

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОДОВ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ ДВОИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

6.1. Аппарат передаточных функций в задаче модельного представления линейных двоичных динамических систем

Двоичные динамические системы (ДДС), интегрированные в некоторую техническую среду приема, хранения, обработки и передачи двоичной информации, при выполнении конкретных функций решают в основном задачи преобразования кодов, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, которое при $p=2$ принимает вид $GF(2) = \{0, 1\}$. Преобразуемые коды могут быть представлены тремя основными способами: в виде вектора, не параметризованного дискретным временем; в виде кодовой последовательности (скалярной или векторной), параметризованной дискретным временем и в виде модулярных многочленов (ММ). Если процесс преобразования кода, поданного на вход ДДС, в код, наблюдаемый на ее выходе, осуществляется с помощью линейной композиции результатов линейных операций умножения и суммирования по модулю два, то такая двоичная динамическая система является линейной (ЛДДС). Если при этом основной результат преобразования кодов с помощью ЛДДС фиксируется на ее выходе и входе, то описание функционирования такой ЛДДС может быть задано в классе модельных представлений «вход – выход».

Одним из конструктивных средств задания модельного представления «вход – выход» над бесконечными и конечными полями является аппарат передаточных функций (матриц). В основе методологии аппарата передаточных функций (матриц) лежит алгебраизация отношения «вход – выход», которое для непрерывных систем над бесконечным полем осуществляется с помощью преобразования Лапласа, для дискретных систем над бесконечным полем осуществляется с помощью Z -преобразования, а для дискретных систем над конечным простым полем Галуа $GF(p)$, частным случаем которых при $p=2$ являются ЛДДС, осуществляется с помощью D -преобразования кодовых последовательностей и модулярных многочленов (см. Приложение 2).

Передаточная функция, записанная в виде отношения двух полиномов, представляет собой решение графа, к которому может быть применено правило Мейсона не касающихся контуров в инверсной постановке. Суть инверсного использования правила Мейсона состоит в воссоздании класса графов с вложенными (касающимися) контурами

минимальной размерности, эквивалентных в смысле решений этих графов в форме передаточной функции отношения «вход – выход».

Построенный класс графов образует множество возможных структурных представлений ЛДДС, которые могут быть положены в основу схмотехнических реализаций двоичных динамических систем, решающих заданную задачу преобразования кодов.

Возможности аппарата передаточных функций (матриц) в задаче модельного представления ЛДДС рассмотрим, опираясь на систему определений и утверждений.

Определение 6.1. λ -мерной двоичной кодовой последовательностью

$$f(k): f(0), f(1), f(2) \dots f(k) \quad (6.1)$$

будем называть параметризованный дискретным временем k , выраженным в числе k тактов длительностью Δt , векторный кортеж, компоненты которого $f(k)$ для $\forall k$ представляют собой λ -мерные векторы, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(p)|_{p=2} = \{0,1\}$. \square

Если в (6.1) размерность λ компонентов равна единице ($l=1$), то последовательность $f(k)$ является скалярной или одномерной.

Кодовая последовательность (6.1) может быть конечной по времени и периодической, если выполняется равенство

$$f(k) = f(k+T), \quad (6.2)$$

где T – период периодической последовательности.

Определение 6.2. D -образом $F(d)$ двоичной кодовой последовательности (6.1) в силу прямого D -преобразования (см. Приложение 2) называется сходящаяся бесконечная сумма

$$F(d) = D\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)d^k. \square \quad (6.3)$$

Введем теперь в рассмотрение передаточные матрицы и функции линейной ДДС.

Определение 6.3. Пусть ЛДДС преобразует r -мерную входную двоичную кодовую последовательность (ДКП) $u(k)$ в m -мерную выходную ДКП $y(k)$, тогда передаточной матрицей $\Phi(d)$ этой ЛДДС называется матрица, связывающая D -образ $Y(d)$ выходной ДКП $y(k)$ с D -образом $U(d)$ входной ДКП $u(k)$ при нулевом начальном состоянии ЛДДС в силу соотношения

$$\Phi(d) = \arg\{Y(d) = \Phi(d)U(d)\}. \quad \square \quad (6.4)$$

Введем в рассмотрение (i, j) -й сепаратный канал ДДС, который связывает ее i -й выход $Y_i(k)$ с j -м входом $U_j(k)$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, r}$).

Тогда (i, j) -й сепаратный канал ЛДДС может быть описан передаточной функцией $\Phi_{ij}(d)$, задаваемой определением.

Определение 6.4. Передаточной функцией (i, j) -го сепаратного канала $\Phi_{ij}(d)$ ЛДДС называется отношение $Y_i(d)$ – D -образа выходной ДКП $y_i(k)$, наблюдаемой на i -м выходе системы и $U_j(d)$ – D -образа входной двоичной кодовой последовательности $u_j(k)$, поданной на j -й вход линейной ДДС, полученное при нулевом начальном состоянии ЛДДС:

$$\Phi_{ij}(d) = \frac{Y_i(d)}{U_j(d)}. \quad \square (6.5)$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_{ij}(d)$ является (i, j) -м компонентом передаточной матрицы $\Phi(d)$ (6.4). Таким образом, становится справедливым положение следующего утверждения.

Утверждение 6.1. Передаточная матрица $\Phi(d)$ (6.4) линейной ДДС, осуществляющей преобразование r -мерной кодовой последовательности $u(k)$ в m -мерную кодовую последовательность $y(k)$, имеющих представление

$$u(k) = \text{col}\{u_j(k), j = \overline{1, r}\}, y(k) = \text{col}\{y_i(k); i = \overline{1, m}\} \quad (6.6)$$

представляет собой $(m \times r)$ -матрицу, составленную из передаточных функций $\Phi_{ij}(d)$ (6.5) всех $(m \times r)$ ее (i, j) -х сепаратных каналов так, что становится справедливым представление

$$\Phi(d) = \text{row}\{\text{col}[\Phi_{ij}; i = \overline{1, m}], j = \overline{1, r}\}. \quad \square (6.7)$$

Если ЛДДС преобразует скалярную входную кодовую последовательность $u(k)$ в скалярную кодовую последовательность $y(k)$ так, что $r = m = 1$, то передаточная матрица (6.4) ЛДДС вырождается в передаточную функцию, задаваемую рекуррентным выражением

$$\Phi(d) \triangleq \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{M(d)}{N(d)} = \frac{\sum_{i=0}^{\lambda} \alpha_i d^i}{\sum_{j=0}^m \beta_j d^j}, \quad \beta_0 = 1, \quad \square (6.8)$$

где $M(d)$, $N(d)$ – модулярные многочлены (ММ) относительно переменной d , соответственно степеней λ и m .

Выделим теперь случай, когда входной и выходной коды задаются в форме модулярных многочленов

$$u(x) = u_\lambda x^\lambda + u_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \mathbf{K} + u_1 x + u_0, \quad (6.9)$$

$$y(x) = y_m x^m + y_{m-1} x^{m-1} + \mathbf{K} + y_1 x + y_0, \quad (6.10)$$

где λ и m именуется степенями ММ $u(x)$ и $y(x)$; u_ν ($\nu = \overline{1, \lambda}$), y_μ ($\mu = \overline{1, m}$) принадлежат простому полю Галуа $GF(p)|_{p=2} = \{0,1\}$, при этом приведение подобных при сложении и умножении модулярных многочленов производится по правилам сложения и умножения по модулю $p = 2$ ($\text{mod } p = \text{mod } 2$).

Процесс преобразования входного кода u , задаваемый ММ $u(x)$ (6.9) в выходной вектор y , задаваемый модулярным многочленом $y(x)$ (6.10), может быть так же описан с помощью передаточной функции $\Phi(d)$ вида (6.8), если будут сконструированы D -образы $U(d)$ и $Y(d)$ модулярных многочленов $u(x)$ и $y(x)$ соответственно.

D -образ модулярного многочлена зависит от того, каким разрядом вперед организована в среде линейных ДДС передача (преобразование) модулярных многочленов.

Утверждение 6.2. D -образ модулярного многочлена

$$f(x) = \sum_{k=n}^0 f_k x^k = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \mathbf{K} + f_1 x + f_0, \quad (6.11)$$

$F(d) = D\{f(x)\}$ при его передаче младшим разрядом вперед задается выражением

$$F(d) = D\{f(x)\} = f_0 + f_1 d^1 + f_2 d^2 + \mathbf{K} + f_{n-1} d^{n-1} + f_n d^n \quad \square \quad (6.12)$$

Доказательство утверждения состоит в формировании последовательности

$$f(k): f_0, f_1, \mathbf{K}, f_{n-1}, f_n, \quad (6.13)$$

с последующим применением к (6.13) прямого D -преобразования. ■

Утверждение 6.3. D -образ модулярного многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k, \quad (6.14)$$

$F(d) = D\{f(x)\}$ при его передаче старшим разрядом вперед задается выражением

$$\begin{aligned} F(d) &= D\{f(x)\} = \tilde{f}(x^{-1})|_{x^{-1}=d} = \\ &= f_n + f_{n-1} d + \mathbf{K} + f_1 d^{n-1} + f_0 d^n; \quad \tilde{f}(x^{-1}) = x^{-n} f(x) \end{aligned} \quad \square \quad (6.15)$$

Доказательство утверждения строится на формировании последовательности

$$\tilde{f}(k): f_n, f_{n-1}, \mathbf{K}, f_1, f_0, \quad (6.16)$$

с последующим применением к (6.16) прямого D -преобразования. ■

Заметим, что в современных устройствах преобразования кодов, заданных с помощью модулярных многочленов, их передача осуществляется старшим разрядом вперед.

Отмеченное выше позволяет ввести следующее определение.

Определение 6.5. ЛДДС, осуществляющая преобразование входного кода, заданного с помощью модулярного многочлена $u(x)$ (6.9), в выходной код, заданного с помощью модулярного многочлена $y(x)$ (6.10), может быть описана передаточной функцией вида (6.8), в которой D -образы $Y(d)$ и $U(d)$ вычисляются в силу (6.15). \square

Отдельного рассмотрения требует вопрос конструирования передаточной функции ДДС в случае, если ставится задача синтеза устройства умножения или деления модулярных многочленов. В данной постановке передаточная функция $\Phi(d)$ ДДС, осуществляющей умножение ММ $a(x)$ и $b(x)$, будет определяться в силу правила

$$\Phi(d) = \arg \{ (a(d) \vee b(d)) \& \deg \Phi(d) = \min \{ \deg a(d), \deg b(d) \} \}. \quad (6.17)$$

В случае, когда ставится задача конструирования ДДС, осуществляющей деление модулярного многочлена $a(x)$ и ММ $b(x)$ в форме $\frac{a(x)}{b(x)}$, то передаточная функция $\Phi(d)$ ДДС будет иметь вид

$$\Phi(d) = \frac{1}{b(d)}. \quad (6.18)$$

Представленные положения своей целью имеют получение структурного представления ЛДДС для последующей ее технической реализации. Получить структурное представление ЛДДС с использованием понятия передаточной функции (матрицы) позволяют положения следующего утверждения.

Утверждение 6.4. Структура модельного представления ЛДДС, описываемой передаточной функцией вида (6.8) с единичным свободным членом знаменателя, может быть построена с использованием правила не касающихся контуров метода Мейсона, в соответствии с которым она выразится в форме касающихся (вложенных друг в друга) контуров, передаточные функции которых заданы мультипликативной структурой из постоянного коэффициента α_i и соответствующей степени i переменной d знаменателя передаточной функции так, что их число не превышает m , а число прямых ветвей от входа к выходу этой реализации определяется числом ненулевых элементов числителя передаточной функции с

передаточными функциями ветвей $\beta_j d^j$, число которых не превышает $m+1$. □

Доказательство утверждения можно найти в литературе по теории графов. ■

Таким образом, положения утверждения 6.4 дают два канонических сложившихся в общей теории систем модельных представления ЛДДС, описываемых передаточной функцией вида (6.8), приведенных на рисунках 6.1 и 6.2.

