1. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ МЕРЫ ИНФОРМАЦИИ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИСТОЧНИКА ИНФОРМАЦИИ

Великий русский ученый Д.И.Менделеев сформулировал системную концепцию: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. … Наука немыслима без меры». Эта концепция в полной мере применима к теория информации. Усилиями ученых, развивавших теорию информации как содержательный компонент кибернетики – «науки об управлении и связи в машинах, живых организмах и в обществах», таких как Н.Винер, К.Шеннон, Р.Хартли, Р.Фэно, Д.Хаффмэн, Р.Хэмминг, У.Питерсон, А.Колмогоров, Л.Хинчин, В.Котельников, В.Глушков, А.Харкевич, А.Железнов, Л.Финк, В.Дмитриев, Ф.Темников, Р.Варшамов, Б.Советов и многие, многие другие, сформирован количественный подход к информации. Ниже в конспективной форме приводятся основные положения этого подхода.

Количественные меры информации формировались в рамках трех основных направлений в теории информации (ТИ): структурное, статистическое и семантическое.

Структурное направление ТИ оперирует с дискретным представлением исходного информационного массива (ИМ) и количество информации, содержащимся в нем осуществляет пересчетом элементарных информационных компонентов (квантов информации (КИ)) с целью оценки мощности дискретного аналога исходного ИМ, с привлечением простейшего кодирования и с привлечением методов математической комбинаторики.

Статистическое направление ТИ для оценки количества информации использует понятие энтропия как меры неопределенности (неинформированности, незнания) получателя информации, которая снимается после получения информации от источника.

Семантическое направление ТИ оперирует понятиями: ценность, полезность, целесообразность, существенность, необходимость и т.д. информации.

Каждое из перечисленных направлений имеет свою прикладную нишу.

Структурное направление ТИ используется для оценки потенциальных возможностей функциональных компонентов аппаратной среды информационных систем, осуществляющих аналого-цифровое преобразование исходного ИМ, его ввод в среду хранения и обработки информации, осуществление хранения и алгоритмов обработки информации, а также вывод обработанной информации с назначенным темпом и в заданный интервал времени с целью доставки информации по предоставленным каналам связи получателю.

Статистическое направление теории информации в применительной практике является ситуационным, сориентированным на стохастическую природу функционирования источника информации, на стохастическую природу помеховой среды в каналах передачи и хранения, позволяющее с использованием понятия энтропии источника оценить количество выводимой из источника информации, количества информации на выходе КС, позволяющее эффективно использовать статистику источника при кодировании и статистику канальной среды для организации безошибочной ее передачи и хранения.

Семантическое направление теории информации применительно к прикладным задачи ТИ пока находится в состоянии проблемной разработки.

1.1. Структурные меры количества информации

В структурном направлении теории информации предполагается, что природа оцениваемого информационного массива является дискретной или дискретизируемой, если исходный информационный массив является сплошным (непрерывным). В структурном направлении ТИ используются следующие меры количества информации:

- геометрическая мера,
- комбинаторная мера,
- аддитивная мера Р.Хартли.

1.1.1.Геометрическая мера количества информации

Геометрический подход в рамках структурного направления в задачах оценки количества информации в применительной практике прикладной ТИ позволяет согласовывать геометрический информационный объем информационного массива с геометрической информационной емкостью технической среды информационной системы, в который этот массив должен быть размещен с целью хранения, обработки или передачи получателю информации.

Пусть информационный массив Q задается декартовым произведением $Q=\{X\times Y\times Z\times T\}$, где X,Y,Z,T – сплошные информационные компоненты. Пусть с интервалами дискретности соответственно $\Delta_X,\Delta_Y,\Delta_Z,\Delta_T$ произведена дискретизация сплошных информационных компонентов X,Y,Z,T массива так, что сплошные информационные компоненты отображены в дискретные в силу правил

$$X \Rightarrow N_X = \frac{X}{\Delta_X}, Y \Rightarrow N_Y = \frac{Y}{\Delta_Y}, Z \Rightarrow N_Z = \frac{Z}{\Delta_Z}, T \Rightarrow N_T = \frac{T}{\Delta_T}, \quad (1.1)$$

тогда сплошной информационный массив Q отобразится в дискретный информационный массив N_Q, задаваемый декартовым произведением

$$N_Q = \{N_X \times N_Y \times N_Z \times N_T\}. \quad (1.2)$$

В этой связи геометрическим информационным объемом V_Q исходного информационного массива Q будем называть мультипликативную структуру

$$V_Q = N_X \cdot N_Y \cdot N_Z \cdot N_T, \quad (1.3)$$

которая определяет количество информации в исходном информационном массиве, вычисленное в форме геометрической меры. Это количество информации зависит от интервалов дискретности $V_Q = V_Q(\Delta_X, \Delta_Y, \Delta_Z, \Delta_T)$ и измеряется в квантах (пикселях, точках).

Нетрудно видеть, что геометрическая информационная емкость V_S технической среды информационной системы, в которой массив Q должен быть размещен с целью хранения, обработки или передачи получателю информации, с целью обеспечения реализации такого размещения должна удовлетворять условию

$$V_S \geq V_Q = N_X \cdot N_Y \cdot N_Z \cdot N_T. \quad (1.4)$$

Наглядным примером использования геометрической меры является задача оценки геометрической меры информации информационного массива Q, представляющего собой двумерное черно-белое изображение, которое должно быть передано за время T по каналу связи. Информационные компоненты X и Y определяют размеры этого изображения в прямоугольной системе координат, информационный компонент Z цветовую интенсивность изображения.

1.1.2 Комбинаторная мера количества информации

Комбинаторный подход в рамках структурного направления в задачах оценки количества информации в применительной практике прикладной ТИ позволяет оценить возможность представления информации при ее передаче и хранении с помощью средств математической комбинаторики. Этот подход к оценке меры количества информации является не прямым, а опосредованным, так как, по существу, использует кодирование элементов информативного массива с помощью комбинаторных соединений так, что комбинаторная мера количества информации определяется числом комбинаций этих соединений.

