1,m}). \tag{5.26}$$

Оптимальное решение для критерия Гурвица определяется путем нахождения максимального значения коэффициента важности. Номер этого коэффициента соответствует номеру оптимального решения.

В ряде случаев ЛПР затрудняется обоснованно выбрать критерий получения оптимального решения. В этих случаях целесообразно провести анализ различных критериев. Для этого необходимо по разным критериям выбрать оптимальные решения, определить, совпадают или различаются между собой эти решения, и оценить влияние критериев на выбор оптимального решения. Такой анализ позволяет ЛПР более осмысленно и логично выбирать критерий и соответствующее ему оптимальное решение.

Рассмотрим примеры использования критериев выбора для определения оптимальных решений.

Пример 5.1. Определим оптимальное по критерию пессимизма решение по результатам оценки предпочтений в рангах, выполненной ЛПР. Результаты ранжирования трех решений для трех ситуаций S_1, S_2, S_3 приведены в таблице 5.1. Вычислим значения коэффициентов важности решений по формуле (5.6) $\beta_i = \max_j f_{ij}$, где f_{ij} - ранги, приведенные в таблице 5.1

Таблица 5.1

	S_1	S_2	S_3	β_i
Y_1	1	2	1	2
Y_2	2	1	3	3
Y_3	3	3	2	3

Для первого решения (i=1) наихудший ранг по всем ситуациям равен 2 и соответствует второй ситуации: β_1=2. Для второго решения β_2=3 и для третьего β_3=3. Таким образом, вектор коэффициентов важности решений равен β=(2, 3, 3).

Далее в соответствии с формулой (5.7) необходимо вычислить min($\beta_1, \beta_2, \beta_3$). Минимальное значение из трех чисел (2, 3, 3) равно 2, поэтому $\min_i \max_j = 2$. Значение 2 соответствует первому решению (первая компонента вектора β), следовательно, по критерию пессимизма оптимальным решением является $Y^* = Y_1$.

Пример 5.2. Определим оптимальное по критерию оптимизма решение для случая оценки предпочтений в рангах при трех ситуациях и трех альтернативных вариантах решений. Оценки предпочтений даны в таблице 5.1. Вычислим коэффициенты важности решений, используя соотношение (5.10). Для первого решения наименьшее значение функции предпочтения при всех ситуациях равно 1 (см. первую строку в таблице 5.1), следовательно, β_1=1. Для второго решения наименьшее значение функции предпочтения для всех ситуаций также равно единице, т.е. β_2=1. Наконец, для третьего решения β_3=2. Найдем оптимальное решение, используя правило (5.11). Из трех чисел $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2$ наименьшими являются два числа $\beta_1 = 1\, и\, \beta_2 = 1$. Следовательно, по критерию оптимизма оптимальными являются два решения Y*=(Y_1, Y_2). Отметим, что решение Y_1 оказалось оптимальным как по критерию оптимизма, так и по критерию пессимизма.

Пример 5.3. Определить оптимальное по критерию среднего выигрыша решение Y* из множества трех допустимых решений Y_1, Y_2, Y_3 для случая четырех ситуаций S_1, S_2, S_3, S_4. ЛПР определило предпочтения решений для каждой ситуации в количественной шкале, которые приведены в таблице 5.2. В нижней строке этой таблицы даны вероятности ситуаций p_j.

Таблица 5.2

	S_1	S_2	S_3	S_4	β_i
Y_1	1	4	5	9	5.2
Y_2	3	8	4	3	4.5
Y_3	4	6	6	2	5.0
P_j	0.1	0.2	0.5	0.2	

По формуле (5.12) вычислим коэффициенты важности решений β_i. Результаты вычислений представлены в последнем столбце таблицы 5.2. В соответствии с правилом (5.2) оптимальное решение соответствует максимальному значению коэффициента важности решения. Максимальным является коэффициент $\beta_1 = 5{,}2$, поэтому оптимальным является решение $Y^*=Y_1$.

Для этой же задачи найдем оптимальное решение по критерию пессимизма – оптимизма при h=0,4. Значение этого коэффициента говорит о том, что ЛПР на 40% считает свою стратегию пессимистической и на 60% оптимистической. Проводя вычисления по формуле (5.24), получаем значения коэффициентов важности решений $\beta_1 = 5{,}8,\ \beta_2 = 6{,}0,\ \beta_3 = 4{,}4$.