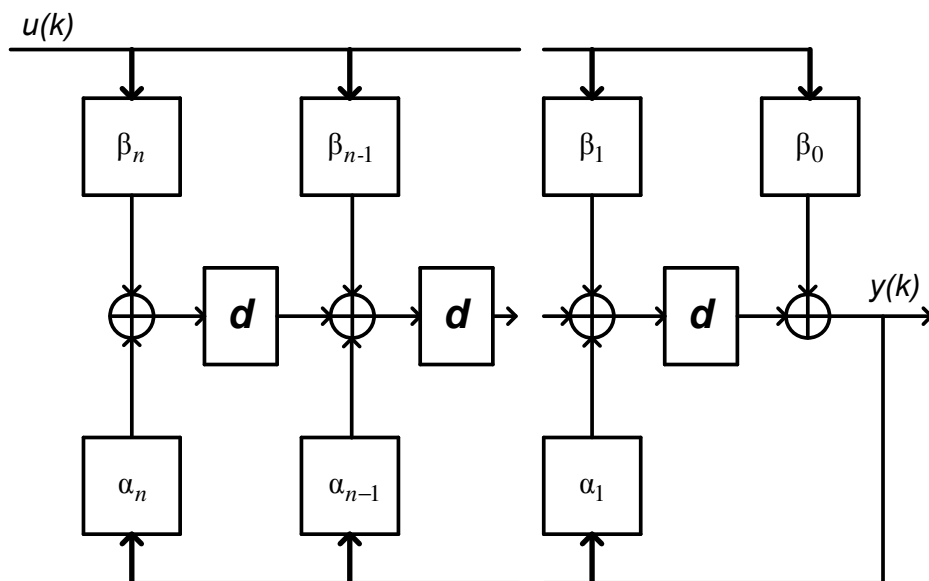


Рисунок 6.1 Представление ЛДДС в каноническом наблюдаемом базисе

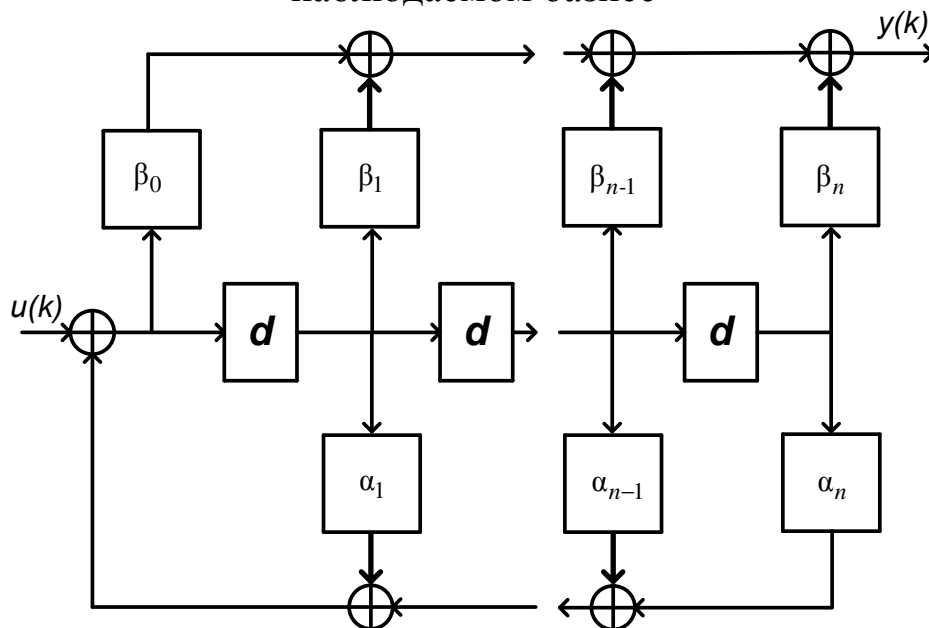


Рисунок 6.2. Представление ЛДДС в каноническом управляемом базисе

Элементы d модельных представлений, показанных на рисунках 6.1 и 6.2, имеют смысл, который раскрывают положения следующего утверждения.

Утверждение 6.5. Элемент памяти, передаточная функция $\Phi_{ЭП}(d)$ которого имеет представление

$$\Phi_{ЭП}(d) = d, \quad (6.19)$$

является D -триггером. \square

Доказательство утверждения строится на понятии D -триггера и свойстве D -преобразования для сдвинутой ДКП (см. Приложение 2). Из теории элементов дискретной автоматики известно, что D -триггер представляет собой элемент памяти (ЭП), реализующий задержку выходной $y(k)$ ДКП на один такт относительно входной $u(k)$ ДКП так, что $u(k) = y(k+1)$. Если теперь воспользоваться свойством D – преобразования для сдвинутой ДКП, то получим:

$$D\{y(k+1)\} = d^{-1}Y(d) = U(d) = D\{u(k)\},$$

откуда для $\Phi_{ЭП}(d)$ будем иметь:

$$\Phi(d) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{Y(d)}{d^{-1}Y(d)} = d = \Phi_{ЭП}(d). \quad \blacksquare$$

Положения раздела позволяют сформировать следующий алгоритм конструирования передаточной функции и построения структурного представления соответствующей ЛДДС.

Алгоритм 6.1

0. Сформулировать задачу преобразования кодов в одном из возможных вариантов: в форме ЛДДС, преобразующей входную последовательность в выходную, или в форме ЛДДС, осуществляющей умножение/деление ММ. Если рассматриваемая задача соответствует первому случаю, то продолжить выполнение алгоритма с п.1, если второму то – с п.6 алгоритма.

1. Задать преобразуемый (входной) двоичный код в форме двоичной кодовой последовательности $u(k)$ или модулярного многочлена $u(x)$.

2. Задать выходной двоичный код в форме ДКП $y(k)$ или ММ $y(x)$.

3. Вычислить $U(d)$ D -образ $u(k)$ или $u(x)$.

4. Вычислить $Y(d)$ D -образ $y(k)$ или $y(x)$.

5. Сконструировать передаточную функцию $\Phi(d)$ синтезируемой ЛДДС в форме (6.8) и перейти к выполнению п.7 алгоритма.

6. В случае конструирования ЛДДС, осуществляющую умножение ММ, вычислить ее передаточную функцию $\Phi(d)$ в силу (6.17). В случае конструирования ЛДДС, осуществляющую деление ММ, то вычислить ее передаточную функцию $\Phi(d)$ в силу (6.18).

7. С помощью правила Мейсона не касающихся контуров построить структурные представления передаточной функции $\Phi(d)$ в канонических структурных формах вида рисунок 6.1 или 6.2.

8. Сравнить реализации по векторному показателю сложности (ВПС) с компонентами, учитывающими число элементов памяти с передаточной функцией $\Phi_{эл}(d) = d$, число элементов двухвходового суммирования по $mod 2$, число точек ветвления распространения сигналов, число ветвей.

9. Принять к реализации одну из структур (с меньшей нормой ВПС). Осуществить схемотехническую реализацию принятой версии ЛДДС. ■

Пример 6.1.

В качестве примера рассматривается линейная ДДС, преобразующая входную единичную последовательность $u(k) = 1(k)$ в периодическую периода $T = 7$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

0. Выполним п.0 алгоритма 6.1, в соответствии с которым продолжим выполнение алгоритма с п.б.

1. Зададим преобразуемый (входной) двоичный код в форме двоичной кодовой последовательности $u(k)$:

$$u(k) = 1(k): 1111111 \mid 1111111 \text{ К}$$

2. В соответствии с расположением информационных разрядов в кодах Хэмминга (7,4) зададим выходной двоичный код в форме ДКП $y(k)$:

$$y(k): 1110100 \mid 1110100 \text{ К } 1110100.$$

3. Используя прямое D -преобразование (П2.1), вычислим $U(d)$ D -образ преобразуемой (входной) кодовой последовательности $u(k)$ в результате чего получим:

$$U(d) = \frac{1}{1+d}$$

4. Аналогично п.3 вычислим $Y(d)$ D -образ выходной ДКП $y(k)$ с учетом того, что она периодическая с периодом $T = 7$:

$$Y(d) = \frac{1 + d + d^2 + d^4}{1 + d^7}.$$

5. Сформируем передаточную функцию синтезируемой ЛДДС в форме (6.8) и перейдем к выполнению п.7 алгоритма

$$\Phi(d) = \frac{Y(d)}{U(d)} = \frac{(1 + d + d^2 + d^4)(1 + d)}{1 + d^7} = \frac{1 + d^3 + d^4 + d^5}{1 + d^7} \dots$$

7. С помощью правила Мейсона не касающихся контуров построим структурные представления передаточной функции $\Phi(d)$ в канонических структурных формах (рисунок 6.3, рисунок 6.4).

8. В соответствии с п.7 алгоритма при выбранной элементной базе технической реализации ДДС выполним сравнение полученных в п.7 модельных представлений ЛДДС по векторному показателю сложности, которое обнаруживает их идентичность. ■

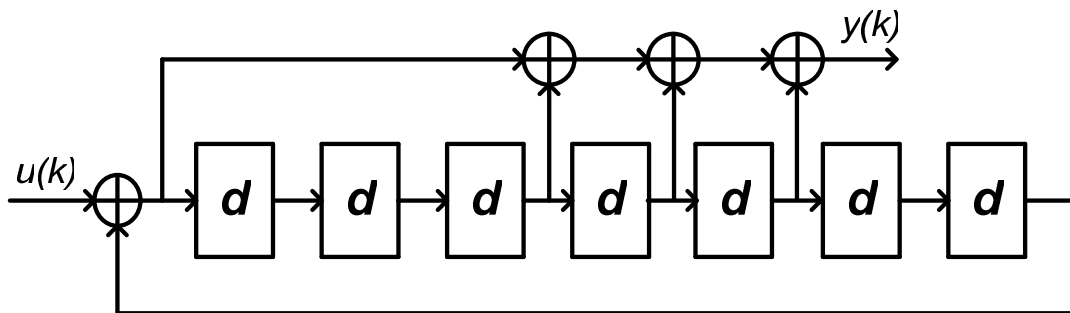


Рисунок 6.3

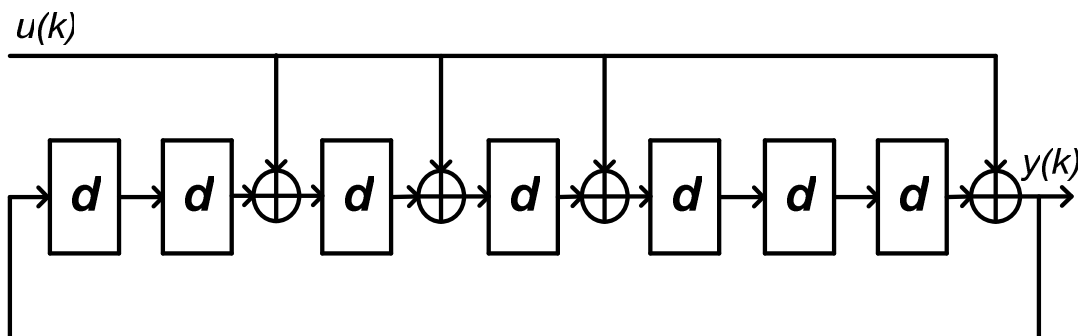


Рисунок 6.4

Пример 6.2.

Рассматривается задача конструирования линейной ДДС, осуществляющей деление произвольной входной ДКП (задаваемой в виде ММ $u(x)$) на неприводимый многочлен $\beta(x) = x^3 + x + 1$ с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед.

