Раздел 1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Элементы теории вероятностей

Закон распределения случайной величины – соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан:

- *аналитически* в виде математического выражения;
- *таблично* в виде ряда распределения;
- *графически* в виде многоугольника распределения.

Закон распределения непрерывной случайной величины может быть задан в виде:

- *функции распределения* $F(x)$ случайной величины X, представляющей собой *вероятность* того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем некоторое заданное значение x: $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$;
- *плотности распределения* $f(x)$, определяемой как производная от функции распределения $F(x)$ по x: $f(x) = F'(x)$.

Функция распределения однозначно определяется через плотность распределения как

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Свойства функции распределения:

- $F(x)$ – неубывающая функция: если $x_j > x_i$, то $F(x_j) \geq F(x_i)$;
- функция распределения принимает значения от 0 до 1 , причём: $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

Свойства плотности распределения:

- плотность распределения принимает только неотрицательные значения: $f(x) \geq 0$;
- площадь на графике, ограниченная плотностью распределения и осью абсцисс, всегда равна единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Числовые характеристики случайных величин:

- *начальные* $\alpha_s[X]$ *моменты:*

$$\alpha_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,s}\, p_i & \text{– для дискретной случайной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,dx & \text{– для непрерывной случайной величины;} \end{cases} \qquad (1)$$

- *центральные* $\beta_s[X]$ *моменты:*

$$\beta_s[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X])^s \, p_i & \text{– для дискретной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^s \, f(x)\, dx & \text{– для непрерывной величины.} \end{cases} \qquad (2)$$

Первый начальный момент случайной величины X называется *математическим ожиданием* и характеризует *среднее значение* случайной величины:

$$\boxed{M[X] = \alpha_1[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i & \text{– для дискретной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx & \text{– для непрерывной величины.} \end{cases}} \qquad (3)$$

Второй начальный момент $\alpha_2[X]$ случайной величины X характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно начала координат*.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины: $\mathrm{D}[X] = \beta_2[X]$ и характеризует *разброс* значений случайной величины *относительно математического ожидания*:

$$\boxed{\mathrm{D}[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{M}[X])^2 \, p_i & \text{– для дискретной величины;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^2 \, f(x)\, dx & \text{– для непрерывной величины.} \end{cases}} \qquad (4)$$

Дисперсия и второй начальный момент связаны зависимостью

$$\mathrm{D}[X] = \alpha_2[X] - (\mathrm{M}[X])^2. \qquad (5)$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma[X]$ – характеристика *разброса, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины*:

$$\boxed{\sigma[X] = \sqrt{\mathrm{D}[X]}}. \qquad (6)$$

Коэффициент вариации $\nu[X]$ – *безразмерная* характеристика *разброса* случайных величин, определенных в области положительных значений:

$$\boxed{\nu[X] = \sigma[X] / \mathrm{M}[X]} \qquad (\mathrm{M}[X] > 0). \qquad (7)$$

В моделях дискретных систем наиболее широко применяются следующие **законы распределений случайных величин**:

- *распределение Пуассона* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (8)$$

где a – параметр распределения ($a > 0$);

- *геометрическое распределение* (дискретный закон):

$$p_k = P(X = k) = \rho^k (1-\rho) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где ρ – параметр распределения ($0 < \rho < 1$);

- *равномерное распределение* (непрерывный закон) с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a < x < b; \\ 0 & \text{при} \quad x > b; \end{cases} \tag{10}$$

- *экспоненциальное распределение* (непрерывный закон) с функцией и плотностью

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}; \qquad f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \tag{11}$$

где $\alpha > 0$ – параметр распределения; $x \ge 0$; $\nu_{эксп}[X] = 1$.