Отсюда следует, что оптимальным решением является $Y^*=Y_2$. Заметим, что если h=0,3, то коэффициенты важности решений $\beta_1 = 6{,}6,\ \beta_2 = 6{,}5,\ \beta_3 = 4{,}8.$ Поэтому оптимальным решением является $Y^*=Y_1$.

Пример 5.4. Определить оптимальное по критерию среднего выигрыша решение из множества трех допустимых решений Y_1, Y_2, Y_3 для случая трех ситуаций S_1, S_2, S_3, вероятности появления которых p_1, p_2, p_3 известны. ЛПР определило предпочтения решений для каждой ситуации в порядковой шкале. В таблице 5.3 представлены значения функции предпочтения в рангах и вероятности ситуаций. Для каждой ситуации S запишем предпочтения решений в виде матрицы парных сравнений, руководствуясь правилом (5.16) и ранжировками таблицы 5.3. В таблицах 5.4, 5.5, 5.6 представлены матрицы парных сравнений, соответствующих ранжировкам таблицы 5.3 для ситуаций S_1, S_2, S_3.

Таблица 5.3

	S_1	S_2	S_3
Y_1	1	2	1
Y_2	2	1	3
Y_3	3	3	2
P_j	0,5	0,3	0,2

Таблица 5.4

	Y_1	Y_2	Y_3
Y_1	1	1	1
Y_2	0	1	1
Y_3	0	0	1

Таблица 5.5

	Y_1	Y_2	Y_3
Y_1	1	0	1
Y_2	1	1	1
Y_3	0	0	1

Таблица 5.6

	Y_1	Y_2	Y_3
Y_1	1	1	1
Y_2	0	1	0
Y_3	0	1	1

Вычислим коэффициенты важности решений по формулам (5.21), (5.22). В формуле (5.21) сумма $\sum_{k=1}^{n} p_k x_{ij}^k$ означает, что нужно умножить все значения предпочтений в таблице 5.4 на p_1 =0,5; все значения предпочтений в таблице 5.5 на p_2 =0,3; все значения предпочтений в таблице 5.6 на p_3 =0,2 и сложить полученные после умножения результаты. В результате получаем таблицу 5.7.

Таблица 5.7

	Y_1	Y_2	Y_3
Y_1	1	0,7	1
Y_2	0,3	1	0,7
Y_3	0	0,3	1

Далее, руководствуясь правилом (5.21), преобразуем элементы матрицы (5.7). Вместо 0,7 поставим единицы и вместо 0,3 – нули. В результате получим матрицу с элементами $y_{11} = y_{12} = y_{13} = y_{22} = y_{23} = y_{33} = 1, \quad y_{21} = y_{31} = y_{32} = 0$. По формуле (5.22) вычислим коэффициенты важности решений. В результате получаем $\beta_1 = 0{,}5, \beta_2 = 0{,}333, \beta_3 = 0{,}167$. Максимальное значение из этих чисел имеет коэффициент $\beta_1 = 0{,}5$, следовательно, оптимальным решением является решение Y_1. Заметим, что исходные данные этого примера соответствуют исходным данным примеров 5.1 и 5.2. По всем трем критериям – пессимизма, оптимизма и максимума среднего выигрыша – оптимальным является решение Y_1.

5.3. Групповой выбор решения

С усложнением задач управления принятие решений все чаще перекладывается с одного человека на группу лиц. Решение становится коллективным, коллегиальным: «*Одна голова хорошо, а две - лучше*». Не последнюю роль в перекладывании выбора на коллектив играет перераспределение ответственности: чем больше лиц участвует в выборе, тем меньшая доля ответственности приходится на каждого. Люди готовы принять групповое решение, которое связано с более высоким риском, чем решение, которое они приняли бы в одиночку. Групповое решение в ряде случаев оказывается менее субъективным. Принятие решений в коллективе помимо указанных преимуществ дает также возможность выявить больше альтернатив, всесторонне оценить многочисленные варианты, выбрать из них лучшие и устранить слабые.