0. Выполним п.0 алгоритма 6.1, в соответствии с которым продолжим выполнение алгоритма с п.6.

6. Сконструируем передаточную функцию синтезируемой ЛДДС в форме (6.17) с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед:

$$\tilde{f}(x^{-1}) = x^{-3} f(x) = 1 + x^{-2} + x^{-3};$$

$$\beta(d) = \tilde{\beta}(x^{-1})|_{x^{-1}=d} = 1 + d^2 + d^3$$

$$\Phi(d) = \frac{1}{\beta(d)} = \frac{1}{1 + d^2 + d^3}.$$

7. С помощью правила Мейсона не касающихся контуров построим структурные представления полученной передаточной функции $\Phi(d)$ в канонических структурных формах (см. рисунок 6.5, рисунок 6.6):

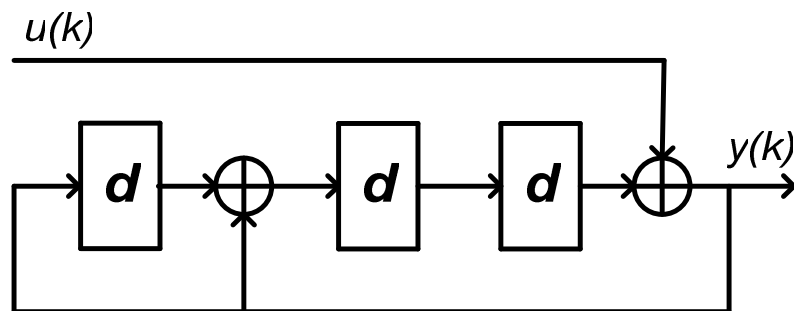


Рисунок 6.5

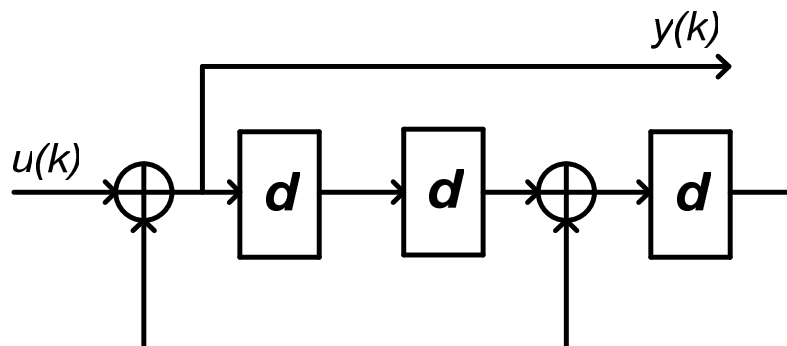


Рисунок 6.6

6.2 Векторно-матричное модельное представление линейных двоичных динамических систем, свойства квадратных матриц над двоичным конечным полем Галуа

Общесистемные тенденции к расширению банка модельных представлений динамических систем над бесконечными и конечными полями привели разработчиков теории систем к достаточно универсальной модельной среде (МС), которая опирается на триаду «вход–состояние–выход» (ВСВ). Применительно к двоичным динамическим системам модель ВСВ последних имеет вид

$$\text{ДДС: } \{ u, x, y, k, \lambda, \delta \} \quad (6.20)$$

где u – r -мерный вектор входной последовательности; x – n -мерный вектор состояния ДДС; y – m -мерный вектор выходной последовательности; k – счетное множество моментов преобразования кодовых последовательностей, осуществляемого ДДС; λ – правило перехода ДДС из исходного состояния $x(k)$ в состояние перехода $x(k+1)$ под действием вектора входной последовательности $u(k)$; δ – правило выхода, описывающее процесс формирования элементов выходной последовательности $y(k)$ на переходе из состояния $x(k)$ под действием $u(k)$ или как функции только состояния $x(k)$.

Введем в рассмотрение следующее определение.

Определение 6.6. Каноническим представлением «вход–состояние–выход» произвольной двоичной динамической системы (6.20) называется ее представление в виде двух векторных выражений

$$x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \quad (6.21)$$

$$y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \quad \square (6.22)$$

Векторное модельное описание ВСВ в форме (6.21), (6.22) произвольной ДДС имеет структурное представление, приведенное на рисунке 6.7.

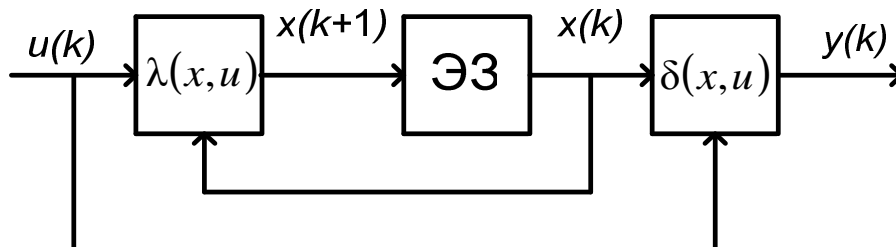


Рисунок 6.7

На рисунке 6.7 ЭЗ – элемент задержки на один такт преобразования кодов образует блок памяти (БП); блоки $\lambda(x, u)$, $\delta(x, u)$ образуют комбинационную схему (КС) произвольной ДДС.

Определение 6.7. Если правило перехода $\lambda(x, u)$ и правило выхода $\delta(x, u)$ ДДС (6.21), (6.22) допускают представление в виде композиции линейных операций умножения матрицы на вектор и суммирования в рамках правил модулярной арифметики по модулю $p = 2$ так, что (6.21) и (6.22) принимают вид

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0); \quad (6.23)$$

$$y(k) = Cx(k) + Nu(k), \quad (6.24)$$

то такая ДДС называется линейной. В (6.21), (6.22) A – $(n \times n)$ -матрица состояния, B – $(n \times r)$ -матрица входа, C – $(n \times m)$ -матрица выхода, N – $(m \times r)$ -матрица вход-выход ДДС, $x(0)$ – начальное состояние ДДС. \square

Краткости ради представление (6.23), (6.24) ЛДДС будем называть ее (A, B, C, N) – матричным представлением.

Линейное векторно-матричное представление (6.23), (6.24) двоичной динамической системы имеет структурный графический аналог, приведенный на рисунке 6.8. На рисунке 6.8 ЭЗ – элемент задержки, который образует БП ЛДДС, а блоки с матричными коэффициентами передачи B, A, C, N и сумматоры по модулю $p = 2$ образуют комбинационную схему линейной ДДС.

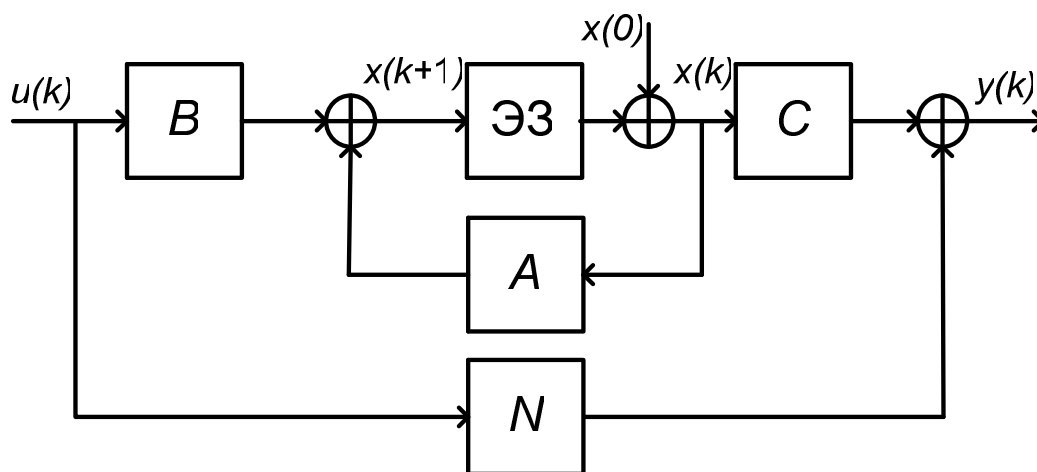


Рисунок 6.8

Векторно-матричное представление (ВМП) (6.23), (6.24) линейной ДДС называется рекуррентным, наряду с которым существует и суммарное ВМП ЛДДС. Суммарное векторно-матричное представление линейной ДДС введем с помощью утверждения.

Утверждение 6.6. Суммарное векторно-матричное представление ЛДДС (6.23), (6.24) задается соотношениями

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i), \quad (6.25)$$

$$y(k) = C A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-1-i} B u(i) + N u(k) \quad \square (6.26)$$

Доказательство утверждения строится с использованием рекуррентного соотношения (6.23), которое для первых трех тактов позволяет записать

$$x(1) = A x(0) + B u(0);$$

$$x(2) = A x(1) + B u(1) = A^2 x(0) + A B u(0) + B u(1);$$

$$x(3) = A x(2) + B u(2) = A^3 x(0) + A^2 B u(0) + A B u(1) + B u(2).$$

Полученная база индукции для любого момента k делает справедливым представление

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i). \quad (6.27)$$

Второе соотношение суммарной ВМП ЛДДС в форме (6.26) получается подстановкой (6.27) в (6.24). ■

Соотношение (6.27) допускает модификацию, обнаруживающую динамическое преимущество моделей ВСВ над моделями «вход-выход», коими являются передаточные функции двоичных динамических систем. Модифицированное представление суммарной ДДС зададим с помощью утверждения.

Утверждение 6.7. Суммарная модель (6.27) процессов по вектору состояния линейной ДДС допускает представление

$$x(k) = A^k x(0) + W_y(k) U(k), \quad (6.28)$$

где

$$U(k) = [u^T(k-1), u^T(k-2), \dots, u^T(1), u^T(0)]^T \quad (6.29)$$

$$W_y(k) = [B \mid AB \mid \dots \mid K \mid A^{k-1}B], \quad (6.30)$$

при этом $U(k)$ именуется «вектором стратегии» перевода ЛДДС из начального состояния $x(0)$ в желаемое состояние $x(k)$ за k -тактов, а матрица $W_y(k)$ (6.30) именуется матрицей управляемости линейной двоичной динамической системы за k -тактов. □

Доказательство утверждения строится на представлении выражения (6.27) в форме

$$x(k) + A^k x(0) = B u(k-1) + A B u(k-2) + A^2 B u(k-3) + \dots + K + A^{k-2} B u(1) + A^{k-1} B u(0) \quad (6.31)$$

Выражение (6.31) путем введения агрегированных матрицы и вектора в правой части позволяет записать

$$x(k) + \mathbf{A}^k x(0) = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \right] \left[u^T(k-1), u^T(k-2), \dots, u^T(1), u^T(0) \right]^T \quad (6.32)$$

Введение обозначений (6.29), (6.30) приводит (6.32) к виду (6.28). ■

Представление (6.28) позволяет сформулировать критерий управляемости линейной ДДС с индексом управляемости, равным k .

Утверждение 6.8. Для того чтобы линейная ДДС (6.23), (6.24) была полностью управляемой с индексом управляемости равным k , то есть за k тактов линейная двоичная система могла быть переведена из любого начального состояния $x(0)$ в любое конечное состояние необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank } \mathbf{W}_y(k) = n = \dim x. \quad \square \quad (6.33)$$

Доказательство утверждения строится на том, что выполнение равенства (6.33) является необходимым условием обратимости матрицы $\mathbf{W}_y(k)$, то есть существования $\mathbf{W}_y^{-1}(k)$. Но если это так, то это условие становится достаточным для вычисления «вектора стратегии» управления $U(k)$ на основе (6.28), записываемого в форме

$$U(k) = \mathbf{W}_y^{-1}(k) \left(x(k) + \mathbf{A}^k x(0) \right) \quad (6.34)$$

для любых $x(k)$ и $x(0)$. ■

Условие полной управляемости с индексом $k < n = \dim x$ является достаточно жестким, более мягкой формой является условие полной управляемости с индексом $n = \dim x$, которое принимает вид

$$\text{rank } \mathbf{W}_y(n) = \text{rank} \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \right] = n = \dim x. \quad \square \quad (6.35)$$

Соотношение (6.35) является условием полной управляемости, то есть управляемости за n тактов, при этом используется обозначение $\mathbf{W}_y(n) = \mathbf{W}_y$, где матрица

$$\mathbf{W}_y = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \right] \quad (6.36)$$

именуется матрицей управляемости ЛДДС (6.23), (6.24).