Напомним, что в математической комбинаторике рассматриваются следующие соединения:

Сочетания из n элементов по l компонентам ($l \le n$), число которых C_n^l определяется следующим образом

$$C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (l-1) \cdot l) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-l-1) \cdot (n-l))}; \qquad (1.5)$$

Размещения из n элементов по l компонентам ($l \le n$), число которых A_n^l определяется следующим образом

$$A_n^l = \frac{n!}{(n-l)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-l-1) \cdot (n-l))} = (n-l+1) \cdot (n-l+2) \ldots (n-1) \cdot n; \qquad (1.6)$$

Перестановки n элементов, образующих одномерный массив этих элементов, при этом каждая реализация перестановки характеризуется своим порядком следования в массиве. Число перестановок P_n определяется следующим образом

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n. \qquad (1.7)$$

Наиболее употребительными в применительной практике прикладной ТИ (ПТИ) из перечисленных соединений математической комбинаторики являются сочетания.

Характерным примером использования этого соединения является задача определения всех возможных вариантом искажений (ошибок) в двоичном $n-$разрядном двоичном коде при его передаче по каналу связи с помехами в случае, когда искажения могут происходить в одном разряде, двух и так далее до искажений сразу в $s-$разрядах с целью определения числа m избыточных разрядов, введение которых в состав кода позволит исправлять все указанные ошибки (искажения). Тогда число $N_{ош}$ всех возможных ошибок кратности от единицы до s определится выражением

$$N_{ош} = \sum_{i=1}^{s} C_n^i = C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^s = n + \frac{(n-1)n}{2} + \ldots + \frac{(n-s+1) \ldots (n-1)n}{s!}. \qquad (1.8)$$

Очевидно, для того, чтобы исправить ошибку необходимо указать ее место – адрес, который задается в виде $m-$разрядного двоичного кода, именуемого синдромом (опознавателем) ошибки. Синдром формируется с помощью декодирующего устройства (ДКУ) искаженного в КС кода, причем, если ошибки в принятом коде нет, ДКУ формирует нулевой синдром, а в случае ее наличия (но в числе разрядов не более чем s) ДКУ формирует ненулевой синдром – адрес. Тогда число m избыточных разрядов в составе $n-$разрядного двоичного кода определится с помощью выражения

$$m = \arg\left\{ N_c = 2^m - 1 \ge N_{ош} = \sum_{i=1}^{s} C_n^i \right\}, \qquad (1.9)$$

где N_c – число ненулевых синдромов.

Другим характерным примером использования соединения типа сочетание является задача «кодирования» транспортных средств государственными номерами с целью их учета. Так, например, при существующем способе формирования государственных номеров автомобиль в Санкт – Петербурге может иметь номер

Е 292 АР	78

в котором используются те буквы «кириллицы», которые по написанию совпадают с буквами «латиницы», при этом число 78 несет информацию о принадлежности автомобиля Санкт–Петербургу. Читателю предоставляется возможность определить полное число автомобилей, которые получат такие государственные номера.

1.1.3 Аддитивная мера количества информации Р.Хартли

Как и комбинаторная мера аддитивная мера количества информации Р.Хартли не является прямой, а является опосредованной, так как имеет дело не с исходным сплошным информационным массивом Q, а с его дискретным аналогом N_Q, характеризующимся информационным объемом V_Q (1.3). Алгоритмически аддитивная мера (если не считать первым этапом переход от сплошного информационного массива Q к его дискретному информационному аналогу N_Q с информационным объемом V_Q) конструируется в два этапа:

1.Кодирование элементов дискретного информационного массива N_Q l – разрядными кодами из элементов простого поля Галуа $GF(p)=\{1,2,\ldots p-1\}$, где характеристика поля p – целое положительное число, с последующей оценкой мощности (числа) полученных кодовых комбинаций в показательной форме

$$l = argmin\{p^l \geq V_Q\} \Rightarrow V_H = p^l ; \qquad (1.10)$$

2.Переход от показательной меры V_H количества информации к аддитивной мере Р.Хартли количества информации путем логарифмирования меры V_H по основанию два, что записывается в форме

$$J_H = log_2 V_H = log_2 p^l = l \cdot log_2 p \text{ (бит).} \qquad (1.11)$$

Нетрудно видеть, что количество информации в один бит содержит одноразрядный код с основанием $p = 2$. Действительно, если в (1.11) положить $l = 1$, $p = 2$, то получим

$$J_H = l \cdot log_2 p\,|_{l=1,p=2} = 1 \cdot log_2 2 = 1 \text{ (бит).} \qquad (1.12)$$

Примечание 1.1.Слово «бит» (по английски «bit») сконструировано на основе двух английских слов «binary»– двоичный и «digit» – знак.

1.2. Вероятностная мера количества информации К.Шеннона

Вероятностная мера количества информации предложена К.Шенноном в 1948 году. Ниже рассматриваются вероятностные меры количества информации К.Шеннона применительно к следующим информационным моделям:

- автономный источник дискретной информации (ИДИ);
- информационная система «источник дискретной информации – дискретный канал связи с помехами – получатель дискретной информации».

1.2.1.Вероятностная мера количества информации автономного ИДИ

Рассматривается источник дискретной информации, который выводит в пользовательскую информационную среду дискретные символы z_i, образующие алфавит $Z = \{z_i; i = \overline{1,n}\}$. Вывод символов из ИДИ происходит вероятностным образом с фиксированными на сеанс обращения к источнику информации вероятностями $p(z_i) = const\left(i = \overline{1,n}\right)$ появления символов z_i на его выходе, при этом выполняется стохастическое свойство

$$\sum_{i=1}^{n} p(z_i) = 1\,, \tag{1.13}$$

вероятность $p(z_i)$появления символа z_i не зависит от любого из предыдущих символов z_J (ИДИ без памяти).