Существенным недостатком коллективного решения является его сравнительно низкая оперативность: выработка такого решения требует значительного времени. Примерами групповых решений, принимаемых в промышленности, могут быть многие проектные решения, решения, принимаемые на совещаниях, конференциях, симпозиумах и т.п.

При принятии группового решения, так же, как и индивидуального, осуществляется выбор одной из альтернатив из множества возможных, только такой выбор осуществляется членами группы.

Под **групповым выбором** понимают процедуру принятия коллективного решения на основе согласования индивидуальных предпочтений членов группы.

Полное рассмотрение группового выбора предполагает решение проблем организации процедур выработки коллективного мнения и согласования индивидуальных предпочтений в групповое предпочтение. Рациональная организация процедур выработки решения, т.е. технологии работы группового ЛПР, требует учета поведения членов группы и влияния различных факторов на это поведение (характер решаемой проблемы, последовательность высказывания мнений, условия образования коалиций, эмоциональное состояние участников и т.п.) Поведение членов группового ЛПР является сложной, малоизученной проблемой. В настоящее время по этой проблеме не достигнуто каких-либо существенных результатов, позволяющих построить теоретические модели, адекватно отражающие это поведение. В практике группового выбора имеется ряд положений по рационализации процедур проведения выбора. Например, на военных советах первыми высказывают свое мнение младшие по должности и званию, что обеспечивает исключение влияния авторитетов старших начальников.

В теории принятия решений в настоящее время в области группового выбора основное внимание уделяется проблемам рационального выбора. Какой результат выбора считать “хорошим”, какими свойствами он должен обладать? Таким образом, основное направление исследований в области группового выбора связано не с тем, как должен проходить процесс выбора, а с тем, каким требованиям должен удовлетворять и какими свойствами должен обладать результат согласования индивидуальных предпочтений в групповое предпочтение. Такой подход, несмотря на свою неполноту за счет исключения проблем поведения участников выбора, позволяет в широком аспекте подойти к проблеме группового выбора. Постановка задачи группового выбора формулируется следующим образом. Для решения проблемной ситуации предложено ряд вариантов решений $Y=(Y_1,\ldots,Y_m)$. Имеется групповое ЛПР, состоящее из d членов. Каждый член группы может выбирать решения из множества Y в соответствии со своими предпочтениями. Оценка решений группой представляет собой вектор предпочтений $f=(f_1,\ldots,f_d)$.

Для образования единого группового предпочтения $F=F(f_1,\ldots,f_d)$ необходимо согласовать индивидуальные предпочтения. Это согласование производится на основе **принципа группового выбора,** который определяет правило согласования и выбора оптимального решения, т.е. является по существу критерием выбора. Рассмотрим наиболее распространенные принципы группового выбора.

Принцип диктатора. В соответствии с этим принципом в качестве группового предпочтения принимается предпочтение одного члена группы. Следовательно, функция группового предпочтения равна

$$F(f_1,f_2,\ldots,f_d)=f_k,$$

где f_k - функция предпочтения диктатора.

Ввиду того, что при данном принципе совершенно не учитываются предпочтения других членов группы, понятие группового ЛПР теряет содержательный смысл. По существу групповое предпочтение в данном случае соответствует индивидуальному предпочтению (известна шутка: «Мы тут посоветовались, и я решил»).

Принцип диктатора характерен для военных организаций и широко используется при принятии решений в чрезвычайных обстоятельствах.

Принцип большинства голосов. В групповом ЛПР могут образовываться коалиции - объединения участников в группы с совпадающими целями. Пусть в групповом ЛПР возникло множество коалиций $V=(V_1,V_2,\ldots,V_s)$ где s - количество коалиций. При s=d все коалиции одноэлементные, т.е. включают только по одному члену и, следовательно, все члены группы преследуют разные цели. При s=1 имеет место всего одна коалиция, включающая всех членов группового ЛПР и преследующая одну или несколько общих целей. В промежуточном случае $1<s<d$ образуется конечное число коалиций.