По аналогии с (6.32) может быть сконструировано векторно-матричное соотношение, позволяющее по результатам измерений на первых k тактах выходной последовательности $y(k)$ и входной последовательности $u(k)$ восстановить начальное состояние $x(0)$ линейной ДДС.

Утверждение 6.9. Для того чтобы линейная ДДС (6.23), (6.24) была бы полностью наблюдаемой с индексом наблюдаемости k , то есть чтобы имелась возможность восстановить начальное состояние

$x(0)$ за первые k тактов, необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости $W_n(k)$ с индексом наблюдаемости k обладала рангом, равным $n = \dim x$, иначе чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \text{rank} \left\{ W_n(n) = \text{col} \left[CA^i; \quad i = \overline{0, k-1} \right] = \right. \\ \left. = \left[C \mid (CA)^T \mid (CA^2)^T \mid \dots \mid (CA^{k-1})^T \right]^T \right\} = n = \dim x. \quad \square \quad (6.37) \end{aligned}$$

Доказательство утверждения строится на формировании измерений на первых k тактах в силу (6.9) и (6.27)

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= Cx(0) + Nu(0) \\ y(1) &= Cx(1) + Nu(1) = CAx(0) + CBu(0) + Nu(1) \\ y(2) &= Cx(2) + Nu(2) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Nu(2) \\ \text{М} \\ y(k-1) &= Cx(k-1) + Nu(k-1) = CA^{k-1}x(0) + CA^{k-2}Bu(0) + \\ &\quad + CA^{k-3}Bu(1) + \dots + Nu(k-1) \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Сформируем на основе (6.38) вектор измерения $z(k)$ с компонентами

$$z(k) = \begin{bmatrix} y(0) + Nu(0) \\ y(1) + CBu(0) + Nu(1) \\ y(2) + CABu(0) + CBu(1) + Nu(2) \\ \text{М} \\ y(k-1) + CA^{k-2}Bu(0) + CA^{k-3}Bu(1) + \dots + Nu(k-1) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Совместное использование представлений (6.38) и (6.39) позволяет записать

$$z(k) = \text{col} \left[CA^i; \quad i = \overline{0, k-1} \right] x(0) = W_n(k) x(0). \quad (6.40)$$

Выполнение условия (6.37) является необходимым для обратимости матрицы наблюдаемости с индексом k $W_n(k)$, а существование матрицы $W_n^{-1}(k)$ является достаточным для вычисления вектора начального состояния ЛДДС $x(0)$ в силу (6.40) в форме

$$x(0) = W_n^{-1}(k) z(k). \quad \blacksquare$$

Нетрудно видеть, что условие (6.37) для матрицы наблюдаемости с индексом k является сильным, более слабым является выполнение этого условия для $k = n = \dim x$, тогда матрица наблюдаемости с индексом n $W_n(n)$ называется просто матрицей наблюдаемости

ЛДДС (6.8), (6.9) или пары матриц (A, C) и обозначается следующим образом

$$\mathbf{W}_n^{\Delta} = \mathbf{W}_n(n) = \text{col} \{ \mathbf{C} \mathbf{A}^i : i = \overline{0, n-1} \}. \quad \square \quad (6.41)$$

Векторно-матричная модель ВСВ линейной ДДС (6.8), (6.9) позволяет сконструировать модель «вход-выход» (ВВ) в форме передаточной функции (матрицы), а также в форме рекуррентного уравнения ВВ с матричными коэффициентами.

Утверждение 6.10. Линейная ДДС (6.8), (6.9) может быть описана передаточной функцией (матрицей) $\Phi(d)$, связывающей D -образ $Y(d)$ выходной последовательности $y(k)$ и D -образ $U(d)$ входной последовательности $u(k)$ в мультипликативной форме

$$Y(d) = \Phi(d)U(d) \quad (6.42)$$

где $\Phi(d)$ задается в виде

$$\Phi(d) = \mathbf{C} (d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{N}. \quad \square \quad (6.43)$$

Доказательство утверждения строится на применении к (6.8), (6.9) прямого D -преобразования, которое дает выражения

$$d^{-1}x(d) + d^{-1}x(0) = \mathbf{A}x(d) + \mathbf{B}U(d), \quad (6.44)$$

$$Y(d) = \mathbf{C}x(d) + \mathbf{N}U(d). \quad (6.45)$$

Если исключить из (6.44) и (6.45) $x(d)$ и разрешить их с использованием модальной арифметики относительно D -образа $Y(d)$, то получим

$$Y(d) = \{ \mathbf{C} (d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{N} \} U(d) + \mathbf{C} (d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} d^{-1}x(0). \quad (6.46)$$

Положив в (6.46) нулевое начальное состояние ЛДДС в форме $x(0) \equiv 0$, запишем для D -образа $Y(d)$ выходной последовательности

$$Y(d) = \{ \mathbf{C} (d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{N} \} U(d). \quad (6.47)$$

Сравнение (6.47) с (6.42) позволяет записать (6.43). \blacksquare

Из выражения (6.43) становится корректным вычисление $\Phi_{ij}(d)$ – передаточной функции (i, j) -сепаратного канала ЛДДС, связывающего i -й выход $y_i(k)$ с j -м входом $u_j(k)$ в виде

$$\Phi_{ij}(d) = \mathbf{C}^i (d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_j + \mathbf{N}_{ij}, \quad (6.48)$$

где \mathbf{C}^i – i -я строка матрицы \mathbf{C} , \mathbf{B}_j – j -й столбец матрицы \mathbf{B} и \mathbf{N}_{ij} – (i, j) -й элемент матрицы \mathbf{N} .

С целью дальнейших исследований воспользуемся разложением Д. К. Фаддеева резолвенты $(d^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$ ЛДДС (6.23), (6.24). Разложение построим в силу положений следующего утверждения.

Утверждение 6.11. Резольвента $(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$ ЛДДС (6.23), (6.24) может быть представлена в форме

$$(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A})} \left[L_0(d^{-1})^{n-1} + L_1(d^{-1})^{n-2} + L_2(d^{-1})^{n-3} + \Lambda \right. \\ \left. \Lambda + L_{n-2}(d^{-1}) + L_{n-1} \right], \quad (6.49)$$

где матричные компоненты \mathbf{L}_λ ($\lambda = \overline{1, n-1}$) определяются в силу рекуррентной процедуры Д. К. Фаддеева

$$\mathbf{L}_\lambda = a_\lambda \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{L}_{\lambda-1}, \lambda = \overline{1, n-1}; \mathbf{L}_0 = \mathbf{I}, \quad (6.50)$$

где элементы $a_\lambda, \lambda = \overline{1, n}$ суть коэффициенты характеристического полинома

$$\det(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A}) = (d^{-1})^n + a_1(d^{-1})^{n-1} + a_2(d^{-1})^{n-2} + \Lambda + a_{n-1}(d^{-1}) + a_n \quad \square(6.51)$$

Доказательство утверждения строится на последовательном умножении слева выражения (6.49) на характеристическую матрицу $(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A})$ ЛДДС (6.8), (6.9), затем на характеристический полином $\det(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A})$, записанный в форме (6.51), и приравнении матричных коэффициентов при скалярных степенях $(d^{-1})^\lambda, \lambda = \overline{0, n-1}$ слева и справа. Выполнение указанных действий приводит к (6.49) с матричными коэффициентами (6.50). ■

Утверждение 6.12. Линейная двоичная динамическая система (6.23), (6.24) может быть модельно представлена рекуррентным уравнением ВВ с матричными коэффициентами, которое имеет вид $y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + a_2 y(k+n-2) + \mathbf{K} + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) =$

$$= \mathbf{N} u(k+n) + (\mathbf{C} \mathbf{L}_0 \mathbf{B} + a_1 \mathbf{N}) u(k+n-1) + \mathbf{K} \\ \mathbf{K} + (\mathbf{C} \mathbf{L}_{n-2} \mathbf{B} + a_{n-1} \mathbf{N}) u(k+1) + (\mathbf{C} \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{B} + a_n \mathbf{N}) u(k). \quad \square(6.52)$$

Доказательство утверждения строится на подстановке резольвенты $(d^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$, записанной в форме (6.49), с характеристическим полиномом вида (6.50) в выражение (6.47), что позволяет записать

$$d^{-n} y(d) + a_1 d^{-(n-1)} y(d) + a_2 d^{-(n-2)} y(d) + \mathbf{K} + a_{n-1} d^{-1} y(d) + a_n y(d) = \\ = \mathbf{N} d^{-n} u(d) + (\mathbf{C} \mathbf{L}_0 \mathbf{B} + a_1 \mathbf{N}) d^{-(n-1)} u(d) + \mathbf{K} \\ \mathbf{K} + (\mathbf{C} \mathbf{L}_{n-2} \mathbf{B} + a_{n-1} \mathbf{N}) d^{-1} u(d) + (\mathbf{C} \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{B} + a_n \mathbf{N}) u(d) \quad (6.53)$$

Если теперь к левой и правой частям (6.53) применить обратное D -преобразование, памятуя о том, что при нулевых начальных условиях в силу свойств прямого D -преобразования выполняется соотношение

$$D^{-1}\{D[f(k+p)]\} = D^{-1}\{d^{-p}F(d)\} = f(k+p) \quad (6.54)$$

то становится понятным переход от (6.53) к (6.52). ■

Нетрудно видеть, что в структуре доказательств утверждений **6.11** и **6.12** содержится доказательство следующего утверждения.

Утверждение 6.13. Если передаточная функция $\Phi(d)$ линейной ДДС (6.23), (6.24) задана в форме отношения модулярных многочленов по положительным степеням переменной d

$$\Phi(d) = \frac{M(d)}{D(d)}. \quad (6.55)$$

где $M(d)$ и $D(d)$ соответственно ММ степеней $\deg M(d) = m$ и $\deg D(d) = n$, то характеристический полином $\det(d^{-1}I + A)$ матрицы состояния A ЛДДС с передаточной функцией (6.55) определится выражением

$$\det(d^{-1}I + A) = \tilde{D}(d^{-1}), \quad (6.56)$$

где $\tilde{D}(d^{-1})$ – модулярный полином по отрицательным степеням переменной d , вычисляется в силу соотношения

$$\tilde{D}(d^{-1}) = d^{-n}D(d). \quad \square \quad (6.57)$$

Теперь поставим обратную задачу – задачу конструирования (A, B, C, N) представления линейной ДДС в форме (6.23), (6.24) по ее передаточной функции $\Phi(d)$ отношения «вход-выход». Возможности решения поставленной задачи заложены в параграфе 6.1 структурными представлениями в виде рисунков 6.1 и 6.2 передаточных функций, а также тем обстоятельством, что элемент памяти с передаточной функцией $\Phi_{\text{ЭП}}(d) = d$ реализует задержку на один такт двоичного кодового преобразования произвольной переменной $\zeta(k+1)$, наблюдаемой на его входе, в переменную $\zeta(k)$, наблюдаемую на его выходе. Решение поставленной задачи представим в виде алгоритма.