Ставится задача: определить количество информации в пересчете на один символ, которое генерирует такой источник?

Эту задачу решил К.Шеннон в 1948 году, опираясь на следующие концепции.

Концепция 1.1. Вероятностная мера количества информации как и все структурные меры величина неотрицательная;

Концепция 1.2. Количество информации, которое несет в себе отдельно взятый символ z_i обратно пропорционально вероятности $p(z_i)$его появления на выходе ИДИ;

Концепция 1.3. Мера$J(z_i)$ количества информации, которое несет в себе отдельно взятый символ z_i вычисляется по логарифмической схеме Р.Хартли и потому измеряется в битах, что записывается в форме

$$J(z_i) = log_2\left(\frac{1}{p(z_i)}\right) = -log_2 p(z_i)\ (бит); \tag{1.14}$$

Концепция 1.4. Пользовательская информационная среда, в которую из источника информации выводятся символы z_i, представляет собой неявный получатель информации (ПИ), характеризующийся априорной степенью H неинформированности (незнания, неопределенности, информационного хаоса, беспорядка в мыслях), именуемой энтропией;

Концепция 1.5. Информация суть знания – совокупность полезных сведений, которая при этом, будучи принята неявным ПИ, полностью снимает его незнание (т.е. его информационную неопределенность, в которой он априори до обращения к источнику информации пребывал), тогда количество информации, которое несет источник, можно охарактеризовать величиной энтропии H.

Концепция 1.6. Энтропия H как средняя на символ по ансамблю символов, зафиксированных на выходе источника информации за сеанс обращения к нему, составляет вероятностную меру количества информации автономного ИДИ.

Для вычисления энтропии H автономного источника информации рассмотрим сеанс обращения к нему, в течение которого на выходе ИДИ зафиксирован ансамбль символов мощностью N, имеющей аддитивное представление

$$N = \sum_{i=1}^{n} N(z_i), \tag{1.15}$$

где $N(z_i)$ – мощность массива символов $z_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ в зафиксированном ансамбле. Для целей дальнейших исследований проблемы сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Если символы $z_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ источника информации статистически независимы, то массив символов мощностью $N(z_i)$, содержит в себе количество информации, определяемое выражением

$$J\{N(z_i)\} = N(z_i)J(z_i), \left(i = \overline{1,n}\right). \quad \square(1.16)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение агрегированный символ $\tilde{z}_i$, составленный из массива символов $z_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ числом (мощностью) $N(z_i)$, в силу статистической независимости символов источника вероятность $p(\tilde{z}_i)$ появления символа $\tilde{z}_i$ на выходе источника определится выражением

$$p(\tilde{z}_i) = \{p(z_i)\}^{N(z_i)}. \tag{1.17}$$

Вычислим количество информации, которое содержится в агрегированном символе $\tilde{z}_i$, воспользовавшись соотношением (1.14). Тогда получим на основании (1.14) и (1.17)

$$J(\tilde{z}_i) = -log_2 p(\tilde{z}_i) = -N(z_i) log_2 p(z_i) = N(z_i) J(z_i). \qquad ■(1.18)$$

Тогда среднее на символ по ансамблю мощности N количество $J_{cp}(N)$ информации определится выражением

$$J_{cp}(N) = \frac{\sum_{i=1}^{n} J(\tilde{z}_i)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N(z_i) J(z_i)}{N} = \frac{-\sum_{i=1}^{n} N(z_i) log_2 p(z_i)}{N} \text{(бит/символ)}. \qquad (1.19)$$

Совершим в (1.19) предельный по N переход, тогда получим искомое представление для энтропии автономного ИДИ

$$H = J_{cp} = \lim_{N \to \infty} \left\{ J_{cp}(N) = \frac{-\sum_{i=1}^{n} N(z_i) log_2 p(z_i)}{N} \right\} = -\sum_{i=1}^{n} p(z_i) log_2 p(z_i) \text{(бит/сим)}. \quad (1.20)$$

При совершении предельного перехода в (1.20) учтено предельное соотношение

$$\lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{N(z_i)}{N} \right\} = p(z_i), \left(i = \overline{1,n}\right). \qquad (1.21)$$

Нетрудно видеть, что энтропия как вероятностная мера количества информации автономного ИДИ обладает следующими свойствами:

Свойство 1.1. Энтропия H всегда неотрицательна. Справедливость такого свойства вытекает из соотношения (1.21), которое при любых величинах вероятностей $p(z_i)$ никогда не приводит к отрицательному значению.

Свойство 1.2. сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 1.2.Энтропия H источника становится равной нулю $(H = 0)$, когда появление символа z^* алфавита $Z = \left\{z_i; i = \overline{1,n}\right\}$ на выходе ИДИ приобретает свойство достоверного события, что имеет место при $p(z^*) = 1$ и $p(z_i) = 0$ для$\left\{z_i \left(i = \overline{1,n}\right) \& \ z_i \neq z^*\right\}$. □