Каждая коалиция имеет свою функцию предпочтения f_{vj}. При измерении предпочтений в качественных шкалах объединение индивидуальных предпочтений в коалиционное предпочтение обычно осуществляется по принципу 100% большинства, т. е. одно решение предпочитается в коалиции другому, если все члены коалиции имеют такое же предпочтение. При измерении предпочтений в количественных шкалах коалиционное предпочтение обычно получают как взвешенную сумму индивидуальных предпочтений членов коалиции

$$f_{vj}=\sum_{i=1}^{n_{vj}} k_i \cdot f_{ij},$$

где f_{ij}- индивидуальное предпочтение i-го участника в коалиции j; k_i- весовые коэффициенты; n_{vj} – количество членов, входящих в коалицию v_j. Очевидно, что $n_{v1} + n_{v2} + \ldots + n_{vs} = d$.

Таким образом, каждая коалиция характеризуется своей функцией предпочтения, а все множество коалиций, входящих в групповое ЛПР, характеризуется вектором функций предпочтения

$f = (f_{v1}\ldots, f_{vs})$.

Принцип большинства утверждает, что групповое предпочтение должно соответствовать предпочтению коалиции, которая имеет число членов (голосов), превышающее некоторый порог. Формально это можно записать в виде

$F(f_{v1}, f_{v2}, \ldots, f_{vs}) = f_{vk}$ при $n_{vk} > Cd/2$,

где f_{vk}- функция предпочтения коалиции, имеющей число голосов n_{vk}; C - некоторый коэффициент, изменяющийся в пределах $1 \leq C \leq 2$. При C=1 порог равен половине участников группового ЛПР, поэтому говорят о принципе *простого большинства голосов*. При C=4/3 порог равен 2/3 голосов, поэтому говорят о *принципе большинства в 2/3 голосов (или квалифицированного большинства)*, при C=2 порог равен d, что соответствует *абсолютному большинству голосов.*

Принцип большинства голосов используется при демократическом способе принятия решений и характерен для союзных типов организаций (партийные, профсоюзные, общественные, любительские и др.)

Принципы диктатора и большинства голосов не учитывают интересы всех членов группы. Их применение при отсутствии других сдерживающих факторов может привести к распаду группового ЛПР. В формулировке этих принципов не содержится оснований для обеспечения устойчивости существования группы.

Существуют принципы согласования индивидуальных предпочтений, обеспечивающие в определенной степени учет интересов всех членов группы и, следовательно, сохраняющие ее устойчивость.

Для множества коалиций $V=(V_1,V_2,\ldots,V_s)$, $s \leq d$, решение называется **V-оптимальным**, если оно оптимально для каждой коалиции $V_1,\ldots,V_s$.

V-оптимальность означает, что ни одной коалиции не выгодно менять этого решения, поскольку не существует лучшего решения. Рассмотрим конкретные принципы согласования, основанные на понятии V-оптимальности и отличающиеся количеством участников в коалиции.

Принцип Курно соответствует случаю, когда все коалиции являются одноэлементными, т.е. групповое ЛПР состоит из независимых индивидов, имеющих различные предпочтения и поэтому не образующих какие-либо группы. Тогда V-оптимальное решение отражает индивидуальную рациональность: никому из членов группового ЛПР отдельно не выгодно менять решение, поскольку не существует лучшего.

Принцип Парето применяется, когда множество коалиций состоит из одной коалиции, т.е. все члены группового ЛПР образуют единое целое. В этом случае V-оптимальным является решение, которое невыгодно менять всем членам группы сразу, поскольку не существует лучшего. По принципу Парето группа может улучшать свои решения без нанесения ущерба каждому члену, поэтому его применение возможно только при сильной зависимости всех членов группового ЛПР. Эта зависимость выражается в общности целей всех членов группы.

Множество эффективных решений удовлетворяет принципу Парето, поэтому этот принцип широко используется в задачах группового выбора.

Принцип Эджворта объединяет принципы Парето и Курно. Он соответствует случаю, когда множество коалиций состоит из произвольного числа s $(1<s<d)$ коалиций. При этом V-оптимальным является решение, которое невыгодно менять каждой коалиции, поскольку нет лучшего.

Конкретизация принципов согласования может быть произведена в соответствии с характером отношений между коалициями группового ЛПР. Рассматривается три типа отношений между коалициями: *статус-кво, конфронтация и рациональность*.

При отношении *статус-кво* коалиции стараются сохранить существующее положение. Это отношение используется в экономических моделях, в которых рассматриваются взаимодействия слабо связанных участников.