Алгоритм 6.2

конструирования (A, B, C, N) представления ЛДДС
по ее передаточной функции $\Phi(d)$

1. Выполнить алгоритм 6.1.
2. Разметить выбранную структурную реализацию передаточной функции $\Phi(d)$, для чего выходам элементов памяти с передаточной функцией $\Phi_{\text{ЭП}}(d) = d$ в определенном порядке

присвоить переменную $x_i(k)$, а их непосредственным входам – переменную $x_i(k+1)$.

3. По размеченной структурной реализации передаточной функции $\Phi(d)$ сконструировать матрицы A, B, C и N векторно-матричного представления линейной ДДС в форме (6.23), (6.24). ■

Для приведенных на рисунке 6.1 и рисунке 6.2 структурных реализаций $\Phi(d)$, заданной в форме отношения двух модулярных многочленов (6.55), размеченных переменными состояниями $x_i(k)$ и $x_i(k+1)$ слева направо (рисунок 6.9) и справа налево (рисунок 6.10) конструирование матриц A, B, C и N дает для последних

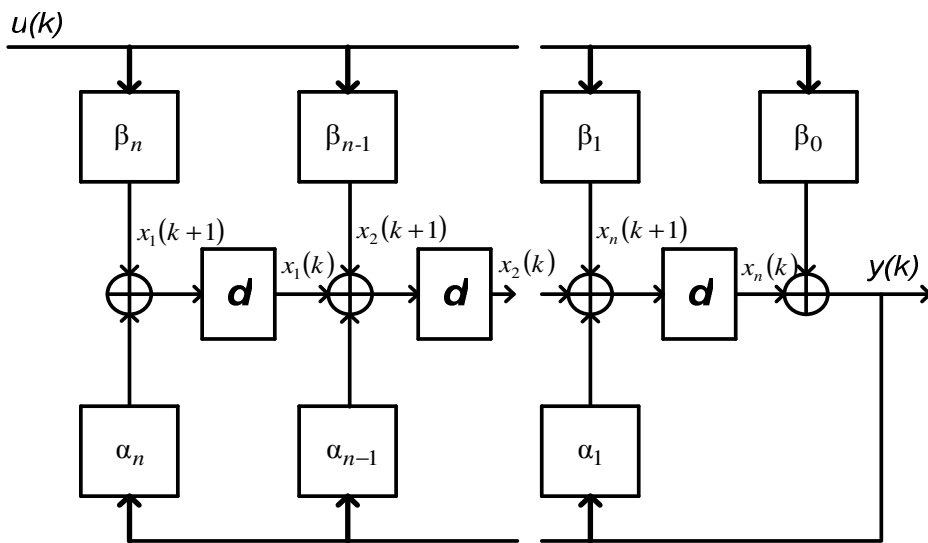


Рисунок 6.9 Представление ЛДДС в каноническом наблюдаемом базисе

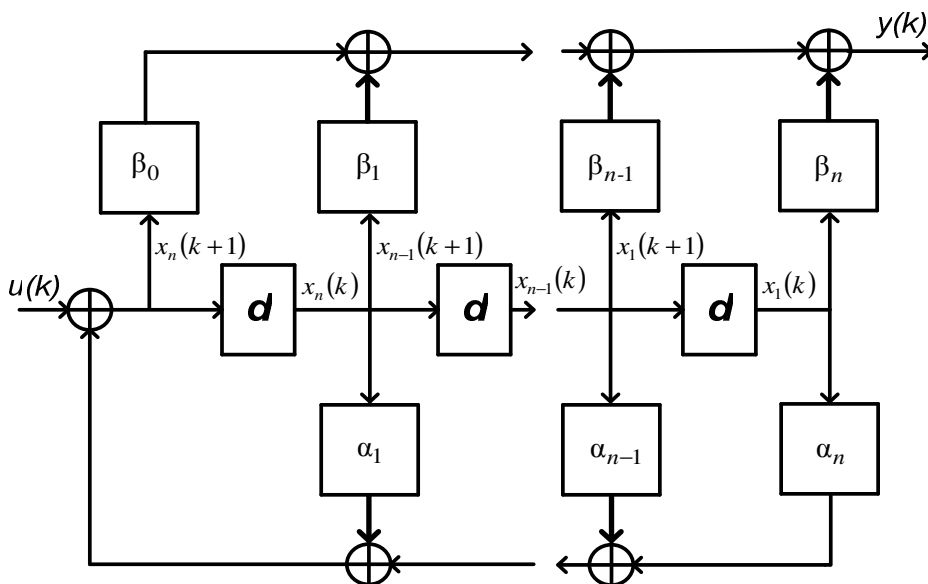


Рисунок 6.10 Представление ЛДДС в каноническом управляемом базисе

представления:

1) в каноническом наблюдаемом базисе (рисунок 6.9)

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{n-2} \\ & & \Lambda & & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & 1 & \alpha_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{1 \times (n-1)} & \\ \hline \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{a}_{(n \times 1) \times 1} \end{array} \right], \quad (6.58)$$

где $\mathbf{a}_{(n \times 1) \times 1} = \text{col}\{\alpha_i : i = \overline{1, n}\}$,

$$\mathbf{B} = \text{col}\{\beta_i + \beta_0 \alpha_i ; i = \overline{n, 1}\}, \mathbf{C} = [\mathbf{O}_{1 \times (n-1)} \mid 1], \mathbf{N} = [\beta_0], \quad (6.59)$$

2) в каноническом управляемом базисе (рисунок 6.10)

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \hline & & & \Lambda & \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & & \alpha_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_{(n-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(n-1) \times (n-1)} \\ \hline & \hat{\mathbf{a}}_{1 \times n} \end{array} \right], \quad (6.60)$$

где $\hat{\mathbf{a}}_{1 \times n} = \text{col}\{\alpha_i : i = \overline{n, 1}\}$,

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{O}_{(n-1) \times 1} \\ -1 \end{array} \right], \mathbf{C} = [\beta_n + \beta_0 \alpha_n \mid \beta_{n-1} + \beta_0 \alpha_{n-1} \mid \mathbf{K} \mid \beta_1 + \beta_0 \alpha_1], \\ \mathbf{N} = [\beta_0] \quad (6.61)$$

Пример 6.3.

Сконструировать $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{N})$ -представление ЛДДС по ее передаточной функции $\Phi(d)$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

1. Выполним алгоритм 6.1, в результате чего получим передаточную функцию ЛДДС

$$\Phi(d) = \frac{1 + d^3 + d^4 + d^5}{1 + d^7},$$

структурные представления, приведенные на рисунках 6.3 и 6.4.

2. Разметим соответствующим образом структурные реализации передаточной функции (см. рисунки 6.11 и 6.12)

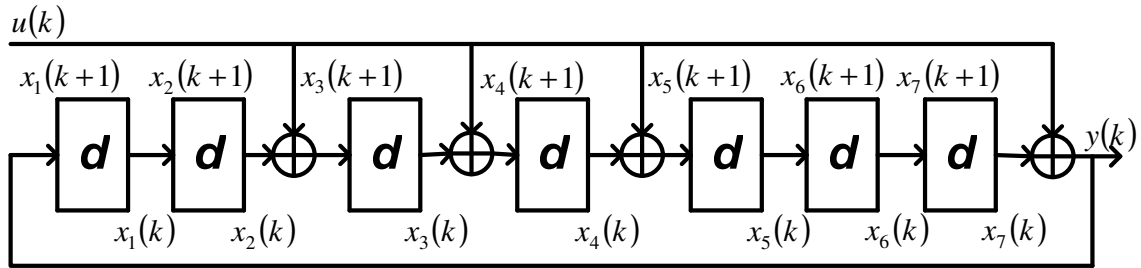


Рисунок 6.11

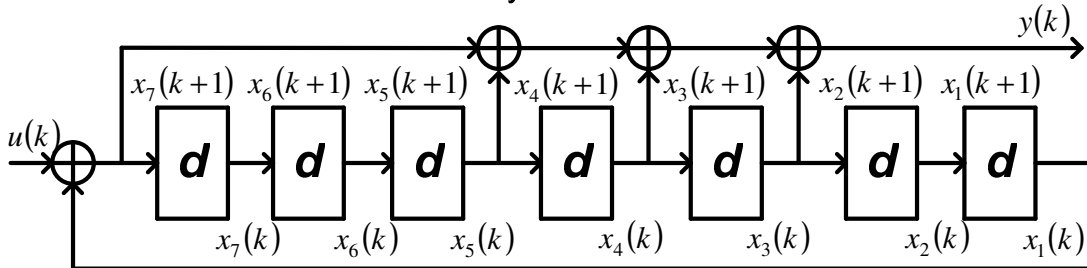


Рисунок 6.12

3. По размеченной структурной реализации передаточной функции $\Phi(d)$ сконструируем матрицы A, B, C и N векторно-матричного представления линейной ДДС в форме (6.8), (6.9)

1) в каноническом наблюдаемом базисе (рисунок 6.11)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{1 \times 6} & \vdots & 1 \\ \mathbf{I}_{6 \times 6} & & \mathbf{O}_{6 \times 1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{I}_{3 \times 1} \\ \mathbf{O}_{2 \times 1} \end{bmatrix}, C = [\mathbf{O}_{1 \times 6} \quad \vdots \quad 1], N = [1]$$

2) в каноническом управляемом базисе (рисунок 6.12)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{6 \times 1} & \vdots & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ 1 & \vdots & \mathbf{O}_{1 \times 6} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{6 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, C = [\mathbf{O}_{1 \times 2} \quad \vdots \quad \mathbf{I}_{1 \times 3} \quad \vdots \quad \mathbf{O}_{1 \times 2}], N = [1] \quad \blacksquare$$

Рассмотрим теперь **основные свойства квадратных матриц над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p=2$** , часть из которых носит общесистемный характер, то есть выполняется для матрицы над любым полем, а часть имеет силу над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p=2$. Основные свойства зададим с помощью утверждений.

Свойство 6.1. (Обнуление матрицей A своего характеристического ММ (ХММ)).

Утверждение 6.14. (Теорема Гамильтона-Кэли). Произвольная квадратная $(n \times n)$ -матрица A над простым полем Галуа $GF(p)$ при

$p = 2$ обнуляет свой характеристический модулярный многочлен так, что выполняется равенство

$$\det(\lambda I + A)|_{\lambda=A} = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m I = O \quad \square \quad (6.62)$$

Доказательство утверждения строится по той же схеме, что и над бесконечным полем $F = \mathbf{R}$ действительных чисел. ■

Свойство 6.2. (Принадлежность матрицы A показателю μ). Квадратная $(n \times n)$ -матрица A с элементами из $GF(2)$ обладает свойством принадлежности показателю μ , если выполняется условие

$$A^\mu = I.$$

□

Утверждение 6.15. Если характеристический полином матрицы A $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ степени n входит в разложение двучлена

$$\lambda^\mu + 1, \text{ где } \mu = \min_j \left\{ \mu_j : \text{rest} \frac{\lambda^{\mu_j} + 1}{\det(\lambda I + A)} = 0 \right\}, \text{ то матрица } A$$

принадлежит показателю μ в том смысле, что

$$A^\mu = I. \quad \square \quad (6.63)$$

Доказательство утверждения строится на факте делимости без остатка двучлена $\lambda^\mu + 1$ на ХММ $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$, который позволяет записать

$$\lambda^\mu + 1 = Q(\lambda) \det(\lambda I + A) = Q(\lambda) D(\lambda) \quad (6.64)$$

Выражение (6.64) делает справедливым соотношение

$$A^\mu + I = Q(A) D(A) = Q(A) \det(\lambda I + A)|_{\lambda=A}, \quad (6.65)$$

в котором в силу **У6.14** член $\det(\lambda I + A)|_{\lambda=A}$ оказывается равным нулю, что доказывает справедливость **У6.15**. ■

Приведем еще одно утверждение, положения которого могут быть востребованы при исследовании линейных ДДС.