Доказательство утверждения построим на доказательстве справедливости предельных переходов:

$$\lim_{p(z^*) \to 1} \left\{- p(z^*) log_2 p(z^*)\right\} = 0;$$

$$\lim_{p(z_i) \to 0} \left\{- p(z_i) log_2 p(z_i)\right\} = 0.$$

Справедливость первого предельного перехода обнаруживается непосредственной подстановкой $p(z^*) = 1$. Для доказательства справедливости второго предельного перехода произведем цепочку преобразований, а затем воспользуемся правилом Лопиталя раскрытия неопределенностей под знаком предела. Цепочка преобразований имеет вид

$$\lim_{p(z_i)\to 0}\{-p(z_i)log_2 p(z_i)\} = \lim_{p(z_i)\to 0}\left\{p(z_i)log_2\frac{1}{p(z_i)}\right\}\Bigg|_{\frac{1}{p(z_i)}=q_i} = \lim_{q_i\to\infty}\left\{\frac{log_2 q_i}{q_i}\right\} =$$

$$= \lim_{q_i\to\infty}\left\{(ln2)^{-1}\frac{ln(q_i)}{q_i}\right\} = (ln2)^{-1}\lim_{q_i\to\infty}\left\{\frac{\frac{\partial}{\partial q_i}ln(q_i)}{\frac{\partial}{\partial q_i}q_i}\right\} = (ln2)^{-1}\lim_{q_i\to\infty}\left\{\frac{1}{q_i}\right\} = 0.$$

Подстановка полученных результатов предельных переходов в выражение (1.20) делает справедливым утверждение 1.2. ■

Примечание 1.2. Источник информации, обладающий свойством 1.2 именуется вырожденным, вырождение его состоит в том, что на своем выходе ИДИ формирует только один символ z^*, он становится информационно бесполезным.

Свойство 1.3 сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 1.3. Энтропия H ИДИ становится максимальной и принимает значение

$$H = log_2 n \text{ (бит/символ)}, \qquad (1.22)$$

когда все символы z_i алфавита $Z = \{z_i; i = \overline{1,n}\}$, оказываются равновероятными, что характеризуется выполнением соотношения

$$p(z_i) = p(z_j) = \frac{1}{n} = n^{-1}; (i, j = \overline{1,n}). \qquad (1.23)$$

Доказательство утверждения 1.3 строится на использовании соотношения (1.20) для вычисления энтропии ИДИ, в которое следует подставить $p(z_i)$ со значение (1.23), в результате для энтропии источника информации становится справедливым представление

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p(z_i)log_2 p(z_i) = -\sum_{i=1}^{n} n^{-1}log_2(n^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} n^{-1}log_2 n = n(n^{-1}log_2 n) = log_2 n$$ ■

Свойство 1.4 является следствием из свойства 1.3.

С ростом мощности n алфавита $Z = \{z_i; i = \overline{1,n}\}$ ИДИ информационно обогащается так, как при этом росте растет энтропия H источника информации, с уменьшением мощности n алфавита $Z = \{z_i; i = \overline{1,n}\}$ ИДИ информационно обедняется так, как при этом уменьшении падает энтропия H источника информации, при этом в случае $n = 2$ максимальное значение энтропии H источника в силу соотношения (1.22) принимает величину $H_{\max} = 1$ бит/символ.

Рассмотрим теперь такое важное свойство ИДИ как избыточность. Будем при этом разделять избыточность на собственную и внешнюю.

Содержательно избыточность источника информации определяет степень его бесполезности. Сформируем пары $\{z_i, p(z_i)\}$, тогда источник информации можно задать в форме макровектора

ИДИ=$\{\{z_1, p(z_1)\}, \{z_2, p(z_2)\} \ldots \{z_n, p(z_n)\}\} = row\{\{z_i, p(z_i)\}; i = \overline{1,n}\}$. (1.24)

При этом энтропия H ИДИ в силу ее свойств удовлетворяет неравенствам

$$0 = H_{\min} \le H \le H_{\max} = log_2 n. \qquad (1.25)$$

Таким образом, чем ближе энтропия H источника информации к значению $H_{\min}$, тем он более избыточен (тем более бесполезен).Напротив, чем ближе энтропия H источника информации ближе к значению $H_{\max}$, тем он менее избыточен (тем более полезен).

В результате становится справедливым следующее определение.

Определение 1.1.Под собственной избыточностью источника информации понимается степень его бесполезности, оцениваемая степенью отличия его энтропии H от ее максимального значения $H_{\max}$.

Выделяют два вида оценки избыточности источника информации:

- абсолютную, обозначаемую в форме D_A,

- относительную, обозначаемую в форме D_o.

Аналитически эти оценки собственной избыточности источника информации задаются соответственно соотношениями

$$D_A = H_{\max} - H, \qquad D_o = \left(1 - \frac{H}{H_{\max}}\right) \cdot 100\%. \qquad (1.26)$$

Внешняя избыточность определяет степень заинтересованности получателя информации в источнике информации. Если априорную информированность ПИ оценить энтропией $H_{ПИ0}$, которая удовлетворяет условию

$$0 = H_{\min} \le H_{ПИ0} \le H_{\max} = log_2 n, \qquad (1.27)$$

то при $H_{ПИ0} = 0$ источник обладает для ПИ нулевой избыточностью, т.е. ПИ нуждается в информационных услугах ИДИ, а при $H_{ПИ0} = H_{\max} = log_2 n$ источник для ПИ является полностью избыточным, т.е. ПИ не нуждается в информационных услугах ИДИ.

Абсолютная D_A и относительная D_o оценки внешней избыточности источника информации определяются соответственно выражениями

$$D_A = H_{ПИ0}, \qquad D_o = \left(\frac{H_{ПИ0}}{H_{\max}}\right) \cdot 100\ \%. \qquad (1.28)$$

Завершая рассмотрение проблем, связанных с вероятностной мерой количества информации автономного ИДИ, опирающееся на понятие энтропия как меры количества информации источника информации сформулируем два концептуальных суждения.

Концептуальное суждение 1.1. Целью всякого управления является уменьшение энтропии как меры неопределенности и беспорядка в системной среде, управление, которое не решает этой задачи, является избыточным (ненужным). □

Концептуальное суждение 1.2.Любая стохастическая среда, характеризующаяся исходами z_i, образующими алфавит $Z = \{z_i; i = \overline{1,n}\}$ и обладающие вероятностями $p(z_i) = const\left(i = \overline{1,n}\right)$ появления символов z_i на выходе этой среды, может быть охарактеризована энтропией, вычисляемой в силу соотношения (1.20). □

1.2.2. Вероятностная мера количества информации информационной системы «источник дискретной информации – дискретный канал связи с помехами »

Рассматривается информационная система «источник дискретной информации – дискретный канал связи с помехами», представленная на рисунке 1.1.

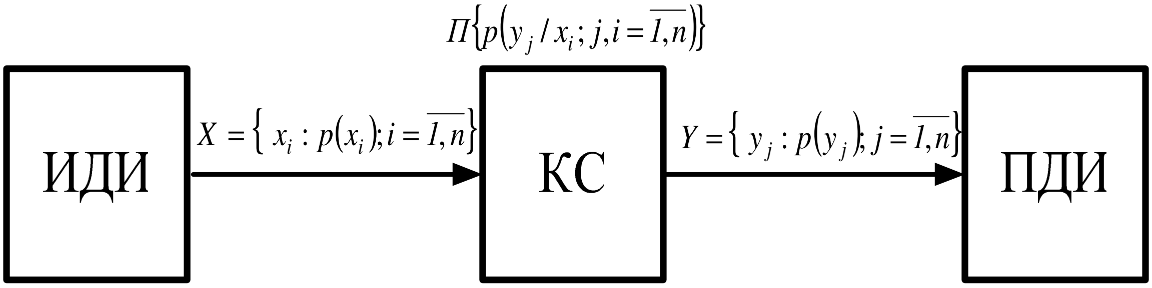

Рисунок 1.1

На рисунке 1.1 ИДИ, ПДИ и КС – соответственно источник дискретной информации, генерирующий символы $x_i\left(i = \overline{1,n}\right)$, образующие алфавит X; приемник дискретной информации, принимающий из канала связи символы $y_j\left(j = \overline{1,n}\right)$, образующие алфавит Y и канал связи, который представляет собой среду передачи с искажениями так, что под действием помех в КС символы алфавита X преобразуются в символы алфавита Y. Модельно в рассматриваемой задаче КС представляется матрицей условных (переходных) вероятностей

$$\Pi\{p(y_j / x_i)\} = col\{[row(p(y_j / x_i); i = \overline{1,n})]; j = \overline{1,n}\}. \qquad (1.29)$$

Процессы преобразования информации в информационной системе «ИДИ – КС» рассматриваются в предположении справедливости следующих концепций:

Концепция 1.7. Символы $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, образующие алфавит X, фиксируемые на выходе ИДИ, принадлежат генеральному алфавиту Z, образованный символами $z_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, так, что выполняется отношение тождественности

$$x_i \equiv z_i\ ;\left(i=\overline{1,n}\right). \qquad (1.30)$$

Концепция 1.8. Искажения передаваемых по каналу связи символов не приводит к появлению символов, не принадлежащих генеральному алфавиту Z, так, что выполняются отношения тождественности относительно мощностей алфавитов Z и Y, записываемое в форме

$$[Y] \equiv [Z], \qquad (1.31)$$

а также символов их образующих аналогично (1.30)

$$y_j \equiv z_j\ ;\left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.32)$$

Концепция 1.9. Безошибочный прием характеризуется выполнением условия

$$y_j = x_i \text{ при } j = i\ \left(i, j=\overline{1,n}\right). \qquad (1.33)$$

Вероятностная картина процесса передачи информации по каналу связи с искажениями, удовлетворяющей перечисленным выше концепциям 1.6 – 1.8, характеризуется вероятностными исходами в виде:

1. безусловных вероятностей $p(x_i)$появления на выходе ИДИ символа $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, порождающих энтропию источника

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) log_2 p(x_i); \qquad (1.34)$$

2. безусловных вероятностей $p(y_j)$появления на выходе КС т.е. на входе ПДИ символа $y_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, порождающих безусловную энтропию приемника

$$H(y) = -\sum_{j=1}^{n} p(y_j) log_2 p(y_j); \qquad (1.35)$$

3. условных вероятностей $p\left(y_j \middle| x_i\right)$появления на выходе КС символа $y_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ при передаче от ИДИ в КС символов $x_i\left(i=\overline{\overline{1,n}}\right)$, порождающих условную энтропию канальной среды:
– в сепаратной форме при передаче только $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$

$$H(Y|x_i)=-\sum_{j=1}^{n}p\left(y_j\middle|x_i\right)log_2 p\left(y_j\middle|x_i\right), \tag{1.36}$$

– в совокупной форме при передаче всего алфавита $X = \left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}$

$$H(Y|X)=\sum_{i=1}^{n}H(Y|x_i)p(x_i)=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\sum_{j=1}^{n}p\left(y_j\middle|x_i\right)log_2 p\left(y_j\middle|x_i\right). \tag{1.37}$$

Примечание 1.3. Условные (переходные) вероятности $p\left(y_j\middle|x_i\right)$, $\left(j,i=\overline{1,n}\right)$ образуют матрицу условных (переходных) вероятностей $p\left(y_j\middle|x_i\right)$ (1.29), записываемую поэлементно в виде

$$\Pi\left\{p\left(y_j / x_i\right)\right\}=\begin{bmatrix} p\left(y_1|x_1\right) & p\left(y_2|x_1\right) & \mathrm{K} & p\left(y_n|x_1\right) \\ p\left(y_1|x_2\right) & p\left(y_2|x_2\right) & \mathrm{K} & p\left(y_n|x_2\right) \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{K} & \mathrm{M} \\ p\left(y_1|x_n\right) & p\left(y_2|x_n\right) & \mathrm{K} & p\left(y_n|x_n\right) \end{bmatrix}. \tag{1.38}$$

Если из безусловных вероятностей $p\left(y_j\right)$ и $p(x_i)$ сформировать векторы – строки $row\left\{p\left(y_j\right); j=\overline{1,n}\right\}$и $row\left\{p(x_i); i=\overline{1,n}\right\}$, то они оказываются связаны через матрицу условных вероятностей векторно-матричным соотношением

$$row\left\{p\left(y_j\right); j=\overline{1,n}\right\}=row\left\{p(x_i); i=\overline{1,n}\right\}\Pi\left\{p\left(y_j / x_i\right)\right\}. \tag{1.39}$$

Если соотношение (1.39) разрешить относительно вектора – строки $row\left\{p(x_i); i=\overline{1,n}\right\}$, то получим выражение

$$row\left\{p(x_i); i=\overline{1,n}\right\}=row\left\{p\left(y_j\right); j=\overline{1,n}\right\}\left\{\Pi\left\{p\left(y_j / x_i\right)\right\}\right\}^{-1}, \tag{1.40}$$

где матрица $\left\{\Pi\left\{p\left(y_j / x_i\right)\right\}\right\}^{-1}$представляет собой матрицу условных вероятностей $p\left(x_i\middle|y_j\right)\left(j,i=\overline{1,n}\right)$ так, что становится справедливой запись

$$\left\{\Pi\left\{p\left(y_j / x_i\right)\right\}\right\}^{-1}=\Pi\left\{p\left(x_i / y_j\right)\right\}=\begin{bmatrix} p\left(x_1|y_1\right) & p\left(x_2|y_1\right) & \mathrm{K} & p\left(x_n|y_1\right) \\ p\left(x_1|y_2\right) & p\left(x_2|y_2\right) & \mathrm{K} & p\left(x_n|y_2\right) \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{K} & \mathrm{M} \\ p\left(x_1|y_n\right) & p\left(x_2|y_n\right) & \mathrm{K} & p\left(x_n|y_n\right) \end{bmatrix}. \tag{1.41}$$

Если КС без помех, т.е. он не вносит искажений в передаваемую информацию, то матрицы $\Pi\{p(y_j / x_i)\}$ и $\Pi\{p(x_i / y_j)\}$ оказываются единичными так, что выполняются соотношения

$$\Pi\{p(y_j / x_i)\} = I, \quad \Pi\{p(x_i / y_j)\} = I. \tag{1.42}$$

В силу (1.42) становится нулевой условная энтропия (1.37)$\{H(Y|X) = 0\}$ и оказывается справедливым соотношение между безусловными энтропиями $H(Y) = H(X)$ ИДИ и на выходе КС.

4. условных вероятностей $p(x_i|y_j)$появления на выходе ИДИ символа$x_i(i = \overline{1,n})$ при приеме из КС символов $y_j(j = \overline{\overline{1,n}})$, порождающих условную энтропию канальной среды:

$$H(X|Y) = \sum_{j=1}^{n} H(X|y_j)p(y_j) = -\sum_{j=1}^{n} p(y_j)\sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j)log_2 p(x_i|y_j). \tag{1.43}$$

Условная энтропия (1.43) в случае выполнения (1.42) становится нулевой.

5. вероятностей $p(y_i x_i)$совместных исходов $(y_i x_i), (i = \overline{1,n})$, фиксируемых на выходе ИДИ – выходе КС, порождающих совместную энтропию $H(YX)$ вероятностных исходов в информационной системе «ИДИ – КС с искажениями», определяемую выражением

$$H(YX) = -\sum_{i=1}^{n} p(y_i x_i) log_2 p(y_i x_i). \tag{1.44}$$

Совместная энтропия $H(YX)$ является вероятностной мерой информации информационной системы «ИДИ – КС с искажениями».

Если в канале связи искажений не происходит и при этом матрица условных вероятностей становится единичной $\{\Pi\{p(y_j / x_i)\} = I\}$, а условная энтропия – нулевой $\{H(Y|X) = 0\}$, совместная энтропия удовлетворяет условию

$$H(YX) = H(X), \tag{1.45}$$

то есть количество переданной по каналу связи информации равно ее количеству, фиксируемому на выходе источника информации.

Если в канале связи происходят искажения и при этом матрица переходных вероятностей становится неединичной $\{\Pi\{p(y_j / x_i)\} \neq I\}$, при этом условная энтропия – ненулевой $\{H(Y|X) \neq 0\}$, то совместная энтропия определяется выражением

$$H(YX) = H(X) - H(Y|X) \tag{1.46}$$

где условная энтропия $H(Y|X)$ определяется выражением (1.37)и характеризует информационные потери в канальной среде, связанные с трансформацией символов $x_i(i = \overline{1,n})$ в символы $y_j(j = \overline{1,n})$ в КС с искажениями, то есть количество переданной по каналу связи информации меньше ее количества $H(X)$, фиксируемого на выходе источника информации.

При этом возможна ситуация, когда $H(X)=H(Y|X)$, в результате чего совместная энтропия $H(YX)$ становится нулевой, канал вырождается, то есть передача по нему теряет смысл.

Примеры и задачи

1.1. Источник дискретной информации генерирует символы, образующие алфавит $X=\{x_1,x_2,x_3\}$.

а) Составить из символов сообщения $\tilde{x}_l = x_i x_j, \left(i,j=\overline{1,3}\right)$из двух букв на все сочетания, определить максимальное их число;

б) Определить для случая статистической независимости символов сообщения и их равновероятности $\{p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=1/3\}$ количество информации в среднем на одно сообщение (энтропию модифицированного источника, генерирующего двухсимвольные символы – сообщения);

в) Определить количество информации $J(x_i)$ в одном символе в случае их равновероятности $\{p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=1/3\}$;

г) Определить количество информации $J(x_i)$ в одном символе в случае их вероятностей $\{p(x_1)=0.3, p(x_2)=0.1, p(x_3)=0.6\}$;

д) Определить для случая статистической независимости символов сообщения и их вероятностей $\{p(x_1)=0.3, p(x_2)=0.1, p(x_3)=0.6\}$ количество информации в среднем на одно сообщение $\tilde{x}_l = x_i x_j, \left(i,j=\overline{1,3}\right)$ (энтропию модифицированного источника, генерирующего двухсимвольные символы – сообщения);

1.2. Каждое из N сообщений, передаваемых равномерным (с фиксированным числом разрядов) двоичным кодом, содержит 4 бита информации. Какое минимальное количество двоичных разрядов соответствует одному сообщению? Чему равно N ?

1.3. Чему равна энтропия система ИДИ, состоящей из l взаимонезависимых ИДИ, если:

а) каждый ИДИ состоит из n подИДИ, каждый из которых генерирует равновероятные символы $x_i\ (i=\overline{1,m})$: $p(x_i)=1/m$;

б) $j-$й ИДИ состоит из n_j подИДИ $\left(j=\overline{1,l}\right)$, каждый из которых генерирует равновероятные символы $x_i\ (i=\overline{1,m})$: $p(x_i)=1/m$.

1.4 Известно, что один из N возможных символов (сообщений) $x_i \left(i=\overline{1,N}\right)$ содержит информацию $J(x_i)$ в 5 бит ($J(x_i)=5$). Чему равно N, если все сообщения равновероятны $\left\{p(x_i)=1/N \left(i=\overline{1,N}\right)\right\}$?

1.5.ИДИ генерирует алфавит $X=\left(x_i : p(x_i)=0.25; i=\overline{1,4}\right)$. Чему равна $H(x)$энтропия источника? Какое количество информации $J(x_i)$содержится в символе x_1?

1.6. ИДИ генерирует алфавит $X=(x_i : p(x_1)=0.1; p(x_2)=0.2; p(x_3)=0.3; p(x_4)=0.4;)$. Чему равна $H(x)$ энтропия источника? Какое количество информации $J(x_i)$содержится в каждом символе $x_i \left(i=\overline{1,4}\right)$?

1.7. ИДИ генерирует алфавит $X=(x_i : p(x_1)=0.05; p(x_2)=0.05; p(x_3)=0.2; p(x_4)=0.7;)$. Чему равна избыточность источника?

1.8. ИДИ генерирует алфавит $X=\left(x_i : p(x_i) : i=\overline{1,8}\right)$,вероятности символов x_i которых приведены в таблице 1.1. Символы поступают в кодирующее устройство (КУ), в котором символы преобразуются в трехразрядные двоичные кодовые комбинации (см. таблицу 1.1). Кодовые комбинации из КУ старшим разрядом вперед выводятся в канал связи (КС). Определить:

а) энтропию $H(x)$ источника дискретной информации (ИДИ);

б)Избыточность ИДИ;

в)Количество информации на один элемент кодовой комбинации;

г)Вероятность $p\{011\}$ появления кодовой комбинации 011, если на выходе КУ в старшем разряде на первом такте вывода кода появился 0;

д)Как изменится вероятность появления кодовой комбинации 011, если за 0 в старшем разряде на первом такте на втором такте появится 1?

Таблица 1.1

символ	вероятность	код	символ	вероятность	код
x_i	$p(x_i)$	$k\{x_i\}$	x_i	$p(x_i)$	$k\{x_i\}$
x_1	0.25	000	x_5	0.0625	100
x_2	0.25	001	x_6	0.0625	101
x_3	0.125	010	x_7	0.0625	110
x_4	0.125	011	x_8	0.0625	111

1.9.Решить задачу 1.8 для случая, когда все сообщения равновероятны.

1.10.Определить энтропию ИДИ $H(x)$, который генерирует алфавит $X = \left(x_i : p(x_i) : i = \overline{1{,}8}\right)$, при этом относительная избыточность источника информации составляет величину $D_o = 0.08$.

1.11. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3 : p(x_1) = 0.5; p(x_2) = 0.3; p(x_3) = 0.2\}$, которые направляются в канал связи с искажениями, характеризующиеся матрицей условных вероятностей

$$\Pi\{p(y_j / x_i)\} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix},$$

так что на выходе КС генерируется алфавит
$Y = \{y_1, y_2, y_3 : p(y_1) = ?; p(y_2) = ?; p(y_3) = ?\}$.
Вычислить:
а) Вероятности $p(y_1) = ?; p(y_2) = ?; p(y_3) = ?$;
б) Безусловные энтропии $H(x)$и$H(y)$;
в) Условные энтропии $H(Y|X)$и$\mathrm{H}(X|Y)$;
г) Совместную энтропию $H(YX)$.

1.12. Решить задачу 1.11 при равновероятных символах на выходе ИДИ и той же матери условных вероятностей.

1.13. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1); p(x_2)\}$, которые направляются в канал связи с искажениями, характеризующиеся матрицей условных вероятностей

$$\Pi\{p(y_j / x_i)\} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) \end{bmatrix}.$$

Определить:
а) Значения условных вероятностей $p(y_1|x_1), p(y_2|x_1), p(y_1|x_2), p(y_2|x_2)$, при которых канал связи вырождается, если $p(x_1) = p(x_2) = 0.5$;
б) Значения условных вероятностей $p(y_1|x_1), p(y_2|x_1), p(y_1|x_2), p(y_2|x_2)$, при которых канал связи вырождается, если $p(x_1) = 0.3, p(x_2) = 0.7$.

1.14. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3 : p(x_1); p(x_2); p(x_3)\}$, которые направляются в канал связи с искажениями, характеризующиеся матрицей условных вероятностей

$$\Pi\{p(y_j / x_i)\} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Определить значение вероятностей $p(x_1) = ?; p(x_2) = ?; p(x_3) = ?$, при которых канал связи вырождается.

1.15. Алфавит ИДИ $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = 0.6; p(x_2) = 0.4\}$, символы которого подаются на вход двоичного канала связи. Вычислить энтропии $H(Y|X), H(Y), H(YX)$, если канальная матрица условных вероятностей имеет вид $\Pi\{p(y_j / x_i)\} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$.

Решение вариантов задач

Задача 1.1. Источник дискретной информации генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3\}$.

а) Составить из символов сообщения $\tilde{x}_l = x_i x_j, (i, j = \overline{1,3})$ из двух букв на все сочетания, определить их число;

б) Определить для случая статистической независимости символов сообщения и их равновероятности $\{p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3\}$ количество информации в среднем на одно сообщение (энтропию модифицированного источника, генерирующего двухсимвольные символы – сообщения);

в) Определить количество информации $J(x_i)$ в одном символе в случае их равновероятности $\{p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3\}$;

г) Определить количество информации $J(x_i)$ в одном символе в случае их вероятностей $\{p(x_1) = 0.3, p(x_2) = 0.1, p(x_3) = 0.6\}$;

д) Определить для случая статистической независимости символов сообщения и их вероятностей $\{p(x_1) = 0.3, p(x_2) = 0.1, p(x_3) = 0.6\}$ количество информации в среднем на одно сообщение $\tilde{x}_l = x_i x_j, (i, j = \overline{1,3})$ (энтропию модифицированного источника, генерирующего двухсимвольные символы – сообщения);

Решение. *а*) Перечислим все возможные двухсимвольные сообщения $\tilde{x}_l = x_i x_j, (i, j = \overline{1,3})$:

$\tilde{x}_1 = x_1x_1; \tilde{x}_2 = x_1x_2; \tilde{x}_3 = x_1x_3; \tilde{x}_4 = x_2x_1; \tilde{x}_5 = x_2x_2;$
$\tilde{x}_6 = x_2x_3; \tilde{x}_7 = x_3x_1; \tilde{x}_8 = x_3x_2; \tilde{x}_9 = x_3x_3;$ Общее число комбинаций из двух символов определяется выражением $N = p^n$, где $p = 3, n = 2$ $N = 9$;

б) Количество информации в одном сообщении $\tilde{x}_l = x_i x_j, \left(i, j = \overline{1,3}\right)$ $J(\tilde{x}_1) = log_2\left(1/p(\tilde{x}_l)\right) = log_2 N = log_2 9 = 3.169$ бит/символ.

в) Количество информации на символ $x_i \left(i = \overline{1,3}\right)$ первичного алфавита $J(x_1) = log_2\left(1/p(x_i)\right) = log_2 p = log_2 3 = 1.585$ бит/символ.

г) Количество информации, содержащееся в среднем по алфавиту в одном символе, равно энтропии источника, вычисляемой в силу определения в форме

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n=3} p(x_i) log_2 p(x_i) = -(0.1 log_2 0.1 + 0.3 log_2 0.3 + 0.6 log_2 0.6) = 0.332 +$$
$$+ 0.521 + 0.442 = 1.295 \text{ бит/символ.}$$

д) Количество информации, содержащееся в среднем по алфавиту $\tilde{X} = \left\{\tilde{x}_l ; l = \overline{1,9}\right\}$ модифицированного источника в одном символе $\tilde{x}_l$, равно энтропии этого источника, вычисляемой в силу определения в форме

$$H(\tilde{x}) = -\sum_{l=1}^{N=9} p(\tilde{x}_l) log_2 p(\tilde{x}_l) = -\sum_{l=1, j=1}^{n=3} \{p(x_i)p(x_j)\} log_2 \{p(x_i)p(x_j)\} =$$
$$= -\left\{\begin{matrix} 0.01 log_2 0.01 + 0.03 log_2 0.03 + \cdot 0.06 log_2 0.06 + 0.03 log_2 0.03 + \\ + 0.09 log_2 0.09 + 0.18 log_2 0.18 + 0.06 log_2 0.06 + 0.18 log_2 0.18 + \\ + 0.36 log_2 0.36 \end{matrix}\right\} =$$
$$= 2.59 \text{ бит/сообщение.}$$

Задача 1.2. Каждое из N сообщений, передаваемых равномерным (с фиксированным числом разрядов) двоичным кодом, содержит 4 бита информации. Какое минимальное количество двоичных разрядов соответствует одному сообщению? Чему равно N?

Решение. При кодировании каждому сообщению сопоставляется $n-$ разрядная двоичная кодовая комбинация. Следовательно, число таких кодовых комбинаций равно $N = 2^n$ и если все сообщения равновероятны, то энтропия источника в силу ее свойств определится выражением $H = log_2\left(N = 2^n\right) = nlog_2 2 = n$, но по условию задачи $H = 4$бби.Следовательно $n = 4$, а $N = 2^n = 2^4 = 16$.

Задача 1.3. Чему равна энтропия система ИДИ, состоящей из l взаимонезависимых ИДИ, если:

а) каждый ИДИ состоит из n подИДИ, каждый из которых генерирует равновероятные символы $x_i \, (i = \overline{1,m})$: $p(x_i) = 1/m$;

б) $j-$й ИДИ состоит из n_j подИДИ $\left(j = \overline{1,l}\right)$, каждый из которых генерирует равновероятные символы $x_i \, (i = \overline{1,m})$: $p(x_i) = 1/m$.

<u>Решение</u>. $a)$ Энтропия одной подсистемы $H = log_2\left(N = m^n\right) = nlog_2 m$. Поскольку системы независимы, то общая энтропия H_Σ равна сумме энтропий отдельных подсистем

$$H_\Sigma = \sum_{i=1}^{l}\left\{H_i = nlog_2 m\right\} = l \cdot nlog_2 m$$

$б)$ Энтропия отдельных подсистем $H_i = n_i log_2 m_i \left(i = \overline{1,l}\right)$

Энтропия H_Σ системы равна сумме отдельных подсистем

$$H_\Sigma = \sum_{i=1}^{l}\left\{H_i = n_i log_2 m_i\right\}. \qquad \blacksquare$$