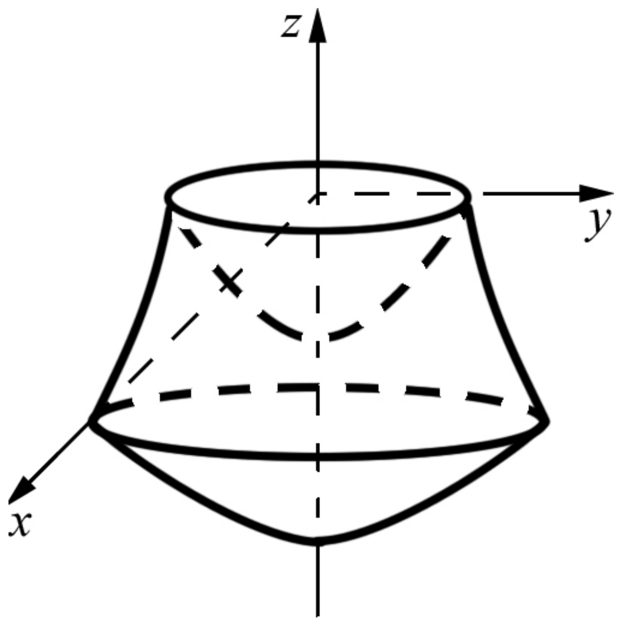
Типовой расчет по высшей математике

Аналитическая геометрия

1 модуль

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Гортинская Л.В., Панкратова Т.Ф., Понятовский В.В.,
Ратафьева Л.С., Рыжков А.Е., Трифанов А.И.

Типовой расчет по высшей математике

Аналитическая геометрия

1 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2012

Гортинская Л.В., Панкратова Т.Ф., Понятовский В.В., Ратафьева Л.С., Рыжков А.Е., Трифанов А.И. Типовой расчет „Аналитическая геометрия“. 1 модуль. Учебно-методическое пособие. -СПб: НИУ ИТМО, 2012. -50 с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов первого курса специальности 010400.62 „Прикладная математика и информатика“

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 18.09.2012, протокол №9.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория "Национальный исследовательский университет". Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики"на 2009-2018 годы.

Содержание

Общие рекомендации

Типовой расчет по математике за первый модуль включает в себя задачи по темам: „Определители“, „Векторная алгебра“, „Аналитическая геометрия“ и „Линейные системы уравнений“.

Каждый студент обязан выполнить восемь заданий, одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Каждый типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие, чертежи и рисунки необходимо исполнить аккуратно, снабдив их необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет. К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая во внимание которые и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

Задание 1. Определители и их свойства

Пример выполнения задания 1

Задача. Вычислить определитель тремя способами: разложением по второй строке, разложением по третьему столбцу и приведением к определителю диагональной матрицы методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение. а) Разложим определитель по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \left(5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right) +$$

$$+2 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) -$$

$$-3 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) +$$

$$+4\cdot\left(3\cdot\begin{vmatrix}-3&3\\3&5\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}-2&3\\1&5\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}-2&-3\\1&3\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-\left(60-50+84+42-30-18\right)+$$

$$+2\cdot(36-30+56+14-20-6)-$$

$$-3\cdot(-36-18+40+10-12+6)+$$

$$+4\cdot(-45-27+50+15-42+21)=$$

$$=-88+2\cdot 50+3\cdot 10-4\cdot 28=-70.$$

б) Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix}3&5&7&2\\1&2&3&4\\-2&-3&3&2\\1&3&5&4\end{vmatrix}=$$

$$=7\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2&4\\-2&-3&2\\1&3&4\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3&5&2\\-2&-3&2\\1&3&4\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3&5&2\\1&2&4\\1&3&4\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}3&5&2\\1&2&4\\-2&-3&2\end{vmatrix}=$$

$$=7\left(1\cdot\begin{vmatrix}-3&2\\3&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-2&2\\1&4\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}-2&-3\\1&3\end{vmatrix}\right)-$$

$$-3\cdot\left(3\cdot\begin{vmatrix}-3&2\\3&4\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}-2&2\\1&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-2&-3\\1&3\end{vmatrix}\right)+$$

$$+3\cdot\left(3\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&4\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1&4\\2&4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\right)-$$

$$-5\cdot\left(3\cdot\begin{vmatrix}2&4\\-3&2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1&4\\-2&2\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1&2\\-2&-3\end{vmatrix}\right)=$$

$$= 7 \cdot (-12 - 6 + 16 + 4 - 24 + 12) -$$
$$-3 \cdot (-36 - 18 + 40 + 10 - 12 + 6) +$$
$$+3 \cdot (24 - 36 - 20 + 20 + 6 - 4) -$$
$$-5 \cdot (12 + 36 - 10 - 40 - 6 + 8) =$$
$$= -7 \cdot 10 + 3 \cdot 10 - 3 \cdot 10 - 5 \cdot 0 = -70.$$

в) С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к треугольному виду:

Прибавим ко второму столбцу первый столбец, умноженный на (-3), прибавим к третьему столбцу первый столбец, умноженный на (-5):

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 13 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Умножим четвертую строку на (-1) и прибавим ко второй, и умножим четвертую строку на 2 и прибавим к третьей, получим:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 13 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Умножим вторую строку на (-3) и прибавим к третьей строке, умножим вторую строку на (-4) и прибавим к первой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на $(-1/3)$ и прибавим к четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{vmatrix}.$$

Определитель полученной треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot \frac{10}{3} = -70.$$

Варианты задания 1

Вычислить определитель тремя способами: разложением по второй строке, разложением по третьему столбцу и приведением к определителю диагональной матрицы методом Гаусса.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 5 & -8 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ -3 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 \\ -5 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & -9 & -4 & -5 \\ -3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$;

6. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; 13. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 19. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & -1 & 4 \end{vmatrix}$;

8. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 5 & 6 & 6 \\ 11 & 9 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; 14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 8 & 9 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; 20. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 \\ -8 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & 11 & 3 \\ -5 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix} -8 & 7 & 4 & -5 \\ 6 & -5 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & -5 & 3 \\ -8 & 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; 15. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; 21. $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 4 & 2 \\ 13 & -1 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & -2 & 4 \\ -4 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 \\ -5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; 16. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 8 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 22. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 8 \\ 2 & -12 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$;

11. $\begin{vmatrix} 1 & -9 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 10 \\ -2 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$; 17. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 23. $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 & 2 \\ 11 & -15 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & -9 \\ 2 & 4 & 6 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; 18. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & -9 & 1 \\ 7 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; 24. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & -1 \\ 10 & -8 & -3 & 6 \\ -11 & 14 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

25. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & -2 & 5 \\ 4 & -8 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; 27. $\begin{vmatrix} 9 & 1 & -2 & 8 \\ -2 & 5 & 7 & -3 \\ 1 & 5 & -1 & 11 \\ -4 & 7 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; 29. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 11 & -2 \\ 8 & 5 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$;

26. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 & 8 \\ 2 & -11 & 13 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 1 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 28. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & 9 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & -9 & 8 \end{vmatrix}$; 30. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 8 \\ 11 & 4 & 9 & -3 \\ 2 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

Задание 2. Системы Крамера

Пример выполнения задания 2

Задача. Решить систему уравнений двумя способами: методом Крамера и методом Гаусса. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

Решение. а) Найдем решение методом Крамера. Найдем следующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(9-1) - 2(6-2) + (2-6) = 12,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(9-1) - 2(3-11) + (1-33) = 24,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(3-1) - 5(6-2) + (22-2) = -24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(33-1) - 2(22-2) + 5(2-6) = 36.$$

Найдем неизвестные:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

б) Решим систему методом Гаусса. Построим расширенную матрицу системы и элементарными преобразованиями приведем ее к диагональной. Схема вычислений аналогична схеме вычисления определителя посредством приведения его к треугольному виду (см. задачу 1в).
Вычтем из первой сроки вторую:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 5 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 11 \end{pmatrix}$$

Прибавим ко второй и третьей строкам первую строку, умноженную на (-2):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 5 & 1 & | & -7 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Разделим третью строку на 3 и переставим вторую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 5 & 1 & | & -7 \\ 0 & 3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 1 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-5), а затем разделим третью строку на (-4):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 1 & | & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Вычтем из второй строки третью, а затем прибавим вторую строку к первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

В результате, получим решение: $x = 2, \quad y = -2, \quad z = 3.$

Проверка:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 3 = 6 - 4 + 3 = 5,$$

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 3 = 4 - 6 + 3 = 1,$$

$$2 \cdot 2 + (-2) + 3 \cdot 3 = 4 - 2 + 9 = 11.$$

Варианты задания 2

Решить систему уравнений двумя способами: методом Гаусса и методом Крамера.

1. $\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ x + 5y + 3z = 1 \\ 2x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - z = 3 \\ 3x - 4y + z = 2 \end{cases};$

2. $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x - 5y + 2z = -15 \\ 2x - y - 7z = -1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 3y - 2z = -3 \\ x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases};$

3. $\begin{cases} 2x + y + 4z = -5 \\ x + 3y - 6z = 2 \\ 3x - 2y + 2z = 9 \end{cases};$

6. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + z = -1 \end{cases};$

7. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = 13 \\ x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 4x + y + 2z = -9 \\ 5x + 3y + 5z = -12 \\ 8x + 3y + 7z = -20 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x - 5y - 4z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$;

12. $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = -2 \\ 3x + y + z = -3 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x - 5y - 4z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$;

14. $\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$;

15. $\begin{cases} 5x + 3y + z = 4 \\ 2x - 5y + 2z = 11 \\ x + 2y - 3z = -7 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ x - 3y + 2z = -2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$;

17. $\begin{cases} 4x + 3y - 5z = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 7 \\ 7x - 12y + 3z = 19 \end{cases}$;

18. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3y + 7z = 22 \\ 4x + 3y - 10z = 11 \end{cases}$;

19. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$;

20. $\begin{cases} 5x + y + 2z = 9 \\ 3x + 4y + 7z = 18 \\ 8x + y + z = 11 \end{cases}$;

21. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -3 \\ 4x + 4y + 2z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 29 \\ 5x + 1y - z = 21 \\ 2x + y + 9z = 76 \end{cases}$;

23. $\begin{cases} 3x - 3y + 5z = 26 \\ 5x + 3y - 11z = -26 \\ 8x + 2y - z = 22 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} 4x - 2y - 5z = -20 \\ -3x + 7y + 7z = 38 \\ x + 9y - 4z = 18 \end{cases}$;

24. $\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 15 \\ 2x + y + 3z = -5 \\ x - 5y + 7z = -30 \end{cases}$;

28. $\begin{cases} 7x + 8y + 6z = 14 \\ 2x - 5y + z = 23 \\ 3x + 4y - z = -10 \end{cases}$;

25. $\begin{cases} 2x + 8y + z = 80 \\ x - y + 6z = 17 \\ 3x + 4y - 5z = 22 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} 6x + 8y + 3z = -9 \\ -x + 4y + 9z = -24 \\ 5x - 2y - 7z = 28 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -23 \\ 7x - 8y + 3z = -15 \\ 4x - 5y - z = -23 \end{cases}$;

30. $\begin{cases} x + 5y - 6z = 7 \\ 2x - 2y + 5z = 15 \\ 7x - 3y + 9z = 38 \end{cases}$.

Задание 3. Векторная алгебра

Пример выполнения задания 3

Задача. Даны четыре точки $A(2,-1,3)$, $B(4,5,0)$, $C(2,2,-1)$ и $D(2,2,5)$. Найти $\vec{AB}$, $\left|\vec{AB}\right|$, $\vec{AB}\times\vec{AC}$, $\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AB}$, направляющий вектор $\vec{b}$ биссектрисы угла φ, площадь $S_{\Delta ABC}$ треугольника ABC, объем V_{ABCD} параллелепипеда $ABCD$, и высоту h_D, опущенную из вершины D.

Решение. Найдем векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, а также их длину:

$$\vec{AB} = 2\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}, \quad \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{2^2+6^2+(-3)^2} = 7,$$
$$\vec{AC} = 3\vec{j}-4\vec{k}, \quad \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5.$$

Косинус угла между веторами вычислим с помощью скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{6}{7}.$$

Векторы $5\vec{AB}$ и $7\vec{AC}$ имеют одинаковую длину, поэтому их сумма $\vec{b}$ направлена по биссектрисе угла φ, $\vec{b} = 10\vec{i}+51\vec{j}-43\vec{k}$.

Площадь треугольника ABC найдем с помощью векторного произведения:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|,$$
$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -15\vec{i}+8\vec{j}+6\vec{k},$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{225+64+36} = \frac{\sqrt{325}}{2}.$$

Объем пирамиды найдем с помощью смешанного произведения:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$h_D = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{36}{\sqrt{325}} = \frac{36\sqrt{13}}{65}.$$

Варианты задания 3

Даны четыре точки A, B, C и D. Найти $\vec{AB}$, $|\vec{AB}|$, $\vec{AB}\times\vec{AC}$, $\cos\varphi$, где φ - угол векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, направляющий вектор бисектрисы угла φ, $S_{\Delta ABC}$, V_{ABCD}, h_D.