Утверждение 6.16. Любой модулярный многочлен $f(x)$ над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ с ненулевым свободным членом, то есть не делящийся без остатка на x , является при некотором целом числе μ делителем двучлена $1 + x^\mu$, при этом минимальное значение μ называется показателем, которому принадлежит $f(x)$. □

Доказательство утверждения можно найти в литературе по теории линейных ДДС. ■

Нетрудно видеть, что объединение положений утверждений **У6.15** и **У6.16** позволяет сформулировать утверждение, использование которого дает возможность сформировать простую технологию оценки показателя μ , которому принадлежит ММ $f(x)$.

Утверждение 6.17. Если сконструировать некоторую квадратную $(n \times n)$ матрицу P , где $n = \deg f(x)$ в сопровождающей $f(x)$ форме так, что

$$f(\lambda) = \det(\lambda I + P) = D(\lambda), \quad (6.66)$$

то оценка

$$\mu = \arg \{ P^\mu = I \} \quad (6.67)$$

для случая минимального значения μ представляет собой показатель, которому принадлежит ММ $f(x)$. \square

Доказательство утверждения строится на непосредственном вычислении μ , при котором выполняется равенство $P^\mu = I$. \blacksquare

Свойство 6.3. (Нильпотентность индекса v матрицы A). Квадратная $(n \times n)$ -матрица A с элементами из $GF(2)$ обладает свойством нильпотентности индекса v , если выполняется условие

$$A^v = \mathbf{O}. \quad \square \quad (6.68)$$

Утверждение 6.21. Для того чтобы $(n \times n)$ -матрица A с элементами из конечного поля Галуа $GF(2)$ обладала свойством **6.3** достаточно, чтобы матрица A обладала нулевым корнем кратности v , при этом ее каноническое представление имело вид

$$A_v = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{(v-1) \times (n-v+1)} & \vdots & \mathbf{I}_{(v-1) \times (v-1)} \\ & & \\ & \mathbf{O}_{(n-v+1) \times n} & \end{bmatrix}. \quad \square (6.69)$$

Доказательство утверждения строится на свойстве матричной функции от матрицы сохранять отношение подобия. Действительно, если существует $(n \times n)$ - не особая матрица M преобразования подобия такая, что выполняется матричное соотношение

$$A = MA_v M^{-1}, \quad (6.70)$$

тогда по указанному свойству выполняется и соотношение

$$f(A) = M f(A_v) M^{-1} \quad (6.71)$$

Если в качестве $f(A)$ выбрана функция от матрицы $f(A) = A^v$, то соотношение (6.71) примет вид

$$A^\lambda = MA_v^\lambda M^{-1}, \quad (6.72)$$

но A_v^λ при $\lambda = v$ в силу представления (6.69) обнуляется:

$$A_v^v = \mathbf{O}, \quad (6.73)$$

что приводит к выполнению (6.68) в силу (6.72). \blacksquare

6.3. Линейные двоичные динамические системы в задачах рекуррентного помехозащитного кодирования и декодирования.

Рекуррентное представление процессов помехозащитного кодопреобразования в фазе кодирования и декодирования использует векторно-матричное описание, параметризованное дискретным временем k этих процессов в форме линейных двоичных динамических систем, опирающиеся на модели «вход-состояние» (ВС) вида (6.23), (6.25)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) \equiv 0, \quad (6.74)$$

$$x(k) = \left(A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i) \right) \Big|_{x(0) \equiv 0} = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i). \quad (6.75)$$

Форма модели ВС (6.74), как указано в параграфе 6.2, именуется рекуррентной формой, форма (6.75) – суммарной. В (6.74), (6.75) $x(k)$ – вектор состояния ЛДДС, осуществляющей помехозащитное кодопреобразование; $u(k)$ – входная кодовая последовательность; $\dim x = m$, $\dim u = 1$, $\dim A = (m \times m)$, $\dim B = (m \times 1)$. В зависимости от задачи помехозащитного кодопреобразования $u(k)$ принимает смысл помехозащищенного информационного кода $u(k) = a(k)$ при формировании помехозащищенного кода $y(k)$ и смысл принятого из канала связи искаженного кода $f(k) = y(k) + \xi(k)$ так, что $u(k) = f(k)$ в задаче декодирования. Характерной особенностью модельных представлений (6.74) и (6.75) является то, что матрица $A_{ку}$ состояния устройства деления модулярных многочленов (УДММ) кодирующего устройства и матрица $A_{оку}$ состояния УДММ декодирующего устройства совпадают так, что выполняется равенство

$$A_{ку} = A_{оку} = A. \quad (6.76)$$

Матрица A состояния УДММ КУ и ДКУ задается в одном базисе, при этом чаще всего в сопровождающей характеристический полином (ХП) форме, причем ХП $D(\lambda) = \det(\lambda I + A)$ совпадает с образующим ПЗК модулярным многочленом $g(x)$ так, что выполняется соотношение

$$D(\lambda) = g(x) \Big|_{x=\lambda} \quad (6.77)$$

Матрицы входа УДММ устройств кодирования и декодирования не совпадают так, что для КУ и ДКУ модель (6.74) соответственно получает представление

$$x(k+1) = Ax(k) + B_{ку} u(k); \quad x(k+1) = Ax(k) + B_{оку} u(k). \quad (6.78)$$

Если при формировании ПЗК предполагается возможность перехода от их матричного задания, не параметризованного дискретным временем k , с помощью образующей матрицы G и проверочной матрицы H , то оказывается полезным воспользоваться положениями следующего утверждения.

Утверждение 6.18. Проверочная матрица H представима с помощью системной матрицы отношения «вход – состояния» индекса n пары матриц $(A, B_{\partial ky})$ УДММ ДКУ (6.78). \square

Доказательство этого утверждения использует тот факт, что синдром E , вычисляемый в силу соотношения $E = fH$, удовлетворяет цепочке равенств $E = fH = (y + \xi)H = (aG + \xi)H = aGH + \xi H|_{GH=0} = \xi H$.

Это соотношение показывает, что в векторно-матричном описании (6.78) процесса декодирования можно положить $u(k) = \xi(k)$ так, что оно принимает вид

$$x(k+1) = Ax(k) + B_{\partial ky}\xi(k), x(0) \equiv 0. \quad (6.79)$$

Выражение (6.79) положим в основу формирования синдромов ошибок, которые образуют строки проверочной матрицы H в силу соотношения

$$H^{n+1-i} = E^i, \quad (6.80)$$

где E^i – синдром ошибки в i -том разряде принятого из КС искаженного ПЗК, H^{n+1-i} – $(n+1-i)$ -я строка матрицы H . Тогда в силу (6.78) становятся справедливыми соотношения:

при:

$$\left. \begin{aligned} \xi(k): 000K 001 \quad E^1 = x^T(n) = B_{\partial ky}^T = H^{n+1-i}|_{i=1} = H^n; \\ \xi(k): 000K 010 \quad E^2 = x^T(n) = (AB_{\partial ky})^T = H^{n+1-i}|_{i=2} = H^{n-1}; \\ \xi(k): 000K 100 \quad E^3 = x^T(n) = (A^2B_{\partial ky})^T = H^{n+1-i}|_{i=3} = H^{n-2}; \\ M \\ \xi(k): 010K 000 \quad E^{n-1} = x^T(n) = (A^{n-2}B_{\partial ky})^T = H^{n+1-i}|_{i=n-1} = H^2; \\ \xi(k): 100K 000 \quad E^n = x^T(n) = (A^{n-1}B_{\partial ky})^T = H^{n+1-i}|_{i=n} = H^1; \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

Соотношения (6.81) позволяет для проверочной матрицы H записать представление

$$H = \left[A^{n-1}B_{\partial ky} \quad A^{n-2}B_{\partial ky} \quad K \quad A^2B_{\partial ky} \quad AB_{\partial ky} \quad B_{\partial ky} \right]^T, \quad (6.82)$$

содержащее системную матрицу отношения «вход – состояния» индекса n пары матриц (A, B_{dky}) в транспонированном виде. ■

Очевидно, выражения (6.81),(6.82) содержат доказательство утверждения.

Утверждение 6.19. Матрица B_{dky} входа декодирующего рекуррентного устройства (6.78) удовлетворяет соотношению

$$B_{\text{dky}} = (H^n)^T. \quad \square \blacksquare (6.83)$$

Примечание 6.1. Если декодируемый ПЗК является кодом с полной блочковой систематикой, то

$$B_{\text{dky}} = [0_{1 \times (m-1)} 1]^T. \quad (6.84)$$

Рассмотрим теперь УДММ кодирующего устройства, в связи с чем сформулируем утверждение.

Утверждение 6.20. Матрица B_{ky} ЛДДС УДММ кодирующего устройства (6.78) с точностью до операции транспонирования совпадает с последней (k -ой) строкой \tilde{G}^k матрицы \tilde{G} , являющейся блоком образующей матрицы G так, что выполняется соотношение

$$B_{\text{ky}}^T = \tilde{G}^k = K \{g(x) + x^m\}, \quad (6.85)$$

где $K\{\bullet\}$ – код модулярного многочлена (\bullet) . □

Доказательство. Рассмотрим процесс кодирования для случая ПНЗК a , имеющего единицу только в младшем разряде, а в остальных разрядах нули $\{\text{ММ} : a(x) = 1\}$. Это значит, что входная последовательность $u(k)$ с учетом передачи кодов и ММ старшим разрядом вперед будет иметь вид

$$u(k) = [u(0) = 0, u(1) = 0, \dots, u(k-2) = 0, u(k-1) = 1]. \quad (6.86)$$

В течение первых $(k-1)$ – тактов ЛДДС УДММ КУ будет находиться в нулевом неподвижном состоянии. При приеме элемента $u(k-1) = 1$ ЛДДС УДММ КУ в силу (6.78) перейдет в состояние

$$x(k) = B_{\text{ky}} u(k-1) \Big|_{u(k-1)=1} = B_{\text{ky}}. \quad (6.87)$$

Соотношение (6.87) в транспонированном виде $\{x(k) = B_{\text{ky}}\}^T$

определяет код $K \left\{ \text{rest} \frac{a(x)x^m}{g(x)} \Big|_{a(x)=1} = \text{rest} \frac{x^m}{g(x)} = g(x) + x^m \right\}$ остатка от

деления, выводимый из КУ и задаваемый последней (k -й) строкой \tilde{G}^k матрицы \tilde{G} кодов остатков так, что выполняется цепочка равенств

$$x^T(k) = B_{\text{ky}}^T = \tilde{G}^k = K \{g(x) + x^m\}. \quad \blacksquare (6.88)$$

Теперь установим связь между матрицами $\mathbf{B}_{ку}$ и $\mathbf{B}_{дку}$ входа кодирующего и декодирующего устройств (6.78) рекуррентного типа формирующих и декодирующих ПЗК с полной блоковой систематикой.