- *распределение Эрланга k-го порядка* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha x)^i}{i!}; \qquad f_k(x) = \frac{\alpha (\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha x}, \tag{12}$$

где α и k – параметры распределения $(\alpha \ge 0;\ k = 1, 2, \ldots)$; $x \ge 0$; $\nu_{Э_k}[X] = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \le 1$*; математическое ожидание распределения Эрланга зависит от значения параметра k*;

- *нормированное распределение Эрланга* (непрерывный закон) с функцией и плотностью:

$$F_k(x) = 1 - e^{-k\alpha x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\alpha x)^i}{i!}; \qquad f_k(x) = \frac{k\alpha (k\alpha x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\alpha x}; \tag{13}$$

коэффициент вариации нормированного распределения Эрланга также меньше или равен единице: $\nu_{нЭ_k}[X] = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \le 1$, но математическое ожидание *не зависит* от значения параметра k;

- *гипоэкспоненциальное распределение* (непрерывный закон), преобразование Лапласа которого определяется как:

$$F^*(s) = \prod_{i=1}^{k} F_i^*(s) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha_i + s} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 + s x_i},$$

где $F_i^*(s) = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_i + s} = \dfrac{1}{1 + s x_i}$ – преобразование Лапласа экспоненциального распределения (i-й составляющей) с параметром α_i и математическим ожиданием $x_i = 1/\alpha_i$;

математическое ожидание, дисперсия и коэффициент вариации гипоэкспоненциального распределения равны:

$$\mathrm{M}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i; \qquad D_k = \sum_{i=1}^{k} x_i^2; \qquad \nu_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \Big/ \sum_{i=1}^{k} x_i, \tag{14}$$

причём коэффициент вариации ν_k гипоэкспоненциального распределения может принимать любые значения в интервале (0; 1), в том числе, в отличие от распределения Эрланга, нецелочисленные значения;

- *гиперэкспоненциальное распределение* (непрерывный закон):

$$\left.\begin{aligned} &F(x)=\sum_{i=1}^{n} q_i(1-e^{-\alpha_i x})=1-\sum_{i=1}^{n} q_i e^{-\alpha_i x};\\ &f(x)=\sum_{i=1}^{n} q_i \alpha_i e^{-\alpha_i x} \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Для **аппроксимации реальных распределений по двум первым моментам – математическому ожиданию t и коэффициенту вариации** ν – могут использоваться следующие аппроксимирующие распределения:

- если коэффициент вариации случайной величины меньше единицы $(0 < \nu < 1)$ – *гипоэкспоненциальное распределение*, параметры которого рассчитываются по формулам:

$$k \ge \frac{1}{\nu^2}; \quad t_1=\frac{t}{k}\left[1+\sqrt{\frac{k_2}{k_1}\left(k\nu^2-1\right)}\right]; \quad t_2=\frac{t}{k}\left[1-\sqrt{\frac{k_1}{k_2}\left(k\nu^2-1\right)}\right]; \tag{16}$$

- если коэффициент вариации временн*о*го интервала больше единицы $(\nu > 1)$ – *гиперэкспоненциальное распределение*, параметры которого рассчитываются по формулам:

$$q \le \frac{2}{1+\nu^2}; \quad t_1=\left[1+\sqrt{\frac{1-q}{2q}(\nu^2-1)}\right]t; \quad t_2=\left[1-\sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(\nu^2-1)}\right]t. \tag{17}$$

1.2. Параметры и характеристики моделей массового обслуживания

Ниже рассматриваются модели массового обслуживания, представляющие собой системы (СМО) и сети (СеМО) массового обслуживания.

1.2.1. СМО с однородным потоком заявок

Для компактного описания систем массового обслуживания (СМО) используются обозначения в виде **A**/**B**/**N**/**L** , где **A** и **B** – задают законы распределений соответственно интервалов времени между моментами поступления заявок и длительностей обслуживания в приборе; **N** – число обслуживающих приборов в системе; **L** – число мест в накопителе.

Для описания **СМО**, в простейшем случае, необходимо задать следующие **параметры**:

- количество обслуживающих приборов *K*;
- количество k и емкости накопителей E_j $(j=\overline{1,k})$;
- количество поступающих в систему классов заявок *H*;
- интенсивность λ_i потока и коэффициент вариации ν_{a_i} интервалов времени между поступающими в систему заявками класса $i=\overline{1,H}$;

- среднее значение b_i и коэффициент вариации ν_{b_i} длительности обслуживания заявок класса $i = \overline{1,H}$;
- дисциплина буферизации и дисциплина обслуживания заявок.

В *режиме перегрузки*, когда система не справляется с нагрузкой, характеристики функционирования СМО *с накопителем неограниченной емкости* с течением времени растут неограниченно.

Для того чтобы в такой СМО не было перегрузок, необходимо, чтобы нагрузка системы была меньше, чем число обслуживающих приборов, или, что то же самое, загрузка системы была строго меньше единицы. В СМО *с накопителем ограниченной ёмкости* перегрузки не приводят к неустановившемуся режиму.

В качестве основных **характеристик СМО** с однородным потоком заявок используются:

- *нагрузка* системы:

$$\boxed{y = \lambda / \mu = \lambda b}; \tag{18}$$

- *вероятность потери* заявок (для СМО с накопителем ограниченной ёмкости):

$$\pi_n = \lim_{T \to \infty} \frac{N_n(T)}{N(T)}; \tag{19}$$

- *вероятность того, что заявка будет обслужена*, т.е. не потеряна (для СМО с накопителем ограниченной ёмкости):

$$\pi_o = (1 - \pi_n); \tag{20}$$

- *загрузка* системы:

$$\boxed{\rho = \min\left(\frac{(1 - \pi_n) y}{K}; 1 \right)}; \tag{21}$$

- *коэффициент простоя* системы:

$$\boxed{\eta = 1 - \rho}; \tag{22}$$

- *производительность системы*:

$$\lambda' = \pi_o \lambda = (1 - \pi_n) \lambda; \tag{23}$$

- *интенсивность потока потерянных заявок*:

$$\lambda'' = \pi_n \lambda = (1 - \pi_o) \lambda; \tag{24}$$

- *среднее время ожидания* заявок в очереди:

$w = ?$ (подлежит определению для каждой конкретной СМО);

- *среднее время пребывания* заявок в системе:

$$\boxed{u = w + b}; \tag{25}$$

- *средняя длина очереди* заявок:

$$\boxed{l = \lambda' w}; \tag{26}$$

- *среднее число заявок* в системе:

$$\boxed{m = \lambda' u}. \tag{27}$$

1.2.2. СМО с неоднородным потоком заявок

Для **СМО с неоднородным потоком заявок** определяются две группы характеристик обслуживания заявок: характеристики *по каждому классу заявок* по формулам (18) – (27) и характеристики *суммарного (объединенного) потока* заявок:

- *суммарная интенсивность* поступления заявок в систему (интенсивность суммарного потока):

$$\boxed{\Lambda = \sum_{i=1}^{H} \lambda_i}; \tag{28}$$

- *суммарная нагрузка* Y и *суммарная загрузка* R системы:

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{H} y_i}; \tag{29}$$

$$\boxed{R = \min(\sum_{i=1}^{H} \rho_i ; 1)}, \tag{30}$$

где λ_i, y_i и ρ_i – соответственно интенсивность поступления, нагрузка и загрузка, создаваемые заявками класса i ($i = \overline{1, H}$); H – количество классов заявок; причем условие отсутствия перегрузок в СМО с неоднородным потоком заявок и накопителем неограниченной ёмкости имеет вид:

$$R < 1; \tag{31}$$

- *коэффициент простоя* системы:

$$\boxed{\eta = 1 - R}; \tag{32}$$

- *среднее время ожидания* W и *среднее время пребывания* U заявок объединённого потока в системе:

$$\boxed{W = \sum_{i=1}^{H} \xi_i w_i}; \qquad \boxed{U = \sum_{i=1}^{H} \xi_i u_i}, \tag{33}$$

где $\xi_i = \lambda_i / \Lambda$ – коэффициент, учитывающий долю заявок класса i в суммарном потоке, который может трактоваться как *вероятность того, что поступившая в систему заявка принадлежит классу* i;

- *суммарная длина очереди* и *суммарное число заявок в системе*:

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{H} l_i}; \qquad \boxed{M = \sum_{i=1}^{H} m_i}. \tag{34}$$

Для характеристик объединённого (суммарного) потока справедливы те же фундаментальные соотношения (25) – (27) , что и для однородного потока:

$$U = W + B; \qquad L = \Lambda W; \qquad M = \Lambda U,$$

где B – среднее время обслуживания любой заявки суммарного потока:

$$B = \sum_{i=1}^{H} \xi_i b_i .$$

1.2.3. СеМО с однородным потоком заявок

Для описания **линейных разомкнутых и замкнутых однородных экспоненциальных СеМО** необходимо задать следующие **параметры**:

- число узлов в сети n;
- число обслуживающих приборов в узлах сети $K_1,...,K_n$;
- матрицу вероятностей передач $\mathbf{P} = [\,p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \ldots, n]$;
- *интенсивность* λ_0 источника заявок, поступающих в РСеМО, или *число заявок* M, циркулирующих в ЗСеМО;
- средние длительности обслуживания заявок в узлах сети $b_1,...,b_n$.

Условие отсутствия перегрузок в разомкнутой СеМО предполагает отсутствие перегрузок в каждом из узлов сети. *В замкнутой СеМО перегрузки не возникают*.

Характеристики СеМО делятся на узловые и сетевые.

Состав узловых характеристик СеМО, работающей в стационарном режиме, такой же, как и для СМО.

На основе узловых характеристик рассчитываются средние значения *сетевых характеристик* СеМО:

- суммарная нагрузка и загрузка:

$$\boxed{Y = \sum_{j=1}^{n} y_j}; \qquad \boxed{R = \sum_{j=1}^{n} \rho_j}; \tag{35}$$

- среднее суммарное число заявок во всех очередях сети:

$$\boxed{L = \sum_{j=1}^{n} l_j}; \tag{36}$$

где l_j - средняя длина очереди и m_j - среднее число заявок в узле j;

- среднее суммарное число заявок в разомкнутой сети (во всех узлах):

$$\boxed{M = \sum_{j=1}^{n} m_j}; \tag{37}$$

- среднее время ожидания и пребывания заявок в сети:

$$\boxed{W = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j}; \qquad \boxed{U = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j}; \tag{38}$$

где w_j и u_j - соответственно среднее время ожидания и среднее время пребывания заявок в узле j; $\alpha_j = \lambda_j / \lambda_0$ $(j = \overline{1,n})$ – коэффициент передачи для узла j, показывающий среднее число попаданий заявки в узел j за время ее нахождения в сети.

- производительность замкнутой СеМО:

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{M}{U}}. \tag{39}$$

Сетевые характеристики СеМО связаны между собой такими же *фундаментальными соотношениями* (25) – (27), что и характеристики СМО.

Для **неоднородной СеМО** перечисленные характеристики определяются как для каждого класса в отдельности, так и для объединенного (суммарного) потока заявок.

1.3. Аналитические методы моделирования

1.3.1. Одноканальная экспоненциальная СМО M/M/1

Средние времена ожидания и пребывания заявок в СМО M/M/1:

$$\boxed{w = \frac{\rho b}{1-\rho}} \quad \text{и} \quad \boxed{u = \frac{b}{1-\rho}}, \tag{40}$$

где $\rho = \lambda b < 1$ – загрузка системы; λ – интенсивность поступления заявок в систему; b – средняя длительность обслуживания заявок в приборе.

1.3.2. Одноканальная неэкспоненциальная СМО M/G/1

Среднее время ожидания заявок (***формула Поллачека-Хинчина)*:**

$$\boxed{w = \frac{\lambda b^2 (1 + {\nu_b}^2)}{2(1-\rho)}}, \tag{41}$$

где ν_b – коэффициент вариации длительности обслуживания.

1.3.3. Многоканальная СМО M/M/K

Среднее время ожидания заявок в СМО:

$$w = \frac{Pb}{K(1-\rho)}\ , \tag{42}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda b}{K}$ – загрузка системы; P – вероятность того, что все K приборов заняты обслуживанием заявок:

$$P = \frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} P_0,$$

где P_0 – вероятность простоя многоканальной СМО, то есть вероятность того, что в системе нет заявок:

$$P_0 = \left[\frac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K\rho)^i}{i!} \right]^{-1}.$$

1.3.4. Одноканальная СМО с бесприоритетной дисциплиной обслуживания заявок

Средние времена ожидания одинаковы для всех классов заявок:

$$w_k^{\text{БП}} = w^{\text{БП}} = \frac{\sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^2 (1+\nu_{b_i}^2)}{2(1-R)} \qquad (k=1,\ldots,H), \tag{43}$$

где $R = \sum_{i=1}^{H} \rho_i = \sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i$ – суммарная загрузка системы ($R < 1$).

1.3.5. Одноканальная СМО с дисциплиной обслуживания с относительными приоритетами (ОП)

Среднее время ожидания заявок k-го класса:

$$w_k^{\text{ОП}} = \frac{\sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^2 (1+\nu_{bi}^2)}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} \qquad (k=1,\ldots,H), \tag{44}$$

где $R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i b_i$ и $R_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$ – суммарные загрузки, создаваемые заявками, которые имеют приоритет не ниже $(k-1)$ и k соответственно.

1.3.6. Одноканальная СМО с дисциплиной обслуживания с абсолютными приоритетами (АП)

Среднее время ожидания заявок k–го класса:

$$w_k^{\text{АП}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i (1+\nu_{b_i}^2)}{2(1-R_{k-1})(1-R_k)} + \frac{R_{k-1} b_k}{1-R_{k-1}} \qquad (k=1,\ldots,H), \tag{45}$$

где R_{k-1} и R_k – суммарные загрузки системы со стороны заявок, которые имеют приоритет не ниже $(k-1)$ и k соответственно.

Закон сохранения времени ожидания:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{H} \rho_i w_i = C_w = \underset{\text{ДО}}{Const}}, \tag{46}$$

при следующих условиях:

- система без потерь;
- система простаивает лишь при отсутствии в системе заявок;
- при наличии прерываний длительность обслуживания прерванных заявок распределена по экспоненциальному закону;
- все поступающие потоки заявок – простейшие, и длительность обслуживания не зависит от параметров потоков заявок.

Значение константы C_w может быть вычислено в предположении о бесприоритетной дисциплине обслуживания:

$$C_w = \frac{R}{2(1-R)} \sum_{i=1}^{H} \lambda_i b_i^2 (1+\nu_{b_i}^2).$$

1.3.7. Линейные разомкнутые однородные экспоненциальные СеМО

Параметры:

- *число узлов*: n;
- *число обслуживающих приборов* в узлах: $K_1,\ldots,K_n$;
- *матрицу вероятностей передач*: $\mathbf{P} = [\, p_{ij} \mid i, j = 0, 1, \ldots, n]$;
- *интенсивность* λ_0 источника заявок, поступающих в РСеМО;
- средние *длительности обслуживания* заявок в узлах: $b_1,\ldots,b_n$.

Условие отсутствия перегрузок в РСеМО:

$$\lambda_0 < \min\left(\frac{K_1}{\alpha_1 b_1}, \frac{K_2}{\alpha_2 b_2}, \ldots, \frac{K_n}{\alpha_n b_n}\right). \tag{47}$$

Расчет характеристик базируется на эквивалентном преобразовании сети, позволяющем представить разомкнутую экспоненциальную СеМО в виде совокупности независимых экспоненциальных СМО типа M/M/K, и проводится в три этапа:

1) расчет интенсивностей потоков заявок в узлах РСеМО ($j = \overline{1,n}$):

$$\lambda_j = \alpha_j \lambda_0, \tag{48}$$

где α_j ($j = \overline{1,n}$) – коэффициенты передач, определяемые путём решения системы линейных *алгебраических уравнений*:

$$\boxed{\alpha_j = \sum_{i=0}^{n} p_{ij}\alpha_i \quad (j = 0, 1, \ldots, n)}, \tag{49}$$

причем $\alpha_0 = 1$;

2) расчет узловых характеристик:

- нагрузка в узле *j*, показывающая среднее число занятых приборов: $y_j = \lambda_j b_j$;
- загрузка узла *j*: $\rho_j = \min(y_j / K_j; 1)$, где K_j – число обслуживающих приборов в узле j;
- коэффициент простоя узла: $\pi_j = 1 - \rho_j$;
- время ожидания заявок в узле: w_j, рассчитываемое по формулам (40) или (41) соответственно для одноканальных и многоканальных СМО;
- время пребывания заявок в узле: $u_j = w_j + b_j$;
- длина очереди заявок: $l_j = \lambda_j w_j$;
- число заявок в узле (в очереди и на обслуживании в приборе): $m_j = \lambda_j u_j$.

3) расчет сетевых характеристик по формулам (35) – (38).

1.3.8. Линейные замкнутые однородные экспоненциальные СеМО

Параметры:

- *число узлов*: n;
- *число обслуживающих приборов* в узлах: $K_1,...,K_n$;
- *матрица вероятностей передач*: $\mathbf{P}=[p_{ij} \mid i, j=0,1,\ldots,n]$;
- число заявок M^*, циркулирующих в ЗСеМО;
- средние *длительности обслуживания* заявок в узлах: $b_1,\ldots,b_n$.

В замкнутых СеМО *всегда существует установившийся режим*.

Расчет характеристик функционирования замкнутых СеМО с *одноканальными узлами* проводится с использованием метода средних значений в три этапа:

1) расчет коэффициентов передач в узлах замкнутой СеМО путём решения системы линейных алгебраических уравнений (39) относительно $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ с учётом того, что $(\alpha_0=1)$:

2) расчет характеристик ЗСеМО с использованием следующих рекуррентных соотношений для значений $M=1,2,\ldots,M^*$:

$$\left.\begin{aligned} & u_i(M)=b_i[1+m_i(M-1)]; \\ & U(M)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(M); \\ & \lambda_0(M)=\frac{M}{U(M)}; \\ & m_i(M)=\alpha_i\lambda_0(M)\,u_i(M) \end{aligned}\right\}, \qquad (50)$$

где M^* - заданное число заявок в замкнутой сети; $m_i(0)=0$;

3) расчёт остальных узловых и сетевых характеристик (Загрузок, времён ожидания, длин очередей заявок и т.д.) замкнутой СеМО по формулам (35), (36), (38).

1.4. Марковские модели

Параметры Марковской модели:

- *перечень состояний* **E**1, ..., **E**n;
- *матрица переходов*, в виде:
  - *матрицы вероятностей переходов* (для процессов с дискретным временем) $\mathbf{Q}=[q_{ij} \mid i, j=\overline{1,n}]$, элементы которой удовлетворяют условиям:

$$0 \le q_{ij} \le 1; \quad \sum_{j=1}^{n} q_{ij}=1 \qquad (i, j=\overline{1,n})$$
;

  - *матрицы интенсивностей переходов* (для процессов с непрерывным временем) $\mathbf{G}=[g_{ij} \mid i, j=\overline{1,n}]$, в которой *интенсивность перехода* g_{ij} определяется как предел отношения вероятности перехода $P_{ij}(\Delta\tau)$ из состояния $\mathbf{E}_i$ в состояние $\mathbf{E}_j$ за промежуток времени $\Delta\tau$ к длине этого промежутка:

$$g_{ij} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \qquad (i, j = \overline{1,n};\ i \neq j),$$

а диагональные элементы определяются из условия:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij} = 0 \quad (i = \overline{1,n});$$

- *начальные вероятности* $p_1(0), \ldots, p_n(0)$.

Изучение случайных процессов заключается в определении вероятностей состояний $p_1(t), \ldots, p_n(t)$, которые могут быть представлены *стохастическим* вектором:

$$P(t) = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\},$$

причем

$$0 \le p_i(t) \le 1; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1.$$

Вектор состояний $P(t) = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$ является *основной* характеристикой Марковского случайного процесса.

Для *Марковского процесса с дискретным временем*, обладающего эргодическим свойством, стационарные вероятности состояний определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i q_{ij} \quad (j = \overline{1,n}),$$

которая совместно с нормировочным условием $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ образует систему, обладающую единственным решением.

Для *Марковского процесса с непрерывным временем*, обладающего эргодическим свойством, стационарные вероятности состояний определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}),$$

которая совместно с нормировочным условием образует систему, обладающую единственным решением.

1.5. Имитационное моделирование в среде GPSS World

Элементы языка GPSS World:

- алфавитно-цифровые символы;
- имена;

- метки;
- переменные;
- числа;
- системные числовые атрибуты (СЧА);
- арифметические операторы;
- операторы отношения;
- логические операторы;
- выражения, процедуры.

Объекты GPSS-модели:

- основные объекты (операторы и транзакты);
- оборудование (приборы или одноканальные устройства, памяти или многоканальные устройства, очереди, логические ключи);
- числовые объекты (ячейки, матрицы, переменные, функции, таблицы);
- генераторы случайных чисел (встроенные, библиотечные, табличные);
- групповые списки (списки пользователя, числовые группы, группы транзактов);
- потоки данных.

В GPSS World имеется 53 **операторов блоков** (исполняемых операторов) , основными из которых для построения моделей массового обслуживания являются:

- GENERATE (генерирование транзактов);
- ADVANCE (задержка транзакта на заданное время);
- TERMINATE (удаление транзактов из модели);
- SEIZE (занятие транзактом прибора);
- RELEASE (удаление транзакта из прибора);
- ENTER (вход транзакта в многоканальное устройство);
- LEAVE (удаление транзакта из многоканального устройства);
- QUEUE (фиксация момента поступления транзакта в очередь);
- DEPART (фиксация момента удаления транзакта из очереди);
- TEST (поверка значения СЧА и передача активного транзакта в блок, отличный от последующего);
- TRANSFER (передача транзакта в блок, отличный от последующего);
- GATE (изменение маршрута движения транзактов в зависимости от состояния некоторого объекта);
- PRIORITY (изменение уровня приоритета активного транзакта);
- PREEMPT (захват прибора поступившим транзактом);
- RETURN (освобождение прибора активным транзактом);
- LOGIC (изменение состояния логического ключа);

- ASSIGN (назначение и изменение параметра транзакта);
- MARK (запись значения абсолютного времени в качестве одного из параметров активного транзакта);
- TABULATE (занесение значений в таблицу – обновление статистики).

В GPSS World используются 24 **команды** (описания и управления), в том числе:

- FUNCTION (описание функции);
- TABLE (описание таблицы);
- QTABLE (описание таблицы очереди);
- STORAGE (описание ёмкости многоканального устройства);
- VARIABLE (описание арифметической переменной);
- CLEAR (сброс процесса моделирования в исходное состояние);
- CONTINUE (возобновление прерванного процесса моделирования);
- HALT (прерывает процесс моделирования и очищает очередь команд);
- INCLUDE (вставка в исходную модель и трансляция файла с операторами);
- REPORT (немедленное создание отчета);
- RESET (сброс в ноль статистики и атрибутов системы);
- SHOW (отображает значение выражения в строке состояния окна «Model»);
- START (запуск процесса моделирования);
- STEP (остановка процесса моделирования по определенному количеству входов транзактов в блоки);
- STOP (устанавливает или снимает условие прерывания моделирования).