При отношении *конфронтации* коалиции действуют так, чтобы навредить друг другу. Причем возможно, что эти действия могут наносить ущерб самим коалициям. На основе отношения конфронтации построена теория игр. Выбор оптимального решения в этой теории основан на предположении о наихудшем для данной коалиции поведении остальных коалиций. Поэтому оптимальное решение определяется для наихудших условий и обеспечивает максимальный гарантированный выигрыш для этих условий.

При отношении *рациональности* коалиции действуют в собственных интересах для получения максимального результата, что, естественно, не обязательно приносит ущерб другим коалициям. При использовании отношения рациональности возникают затруднения, связанные с бесконечной цепочкой взаимосвязанных рассуждений (так называемая рефлексия). Например, если имеется две коалиции, то одна из них, зная предпочтения другой, может на основе отношения рациональности предсказать решение другой коалиции и на основе этой информации сама принять оптимальное решение. Однако аналогичные рассуждения может проводить и другая коалиция по отношению к первой и на этой основе принять оптимальное решение. В свою очередь, первая коалиция, зная поведение второй коалиции, и т.д. Получается бесконечная цепочка логических рассуждений, практическое прекращение которых возможно только при обрыве на определенном шаге. В частности, при отношении конфронтации этот обрыв осуществляется на первом шаге, исходя из предположения “рассчитывай на худшее”.

Пример 5.5. Рассмотрим иллюстративный пример применения принципов группового выбора. Пусть имеется групповое ЛПР, включающее всего два члена. Сформулировано два варианта решения проблемы, и каждый из членов группы в соответствии со своим предпочтением может выбрать любое решение. Поэтому всего возможны четыре варианта состояний (Y_1^1, Y_1^2), (Y_1^1, Y_2^2), (Y_2^1, Y_1^2), (Y_2^1, Y_2^2), где нижний индекс означает номер решения, а верхний - номер члена группового ЛПР. Состояние (Y_1^1, Y_1^2) означает, что оба члена выбирают первое решение; соответственно состояние (Y_2^1, Y_2^2) означает выбор членами группового ЛПР второго решения. В состояниях (Y_1^1, Y_2^2) и (Y_2^1, Y_1^2) выбираемые членами группы решения не совпадают.

Оба члена группового ЛПР высказали свои предпочтения состояний в рангах, приведенных в таблице 5.8.

Таблица 5.8

Предпочтения состояний	Решения			
	(Y_1^1, Y_1^2)	(Y_1^1, Y_2^2)	(Y_2^1, Y_1^2)	(Y_2^1, Y_2^2)
f_1	1	3	3	2
f_2	2	3	3	1

Рассмотрим оптимальные решения группового ЛПР для различных принципов группового выбора и типов отношений между членами группы.

В условиях гипотезы статус-кво и принципа Курно каждый член группы стремится не ухудшить свое состояние. Поэтому оптимальными состояниями являются (Y_1^1, Y_1^2) и (Y_2^1, Y_2^2). Это означает, что каждому члену группы выгодно одновременно принять либо решение Y_1, либо решение Y_2. Действительно, если первый член принял решение Y_1^1, то второй член может принять решение Y_1^2, либо Y_2^2. В соответствии с предпочтениями таблицы 5.8 решение Y_1^2 для второго члена предпочтительнее. Аналогично, если первый член принял решение Y_2^1, то для второго члена предпочтительным является решение Y_2^2. Соответствующие рассуждения можно провести и для первого члена в зависимости от выбора решения вторым членом и убедиться в том, что оптимальными по Курно в условиях гипотезы статус-кво являются одновременное принятие членами группы решений либо Y_1, либо Y_2. Состояния (Y_1^1, Y_1^2), (Y_2^1, Y_2^2) являются состояниями равновесия по принципу Курно.

Оптимальными состояниями по принципу Парето в условиях отношения статус-кво являются (Y_1^1, Y_1^2), (Y_2^1, Y_2^2). Действительно, из таблицы 5.8 следует, что для этих состояний нет доминирующих.