Утверждение 6.20. Матрицы $\mathbf{B}_{ку}$ и $\mathbf{B}_{дку}$ входа УДММ кодирующего и декодирующего устройств (6.78) формирующих и декодирующих ПЗК с полной блоковой систематикой связаны соотношениями

$$\mathbf{B}_{ку} = \mathbf{A}^m \mathbf{B}_{дку}, \mathbf{B}_{дку} = (\mathbf{A}^m)^{-1} \mathbf{B}_{ку}. \quad \square \quad (6.89)$$

Доказательство. Запишем образующую \mathbf{G} и проверочную \mathbf{H} матрицы ПЗК с полной блоковой систематикой в канонической блоковой форме

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_{k \times k} \quad \tilde{\mathbf{G}}_{k \times m}], \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{k \times m} \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix}. \quad (6.90)$$

Воспользуемся (6.82) с тем, чтобы матрицу \mathbf{H} представить в виде

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{k \times m} \\ \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}_{дку})^T \\ \mathbf{M} \\ (\mathbf{A}^{m+1} \mathbf{B}_{дку})^T \\ (\mathbf{A}^m \mathbf{B}_{дку})^T \\ (\mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B}_{дку})^T \\ \mathbf{M} \\ (\mathbf{A} \mathbf{B}_{дку})^T \\ \mathbf{B}_{дку}^T \end{bmatrix}. \quad (6.91)$$

В силу (6.88) и (6.91) матрица $\mathbf{B}_{ку}$ входа УДММ кодирующего устройства удовлетворяет цепочке равенств $\mathbf{B}_{ку} = (\tilde{\mathbf{G}}^k)^T = \mathbf{A}^m \mathbf{B}_{дку}$, откуда следует равенство $\mathbf{B}_{дку} = (\mathbf{A}^m)^{-1} \mathbf{B}_{ку}$. ■

Полученные в параграфе результаты позволяют сформировать алгоритмы синтеза линейных ДДС рекуррентного помехозащитного кодирования и декодирования. При формировании учитывается, что УДММ в КУ и ДКУ с точностью до матриц входа синтезируются однотипно. Разнотипность функционирования КУ и ДКУ состоит в том, что ДКУ функционирует без коммутации структуры, принимая из КС входную последовательность в виде кодовой посылки до момента $k = n$, когда фиксируется результат $x^T(n) = E$.

КУ функционирует с коммутацией структуры, это вызвано тем, что при формировании (n, k) -ПЗК в течение первых k -тактов k -разрядная информационная часть в виде кодовой последовательности одновременно подается в КС и на вход УДММ для вычисления остатка в форме $x^T(k) = \mathbf{K} \left\{ \text{rest} \left(\frac{a(x)x^m}{g(x)} \right) \right\}$. По принятии

информационной части из источника дискретной информации (ИДИ) вход КС переключается с выхода ИДИ на выход УДММ, в котором сформировался остаток. Все обратные связи в УДММ в этот момент разрываются, чем останавливается процесс деления, а УДММ без связей становится m -разрядным регистром сдвига. Все перечисленные коммутации цепей и связей осуществляется специально вводимым в состав КУ устройством коммутации (УК). Таким образом помехозащитное КУ есть функциональное объединение УДММ и УК.

КУ до коммутации его цепей в силу (6.78) аналитически описывается векторно-матричными соотношениями $x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}_{\text{кy}}u(k); y(k) = \mathbf{N}u(k); \mathbf{N} = [1]; u(k) = a(k)$. (6.92)

После коммутации КУ описывается соотношениями

$$x(k+1) = \bar{\mathbf{A}}x(k); x^T(k) = \mathbf{K} \left\{ \text{rest} \left(\frac{a(x)x^m}{g(x)} \right) \right\}; y(k) = \mathbf{C}x(k), \quad (6.93)$$

где матрица $\bar{\mathbf{A}}$ – нильпотентная матрица с индексом нильпотентности $\nu = m$, $\mathbf{C} = [1 \ 0_{1 \times (n-1)}]$, $y(k)$ – формируемая ПЗК – последовательность, $u(k)$ – входная ПЗК – последовательность.

В силу указанных различий в функционировании рекуррентных КУ и ДКУ оказываются и различными алгоритмы их синтеза.

Алгоритм 6.11

синтеза ЛДДС рекуррентного помехозащитного кодирования

0. По заданному информационному массиву Q мощности $[Q] = V_u$ определить размерность k помехонезащищенного кода в силу соотношения

$$k = \arg \{ 2^k \geq V_u = [Q] \}.$$

1. По заданным: категории системы, характеризующейся величиной $P_{\text{дон}}$ – допустимой вероятности приема ложной команды, и параметру модели двоичного канала связи в форме p вероятности искажения разряда (бита) кода, определяемому выражением $p = \max \{ p_{01}, p_{10} \}$, определить кратность исправляемой ошибки s в силу соотношения

$$s = \text{minarg} \left\{ N_c = 2^m - 1 \geq N_{\text{ош}} = \sum_{i=1}^s C_n^i \& \sum_{i=s+1}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \leq P_{\text{дон}} \right\},$$

где N_c – число синдромов, $N_{\text{ош}}$ – число исправляемых ошибок, в зависимости от величины s – кратности исправляемой ошибки выбрать (при $s=1$) из таблицы П1.1 неприводимых многочленов или (при $s \geq 2$) из таблицы П1.2 неприводимых многочленов, сформированных с помощью БЧХ-технологии, образующий многочлен $g(x)$ кода степени $\text{deg}g(x) = m$ и сформировать (n, k) -формат ПЗК, где $n = k + m$;

2. Вычислить D -образ ММ $g(x)$ в форме

$$g(d) = D\{g(x)\} = \tilde{g}(x^{-1}) \Big|_{x^{-1}=d},$$

где $\tilde{g}(x^{-1}) = x^{-m} g(x)$.

3. Сконструировать передаточную функцию УДММ КУ на образующий ММ $g(x)$ в форме

$$\Phi(d) = \frac{1}{g(d)}.$$

4. Пользуясь правилом Мейсона не касающихся контуров построить две предварительные структурные реализации передаточной функции $\Phi(d)$ на элементах памяти (ЭП) с передаточной функцией $\Phi_{\text{ЭП}}(d) = d$ в двух канонических базисах.

5. Произвести разметку входов и выходов ЭП каждой структурной реализации переменными $x_i(k+1)$ на входе и $x_i(k)$ на выходе, присвоив выходу самого правого ЭП переменную $x_1(k)$, а его входу $x_1(k+1)$, и сформировать векторно-матричное описание автономной версии УДММ

$$x(k+1) = Ax(k),$$

«списав» реализации матриц A с отмеченных структурных реализаций $\Phi(d)$.

6. Сформировать матрицу входа $B_{\text{ку}}$ УДММ кодирующего устройства (6.78) в форме (6.88) или в форме (6.89), описав УДММ КУ с помощью ВМО вида

$$x(k+1) = Ax(k) + B_{\text{ку}} u(k), y(k) = Cx(k).$$

7. Структурно с использованием правила Мейсона или аналитически определить передаточные функции УДММ КУ $x(k+1) = Ax(k) + B_{\text{ку}} u(k), y(k) = Cx(k)$ для двух базисных реализаций матрицы A состояния УДММ с помощью соотношения (6.43) при $N=0$

$$\Phi(d) = C(d^{-1}I + A)^{-1} B_{\text{кy}}.$$

8. Выбрать для дальнейшего использования структурную реализацию передаточной функции УДММ КУ, отмеченная версия которой характеризуется матрицей A ее состояния, удовлетворяющей условию

$$A = \arg \left\{ g^{-1}(d) = C(d^{-1}I + A)^{-1} B_{\text{кy}} \right\}$$

9. Сформировать матрицу \bar{A} УДММ КУ, переведенного в режим регистра сдвига, по отмеченной версии выбранной в п.8 структурной реализации $\Phi(d)$ с разорванными обратными связями.

10. Дополнить УДММ устройством коммутации (УК) структуры УДММ и точки подключения входа канала связи с выхода ИДИ на выход устройства деления модулярных многочленов.

11. На конкретном примере проверить правильность функционирования устройства рекуррентного кодирования, задаваемого парой векторно-матричных описаний (6.92) и (6.93) со сформированными матрицами $(A, B_{\text{кy}}, N)$ и (\bar{A}, C) .

12. Построить техническую реализацию устройств рекуррентного кодирования:

12.1. в схемотехнической форме на базе выбранного структурного представления УДММ;

12.2. в программной форме на базе рекуррентных процедур (6.92) и (6.93). ■

Алгоритм 6.12

синтеза ЛДДС рекуррентного помехозащитного декодирования

1. Выполнить п.п.0–2 алгоритма 6.11 синтеза рекуррентного КУ.

2. Сконструировать передаточную матрицу–столбец УДММ ДКУ на образующий ММ $g(x)$ в форме

$$\Phi(d) = \frac{1}{g(d)} \text{col}(\Phi_j(d); j = \overline{1, m}),$$

где передаточные функции $(\Phi_j(d); j = \overline{1, m})$ подлежат вычислению.

3. В качестве матрицы A состояния ВМО УДММ декодирующего устройства (6.78) $x(k+1) = Ax(k) + B_{\text{оку}} u(k)$ принять матрицу, удовлетворяющую условиям п.8 алгоритма 6.11.

4. Сформировать матрицу $B_{\text{оку}}$ входа векторно-матричного описания (6.78) УДММ ДКУ с помощью соотношений (6.83) или (6.84).

5. Структурно, реализован ВМО (6.78)
 $x(k+1) = Ax(k) + B_{\text{дкУ}} u(k)$ УДММ ДКУ с матрицами $A, B_{\text{дкУ}}$,
сформированными в п.п. 3, 4 алгоритма, графически, с помощью
правила Мейсона или аналитически с помощью соотношения (6.43)
при $N=0$ и $C=I$

$$\Phi(d) = (d^{-1}I + A)^{-1} B_{\text{дкУ}}$$

сформировать передаточную матрицу–столбец

$$\Phi(d) = g^{-1}(d) \text{col}(\Phi_j(d); j = \overline{1, m}),$$

с последующим вычислением

$$\text{col}(\Phi_j(d); j = \overline{1, m}) = g(d)(d^{-1}I + A)^{-1} B_{\text{дкУ}}.$$

6. На конкретном примере проверить правильность
функционирования устройства рекуррентного декодирования (6.78)
 $x(k+1) = Ax(k) + B_{\text{дкУ}} u(k)$ со сформированной парой матриц
 $(A, B_{\text{дкУ}})$.

7. Построить техническую реализацию устройств рекуррентного
декодирования:

7.1. в схемотехнической форме на базе структурных
представлений;

7.2. в программной форме на базе рекуррентной процедуры (6.78)
 $x(k+1) = Ax(k) + B_{\text{дкУ}} u(k)$. ■

Пример 6.4

На основе использования алгоритмов 6.11 и 6.12 синтеза
рекуррентных кодирующих и декодирующих устройств осуществить
их проектирование по следующим исходным данным.

0.1. Массив сообщений Q характеризуется мощностью
 $[Q] = V_u = 120$ так, что число информационных разрядов ПЗК
 $k = \min \arg\{2^k \geq V_u = 120\} = 7$;

0.2. Передача сообщений должна осуществляться средствами
ПЗК с полной блоковой систематикой, обладающим способностью
исправлять ошибки первой и второй кратности ($s=2$);

0.3. Разработать устройства помехозащитного кодирования и
декодирования рекуррентного типа на основе линейных двоичных
динамических систем.

Решение

На основе использования алгоритма 6.11:

1. Назначаем кратность исправляемой ошибки $s = 2$ в силу исходных данных.

2. В силу того, что $s = 2 > 1$ формируем образующий многочлен $g(x)$ ПЗК с использованием БЧХ-технологии (см. таблицу П1.2), который получает представление $g(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$ и $(n, k) = (15, 7)$ – формат помехозащищенного кода.

3. Вычислим D-образ ММ $g(x)$ в форме

$$\tilde{g}(x^{-1}) = x^{-m} g(x) = 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-4} + x^{-8},$$

$$g(d) = D\{g(x)\} = \tilde{g}(x^{-1}) \Big|_{x^{-1} = d} = 1 + d + d^2 + d^4 + d^8.$$

4. Сконструируем передаточную функцию устройства деления модулярных многочленов в форме

$$\Phi_K(d) = \frac{1}{g(d)} = \frac{1}{1 + d + d^2 + d^4 + d^8}.$$

5., 6. Пользуясь правилом Мейсона не касающихся контуров, построим структурные реализации $\Phi_K(d)$ на элементах памяти (ЭП) с передаточной функцией $\Phi_{ЭП}(d) = d$ в двух базисах и разметим их переменными $x_{ki}(k+1)$ на входе и $x_{ki}(k)$ на выходе (см. рисунки 6.13 и 6.14).