1. $A(1,2,3)$, $B(0,0,1)$, $C(4,4,-3)$, $D(1,2,6)$;
2. $A(-1,2,1)$, $B(3,-1,1)$, $C(1,4,2)$, $D(5,2,1)$;
3. $A(1,-2,3)$, $B(-5,0,0)$, $C(-3,1,3)$, $D(1,1,3)$;
4. $A(2,1,1)$, $B(3,3,3)$, $C(-4,-1,-2)$, $D(6,3,3)$;
5. $A(-2,1,2)$, $B(2,1,5)$, $C(0,2,4)$, $D(-4,0,6)$;
6. $A(-2,-1,1)$, $B(4,-3,4)$, $C(2,2,1)$, $D(2,3,1)$;
7. $A(2,1,3)$, $B(4,3,4)$, $C(4,-2,-3)$, $D(6,3,4)$;
8. $A(2,1,-3)$, $B(2,4,1)$, $C(3,3,-5)$, $D(2,-2,-1)$;
9. $A(2,1,-2)$, $B(-4,-4,0)$, $C(5,1,2)$, $D(3,1,0)$;
10. $A(1,-2,1)$, $B(-1,-1,3)$, $C(3,1,-5)$, $D(-1,2,3)$;
11. $A(1,3,-1)$, $B(-2,3,3)$, $C(2,5,-1)$, $D(2,5,8)$;
12. $A(3,1,2)$, $B(1,4,8)$, $C(3,4,-2)$, $D(1,7,8)$;

13. $A(2,1,3)$, $B(1,3,1)$, $C(-1,7,5)$, $D(1,6,1)$;

14. $A(3,1,-2)$, $B(3,-2,2)$, $C(2,3,-4)$, $D(3,4,0)$;

15. $A(3,1,1)$, $B(5,7,-2)$, $C(6,1,-3)$, $D(4,2,2)$;

16. $A(1,-2,2)$, $B(2,-4,4)$, $C(4,0,-4)$, $D(5,-4,4)$;

17. $A(2,1,-1)$, $B(2,4,3)$, $C(4,30)$, $D(2,4,1)$;

18. $A(2,3,-3)$, $B(-1,1,3)$, $C(2,6,1)$, $D(2,1,-1)$;

19. $A(1,1,-1)$, $B(-1,2,1)$, $C(4,3,5)$, $D(1,4,-1)$;

20. $A(2,-2,1)$, $B(-1,-2,-3)$, $C(4,1,7)$, $D(5,-2,4)$;

21. $A(1,-1,2)$, $B(3,2,-4)$, $C(1,2,6)$, $D(1,2,-1)$;

22. $A(2,-1,1)$, $B(1,1,-1)$, $C(-4,2,3)$, $D(6,1,-1)$;

23. $A(3,1,4)$, $B(3,-3,1)$, $C(2,3,2)$, $D(3,4,10)$;

24. $A(3,2,-1)$, $B(-3,-1,1)$, $C(3,5,3)$, $D(3,3,0)$;

25. $A(4,1,5)$, $B(2,2,3)$, $C(-2,-1,2)$, $D(5,2,3)$;

26. $A(2,-1,-3)$, $B(2,3,0)$, $C(3,1,-1)$, $D(2,1,0)$;

27. $A(-3,-1,-2)$, $B(3,-3,1)$, $C(1,2,-2)$, $D(1,3,-2)$;

28. $A(-1,-2,3)$, $B(1,0,4)$, $C(3,-2,0)$, $D(2,-2,6)$;

29. $A(4,2,-5)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,0,-3)$, $D(7,2,8)$;

30. $A(3,1,-1)$, $B(6,3,5)$, $C(6,1,3)$, $D(0,-1,-1)$.

Задание 4. Аналитическая геометрия на плоскости

Пример выполнения задания 4

Задача. Точки $A\,(1, 3)$ и $B\,(3, 1)$ являются концами одной из диагоналей ромба, длина другой диагонали равна $4\sqrt{2}$. Написать уравнения сторон ромба. Сделать рисунок.

Решение. Чтобы написать уравнения сторон ромба, необходимо найти третью вершину $C\,(x_0, y_0)$. Для этого составим сначала уравнение диагонали AB как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3},$$

или

$$x + y - 4 = 0.$$

Составим уравнение другой диагонали ромба. По свойству диагоналей она проходит через середину отрезка AB и перпендикулярная ему. Координаты середины отрезка AB находим как половину суммы координат его концов, получим: $F\,(2, 2)$ - точка пересечения диагоналей. Нормальный вектор прямой AB имеет координаты $\vec{n_1} = (1, 1)$, следовательно, за нормальный вектор второй диагонали можно принять вектор $\vec{n_2} = (1, -1)$, перпендикулярный вектору $\vec{n_1}$. По координатам точки $F\,(2, 2)$ и нормальному вектору $\vec{n_2}$ записываем уравнение второй диагонали CD:

$$x - 2 - (y - 2) = 0,$$

откуда получаем $x = y$.

Пусть координаты точки C равны (x_0, y_0). В силу $x_0 = y_0$, мы получим $C\,(x_0, x_0)$. Расстояние от точки C до прямой AB равно половине длины диагонали CD, то есть равно $2\sqrt{2}$ по условию задачи. По формуле расстояния от точки до прямой получаем:

$$\frac{x_0 + x_0 - 4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$
$$|x_0 - 2| = 2.$$

Отсюда $x_0 = 0$ или $x_0 = 4$. Таким образом, за точку C мы можем взять начало координат $C\,(0,0)$. Легко теперь составить уравнение двух сторон ромба:

$$AC: \quad 3x - y = 0,$$
$$BC: \quad x - 3y = 0.$$

Две другие стороны BD и AD параллельны AC и BC соответственно и проходят через точки $A\,(1,3)$ и $B\,(3,1)$. Поэтому:

$$BD: \quad 3(x-3) - (y-1) = 0, \quad 3x - y - 8 = 0,$$
$$AD: \quad (x-3) - 3(y-1) = 0, \quad x - 3y + 8 = 0.$$

Рисунок 1 иллюстрирует решение задачи.

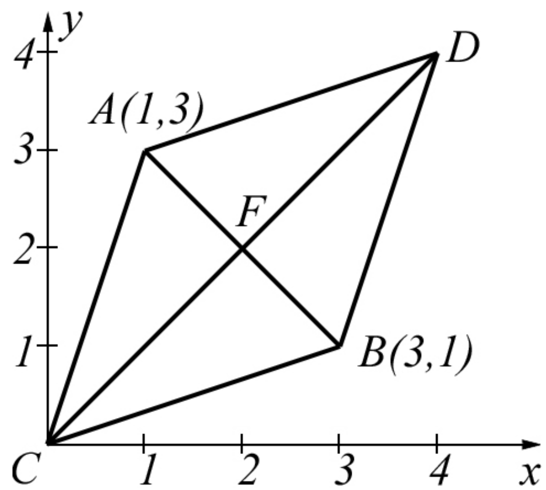


Рис. 1: к решению задания 4.

Варианты задания 4

1. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $E(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и найти угол между ними. Сделать рисунок.

2. Даны уравнения двух сторон ромба $x + 3y + 12 = 0$ и $x + 3y - 8 = 0$, и уравнение одной его диагонали $2x + y + 4 = 0$. Найти координаты вершин ромба. Сделать рисунок.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 6)$ так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между прямыми $x - 5y + 23 = 0$ и $x - 5y + 11 = 0$, лежала на прямой $2x - y - 2 = 0$. Сделать рисунок.

4. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$. Сделать рисунок

5. Через точку $M(2, -5)$ проведена прямая так, что ее отрезок, заключенный между прямыми $x - y - 1 = 0$ и $2x - y - 18 = 0$, делится в точке M пополам. Составить уравнение этой прямой. Сделать рисунок.

6. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят соответственно через точки $(-1, 2)$ и $(0, 6)$, а две другие - через точки $(-3, 2)$ и $(-6, 0)$. Сделать рисунок.

7. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y = 0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5. Сделать рисунок.

8. Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек $A_1(1,2)$, $A_2(3,0)$, $A_3(-4,-5)$. Сделать рисунок.

9. На прямой $x - 3y + 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух точек $(-3,1)$ и $(5,4)$. Сделать рисунок.

10. Точка $(3,1)$ является вершиной равнобедренного треугольника, а прямая $2x + 3y - 1 = 0$ - его гипотенузой. Написать уравнения катетов. Сделать рисунок.

11. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $5x - 12y = 0$ и отстоящей от точки $(1,1)$ на расстоянии 3. Сделать рисунок.

12. На прямой $x - 3y + 13 = 0$ найти точки, отстоящие от прямой $x + 2y + 3 = 0$ на расстоянии $\sqrt{5}$. Сделать рисунок.

13. На осях координат найти точки, равноудаленные от прямых $5x - y + 6 = 0$, $5x + y - 3 = 0$. Сделать рисунок.

14. Даны две вершины $(0,7)$ и $(-2,3)$ треугольника, площадь которого равна 3, и прямая $x = 7$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника. Сделать рисунок.

15. Даны середины сторон треугольника $A(1,2)$, $B(3,-4)$, $C(-5,8)$. Написать уравнения его сторон. Сделать рисунок.

16. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $(3,1)$ на расстоянии 2 от точки $(1,-2)$. Сделать рисунок.

17. Найти координаты вершины C прямоугольного треугольника ABC, если известно, что вершины $A(2,3)$ и $B(6,-1)$ являются концами его гипотенузы, а вершина C лежит на прямой $x+y-3 = 0$. Сделать рисунок.

18. Через точки $A(-8, 1)$ и $B(2, 1)$ проведены параллельные прямые, расстояние между которыми равно 6. Написать уравнения этих прямых. Сделать рисунок.

19. Написать уравнения сторон треугольника, у которого $x + y = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$ - высоты, а A - одна из вершин. Сделать рисунок.

20. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC лежит на прямой $3x+4y-9 = 0$, длина боковых сторон AB и AC равна 6. Найти длину основания BC, если $A(3, -5)$. Сделать рисунок.

21. Вычислить длину стороны правильного треугольника, если точка $A(2, -3)$ является одной из его вершин, а прямая $3x - 4y + 7 = 0$ содержит одну из его сторон. Сделать рисунок.

22. Определить координаты точки, симметричной точке $M(2, -5)$ относительно прямой $2x + 8y - 15 = 0$. Сделать рисунок.

23. Отрезок AB перпендикулярен к прямой $x - 2y - 8 = 0$ и пересекает ее. Найти координаты конца B отрезка, если он отстоит от данной прямой в четыре раза дальше, чем точка $A(2, -1)$. Сделать рисунок.

24. Точка $C(-1, 5)$ является центром окружности, точка $M(1, 4)$ - серединой ее хорды. Написать уравнение этой хорды. Сделать рисунок.

25. Через точку $M(5, 3)$ проведена прямая, составляющая с осями координат треугольник площадью 30. Написать уравнения этой прямой. Сделать рисунок.

26. Точки $A(1, 2)$, $B(-1, 4)$, $C(3, 6)$ являются вершинами треугольника. Написать уравнения его медиан. Сделать рисунок.

27. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых прямыми $7x + y - 1 = 0$ и $x - y + 2 = 0$ и убедится в их перпендикулярности. Сделать рисунок.

28. Даны основания равнобедренного треугольника $x - y + 5 = 0$ и его боковая сторона $x + 3y + 2 = 0$. Составить уравнение второй боковой стороны, если она проходит через точку $P(1, 1)$. Сделать рисунок.

29. Даны уравнения сторон треугольника $3x - 2y + 3 = 0$, $2x - 3y + 7 = 0$, $x + y + 1 = 0$. Определить тангенсы внутренних углов. Сделать рисунок.

30. На прямой $x + 3y - 16 = 0$ найти точки, удаленные от прямой $2x + y - 2 = 0$ на расстояние $\sqrt{5}$. Сделать рисунок.

Задание 5. Аналитическая геометрия в пространстве

Пример выполнения задания 5

Задача. Даны две плоскости:

$$\alpha_1: \quad x + 2y - z + 1 = 0,$$
$$\alpha_2: \quad x - y + z - 2 = 0.$$

Составить уравнение плоскости α_3 перпендикулярной к плоскости α_1 и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости α_2. Сделать рисунок.

Решение. Поскольку линия пересечения плоскостей α_1 и α_3 лежит в плоскости α_2, то плоскость α_3 принадлежит множеству плоскостей, проходящих через прямую пересечения плоскостей α_1 и α_2 (пучок плоскостей). Любую плоскость из этого множества мы можем записать в виде:

$$x + 2y - z + 1 + k(x - y + z - 2) = 0,$$

или

$$(1 + k)x + (2 - k)y + (k - 1)z + 1 - 2k = 0.$$

Для того, чтобы плоскости α_1 и α_3 были перпендикулярными, скалярное произведение их нормальных векторов $\vec{n_1} = (1, 2, -1)$ и $\vec{n_3} = (1 + k, 2 - k, -k - 1)$ должно быть равно нулю. Это приводит к уравнению для определения k:

$$(1 + k) + 2(2 - k) - (k - 1) = -2k + 6 = 0.$$

Получаем $k = 3$. Подставляя найденное значение в уравнение, получим уравнение искомой плоскости:

$$\alpha_3: \quad 4x - y + 2z - 5 = 0.$$

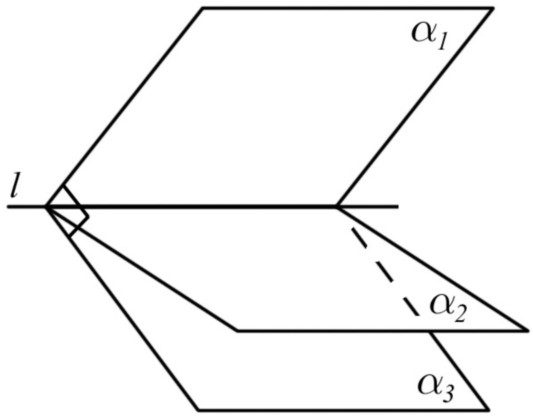


Рис. 2: к решению задания 5.

Варианты задания 5

1. Точки $A(2,1,1)$ и $B(1,2,2)$ проектируются из точки $C(1,1,2)$ на плоскость $x+y-z-3=0$. Найти координаты проекций точек A и B и расстояние между ними. Сделать рисунок.

2. Через точку $A(1,-1,1)$ проведена прямая, параллельная плоскости $x+y-z+3=0$ и пересекающая прямую
$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}.$$
Найти уравнение этой прямой. Сделать рисунок.

3. Прямая
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}$$
проектируется из точки $C(1,1,1)$ на плоскость $2x+y-z-2=0$. Найти уравнение проекции. Сделать рисунок.

4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,0,-1)$ и пересекающей две прямые
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}, \quad \frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{4}.$$
Сделать рисунок.

5. Из плоскости $x - 2y + 3z - 6 = 0$ координатными плоскосятми высекается треугольник. Найти уравнение и длину высоты этого треугольника, опущенной из вершины, лежащей на оси Oz. Сделать рисунок.

6. Найти проекцию точки $A(2, 1, 1)$ на плоскость $x + y + 3z + 5 = 0$ и точку, симметричную точке A относительно данной плоскости. Сделать рисунок.

7. На прямой
$$\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ x + z = 2, \end{cases}$$
найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $x - y + z - 2 = 0$ и $x + y - z - 2 = 0$. Сделать рисунок.

8. Через прямую
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0, \end{cases}$$
проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $(1, -1, 1)$. Написать уравнения этих плоскостей. Сделать рисунок.

9. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oxy. Сделать рисунок.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 0, 1)$ и $B(0, -1, 1)$ и отстоящей от точки $C(5, 0, -3)$ на расстоянии 4. Сделать рисунок.

11. Найти координаты точки, симетричной точке $A(1, 0, 1)$ относитель-

но прямой (сделать рисунок)

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

12. Найти общий перепендикуляр к двум скрещивающимся прямым: $x = y = z$ и
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$
Сделать рисунок.

13. Найти уравнение общего перпендикуляра к двум прямым: $x = y = z$ и $x = 1$, $y = 2$ и его длину между заданными прямыми. Сделать рисунок.

14. На прямой
$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x - 7y + 3z = 11, \end{cases}$$
найти точку, одинаково удаленную от двух заданных точек $A(1, 0, -1)$ и $B(-1, 2, 1)$. Сделать рисунок.

15. Найти расстояние от точки $M(1, 2, -2)$ до плоскости, проходящей через две прямые:
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{1},$$
$$x = 2t, \quad y = 5 + 2t, \quad z = -5 + t.$$
Сделать рисунок.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 1, \end{cases}$$
и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом $V = 6$. Сделать рисунок.

17. Принадлежат ли две прямые
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 4 \\ x - 2y + z = -5 \end{cases},$$
$$x = t, \quad y = 2t + 2, \quad z = 3t - 1,$$
одной плоскости? Если „да“, то написать уравнение этой плоскости. Сделать рисунок.

18. Убедившись, что данная плоскость $x + y - 3z = 10$ параллельная плоскости, проходящей через точки $A(5, 4, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 6, 3)$, найти расстояние между этими плоскостями. Сделать рисунок.

19. Составить уравнение проекции прямой $x = -t+4$, $y = t-3$, $z = 3t-1$ на плоскость $2x + 4y - 3z = -1$. Сделать рисунок.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -19, \\ 2y - 3z = -26, \end{cases}$$
перпендикулярно к плоскости $4x - 3y + 5z = 46$. Сделать рисунок.

21. Найти проекцию точки $M(-2, 1, 0)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A(1, 0, -1)$, $B(3, 1, -2)$, $C(2, 4, -5)$. Сделать рисунок.

22. Даны вершины треугольника $A(3, 0, 1)$, $B(1, 3, -2)$, $C(7, -1, -2)$. Найти параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины A. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC и содержащей указанную медиану. Сделать рисунок.

23. Доказать перпендикулярность прямых:
$$\begin{cases} x + y - 3z = 1, \\ 2x - y - 9z = 2, \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = -5, \\ 2x - 2y - z = -2. \end{cases}$$

Написать уравнение плоскости, содержащей первую прямую и перпендикулярную второй прямой. Сделать рисунок.

24. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $M(-2,-3,1)$ и отсекающих от координатных осей равные отрезки. Написать канонические уравнения перпендикуляров, опущенных из начала координат на эти плоскости. Сделать рисунок.

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = t+1$, $y = -1+2t$, $z = 2+4t$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

26. Написать уравнения биссектрис углов, образуемых двумя пересекающимися прямыми:
$$\begin{cases} 3x-y+z=6, \\ x-y-z=0, \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x+y-z=-2, \\ x-y-3z=-4. \end{cases}$$
Сделать рисунок.

27. Проверить, являются ли две прямые скрещивающимися; если „да“, то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые:
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-1}{5}, \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$
Сделать рисунок.

28. Найти уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые:
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3}, \quad \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}.$$
Сделать рисунок.

29. Найти расстояние от точки $M(-3,4,-5)$ до плоскости, содержащей в себе точку $A(1,2,0)$ и прямую (сделать рисунок)
$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{-2}.$$

30. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, -2, 3)$. Найти уравнение биссектрисы, проведенной из угла A. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC и содержащей указанную биссектрису. Сделать рисунок.

Задание 6. Канонические уравнения кривых на плоскости

Пример выполнения задания 6

Задача. Фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Эллипс проходит через точку $M(-2; 1,5)$. Составить уравнение этого эллипса. Сделать рисунок.

Решение. Обозначим через a_1 и b_1 полуоси данной гиперболы, через a и b - полуоси искомого эллипса. Имеем $a_1^2 = 9$, $b_1^2 = 4$, откуда $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 = 13$. Так как фокусы эллипса совпадают с фокусами данной гиперболы, то и для эллипса $c^2 = c_1^2 = 13$. Уравнение эллипса ищем в каноннического виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Так как точка $M(-2; 1,5)$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса и, кроме того, выполнено соотношение $a^2 - b^2 = 13$. Таким образом, для определения a и b имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(1,5)^2}{b^2} = 1; \\ a^2 - b^2 = 13. \end{cases}$$

Обозначив $b^2 = t$, $(t > 0)$ и $a^2 = 13 + t$, получим $\frac{4}{13+t} + \frac{9}{4t} = 1$, $a^2 = 13 + t$. Решая, находим $t = b^2 = 3$, $a^2 = 16$.

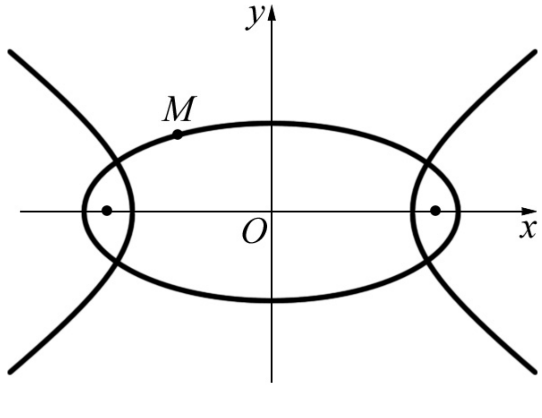


Рис. 3: к решению задания 6.

Варианты задания 6

1. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2-y^2=2$ с прямой $x+y-2=0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы. Сделать рисунок.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon=1,25$. Сделать рисунок.

3. Написать уравнение такой окружности, чтобы ее диаметром оказался отрезок прямой $x+y=4$, заключенномый между осями координат. Сделать рисунок.

4. Большая ось эллипса втрое больше его малой оси. Составить каноническое уравнение этого эллипса, если он проходит через точку $M(3,\sqrt{3})$. Сделать рисунок.

5. Дана гипербола $x^2-y^2=8$. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4,6)$ и имеющего фокусы, которые совпадают с фокусами данной гиперболы. Сделать рисунок.

6. Найти точки пересечения параболы $y^2=8x$ с эллипсом, у которого правый фокус совпадает с фокусом этой параболы, большая полуось равна 4 и фокусы лежат на оси $0x$. Сделать рисунок.

7. Фокусы гиперболы лежат в точках $F_1(-\sqrt{7},0)$ и $F_2(\sqrt{7},0)$. Гипербола проходит через точку $A(2,0)$. Найти уравнения ее асимптот. Сделать рисунок.

8. Найти параметр p параболы $y^2=2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересчения прямой $y=x$ с окружностью $x^2+y^2-6x=0$. Сделать рисунок.

9. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 4x$ с прямой, проходящей через фокус этой параболы, параллельно ее директрисе. Сделать рисунок.

10. Через правый фокус гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Определить точки пересечения этих прямых с гиперболой. Сделать рисунок.

11. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой совпадает с фокусом параболы $y^2 = 8x$. Сделать рисунок.

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы. Сделать рисунок.

13. Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен $3/5$. Сделать рисунок.

14. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3, -1)$, и ее действительная ось лежит на оси $0x$, а центр - в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2 + y^2 = 10$. Сделать рисунок.

15. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а осью симметрии является ось $0x$, если известно, что расстояние от ее фокуса до центра окружности $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 25 = 0$ равно 5. Сделать рисунок.

16. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2 - y^2 = 8$. Эллипс

проходит через точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с гиперболой $8x^2 - y^2 = 8$. Сделать рисунок.

17. Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы. Сделать рисунок.

18. Найти точки пересечения параболы $y^2 = x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси $0x$ и радиус, равный 5. Сделать рисунок.

19. Составить уравнение эллипса, если его фокусы совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, а эксцентриситет эллипса равен $3/5$. Сделать рисунок.

20. Окружность имеет центр в левой вершине гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ и радиус, равный вещественной полуоси этой гиперболы. Найти точки пересечения этой окружности с ассимптотами гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Сделать рисунок.

21. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентрисистет $\varepsilon = 3/2$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1$. Сделать рисунок.

22. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанный параболой $y^2 = 2x$.

23. Найти расстояние от фокуса параболы $y = \frac{1}{8}x^2$ до прямой $3x + 4y + 2 = 0$. Сделать рисунок.

24. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M(3,0)$ и $N(-1,2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $x - y + 2 = 0$. Сделать рисунок.

25. Вычислить расстояние от центра окружности $x^2 + y^2 = 10x$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$. Сделать рисунок.

26. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8. Сделать рисунок.

27. В эллипс $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника. Сделать рисунок.

28. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5, 0)$ и $B(1, 4)$, если центр ее лежит на прямой $x + y = 3$. Сделать рисунок.

29. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен $4/5$, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы. Сделать рисунок.

30. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{40}, 2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm\frac{1}{3}x$. Сделать рисунок.

Задание 7. Каноническая форма кривых второго порядка

Пример выполнения задания 7

Задача. Дано уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0.$$

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

Решение. Выполняем поворот осей по формулам

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

Подставим эти выражения для x и y в исходное уравнение и выделим коэффициент при $x_1 y_1$:

$$5\left(x_1^2 \cos^2\alpha - 2x_1 y_1 \cos\alpha \sin\alpha + y_1^2 \sin^2\alpha\right) +$$
$$+4\left(x_1^2 \cos\alpha \sin\alpha + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) x_1 y_1 - y_1^2 \sin\alpha \cos\alpha\right) +$$
$$+8\left(x_1^2 \sin^2\alpha + 2x_1 y_1 \sin\alpha \cos\alpha + y_1^2 \cos^2\alpha\right) -$$
$$-52\left(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha\right) - 64\left(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha\right) + 164 = 0.$$

Приравняв нулю коэффициент при $x_1 y_1$, получаем:

$$-10\cos\alpha \sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 16\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

откуда $(\operatorname{tg}\alpha)_1 = 2$, $(\operatorname{tg}\alpha)_2 = -1/2$. Зная $\operatorname{tg}\alpha$, можно найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам тригонометрии:

$$\sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Если угол поворота α условиться считать острым, то в этих формулах надо брать знак плюс, и для $\operatorname{tg}\alpha$ надо взять также положительное решение. Выберем, например, угол поворота $\alpha : \operatorname{tg}\alpha = 2$, найдем $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и подставим их в уравнение кривой в новых координатах. После вычисления коэффициентов получим уравнение:

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 36\sqrt{5}x_1 + 8\sqrt{5}y_1 + 164 = 0.$$

В полученном уравнении выделим полные квадраты двучленов $x_1 + x_0$ и $y_1 + y_0$:

$$9(x_1 - 2\sqrt{5})^2 + 4(y_1 + \sqrt{5})^2 - 36 = 0.$$

Выполнив параллельный перенос по формулам

$$x_1 - 2\sqrt{5} = X, \quad y_1 + \sqrt{5} = Y,$$

получим в системе $XO'Y$ уравнение кривой

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Это эллипс с полуосями 2 и 3 соответственно (рис.).

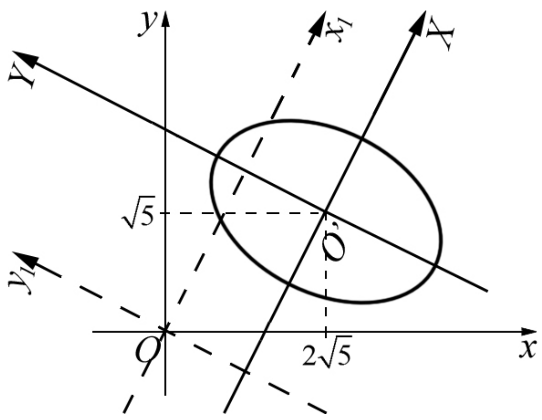


Рис. 4: к решению задания 7.

Варианты задания 7

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в канонической и исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

1. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0;$
2. $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 32\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 60 = 0;$
3. $3x^2 + 3y^2 - 20xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0;$
4. $13x^2 + 37y^2 + 18xy - 16\sqrt{10}x - 48\sqrt{10}y + 120 = 0;$
5. $4x^2 + 4y^2 - 10xy - 27\sqrt{2}x + 27\sqrt{2}y + 72 = 0;$
6. $x^2 + 37y^2 - 32xy - 36\sqrt{5}x + 72\sqrt{5}y + 135 = 0;$
7. $3\sqrt{5}x^2 + 4\sqrt{5}xy - 16x - 8y = 0;$
8. $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0;$
9. $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + 15 = 0;$
10. $x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0;$
11. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 24 = 0;$
12. $7\sqrt{5}x^2 + \sqrt{5}y^2 + 8\sqrt{5}xy + 72x + 36y + 27\sqrt{5} = 0;$
13. $13x^2 + 37y^2 + 18xy + 24\sqrt{10}x + 72\sqrt{10}y + 320 = 0;$
14. $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 27 = 0;$
15. $17x^2 + 8y^2 + 12xy - 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0;$

16. $x^2 + y^2 - 2xy - 7\sqrt{2}x + 9\sqrt{2}y + 32 = 0;$

17. $13x^2 + 37y^2 - 32xy - 36\sqrt{5}x + 72\sqrt{5}y + 135 = 0;$

18. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0;$

19. $35x^2 - 5y^2 + 30xy - 48\sqrt{10}x - 16\sqrt{10}y + 120 = 0;$

20. $x^2 + y^2 + 2xy - 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}y + 32 = 0;$

21. $x^2 - 2xy + y^2 + 7\sqrt{2}x - 9\sqrt{2}y + 32 = 0;$

22. $\sqrt{5}x^2 + 7\sqrt{5}y^2 - 8\sqrt{5}xy - 36x + 72y + 27\sqrt{5} = 0$

23. $4x^2 + y^2 + 4xy + \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 15 = 0;$

24. $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 18\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 27 = 0;$

25. $9x^2 + 6xy + y^2 + \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y + 30 = 0;$

26. $8x^2 + 17y^2 - 12xy + 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0;$

27. $3x^2 + 3y^2 + 10xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0;$

28. $x^2 + 9y^2 + 6xy - 3\sqrt{10}x - 19\sqrt{10}y + 90 = 0;$

29. $3x^2 + 3y^2 - 10xy - 16\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 24 = 0;$

30. $5x^2 + 5y^2 - 8xy + 8\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y + 1 = 0;$

Задание 8. Поверхности второго порядка

Пример выполнения задания 8

Задача. Изобразить тело, ограниченное поверхностями

$$z = -1 + x^2 + y^2, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \quad z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Назвать типы этих поверхностей, нарисовать сечение этого тела плоскостью XOZ (при $x \geq 0$) и само тело в исходной координатной системе.

Решение. Первое уравнение запишем в виде

$$x^2 + y^2 = z + 1.$$

Это параболоид вращения с вершиной в точке $(0, 0, -1)$. Второе уравнение после возведения в квадрат и простейшей перестановки членов приобретает вид:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Это однополостный гиперболоид вращения. Второе уравнение представляет его нижнюю половину ($z \leq 0$). Третье уравнение после перенесения постоянных слагаемых в левую часть, возведения в квадрат обеих частей равенства и перенесения $x^2 + y^2$ в левую часть приводится к виду

$$-x^2 - y^2 + (z + 1 + \sqrt{3})^2 = 1.$$

Это двуполостный гиперболоид, сдвинутый против оси z на $1 + \sqrt{3}$. Третье уравнение задает его верхнюю половину ($z \leq -\sqrt{3}$). Тело изображено на рисунке 5.

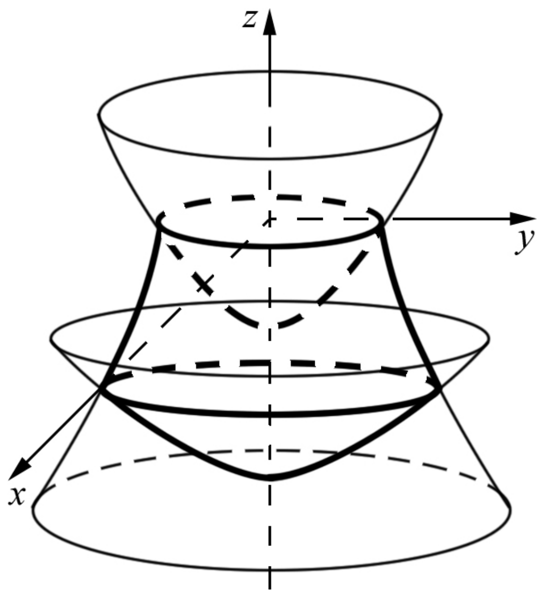


Рис. 5: к решению задания 8.

Варианты задания 8

Приведенные поверхности ограничивают в пространстве некоторые тела вращения конечных размеров. Назвать типы этих поверхностей и нарисовать тело в данной системе координат.

1. $a)$ $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2;$

   $b)$ $y = x^2 + z^2, \quad y = 4;$

   $c)$ $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = -1 + x^2 + y^2,$
   $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$

2. $a)$ $z = x^2 + y^2, \quad z = 4;$

   $b)$ $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad y = 0;$

   $c)$ $z = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = -1 + x^2 + y^2, \quad z = 1 - x^2 - y^2,$
   $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2};$

3. $a)$ $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4;$

   $b)$ $x^2 + z^2 = 4 \ (0 \leq y \leq 4), \quad y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad y = 4;$

c) $z=\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2+1}, \quad z=1-x^2-y^2,$
$z=-1-\sqrt{2-x^2-y^2}.$

4. a) $x^2+y^2=4, \quad z=2-y, \quad z=0;$

b) $y^2=x^2+z^2, \quad y=-2, \quad y=4;$

c) $z=\left(1+(x^2+y^2)/2\right)/2, \quad x^2+y^2=2, \quad z=-1-\sqrt{2-x^2-y^2}.$

5. a) $x^2+y^2+z^2=4, \quad z=y \ (z\le y);$

b) $y=2\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=4;$

c) $z=1-x^2-y^2, \quad z=1-x^2-y^2, \quad z=-1-\sqrt{2-x^2-y^2}.$

6. a) $z^2=x^2+y^2, \quad z=-2, \quad z=4;$

b) $x^2+z^2=4, \quad y=\sqrt{4-x^2-z^2}, \quad y=-4;$

c) $z=1+\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2=2, \quad z=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right).$

7. a) $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad z=-2\sqrt{x^2+y^2}+4;$

b) $y=x^2+z^2-4, \quad y=0;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2=2, \quad z=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right).$

8. a) $z=x^2+y^2-4, \quad z=\sqrt{4-x^2-y^2};$

b) $x^2+z^2=4, \quad z=6-y, \quad y=0;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{x^2+y^2-1},$
$z=-\sqrt{x^2+y^2-1}, \quad z=-1-\sqrt{2}+\sqrt{x^2+y^2}.$

9. a) $x^2+y^2=4, \quad z-y=4, \quad z=0;$

b) $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad z=4-x^2-y^2;$

c) $z=1+\sqrt{2-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{x^2+y^2-1}, \quad z=-1+\sqrt{x^2+y^2}.$

10. a) $z=4-\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0;$

b) $x^2+z^2=1, \quad z=1-y, \quad y=0;$

c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad z = -1 + x^2 + y^2, \quad z = 1 - x^2 - y^2,$
$z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2}$

11. *a*) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = y + 2, \quad z = 0;$

b) $y = -2\sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = -4 - \sqrt{4 - x^2 - z^2};$

c) $z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},$
$z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$

12. *a*) $z = x^2 + y^2, \quad z = 8 - 2\sqrt{x^2 + y^2};$

b) $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2};$

c) $z = -1 + x^2 + y^2, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},$
$z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

13. *a*) $x^2 + y^2 - z = 0, \quad z = 2 - y;$

b) $x^2 + z^2 = 4, \quad z + y = 4, \quad y = 0;$

c) $z = 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = -1 + x^2 + y^2,$
$z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

14. *a*) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2};$

b) $x^2 + z^2 = 4, \quad y = x^2 + z^2 - 4, \quad y = 3;$

c) $z = -1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},$
$z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1};$

15. *a*) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2;$

b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad z = \pm 4;$

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \quad z = 1 - x^2 - y^2.$

16. *a*) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 6 - x^2 - y^2;$

b) $x^2 + z^2 = 4, \quad z = 2 + y, \quad y = 2 - z;$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$
$z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

17. *a*) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad y = 0 \ (y \leq 0)$;

    b) $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = -4$;

    c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2,$
    $z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$;

18. *a*) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 8 - x^2 - y^2, \quad z = 0$;

    b) $x^2 + z^2 = 4, \quad z = 4 + y, \quad y = 0$;

    c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2,$
    $z = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$

19. *a*) $z = x^2 + y^2 - 8, \quad z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$;

    b) $x^2 + z^2 = 4, \quad y = \sqrt{x^2 + z^2} - 2, \quad y = 2$;

    c) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = -(1 + \sqrt{2})(\sqrt{x^2 + y^2} - 1),$
    $z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

20. *a*) $z = x^2 + y^2, \quad z = 2 - x^2 - y^2$;

    b) $y = 2\sqrt{x^2 + z^2} - 4, \quad y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$;

    c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad x^2 + y^2 = 2,$
    $z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

21. *a*) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

    b) $x^2 + z^2 = 4, \quad z = -y, \quad z = y + 4$;

    c) $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2,$
    $z = -3 + x^2 + y^2.$

22. *a*) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$;

    b) $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 4 - x^2 - z^2, \quad y = -4$;

    c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$

23. *a*) $2y = x^2 + z^2 + y^2, \quad y + z = 1 \ (z \leq 1 - y)$;

    b) $y = x^2 + z^2 - 4, \quad y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$;

c) $z = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2,$
$z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

24. a) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + 4, \quad z = 0;$

b) $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad y = -\sqrt{x^2 + z^2} + 2;$

c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = 1 - x^2 - y^2,$
$z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

25. a) $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2};$

b) $x^2 + z^2 = 4, \quad z = y + 6, \quad y = 6;$

c) $z = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = -1 + x^2 + y^2,$
$z = 1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

26. a) $z^2 = x^2 + y^2, \quad z = 2, \quad z = 4;$

b) $x^2 + z^2 = 4, \quad y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}, \quad y = 4;$

c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},$
$z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

27. a) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2};$

b) $x^2 + y^2 = 1, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2, \quad z = 0;$

c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad z = -1 + x^2 + y^2,$
$z = -\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$

28. a) $z = x^2 + y^2, \quad z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2};$

b) $y^2 = x^2 + z^2, \quad y = -4, \quad y = 2;$

c) $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = -1 + x^2 + y^2,$
$z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$

29. a) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad z = 4;$

b) $y = -2 + \sqrt{x^2 + z^2}, \quad y = \sqrt{4 - x^2 - z^2};$

c) $z = 1 + \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \quad z = -1 + x^2 + y^2, \quad z = -1 + x^2 + y^2.$

30. *a*) $z = 4 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2;$

b) $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2} + 3, \quad x^2 + z^2 = 9, \quad y = 0;$

c) $z = \sqrt{2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}, \quad z = -\sqrt{x^2 + y^2 - 1},$
$z = -1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

Список литературы

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. – 10-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2005. -304с.

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Г., Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. – 5-е изд., - М.: Наука. Физматлит, 1999. -224с.

[3] Демидович Б.П., Ефимов А.В., Сборник задач по математике для втузов. В 4-ч частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. попбие для втузов. – 3-е изд., испр. - М.: Наука. 1993. -480с.

[4] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2001. -496с.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория "Национальный исследовательский университет". Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики"на 2009-2018 годы.

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики - крупнейшая в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики. С момента основания на ней работали такие выдающиеся ученые, как И.П. Натансон, В.А.Тартаковский, В.Н.Попов, И.А.Молотков, А.Г. Аленицын, В.В.Жук и другие. Научные интересы сотрудников покрывают практически все разделы математики. На кафедре сложилась мощная научная школа по математическому моделированию сложных физических систем. В последнее время активно развивается направление, связанное с нанофизикой и нанотехнологиями, квантовым компьютером и квантовыми коммуникациями. Сотрудники кафедры активно участвуют в международных научных конференциях, работают в рамках Российских и международных научных проектов. Сложилось тесное научное сотрудничество с Санкт-Петербургским государственным университетом, Петербургским отделением Математического института имени В.А.Стеклова РАН, лабораторией физикохимии наносистем Института химии силикатов РАН и другими научными центрами как в России, так и за рубежом: университетами Марселя и Тулона (Франция), Ювяскиля (Финляндия), Гумбольдтовским университетом Берлина (Германия).

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49