Оптимальными состояниями по принципу Эджворта в условиях отношения статус-кво также являются (Y_1^1, Y_1^2), (Y_2^1, Y_2^2). Таким образом, для всех трех принципов в условиях отношения статус-кво оптимальные состояния одинаковы и заключаются в том, что обоим членам группы нужно принимать одинаковое решение. Но какое именно решение: Y_1 или Y_2 - однозначного ответа нет, поскольку оба они оптимальны. Так как в рассматриваемом случае имеется всего два решения, то фактически применение принципов группового выбора в условиях гипотезы статус-кво ничего не дало.

В условиях отношения конфронтации для первого члена группы оптимальными решениями являются Y_1 и Y_2, поскольку второй член группы на эти решения будет выбирать Y_2 и Y_1 соответственно. Этим второй член будет наносить первому члену наибольший ущерб (третий ранг в таблице 5.8).

В условиях отношения рациональности оптимальным решением для первого члена является Y_1, а для второго Y_2, т.е. члены группы должны принимать разные решения.

Рассмотрим другой вариант оценки предпочтений членами группы, приведенный в таблице 5.9 в рангах.

Таблица 5.9

Предпочтения состояний	Решения			
	(Y_1^1, Y_1^2)	(Y_1^1, Y_2^2)	(Y_2^1, Y_1^2)	(Y_2^1, Y_2^2)
f_1	2	4	1	3
f_2	2	1	4	3

В соответствии с предпочтениями таблицы 5.9 для всех типов отношений оптимальным состоянием по принципу Курно является состояние (Y_2^1, Y_2^2), т.е. каждому члену в отдельности невыгодно изменять это состояние. Действительно, если первый член выбрал решение Y_2, то второму члену выгодно принять решение Y_2, и наоборот.

Оптимальными состояниями по принципу Парето являются (Y_1^1, Y_1^2), (Y_1^1, Y_2^2), (Y_2^1, Y_1^2). Оптимальных состояний по принципу Эджворта не существует. Следует отметить, что состояние (Y_1^1, Y_1^2) предпочтительнее состояния (Y_2^1, Y_2^2). Однако состояние (Y_1^1, Y_1^2) является неустойчивым по принципу Курно. Поэтому, если оба члена группы будут принимать решение согласованно, не пытаясь действовать в одиночку, то им выгодно обоим принять решение Y_1. Однако если они будут действовать разобщено, то каждый может увеличить свое предпочтение. Второй член, например, может улучшить свое предпочтение со второго ранга до первого и, следовательно, ухудшит предпочтение первого члена со второго ранга до четвертого. Таким образом, принятие решения Y_1 в кооперации гарантирует каждому члену большее предпочтение, чем при индивидуальном выборе решений.

5.4. Многокритериальный выбор

В задачах принятия решений часто возникает необходимость оценки решений по многим показателям, характеризующим различные стороны их качества и конкретизирующим понятие достижения целей. Формулировка целей решения проблемы обычно производится в общей содержательной форме. Поэтому конкретизация целей осуществляется путем введения совокупности показателей достижения целей. Важным требованием, предъявляемым к показателям, является их измеримость, т.е. возможность представления числами.

Формулировка критерия выбора в виде максимальной степени достижения целей конкретизируется как достижение экстремальных (максимальных или минимальных) значений показателей. Следовательно, критериями выбора оптимального решения становятся экстремальные значения показателей достижения целей. В связи с этим для случая индивидуального ЛПР рассматриваемая задача получила название многокритериального выбора . В случае группового ЛПР эта задача называется групповым многокритериальным выбором.

Рассмотрим задачу многокритериального выбора. В случае если все показатели могут быть измерены в одной и той же шкале и приведены к одной единице измерения, например, к денежной оценке, то решение такой задачи является элементарным. Действительно , в этом случае задача характеризуется набором альтернативных вариантов решений, предпочтения которых оцениваются одним обобщённым показателем. Значения этого показателя упорядочивают решения по предпочтительности. Поэтому оптимальное решение определяется на основе одного критерия, соответствующего экстремуму обобщённого показателя.

В большинстве случаев не удаётся достаточно просто свести показатели достижения целей к одному обобщённому показателю. Поэтому задача выбора заключается в определении оптимального решения с учётом всей совокупности показателей. В связи с этим возникает необходимость согласования показателей. Для этого могут быть с успехом применены изложенные выше принципы группового выбора. Действительно, многокритериальный выбор можно рассматривать как частный случай группового выбора, когда роль членов группы выполняют показатели степени достижения целей.

Многокритериальный выбор в соответствии с общей процедурой выбора, изложенной в первом параграфе данной главы, начинается с определения множества допустимых решений, удовлетворяющих ограничениям. Далее из множества допустимых решений определяется подмножество эффективных решений. Рассмотрим более подробно нахождение эффективных решений при многокритериальном выборе.

Пусть имеется множество допустимых решений $Y_Д = (Y_1, \ldots, Y_m)$ и множество показателей $y_1, y_2, \ldots, y_q$. В качестве показателей могут использоваться, например, показатели степени достижения целей, стоимость, прибыль и другие технико-экономические характеристики решений. Для каждого i-го решения определяется вектор значений показателей ($y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{iq}$). В соответствии с принципом Парето одно решение Y_i предпочтительнее другого решения Y_j, если выполняется векторное отношение «не хуже»:

$$(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{iq}) \geq (y_{j1}, y_{j_2}, \ldots, y_{jq}) \qquad (5.27)$$

Выполнение векторного отношения «не хуже» означает выполнение неравенств

$$y_{ih} \geq y_{jh} \quad (h = \overline{1,q}), \qquad (5.28)$$

где i – номер решения Yi; j-номер решения Yj; h- номер показателя. Данные неравенства должны выполняться для всех h, кроме, по крайней мере, одного номера t, для которого должно быть строгое неравенство

$$y_{it} > y_{jt} \qquad (5.29)$$

Таким образом, одно решение предпочтительнее другого, если все значения показателей первого решения не хуже значений соответствующих показателей второго решения и, по крайней мере, для одного показателя имеет место строгое предпочтение.

Для определения эффективных решений нет необходимости приведения значений показателей к единой единице измерения. Достаточно только по каждому показателю определить направления улучшения, т.е. сформулировать критерий выбора. Например, возрастание конкретного показателя означает его улучшение, следовательно, критерием является максимум этого показателя. В ряде случаев удобно привести значения всех показателей к рангам. Для этого вместо определения значений показателя проводится ранжировка всех решений по этому показателю в соответствии с направлением улучшения, т.е. критериями выбора. Переход от различных значений показателей к рангам во многих случаях позволяет определять эффективные решения достаточно просто, вручную, без использования ЭВМ. Переход к рангам унифицирует формулировку частных критериев выбора (по отдельным показателям) в виде максимального значения рангов.

Таким образом, определение эффективных решений в задаче многокритериального выбора сводится к сравнению вариантов решений между собой по каждому показателю и использованию векторного соотношения « не хуже » (5.27). Последовательно исключая неэффективные решения при сравнении пар решений между собой, определяют несравнимые между собой по всем показателям решения, которые и являются эффективными решениями.

Если множество эффективных решений содержит более одного решения, то встаёт задача о выборе единственного окончательного решения, которая рассматривается в следующем параграфе.

5.5. Определение единственного решения

Определение единственного решения является заключительным этапом процедуры выбора. Оно должно выбираться из множества эффективных решений, поскольку оптимальное решение содержится именно в этом множестве. Вся исходная информация полностью использована для выделения эффективных решений из множества допустимых решений. Поэтому выбор единственного решения осуществляется в зависимости от возможности получения новой информации, способа и формы её представления. В соответствии с этим различают следующие альтернативные пути выбора.

Если по каким-либо причинам получить новую информацию о предпочтительности эффективных решений нельзя, например, нет времени, то в качестве окончательного решения можно выбрать любое из эффективных решений. Такой выбор обеспечивает гарантию, что это решение не хуже любого другого.

Рассмотрим теперь случай, когда имеется возможность получения новой информации. Выбор единственного решения может осуществить непосредственно ЛПР на основе анализа предпочтительности эффективных решений. В процессе этого анализа оно учитывает дополнительные неформальные факторы и сопоставляет их влияние на оценку решений. Эта новая информация известна только ЛПР и поэтому имеет неявную форму представления. Такой путь выбора целесообразен при небольшом количестве эффективных решений (не более 10) и высокой профессиональной компетентности ЛПР.