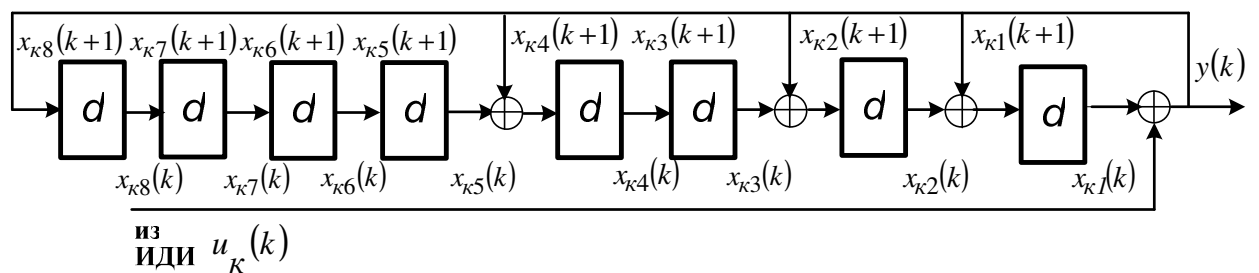


Рисунок 6.13 – Структурная реализация передаточной функции КУ в канонически наблюдаемом базисе

Спишем со схемы рисунка 6.13 матрицу A_K , для которой получим

$$A_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

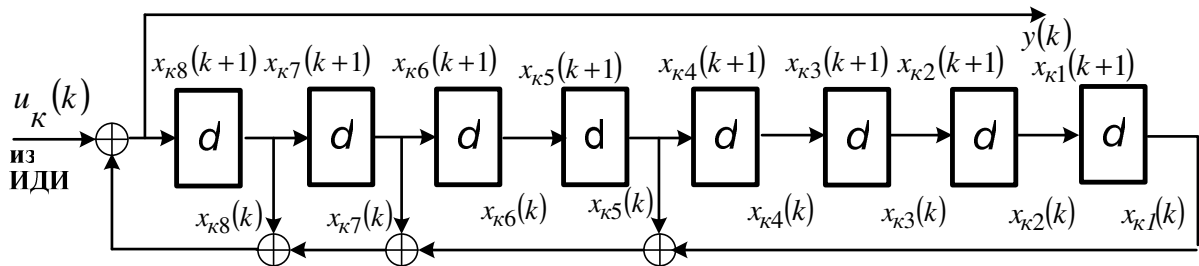


Рисунок 6.14 – Структурная реализация передаточной функции КУ в канонически управляемом базисе

Спишем со схемы рисунка 6.14 матрицу A_K , для которой получим

$$A_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Сформируем матрицу входа B_K УДММ кодирующего устройства (6.78), воспользовавшись представлением (6.88), для которого получим

$$B_K^T = K \left\{ x^m + g(x) \right\}_{m=7} = K \left\{ x^8 + x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 \right\} = K \left\{ x^7 + x^6 + x^4 + 1 \right\} = [11010001].$$

8., 9. Объединим полученную матрицу $B_K = [11010001]^T$ входа УДММ КУ со структурными реализациями $\Phi_K(d)$ в форме рисунка 6.13 и рисунка 6.14, заметив при этом, что матрица

$B_K = [11010001]^T$ уже встроена в УДММ КУ рисунка 6.13 и при этом сохраняется реализуемость передаточной функции УДММ КУ, полученной в п.4, а введение B_K в структурную схему рисунка 6.14 явно приводит к нереализуемости этой передаточной функции.

В результате в качестве окончательного варианта УДММ КУ принимается версия, представленная на рисунке 6.13, совмещающая в себе реализацию передаточной функции $\Phi_K(d)$, матриц A_K и B_K .

10. Сформируем матрицу \bar{A} для случая, когда все обратные связи структурной реализации $\Phi_K(d)$ разорваны, для которой получим

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0_{(7 \times 1)} & I_{(7 \times 7)} \\ 0_{(1 \times 1)} & 0_{(1 \times 7)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Объединим сформированный УДММ КУ, представленный на рисунке 6.13, с устройством коммутации (УК), осуществляющим переключение КС с выхода ИДИ на выход УДММ с помощью ключей К1, К2 и разрыв обратных связей в УДММ ключом К3, останавливая тем самым процесс деления и превращая УДММ в регистр сдвига для вывода из него остатка от деления в КС, чем завершим формирование рекуррентного КУ, представленного на рисунке 6.15.

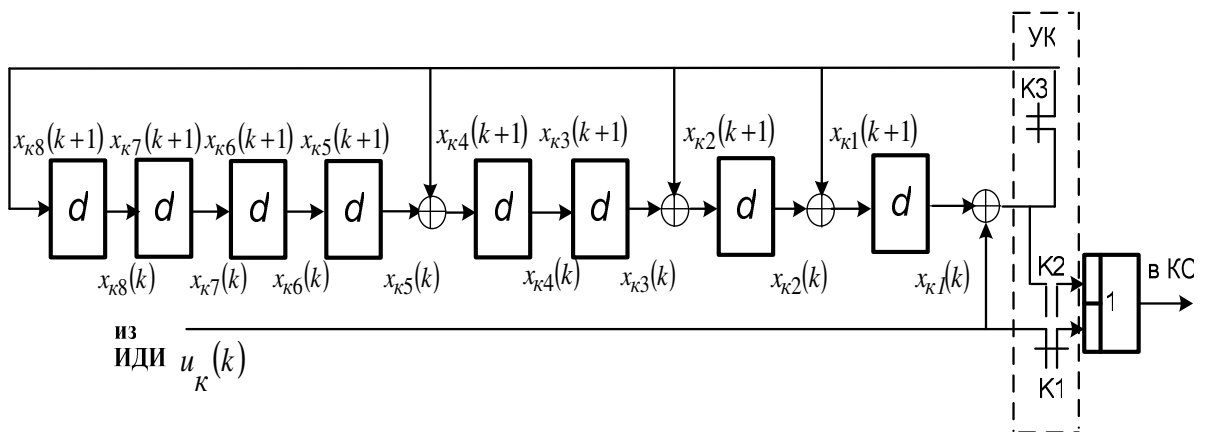


Рисунок 6.15 – Структурная реализация рекуррентного КУ

12. На конкретном примере проверим правильность функционирования устройства рекуррентного кодирования,

задаваемого парой ВМО (6.92) и (6.93) со сформированными матрицами (A_K, B_K, N) и (\bar{A}, C_K) . Для этой цели предположим, что передаваемые сообщения есть команды телеуправления типа «включить – отключить», а конкретная команда такова: «включить 37-й насос», которой соответствует семиразрядный ПЗК $a = [1001011]$, при этом первые 6 старших разрядов задают число «37», а последний – команду «включить». Этот код определяет:

– входную последовательность КУ

$$u(k): u(0) = 1, u(1) = 0, u(2) = 0, u(3) = 1, u(4) = 0, u(5) = 1, u(6) = 1;$$

– в силу полной блоковой систематики формируемого ПЗК информационную часть кода так, что для него можно записать $y = [a|z] = [1001011 y_8 y_7 y_6 y_5 y_4 y_3 y_2 y_1]$.

Вычисление остатка с помощью рекуррентной процедуры (6.92) сведем в таблицу 6.1.

Таблица 6.1 – Проверка функционирования устройства рекуррентного кодирования

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$x_K(k+1) = A_K x_K(k) + B_K u_K(k)$
$u_K(k)$	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	$A_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$ $B_K = [11010001]^T$
$x_K(k)$	0	1	0	1	1	0	0	0			
	0	1	1	1	1	1	1	1			
	0	0	1	1	0	0	0	0			
	0	1	1	0	0	0	0	1			
	0	0	0	0	1	1	0	0			
	0	0	0	1	1	0	0	1			
	0	0	1	1	0	0	1	1			
	0	1	1	0	0	1	1	1			

Из таблицы 6.1 видно, что на седьмом такте деления в УДММ КУ сформировался остаток, который через замкнутый на седьмом такте ключ К2 в след за информационными разрядами будет передан в КС в составе ПЗК, который примет вид

$$y = [a|z] = [100101101010111].$$

На основе использования алгоритма 6.12:

1. Выполним п.п.0–3 алгоритма 6.11.

2. Сконструируем передаточную матрицу–столбец $\Phi_\partial(d) = \arg\{x_\partial(d) = \Phi_\partial(d)u_\partial(d)\}$ УДММ ДКУ на образующий ММ $g(x)$ в форме

$$\Phi_{\partial}(d) = \frac{1}{g(d)} \text{col}(\Phi_j(d); j = \overline{1, m}).$$

3. В качестве матрицы A_{∂} состояния ВМО УДММ ДКУ (6.84) примем матрицу A_{κ} , удовлетворяющую условиям п.9 алгоритма А1

$$A_{\partial} = A_{\kappa} = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Сформируем матрицу B_{∂} входа УДММ декодирующего устройства с помощью соотношения (6.84) с учетом того, что декодируемый ПЗК является кодом с полной блоковой систематикой, в результате получим $B_{\partial} = [0_{1 \times (m-1)} 1]_{m=8}^T = [00000001]^T$.

Объединим полученную матрицу B_{∂} входа рекуррентного ДКУ со структурной реализацией $\Phi_{\kappa}(d)$ (рисунок 6.13), в результате чего сформируем ДКУ в окончательном виде, представленном на рисунке 6.16

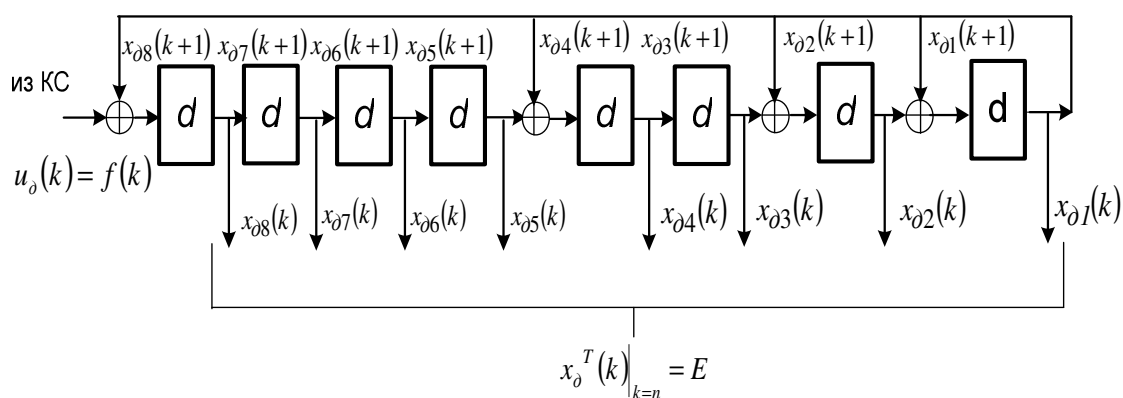


Рисунок 6.16– Структурная реализация передаточной функции ДКУ

5. С помощью правила Мейсона сформируем передаточную матрицу–столбец ДКУ $\Phi_{\partial}(d) = g^{-1}(d) \text{col}(\Phi_j(d); j = \overline{1, m})$, для которой получим

$$\Phi_{\partial}(d) = \frac{\left[d^8, d^7(1+d), d^6(1+d+d^2), d^5, d^4(1+d+d^2+d^4), d^3, d^2, d \right]^T}{(1+d+d^2+d^4+d^8)}$$

6. Искажем передаваемый ПