2. ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ ПО КАНАЛАМ СВЯЗИ

Рассматривается информационная среда (ИС), представленная на рисунке 2.1.

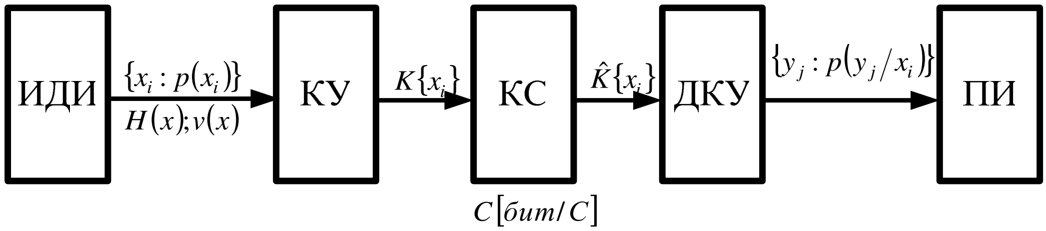

Рисунок 2.1

Информационная среда, представленная ее схемой рисунок 2.1, по составу подобна ИС, представленной схемой рисунок 1.1. Отличие этих схем состоит в том, что процессы в ИС рисунок 1.1. *не параметризованы временем*, а процессы в ИС рисунок 2.1 *параметризованы временем*. Иначе говоря, информационный процесс передачи – приема информации в ИС рисунок 1.1 задан в «статике», а в ИС рисунок 2.1 – в «динамике». Как следствие обнаруживаются и *функциональные* различия информационных сред рисунок 1.1 и рисунок 2.1. Если в первом случае КС – это среда, в которой *происходят искажения* передаваемой информации, то во втором случае КС – это транспортная техническая среда, по которой *передается сигнал*, представляющий собой *транспортабельную модель* информации, организованный в виде кодов символов, в которой могут, как и в случае ИС рисунок 1.1, происходить искажения передаваемых кодов, а, следовательно, и информации, которую они содержат.

На рисунке 2.1 ИДИ, КУ, КС, ДКУ и ПИ – соответственно источник дискретной информации, генерирующий символы $x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, образующие алфавит $X=Z$; кодирующее устройство, реализующее отображение $\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}\Rightarrow K\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}$, канал связи, по которому передаются кодовые посылки, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(p)=\{0,1,2\ldots p-1\}$, при этом канал связи реализует отображение $K\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}\Rightarrow\hat{K}\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}$, декодирующее устройство, которое принятый код $\hat{K}\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}$преобразует в символ, принадлежащий генеральному алфавиту Z, реализуя тем самым отображение $\hat{K}\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}\Rightarrow y_j\left(j=\overline{1,n}\right)$; получатель дискретной информации в виде символов $y_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, образующих алфавит $Y=Z$.

В решаемой задаче источник информации ИДИ характеризуется двумя его показателями:

– $H(x)$– энтропией источника, определяющей среднее на символ количество информации источника и обладающей физической размерностью $[H(x)]=$бит/символ;

– $v(x)$– скорость вывода информации из источника, характеризующейся физической размерностью $[v(x)]=$символ/С.

Кодирующее устройство, реализующее отображение $\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}\Rightarrow K\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}$, осуществляет кодирование символов x_i числовыми кодами $K\{x_i\}$, организованными в виде векторов – строк, компонентами которых являются элементы простого поля Галуа $GF(p)=\{0,1,2...p-1\}$, наиболее распространенной версией которого является двоичное поле Галуа $GF(p)\big|_{p=2}=\{0,1\}$, далее в основном будет иметься ввиду кодирование элементами двоичного поля Галуа. С учетом последнего обстоятельства числовой двоичный код $K\{x_i\}$ может строиться по различным правилам формирования кодов, при этом размерности $dimK\{x_i\}$ кодов конкретных символов x_i удовлетворяют неравенству $1\le dimK\left\{x_i\left(i=\overline{1,n}\right)\right\}\le n$.

Двоичные коды $K\{x_i\}$ представляют собой вектор – строки, элементами которых являются «нули» и «единицы». В канал связи двоичные коды передаются в сигнальной последовательности, состоящей из элементарных сигналов $u(0)$ и $u(1)$, первый из которых несет информацию о математическом значении «0», а второй – о математическом значении «1». Видов элементарных сигналов $u(0)$ и $u(1)$ практика современного кодирования имеет большое множество, но наиболее распространены двоичные коды, в которых $u(0)$, $u(1)$ представляет собой прямоугольный, треугольный, косинусоидальный или гауссоидальный импульс. Каждый из перечисленных импульсов характеризуется свой шириной амплитудного частотного спектра и своей сложностью технологии его формирования. Наиболее простой технологией формирования обладает прямоугольный импульс, что сделало его наиболее употребительным в практике кодирования.

Рассмотрим амплитудный частотный спектр $S_U(\omega)$ элементарного сигнала $u(1)$, реализуемого в виде прямоугольного импульса $U(t)$ длительности τ и с амплитудой U_0, задаваемого в форме

$$U(t)=\begin{cases}U_0 \;\, при \;\, |t|\le \tau/2\\ 0 \;\;\, при \;\, |t|>\tau/2\end{cases}. \tag{2.1}$$

Амплитудный частотный спектр $S_U(\omega)$ представляет собой интеграл Фурье от сигнала вида (2.1), что записывается в форме

$$S_U(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt \right| = \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 e^{-j\omega t} dt \right| = \left| -\frac{U_0}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \right| = \frac{2U_0}{\omega} |\sin(\omega\tau/2)|$$

, (2.2)

при этом при $\omega = 0$ амплитудный частотный спектр $S_U(\omega)$ принимает значение

$$S_U(\omega)\big|_{\omega=0} = S_U(0) = U_0\tau. \qquad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что при значении ω, удовлетворяющем условию

$$\omega = arg\{\omega\tau/2 = \pi\}, \qquad (2.4)$$

амплитудный частотный спектр обращается в нуль так, что выполняется равенство $S_U(\omega) = 0$. Таким образом, соотношение (2.4) определяет ширину $\Delta\omega_U$ амплитудного частотного спектра в положительной области частот единичного импульса $U(t)$, определяемую выражением

$$\Delta\omega_U = 2\pi/\tau. \qquad (2.5)$$

Если воспользоваться связью круговой частоты ω с циклической f в форме

$\omega = 2\pi f$, то на основании (2.5) можно записать для ширины Δf_U спектра

$$\Delta f_U = 1/\tau. \qquad (2.6)$$

Соотношения (2.5),(2.6) определяют ширину спектра $S_U(\omega)$ единичного импульса на уровне 90% энергии $\|U(t)\|^2$ единичного импульса. Это нетрудно проверить, если воспользоваться соотношением Релея

$$\|U(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [U(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_U(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|S_U(\omega)\|^2 \qquad (2.7)$$

и установить прямым интегрированием, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega_U}^{\Delta\omega_U} [S_U(\omega)]^2 d\omega \cong \frac{0.9}{2\pi} \|S_U(\omega)\|^2 \cong 0.9 \|U(t)\|^2. \qquad (2.8)$$

Канал связи (КС), по которому передаются кодовые сигналы, следует называть дискретным КС, а в случае $GF(p)\big|_{p=2} = \{0,1\}$ – двоичным. С позиции теории электрических цепей КС представляет собой «четырехполюсник», характеризующийся $M(\omega)$– амплитудной частотной характеристикой с полосой пропускания $\Delta\omega_{кс}$, определяемой соотношениями

$$\Delta\omega_{кс} = arg\{\omega \le \Delta\omega_{кс} : M(\omega) \ge 0.95\} = arg\{\omega \le \Delta\omega_{кс} : M^2(\omega) \ge 0.9\}. \qquad (2.9)$$

Условием согласования спектра $S_U(\omega)$сигнала в виде прямоугольного импульса и амплитудной частотной характеристики $M(\omega)$ КС, средствами которого он передается, является выполнение соотношений

$$\Delta\omega_U \le \Delta\omega_{кс},\ \Delta f_U \le \Delta f_{кс}, где\ \Delta f_{кс} = arg\{\Delta\omega_{кс} = 2\pi\Delta f_{кс}\} \qquad (2.10)$$

При выполнении условия (2.10) КС как структурный компонент информационной среды рисунок 2.1 характеризуется таким важным *информационным показателем,* как *пропускная способность*, содержание которого интуитивно понимаемое будет раскрыто ниже строго с помощью определения. Одновременно КС является главным компонентом информационной среды рисунок 2.1, в котором происходит искажение передаваемой информации на уровне передаваемых кодов символов.

Таким образом, цепочка функциональных компонентов ИС рисунок 2.1 «КУ – КС – ДКУ» информационно реализует матрицу $\Pi\{p(y_j / x_i)\}$условных вероятностей вида (1.38).

Ниже рассматриваются два случая передачи информации с оцениваемой предельно достижимой скоростью:

– по каналам связи без помех, когда матрица условных вероятностей оказывается единичной;

– по каналам связи с помехами, когда матрица условных вероятностей не является единичной и в КС имеют место информационные потери, связанные с трансформацией символов $x_i(i = \overline{1,n})$ в символы $y_j(j = \overline{1,n}; j \ne i)$

2.1. Передача информации по каналам связи без помех

Одна из задач прикладной теории информации состоит в установлении условий, при выполнении которых можно обеспечить *максимальную пропускную способность* канала связи, т.е. передать без искажений наибольшее количество информации в заданный временной интервал T.

Естественным образом решение этой задачи зависит от факта наличия или отсутствия помех в канале связи. Дадим определение пропускной способности КС для случая, когда помехи в канале связи отсутствуют.

Определение 2.1. Под *пропускной способностью* C, именуемой также *емкостью в единицу времени*, дискретного канала связи над простым полем Галуа $GF(p) = \{0,1,2K\ p-1\}$ понимается максимальное количество бит информации, которое можно передать за время, равное одной секунде. □

Аналитически пропускная способность дискретного КС определяется выражением

$$C = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{\log_2 N(T)}{T}\right\}, \qquad (2.11)$$

где $N(T)$ – число различных кодовых комбинаций (сообщений) длительностью T, физическая размерность пропускной способности $[C] = [бит/C]$.

Рассмотрим соотношение (2.11) для дискретного КС над произвольным полем Галуа $GF(p)=\{0,1,2\ldots p-1\}$, в котором передача информации ведется кодовыми последовательностями, составленными из элементарных сигналов, принимающих p значений $\{0,1,2\ldots p-1\}$ одинаковой длительности τ. За время T по такому КС может быть передано $n=T/\tau$ элементарных сигналов. Число различных кодовых комбинаций (сообщений) $N(T)$ из n элементов над полем Галуа $GF(p)=\{0,1,2\ldots p-1\}$, которые могут быть переданы в таком дискретном КС, определяется выражением

$$N(T)= p^n = p^{T/\tau}. \qquad (2.12)$$

Если (2.12) подставить в (2.11), то для пропускной способности дискретного КС получим

$$C = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{\log_2 N(T)}{T}\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{\frac{\log_2 p^{T/\tau}}{T}\right\} = (1/\tau)\log_2 p;[бит/C]. \qquad (2.13)$$

В случае двоичного канала связи, когда $p=2$, пропускная способность КС определяется выражением

$$C = (1/\tau)\log_2 p\big|_{p=2} = (1/\tau);[бит/C]. \qquad (2.14)$$

При этом если элементарный сигнал кода прямоугольный импульс, то на основании (2.6),(2.10),(2.14) для пропускной способности двоичного КС можно записать

$$C = (1/\tau) = \Delta f_U \le \Delta f_{кс};[бит/C]. \qquad (2.15)$$

Таким образом, из выражений (2.13),(2.14),(2.15) можно сделать вывод:

- чем больше основание p используемого кода;
- чем меньше длительность τ импульса, используемого в качестве элементарного сигнала кода;
- чем шире полоса $\Delta f_{кс}$ пропускания КС;

тем больше пропускная способность C канала связи.

Примечание 2.1(Пр2.1).Иногда пропускную способность КС определяют не в единицу времени, а на один элементарный сигнал, при этом такую пропускную способность обозначают через $C^{/}$ и определяют выражением

$$C^{/} = C/n^{/}, \qquad (2.16)$$

где $n^{/} = 1/\tau$ – число элементарных сигналов длительности τ, передаваемых по каналу связи за одну секунду. Тогда пропускная способность двоичного (бинарного) КС на элементарный сигнал на основании (2.14) и (2.16) определится выражением

$$C' = C/n' = \left(\frac{1}{\tau}\right)\Big/\left(\frac{1}{\tau}\right) = 1\,[\text{бит/элементарный сигнал}]. \qquad (2.17)$$

Таким образом, один элементарный сигнал в двоичном канале связи несет один бит информации, что позволяет впредь элементарный сигнал кода именовать *битом* кода.

Если соотношение (2.16) применить к дискретному каналу связи над полем Галуа $GF(p) = \{0, 1, 2 \ldots p-1\}$, то на основании (2.16) и (2.13) получим

$$C' = C/n' = \left(\frac{1}{\tau}\log_2 p\right)\Big/\left(\frac{1}{\tau}\right) = \log_2 p\,[\text{бит/элементарный сигнал}]. \quad (2.18)$$

Поставим теперь вопрос: с какой максимальной скоростью $v(x)$(символ/С) можно из источника информации ИДИ выводить символы x_i в двоичный канал связи с пропускной способностью C(бит/С) в условиях отсутствия помех в КС, при которой происходит безошибочная передача информации? На этот вопрос отвечает теорема К.Шеннона, которая приводится без доказательства.

Теорема К.Шеннона о *передаче информации по дискретному КС без помех*

Если источник дискретной информации (ИДИ) обладает энтропией $H(X)$, представляющей собой количество бит информации в среднем на символ сообщения, а двоичный канал связи обладает пропускной способностью C(бит/С) в единицу времени (секунду), то:
1.символы сообщения, формируемые ИДИ, всегда можно закодировать так, чтобы скорость $v(x)$ их вывода из источника в канал связи была сколь угодно близкой к

$$max\{v(x)\} = C/H(X)[символ/C], \qquad (2.19)$$

при этом гарантируется безошибочность передачи закодированного сообщения;
2.не существует способа кодирования, позволяющего сделать эту скорость большей, чем $max\{v(x)\}$ и гарантировать при этом безошибочность передачи закодированного сообщения. □■

Примечание 2.1. Величина, определенная выражением

$$H'(X) = v(x)H(X), \qquad (2.20)$$

именуется *потоком информации,* создаваемым источником дискретной информации. □

С использованием этого понятия теорема К.Шеннона о *передаче информации по двоичному КС без помех* получает прикладную формулировку: для безошибочной передачи информации поток информации не должен превышать пропускную способность дискретного канала связи

$$H^{/}(X) = v(x)H(X) \le C. \qquad (2.21)$$

2.2. Передача информации по каналам связи с помехами

Наличие помех в канале связи приводит к уменьшению его пропускной способности вследствие того, что помехи искажают часть передаваемых символов сообщений, а, следовательно, искажают передаваемую ими информацию.

При наличии помех в дискретном КС матрица $\{\Pi\{p(y_j / x_i)\} \ne I\}$ переходных вероятностей становится отличной от единичной. Энтропия агрегированного источника «ИДИ – КС с помехами» определяется совместной энтропией $H(YX)$, задаваемой в силу (1.46) соотношением

$$H(YX) = H(X) - H(Y|X). \qquad (2.22)$$

Энтропия агрегированного источника «ИДИ – КС с помехами» становится меньше энтропии $H(X)$ исходного ИДИ, как следствие, опираясь на соотношение (2.21), следует ожидать уменьшения пропускной способности КС с помехами.

Соотношения (2.21) и (2.22) позволяют для пропускной способности C_Π КС с помехами записать цепочку соотношений

$$C_\Pi = \{H(X) - H(Y|X)\}v(x) = v(x)H(X)\{1 - H(Y|X)/H(X)\} = C\{1 - H(Y|X)/H(X)\}. \qquad (2.23)$$

Тогда для случая передачи информации по каналам связи с помехами оказываются справедливыми положения следующей теоремы К.Шеннона, которая также приводится без доказательства.

Теорема К.Шеннона о *передаче информации по дискретному КС с помехами*

Если источник дискретной информации характеризуется энтропией $H(X)$, а дискретный канал связи обладает пропускной способностью C_Π, то:

1. символы сообщения, вырабатываемого ИДИ, всегда можно закодировать так, чтобы максимальная скорость $v(x)$ вывода символов из источника была бы сколь угодно близкой к величине

$$max\{v(x)\} = C_\Pi / H(X)[символ/C] \qquad (2.24)$$

так, что при этом вероятность ошибки передачи каждого символа может не превышать любого наперед заданного числа;

2. не существует метода кодирования, позволяющего вести передачу информации со скоростью выше $max\{v(x)\}$ и гарантировать при этом

вероятность ошибки передачи каждого символа меньше любого наперед заданного числа. □■

Другими словами, если обратиться к выражению (2.23), то его можно записать в двух формах:
первая из которых имеет вид

$$C_П = C\{1 - H(Y|X)/H(X)\}; \qquad (2.25)$$

вторая в свою очередь принимает вид

$$v(x)H(X)\{1 - H(Y|X)/H(X)\} = H(X)v(x)\{1 - H(Y|X)/H(X)\} = H(X)v_П(x), \qquad (2.26)$$

где $v_П(x)$ – скорость вывода символов сообщения из ИДИ в канал связи с помехами, определяемая выражением

$$v_П(x) = v(x)\{1 - H(Y|X)/H(X)\}. \qquad (2.27)$$

Таким образом, если передача информации ведется по каналу связи без помех, то условием согласования скорости вывода информации из источника в КС, при котором возможно безошибочная передача является равенство

$$C = H(X)v(x). \qquad (2.28)$$

Если же передача информации ведется по каналу с помехами, которые снижают пропускную способность дискретного КС до величины $C_П$, то условием согласования скорости вывода информации из источника в КС, при котором возможно передача со сколь угодно малой вероятностью ошибки, является равенство

$$C_П = H(X)v_П(x). \qquad (2.29)$$

Скорость вывода символов сообщения из источника дискретной информации в дискретный КС должна уменьшаться в той же мере, в какой уменьшается пропускная способность канала связи под действием помех.

Учитывая связь пропускной способности двоичного КС с длительностью элементарных сигналов кодов символов в форме (2.15) технически уменьшение пропускной способности КС обеспечивается переходом на передачу информации кодами, элементарные сигналы которых имеют длительность $\tau_П$, определяемую выражением

$$\tau_П = C_П^{-1} = \tau\{1 - H(Y|X)/H(X)\}^{-1}. \qquad (2.30)$$

Примечание 2.2. К.Шеннон также определил «технически достижимую предельную скорость» передачи информации (пропускную способность) по двоичному каналу в форме

$$C_П = v_П(x) max\{H(X)\}\big|_{max\{H(X)\}=1 (в\, двоичном\, КС)} = \Delta F log_2\{1 + P_C/P_П\}, \qquad (2.31)$$

где ΔF – эффективная полоса пропускания КС; P_C – средняя мощность сигнала передаваемого сообщения; $P_П$ – средняя мощность помехи с нормальным распределением амплитуд и равномерным спектром в полосе пропускания КС. Выражение (2.31) обнаруживает возможности передачи информации при любом уровне (мощности) помех с уменьшающейся скоростью и исчезновения КС в силу уменьшения пропускной способности двоичного КС до нуля при предельном переходе $P_C / P_П \to 0$. □

Примеры и задачи

2.1. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = 0.1; p(x_2) = 0.9\}$, которые направляются в двоичный канал связи без искажений, элементарные сигналы в котором имеют длительность $\tau = 1C$.

Определить с какой максимальной скоростью $v(x)$могут выводится символы в двоичный КС, при которой гарантируется безошибочная передача сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2\}$.

2.2. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = p(x_2) = 0.5\}$, которые направляются в двоичный канал связи без искажений, элементарные сигналы в котором имеют длительность $\tau = 1C$.

Определить с какой максимальной скоростью $v(x)$ могут выводиться символы в двоичный КС, при которой гарантируется безошибочная передача сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2\}$.

2.3. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3 : p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3\}$, которые направляются в двоичный канал связи без искажений, элементарные сигналы в котором имеют длительность $\tau = 1C$.

Определить с какой максимальной скоростью $v(x)$ могут выводиться символы в двоичный КС, при которой гарантируется безошибочная передача сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2, x_3\}$.

2.4. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = p(x_2) = 0.5\}$, которые направляются со скоростью $v(x) = 3 символ / C$ в двоичный канал связи без искажений, элементарные сигналы в котором имеют длительность $\tau = 0.25C$.

Определить, возможно ли гарантировать безошибочную передачу сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2\}$, при указанных выше условиях.

2.5. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3 : p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3\}$, которые направляются со скоростью $v(x) = 3 символ / C$ в двоичный канал связи без искажений, элементарные сигналы в котором имеют длительность $\tau = 0.25C$.

Определить, возможно ли гарантировать безошибочную передачу сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2, x_3\}$, при указанных выше условиях.

2.6. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3 : p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3\}$, которые направляются со скоростью $v(x) = 3 символ/С$ в двоичный канал связи без искажений. Определить, при какой полосе Δf_{KC} пропускания КС можно гарантировать безошибочную передачу сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2, x_3\}$, при указанных выше условиях.

2.7. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2, x_3 : p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = 1/3\}$, которые направляются со скоростью $v(x)$ в двоичный канал связи без искажений, имеющий полосу пропускания $\Delta f_{KC} = 5 Гц$. Определить при какой скорости $v(x)$ можно гарантировать безошибочную передачу сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2, x_3\}$, при указанных выше условиях.

2.8.ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = 0.25; p(x_2) = 0.75\}$, которые направляются со скоростью $v(x) = 3 символ/С$ в двоичный канал связи без искажений, элементарные сигналы в котором имеют длительность τ. Определить при какой длительности τ элементарного сигнала можно гарантировать безошибочную передачу сообщений, составленных из символов $\{x_1, x_2\}$.

2.9. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = 0.25; p(x_2) = 0.75\}$, которые направляются со скоростью $v(x)(символ/С)$ в двоичный канал с искажениями, которые характеризуются матрицей условных вероятностей

$$П\{p(y_j / x_i)\} = \begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I .$$

Канал в случае отсутствия искажений, то есть при $П\{p(y_j / x_i)\} = I$, характеризуется пропускной способностью $C = 4 бит/С$.Определить:

а) $v(x)(символ/С)$ – скорость вывода символов из ИДИ и τ– длительность элементарного сигнала кода для канала без искажений, т.е. для случая $П\{p(y_j / x_i)\} = I$;

б) $v_П(x), C_П, \tau_П$ для случая КС с искажениями, характеризующегося матрицей $П\{p(y_j / x_i)\} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$.

2.10. Решить задачу 2.9. для случая, когда ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X = \{x_1, x_2 : p(x_1) = 0.5; p(x_2) = 0.5\}$.

2.11. Решить задачу 2.9. для случая, когда КС с искажениями характеризуется матрицей условных вероятностей $П\{p(y_j / x_i)\}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.

2.12. Решить задачу 2.9. для случая, когда ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X=\{x_1,x_2 : p(x_1)=0.5; p(x_2)=0.5\}$, а КС с искажениями характеризуется матрицей условных вероятностей $П\{p(y_j / x_i)\}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.

2.13. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X=\{x_1,x_2,x_3 : p(x_1)=0.5; p(x_2)=0.3; p(x_3)=0.2\}$, которые направляются в канал связи с искажениями, характеризующийся полосой пропускания $\Delta f_{КС}=5Гц$ и матрицей условных вероятностей

$$П\{p(y_j / x_i)\}=\begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix}.$$

Определить $v(x)(символ/C)$ – скорость вывода символов из ИДИ и τ – длительность элементарного сигнала кода для канала без искажений, т.е. для случая $П\{p(y_j / x_i)\}=I$.

2.14. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X=\{x_1,x_2,x_3 : p(x_1)=0.5; p(x_2)=0.3; p(x_3)=0.2\}$, которые направляются в канал связи с искажениями, характеризующийся полосой пропускания $\Delta f_{КС}=5Гц$ и матрицей условных вероятностей

$$П\{p(y_j / x_i)\}=\begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Определить $v_П(x), C_П, \tau_П$.

2.15. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X=\{x_1,x_2,x_3 : p(x_1); p(x_2); p(x_3)\}$, которые направляются в канал связи с искажениями, характеризующийся полосой пропускания $\Delta f_{КС}=5Гц$ и матрицей условных вероятностей

$$П\{p(y_j / x_i)\}=\begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) & p(y_3|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) & p(y_3|x_2) \\ p(y_1|x_3) & p(y_2|x_3) & p(y_3|x_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0.04 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Определить значения $\{p(x_1)=?; p(x_2)=?; p(x_3)=?\}$, при которых устанавливаются равенства $v_П(x)=0, C_П=0, \tau_П=\infty$.

Решение вариантов задач

Задача 2.9. ИДИ генерирует символы, образующие алфавит $X=\{x_1,x_2 : p(x_1)=0.25; p(x_2)=0.75\}$, которые направляются со скоростью $v(x)(символ/C)$ в двоичный канал с искажениями, которые характеризуются матрицей условных вероятностей

$$П\{p(y_j/x_i)\}=\begin{bmatrix} p(y_1|x_1) & p(y_2|x_1) \\ p(y_1|x_2) & p(y_2|x_2) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I .$$

Канал в случае отсутствия искажений, то есть при $П\{p(y_j/x_i)\}=I$, характеризуется пропускной способностью $C=4 бит/C$.Определить:

а) $v(x)(символ/C)$ – скорость вывода символов из ИДИ и τ – длительность элементарного сигнала кода для канала без искажений, т.е. для случая $П\{p(y_j/x_i)\}=I$;

б) $v_П(x), C_П, \tau_П$ для случая КС с искажениями, характеризующегося матрицей $П\{p(y_j/x_i)\}=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$.

<u>Решение</u>

а) При $П\{p(y_j/x_i)\}=I$, то есть в случае КС без искажений условие безошибочной передачи принимает вид (2.19) $max\{v(x)\}=C/H(X)[символ/C]$. Таким образом, для вычисления максимально допустимой скорости вывода символов из ИДИ в КС достаточно определить энтропию источника $H(x)$, для которой имеем

$$H(x)=-p(x_1)\log_2 p(x_1)-p(x_2)\log_2 p(x_2)=p(x_1)\log_2 p^{-1}(x_1)+p(x_2)\log_2 p^{-1}(x_2)=$$
$$=0.25\log_2 4+0.75\log_2 1.333=0.8108(бит/символ).$$

В результате получаем искомую величину

$$max\{v(x)\}=C/H(X)=\{4 бит/C\}/\{0.8108 бит/символ\}=4.9334 символ/C.$$

■

б) При $П\{p(y_j/x_i)\}\neq I$, то есть в случае КС с искажениями $v_П(x), C_П, \tau_П$ определяются выражениями (2.25), (2.27) и (2.30), в соответствие с которыми имеем для $C_П=C\{1-H(Y|X)/H(X)\}$, для $v_П(x)=v(x)\{1-H(Y|X)/H(X)\}$ и для $\tau_П=C_П^{-1}=\tau\{1-H(Y|X)/H(X)\}^{-1}$. Таким образом, для решение задачи необходимо знание условной энтропии $H(Y/X)$, которая для решаемой задачи принимает вид и значение

$$H(Y/X) = -p(x_1)\{p(y_1/x_1)\log_2 p(y_1/x_1) + p(y_2/x_1)\log_2 p(y_2/x_1)\} -$$
$$- p(x_2)\{p(y_1/x_2)\log_2 p(y_1/x_2) + p(y_2/x_2)\log_2 p(y_2/x_2)\} =$$
$$= -0.25\{0.9\log_2 0.9 + 0.1\log_2 0.1\} - 0.75\{0.01\log_2 0.01 + 0.99\log_2 0.99\} =$$
$$= 0.4467(\text{бит}/\text{символ})$$

Тогда для $\{1 - H(Y|X)/H(X)\}$ будем иметь $\{1 - H(Y|X)/H(X)\} = (1 - 0.4467/0.8108) = 1 - 0.551 = 0.449$, в результате для искомых величин получим

$C_П = C\{1 - H(Y|X)/H(X)\} = 4*0.449 = 1.796$(*бит/С*),

$v_П(x) = v(x)\{1 - H(Y|X)/H(X)\} = 4.9334 * 0.449 = 2.2157(\text{символ}/C)$,

$\tau_П = C_П^{-1} = \tau\{1 - H(Y|X)/H(X)\}^{-1} = (1.796)^{-1} = 0.5568C.$ ■