Новая информация о предпочтительности эффективных решений может быть получена в явной форме от ЛПР, а также экспертов. Это открывает возможность применения математических методов и вычислительных машин для определения единственного решения. Вся информация сводится к уточнению предпочтений решений и свойств функции группового предпочтения.

Уточнение предпочтений решений преследует цель возможного сужения области эффективных решений. Для этого необходимо провести анализ: какие предпочтения привели к образованию множества эффективных решений; какое из эффективных решений по расположению среди других решений является наиболее подходящим кандидатом на наилучшее решение;

какие решения являются наиболее вероятными для исключения и т.п. Такой анализ требует тщательного изучения структуры взаимного расположения решений как точек в пространстве предпочтений членов группового ЛПР или при векторной оптимизации в пространстве показателей . Проведение обстоятельного анализа возможно только с использованием ЭВМ.

Результаты исследования множества эффективных решений позволяют целенаправленно сформулировать задачи для уточнения предпочтений решений. Практически уточнение предпочтений решений приводит лишь к некоторому сужению множества эффективных решений. Ожидать получения единственного оптимального решения на основе уточнения предпочтений маловероятно.

Информация о свойствах функции группового предпочтения должна отражать ее зависимость от индивидуальных предпочтений членов группового ЛПР или от компонентов вектора характеристик решений в случае многокритериальной задачи.

На практике часто предполагается линейная зависимость функции группового выбора от индивидуальных предпочтений . В общей форме эти предпочтения описываются коэффициентами важности решений β_{is} , где i – номер решения , s – номер члена группового ЛПР или номер показателя качества решения (в случае векторной оптимизации). Используя коэффициенты важности решений , представим линейную функцию группового предпочтения в виде

$$F(\beta_{is}) = \sum_{s=1}^{d} k_s \beta_{is},$$

где k_s - коэффициенты весов членов группового ЛПР (в случае векторной оптимизации k_s - коэффициенты весов показателей); d- количество членов в групповом ЛПР (количество показателей).

При измерении предпочтений решений в количественных шкалах коэффициенты важности решений β_{is} равны

$$\beta_{is} = f_s(\mathrm{Y}_i) ,$$

поэтому линейная функция группового предпочтения может быть записана в виде :

$$F(f) = \sum_{s=1}^{d} k_s f_s(\mathrm{Y}_i) .$$

Представление функции группового выбора в данной форме и значения коэффициентов весов k_s – это новая информация, которая должна быть получена от ЛПР и экспертов. С использованием этой информации определение оптимального решения производится максимизацией этой суммы по всем эффективным решениям:

$$\mathrm{Y}^* \Leftarrow \max_i \sum_{s=1}^{d} k_s f_s(\mathrm{Y}_i)$$

Существуют методы, которые позволяют определять оптимальное решение при наличии информации о полном или частичном упорядочении коэффициентов весов и предпочтений решений.

Для получения информации о коэффициентах относительной важности членов группового ЛПР или показателей (в случае многокритериальной задачи) целесообразно использовать метод экспертных оценок.

Контрольные вопросы к главе 5

1. Перечислите и охарактеризуйте последовательные стадии выбора решения.
2. Что такое “допустимые решения”?
3. Что такое “эффективные решения”?
4. Каким показателем оценивается степень сужения множества допустимых решений до множества эффективных решений?
5. Какие существуют пути выбора единственного решения и в каких случаях они возможны?
6. Назовите виды стратегий индивидуального выбора решения и охарактеризуйте их.
7. Как взаимосвязаны цели, критерии целей и стратегии выбора решения.
8. Какие критерии индивидуального выбора решения соответствуют различным стратегиям выбора?
9. Охарактеризуйте критерии индивидуального выбора решения.
10. Что понимается под групповым выбором решения?
11. В чем заключается содержание проблемы группового выбора?
12. Сформулируйте постановку задачи группового выбора.
13. Назовите принципы группового выбора и охарактеризуйте их.
14. Что такое “V-оптимальное решение”?
15. Какие различают типы отношений между коалициями? Каково их содержание?
16. Как осуществляется многокритериальный выбор решений?
17. Как может быть осуществлен выбор единственного решения при групповом ЛПР?