

## Раздел 1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

### 1.1. Элементы теории вероятностей

*Закон распределения* случайной величины – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан:

- *аналитически* в виде математического выражения;
- *таблично* в виде ряда распределения;
- *графически* в виде многоугольника распределения.

Закон распределения непрерывной случайной величины может быть задан в виде:

- *функции распределения*  $F(x)$  случайной величины  $X$ , представляющей собой *вероятность* того, что случайная величина  $X$  примет значение меньшее, чем некоторое заданное значение  $x$ :  $F(x) = P(X < x)$ ;

- *плотности распределения*  $f(x)$ , определяемой как производная от функции распределения  $F(x)$  по  $x$ :  $f(x) = F'(x)$ .

Функция распределения однозначно определяется через плотность распределения как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

*Свойства функции распределения:*

- $F(x)$  – неубывающая функция: если  $x_j > x_i$ , то  $F(x_j) \geq F(x_i)$ ;
- функция распределения принимает значения от 0 до 1, причём:  $F(-\infty) = 0$  и  $F(+\infty) = 1$ .

*Свойства плотности распределения:*

- плотность распределения принимает только неотрицательные значения:  $f(x) \geq 0$ ;

- площадь на графике, ограниченная плотностью распределения и осью абсцисс, всегда равна единице:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

**Числовые характеристики случайных величин:**

- *начальные*  $\alpha_s[X]$  *моменты:*

$$\alpha_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^s p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx & \text{– для непрерывной случайной величины;} \end{cases} \quad (1)$$

- *центральные*  $\beta_s[X]$  *моменты:*

$$\beta_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^s p_i & - \text{ для дискретной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^s f(x) dx & - \text{ для непрерывной величины.} \end{cases} \quad (2)$$

**Первый начальный момент** случайной величины  $X$  называется *математическим ожиданием* и характеризует *среднее значение* случайной величины:

$$M[X] = \alpha_1[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i p_i & - \text{ для дискретной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & - \text{ для непрерывной величины.} \end{cases} \quad (3)$$

**Второй начальный момент**  $\alpha_2[X]$  случайной величины  $X$  характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно начала координат*.

**Второй центральный момент** называется *дисперсией* случайной величины:  $D[X] = \beta_2[X]$  и характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно математического ожидания*:

$$D[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 p_i & - \text{ для дискретной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx & - \text{ для непрерывной величины.} \end{cases} \quad (4)$$

Дисперсия и второй начальный момент связаны зависимостью

$$D[X] = \alpha_2[X] - (M[X])^2. \quad (5)$$

**Среднеквадратическое отклонение**  $\sigma[X]$  – характеристика *разброса*, *размерность* которой совпадает с *размерностью* случайной величины:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \quad (6)$$

**Коэффициент вариации**  $\nu[X]$  – *безразмерная* характеристика *разброса* случайных величин, определенных в области положительных значений:

$$\nu[X] = \sigma[X] / M[X] \quad (M[X] > 0). \quad (7)$$

В моделях дискретных систем наиболее широко применяются следующие **законы распределений случайных величин**:

- *распределение Пуассона* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где  $a$  – параметр распределения ( $a > 0$ );

- *геометрическое распределение* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \rho^k (1 - \rho) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где  $\rho$  – параметр распределения ( $0 < \rho < 1$ );

- *равномерное распределение* (непрерывный закон) с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b; \\ 0 & \text{при } x > b; \end{cases} \quad (10)$$

- *экспоненциальное распределение* (непрерывный закон) с функцией и плотностью

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \quad f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad (11)$$

где  $\alpha > 0$  – параметр распределения;  $x \geq 0$ ;  $\nu_{\text{эксн}}[X] = 1$ .

- *распределение Эрланга  $k$ -го порядка* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^i}{i!}; \quad f_k(x) = \frac{\alpha (\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x}, \quad (12)$$

где  $\alpha$  и  $k$  – параметры распределения ( $\alpha \geq 0$ ;  $k = 1, 2, \dots$ );  $x \geq 0$ ;

$\nu_{\text{Эк}}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$ ; математическое ожидание распределения Эрланга зависит от значения параметра  $k$ ;

- *нормированное распределение Эрланга* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\alpha x)^i}{i!}; \quad f_k(x) = \frac{k\alpha (k\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\alpha x}; \quad (13)$$

коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга также меньше или равен единице:  $\nu_{\text{нЭк}}[X] = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$ , но математическое ожидание не зависит от значения параметра  $k$ ;

- *гипоэкспоненциальное распределение* (непрерывный закон), преобразование Лапласа которого определяется как:

$$F^*(s) = \prod_{i=1}^k F_i^*(s) = \prod_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\alpha_i + s} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 + s x_i},$$

где  $F_i^*(s) = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + s} = \frac{1}{1 + s x_i}$  – преобразование Лапласа экспоненциального распределения ( $i$ -й составляющей) с параметром  $\alpha_i$  и математическим ожиданием  $x_i = 1/\alpha_i$ ;

математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации гипоэкспоненциального распределения равны:

$$M_k = \sum_{i=1}^k x_i; \quad D_k = \sum_{i=1}^k x_i^2; \quad \nu_k = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} / \sum_{i=1}^k x_i, \quad (14)$$

причём коэффициент вариации  $\nu_k$  гипоекспоненциального распределения может принимать любые значения в интервале  $(0; 1)$ , в том числе, в отличие от распределения Эрланга, нецелочисленные значения;

- *гиперэкспоненциальное распределение* (непрерывный закон):

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^n q_i (1 - e^{-\alpha_i x}) = 1 - \sum_{i=1}^n q_i e^{-\alpha_i x}; \\ f(x) &= \sum_{i=1}^n q_i \alpha_i e^{-\alpha_i x} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Для аппроксимации реальных распределений по двум первым моментам – математическому ожиданию  $t$  и коэффициенту вариации  $\nu$  – могут использоваться следующие аппроксимирующие распределения:

- если коэффициент вариации случайной величины меньше единицы ( $0 < \nu < 1$ ) – *гипоекспоненциальное распределение*, параметры которого рассчитываются по формулам:

$$k \geq \frac{1}{\nu^2}; \quad t_1 = \frac{t}{k} \left[ 1 + \sqrt{\frac{k_2}{k_1} (k\nu^2 - 1)} \right]; \quad t_2 = \frac{t}{k} \left[ 1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2} (k\nu^2 - 1)} \right]; \quad (16)$$

- если коэффициент вариации временного интервала больше единицы ( $\nu > 1$ ) – *гиперэкспоненциальное распределение*, параметры которого рассчитываются по формулам:

$$q \leq \frac{2}{1 + \nu^2}; \quad t_1 = \left[ 1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q} (\nu^2 - 1)} \right] t; \quad t_2 = \left[ 1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)} (\nu^2 - 1)} \right] t. \quad (17)$$

## 1.2. Параметры и характеристики моделей массового обслуживания

Ниже рассматриваются модели массового обслуживания, представляющие собой системы (СМО) и сети (СеМО) массового обслуживания.

### 1.2.1. СМО с однородным потоком заявок

Для компактного описания систем массового обслуживания (СМО) используются обозначения в виде  $A/B/N/L$ , где  $A$  и  $B$  – задают законы распределений соответственно интервалов времени между моментами поступления заявок и длительностей обслуживания в приборе;  $N$  – число обслуживающих приборов в системе;  $L$  – число мест в накопителе.

Для описания СМО, в простейшем случае, необходимо задать следующие **параметры**:

- количество обслуживающих приборов  $K$ ;
- количество  $k$  и емкости накопителей  $E_j$  ( $j = \overline{1, k}$ );
- количество поступающих в систему классов заявок  $H$ ;
- интенсивность  $\lambda_i$  потока и коэффициент вариации  $\nu_{a_i}$  интервалов

времени между поступающими в систему заявками класса  $i = \overline{1, H}$ ;

- среднее значение  $b_i$  и коэффициент вариации  $\nu_{b_i}$  длительности обслуживания заявок класса  $i = \overline{1, N}$ ;

- дисциплина буферизации и дисциплина обслуживания заявок.

В *режиме перегрузки*, когда система не справляется с нагрузкой, характеристики функционирования СМО с накопителем неограниченной ёмкости с течением времени растут неограниченно.

Для того чтобы в такой СМО не было перегрузок, необходимо, чтобы нагрузка системы была меньше, чем число обслуживающих приборов, или, что то же самое, загрузка системы была строго меньше единицы. В СМО с накопителем ограниченной ёмкости перегрузки не приводят к неустойчивому режиму.

В качестве основных **характеристик СМО** с однородным потоком заявок используются:

- *нагрузка системы*:

$$\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b}; \quad (18)$$

- *вероятность потери* заявок (для СМО с накопителем ограниченной ёмкости):

$$\pi_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_n(T)}{N(T)}; \quad (19)$$

- *вероятность того, что заявка будет обслужена*, т.е. не потеряна (для СМО с накопителем ограниченной ёмкости):

$$\pi_o = (1 - \pi_n); \quad (20)$$

- *загрузка системы*:

$$\boxed{\rho = \min\left(\frac{(1 - \pi_n)y}{K}; 1\right)}; \quad (21)$$

- *коэффициент простоя системы*:

$$\boxed{\eta = 1 - \rho}; \quad (22)$$

- *производительность системы*:

$$\lambda' = \pi_o \lambda = (1 - \pi_n) \lambda; \quad (23)$$

- *интенсивность потока потерянных заявок*:

$$\lambda'' = \pi_n \lambda = (1 - \pi_o) \lambda; \quad (24)$$

- *среднее время ожидания* заявок в очереди:

$w = ?$  (подлежит определению для каждой конкретной СМО);

- *среднее время пребывания* заявок в системе:

$$\boxed{u = w + b}; \quad (25)$$

- *средняя длина очереди* заявок:

$$\boxed{l = \lambda' w}; \quad (26)$$

- *среднее число заявок* в системе:

$$\boxed{m = \lambda' u}. \quad (27)$$

### 1.2.2. СМО с неоднородным потоком заявок

Для СМО с неоднородным потоком заявок определяются две группы характеристик обслуживания заявок: характеристики по каждому классу заявок по формулам (18) – (27) и характеристики суммарного (объединенного) потока заявок:

- суммарная интенсивность поступления заявок в систему (интенсивность суммарного потока):

$$\Lambda = \sum_{i=1}^H \lambda_i; \quad (28)$$

- суммарная нагрузка  $Y$  и суммарная загрузка  $R$  системы:

$$Y = \sum_{i=1}^H y_i; \quad (29)$$

$$R = \min\left(\sum_{i=1}^H \rho_i; 1\right), \quad (30)$$

где  $\lambda_i$ ,  $y_i$  и  $\rho_i$  – соответственно интенсивность поступления, нагрузка и загрузка, создаваемые заявками класса  $i$  ( $i = \overline{1, H}$ );  $H$  – количество классов заявок; причем условие отсутствия перегрузок в СМО с неоднородным потоком заявок и накопителем неограниченной ёмкости имеет вид:

$$R < 1; \quad (31)$$

- коэффициент простоя системы:

$$\eta = 1 - R; \quad (32)$$

- среднее время ожидания  $W$  и среднее время пребывания  $U$  заявок объединённого потока в системе:

$$W = \sum_{i=1}^H \xi_i w_i; \quad U = \sum_{i=1}^H \xi_i u_i, \quad (33)$$

где  $\xi_i = \lambda_i / \Lambda$  – коэффициент, учитывающий долю заявок класса  $i$  в суммарном потоке, который может трактоваться как вероятность того, что поступившая в систему заявка принадлежит классу  $i$ ;

- суммарная длина очереди и суммарное число заявок в системе:

$$L = \sum_{i=1}^H l_i; \quad M = \sum_{i=1}^H m_i. \quad (34)$$

Для характеристик объединённого (суммарного) потока справедливы те же фундаментальные соотношения (25) – (27), что и для однородного потока:

$$U = W + B; \quad L = \Lambda W; \quad M = \Lambda U,$$

где  $B$  – среднее время обслуживания любой заявки суммарного потока:

$$B = \sum_{i=1}^H \xi_i b_i.$$

### 1.2.3. СеМО с однородным потоком заявок

Для описания линейных разомкнутых и замкнутых однородных экспоненциальных СеМО необходимо задать следующие параметры:

- число узлов в сети  $n$ ;
- число обслуживающих приборов в узлах сети  $K_1, \dots, K_n$ ;
- матрицу вероятностей передач  $\mathbf{P} = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \dots, n]$ ;
- интенсивность  $\lambda_0$  источника заявок, поступающих в РСеМО, или число заявок  $M$ , циркулирующих в ЗСеМО;
- средние длительности обслуживания заявок в узлах сети  $b_1, \dots, b_n$ .

Условие отсутствия перегрузок в разомкнутой СеМО предполагает отсутствие перегрузок в каждом из узлов сети. В замкнутой СеМО перегрузки не возникают.

**Характеристики СеМО** делятся на узловые и сетевые.

Состав узловых характеристик СеМО, работающей в стационарном режиме, такой же, как и для СМО.

На основе узловых характеристик рассчитываются средние значения сетевых характеристик СеМО:

- суммарная нагрузка и загрузка:

$$Y = \sum_{j=1}^n y_j; \quad R = \sum_{j=1}^n \rho_j; \quad (35)$$

- среднее суммарное число заявок во всех очередях сети:

$$L = \sum_{j=1}^n l_j; \quad (36)$$

где  $l_j$  - средняя длина очереди и  $m_j$  - среднее число заявок в узле  $j$ ;

- среднее суммарное число заявок в разомкнутой сети (во всех узлах):

$$M = \sum_{j=1}^n m_j; \quad (37)$$

- среднее время ожидания и пребывания заявок в сети:

$$W = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j; \quad U = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j; \quad (38)$$

где  $w_j$  и  $u_j$  - соответственно среднее время ожидания и среднее время пребывания заявок в узле  $j$ ;  $\alpha_j = \lambda_j / \lambda_0$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – коэффициент передачи для узла  $j$ , показывающий среднее число попаданий заявки в узел  $j$  за время ее нахождения в сети.

- производительность замкнутой СеМО:

$$\lambda_0 = \frac{M}{U}. \quad (39)$$

Сетевые характеристики СеМО связаны между собой такими же фундаментальными соотношениями (25) – (27), что и характеристики СМО.

Для неоднородной СеМО перечисленные характеристики определяются как для каждого класса в отдельности, так и для объединенного (суммарного) потока заявок.

### 1.3. Аналитические методы моделирования

#### 1.3.1. Одноканальная экспоненциальная СМО М/М/1

Средние времена ожидания и пребывания заявок в СМО М/М/1:

$$\boxed{w = \frac{\rho b}{1 - \rho}} \quad \text{и} \quad \boxed{u = \frac{b}{1 - \rho}}, \quad (40)$$

где  $\rho = \lambda b < 1$  – загрузка системы;  $\lambda$  – интенсивность поступления заявок в систему;  $b$  – средняя длительность обслуживания заявок в приборе.

#### 1.3.2. Одноканальная неэкспоненциальная СМО М/G/1

Среднее время ожидания заявок (*формула Поллачека-Хинчина*):

$$\boxed{w = \frac{\lambda b^2 (1 + v_b^2)}{2(1 - \rho)}}, \quad (41)$$

где  $v_b$  – коэффициент вариации длительности обслуживания.

#### 1.3.3. Многоканальная СМО М/М/К

Среднее время ожидания заявок в СМО:

$$w = \frac{Pb}{K(1 - \rho)}, \quad (42)$$

где  $\rho = \frac{\lambda b}{K}$  – загрузка системы;  $P$  – вероятность того, что все  $K$  приборов заняты обслуживанием заявок:

$$P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1 - \rho)} P_0,$$

где  $P_0$  – вероятность простоя многоканальной СМО, то есть вероятность того, что в системе нет заявок:

$$P_0 = \left[ \frac{(K\rho)^K}{K!(1 - \rho)} + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K\rho)^i}{i!} \right]^{-1}.$$

#### 1.3.4. Одноканальная СМО с беспriorитетной дисциплиной обслуживания заявок

Средние времена ожидания одинаковы для всех классов заявок:



$$w_k^{\text{БП}} = w^{\text{БП}} = \frac{\sum_{i=1}^H \lambda_i b_i^2 (1 + v_{b_i}^2)}{2(1 - R)} \quad (k = 1, \dots, H), \quad (43)$$

где  $R = \sum_{i=1}^H \rho_i = \sum_{i=1}^H \lambda_i b_i$  – суммарная загрузка системы ( $R < 1$ ).

### 1.3.5. Одноканальная СМО с дисциплиной обслуживания с относительными приоритетами (ОП)

Среднее время ожидания заявок  $k$ -го класса:

$$w_k^{\text{ОП}} = \frac{\sum_{i=1}^H \lambda_i b_i^2 (1 + v_{b_i}^2)}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} \quad (k = 1, \dots, H), \quad (44)$$

где  $R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i b_i$  и  $R_k = \sum_{i=1}^k \rho_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i$  – суммарные загрузки, создаваемые заявками, которые имеют приоритет не ниже  $(k-1)$  и  $k$  соответственно.

### 1.3.6. Одноканальная СМО с дисциплиной обслуживания с абсолютными приоритетами (АП)

Среднее время ожидания заявок  $k$ -го класса:

$$w_k^{\text{АП}} = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i (1 + v_{b_i}^2)}{2(1 - R_{k-1})(1 - R_k)} + \frac{R_{k-1} b_k}{1 - R_{k-1}} \quad (k = 1, \dots, H), \quad (45)$$

где  $R_{k-1}$  и  $R_k$  – суммарные загрузки системы со стороны заявок, которые имеют приоритет не ниже  $(k-1)$  и  $k$  соответственно.

**Закон сохранения** времени ожидания:

$$\boxed{\sum_{i=1}^H \rho_i w_i = C_w = \underset{\text{ДО}}{\text{Const}}}, \quad (46)$$

при следующих условиях:

- система без потерь;
- система простаивает лишь при отсутствии в системе заявок;
- при наличии прерываний длительность обслуживания прерванных заявок распределена по экспоненциальному закону;
- все поступающие потоки заявок – простейшие, и длительность обслуживания не зависит от параметров потоков заявок.

Значение константы  $C_w$  может быть вычислено в предположении о беспriorитетной дисциплине обслуживания:

$$C_w = \frac{R}{2(1 - R)} \sum_{i=1}^H \lambda_i b_i^2 (1 + v_{b_i}^2).$$

### 1.3.7. Линейные разомкнутые однородные экспоненциальные СеМО

Параметры:

- число узлов:  $n$ ;
- число обслуживающих приборов в узлах:  $K_1, \dots, K_n$ ;
- матрицу вероятностей передач:  $\mathbf{P} = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \dots, n]$ ;
- интенсивность  $\lambda_0$  источника заявок, поступающих в РСемо;
- средние длительности обслуживания заявок в узлах:  $b_1, \dots, b_n$ .

Условие отсутствия перегрузок в РСемо:

$$\lambda_0 < \min \left( \frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \dots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n} \right). \quad (47)$$

Расчет характеристик базируется на эквивалентном преобразовании сети, позволяющем представить разомкнутую экспоненциальную СеМО в виде совокупности независимых экспоненциальных СМО типа М/М/К, и проводится в три этапа:

1) расчет интенсивностей потоков заявок в узлах РСемо ( $j = \overline{1, n}$ ):

$$\lambda_j = \alpha_j \lambda_0, \quad (48)$$

где  $\alpha_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – коэффициенты передач, определяемые путём решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^n p_{ij} \alpha_i \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (49)$$

причем  $\alpha_0 = 1$ ;

2) расчет узловых характеристик:

- нагрузка в узле  $j$ , показывающая среднее число занятых приборов:

$$y_j = \lambda_j b_j;$$

- загрузка узла  $j$ :  $\rho_j = \min(y_j / K_j; 1)$ , где  $K_j$  – число

обслуживающих приборов в узле  $j$ ;

- коэффициент простоя узла:  $\pi_j = 1 - \rho_j$ ;

- время ожидания заявок в узле:  $w_j$ , рассчитываемое по формулам

(40) или (41) соответственно для одноканальных и многоканальных СМО;

- время пребывания заявок в узле:  $u_j = w_j + b_j$ ;

- длина очереди заявок:  $l_j = \lambda_j w_j$ ;

- число заявок в узле (в очереди и на обслуживании в приборе):

$$m_j = \lambda_j u_j.$$

3) расчет сетевых характеристик по формулам (35) – (38).

### 1.3.8. Линейные замкнутые однородные экспоненциальные СеМО

Параметры:

- число узлов:  $n$ ;
- число обслуживающих приборов в узлах:  $K_1, \dots, K_n$ ;
- матрица вероятностей передач:  $\mathbf{P} = [p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \dots, n]$ ;
- число заявок  $M^*$ , циркулирующих в ЗСеМО;
- средние длительности обслуживания заявок в узлах:  $b_1, \dots, b_n$ .

В замкнутых СеМО всегда существует установившийся режим.

Расчет характеристик функционирования замкнутых СеМО с одноканальными узлами проводится с использованием метода средних значений в три этапа:

1) расчет коэффициентов передач в узлах замкнутой СеМО путём решения системы линейных алгебраических уравнений (39) относительно  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  с учётом того, что  $(\alpha_0 = 1)$ :

2) расчет характеристик ЗСеМО с использованием следующих рекуррентных соотношений для значений  $M = 1, 2, \dots, M^*$ :

$$\left. \begin{aligned} u_i(M) &= b_i [1 + m_i(M-1)]; \\ U(M) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(M); \\ \lambda_0(M) &= \frac{M}{U(M)}; \\ m_i(M) &= \alpha_i \lambda_0(M) u_i(M) \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

где  $M^*$  - заданное число заявок в замкнутой сети;  $m_i(0) = 0$ ;

3) расчёт остальных узловых и сетевых характеристик (Загрузок, времён ожидания, длин очередей заявок и т.д.) замкнутой СеМО по формулам (35), (36), (38).

### 1.4. Марковские модели

Параметры Марковской модели:

- перечень состояний  $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$ ;
- матрица переходов, в виде:
  - матрицы вероятностей переходов (для процессов с дискретным временем)  $\mathbf{Q} = [q_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}]$ , элементы которой удовлетворяют условиям:

$$0 \leq q_{ij} \leq 1; \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} = 1 \quad (i, j = \overline{1, n})$$

- матрицы интенсивностей переходов (для процессов с непрерывным временем)  $\mathbf{G} = [g_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}]$ , в которой

интенсивность перехода  $g_{ij}$  определяется как предел отношения вероятности перехода  $P_{ij}(\Delta\tau)$  из состояния  $E_i$  в состояние  $E_j$  за промежуток времени  $\Delta\tau$  к длине этого промежутка:

$$g_{ij} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \quad (i, j = \overline{1, n}; i \neq j),$$

а диагональные элементы определяются из условия:

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1, n});$$

- начальные вероятности  $p_1(0), \dots, p_n(0)$ .

Изучение случайных процессов заключается в определении вероятностей состояний  $p_1(t), \dots, p_n(t)$ , которые могут быть представлены стохастическим вектором:

$$P(t) = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\},$$

причем

$$0 \leq p_i(t) \leq 1; \quad \sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Вектор состояний  $P(t) = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\}$  является основной характеристикой Марковского случайного процесса.

Для Марковского процесса с дискретным временем, обладающего эргодическим свойством, стационарные вероятности состояний определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i q_{ij} \quad (j = \overline{1, n}),$$

которая совместно с нормировочным условием  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  образует систему, обладающую единственным решением.

Для Марковского процесса с непрерывным временем, обладающего эргодическим свойством, стационарные вероятности состояний определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n p_i g_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

которая совместно с нормировочным условием образует систему, обладающую единственным решением.

### 1.5. Имитационное моделирование в среде GPSS World

Элементы языка GPSS World:

- алфавитно-цифровые символы;
- имена;

- метки;
- переменные;
- числа;
- системные числовые атрибуты (СЧА);
- арифметические операторы;
- операторы отношения;
- логические операторы;
- выражения, процедуры.

Объекты GPSS-модели:

- основные объекты (операторы и транзакты);
- оборудование (приборы или одноканальные устройства, памяти или многоканальные устройства, очереди, логические ключи);
- числовые объекты (ячейки, матрицы, переменные, функции, таблицы);
- генераторы случайных чисел (встроенные, библиотечные, табличные);
- групповые списки (списки пользователя, числовые группы, группы транзактов);
- потоки данных.

В GPSS World имеется 53 **операторов блоков** (исполняемых операторов) , основными из которых для построения моделей массового обслуживания являются:

- GENERATE (генерирование транзактов);
- ADVANCE (задержка транзакта на заданное время);
- TERMINATE (удаление транзактов из модели);
- SEIZE (занятие транзактом прибора);
- RELEASE (удаление транзакта из прибора);
- ENTER (вход транзакта в многоканальное устройство);
- LEAVE (удаление транзакта из многоканального устройства);
- QUEUE (фиксация момента поступления транзакта в очередь);
- DEPART (фиксация момента удаления транзакта из очереди);
- TEST (поверка значения СЧА и передача активного транзакта в блок, отличный от последующего);
- TRANSFER (передача транзакта в блок, отличный от последующего);
- GATE (изменение маршрута движения транзактов в зависимости от состояния некоторого объекта);
- PRIORITY (изменение уровня приоритета активного транзакта);
- PREEMPT (захват прибора поступившим транзактом);
- RETURN (освобождение прибора активным транзактом);
- LOGIC (изменение состояния логического ключа);

- ASSIGN (назначение и изменение параметра транзакта);
- MARK (запись значения абсолютного времени в качестве одного из параметров активного транзакта);
- TABULATE (занесение значений в таблицу – обновление статистики).

В GPSS World используются 24 **команды** (описания и управления), в том числе:

- FUNCTION (описание функции);
- TABLE (описание таблицы);
- QTABLE (описание таблицы очереди);
- STORAGE (описание ёмкости многоканального устройства);
- VARIABLE (описание арифметической переменной);
- CLEAR (сброс процесса моделирования в исходное состояние);
- CONTINUE (возобновление прерванного процесса моделирования);
- HALT (прерывает процесс моделирования и очищает очередь команд);
- INCLUDE (вставка в исходную модель и трансляция файла с операторами);
- REPORT (немедленное создание отчета);
- RESET (сброс в ноль статистики и атрибутов системы);
- SHOW (отображает значение выражения в строке состояния окна «Model»);
- START (запуск процесса моделирования);
- STEP (остановка процесса моделирования по определенному количеству входов транзактов в блоки);
- STOP (устанавливает или снимает условие прерывания моделирования).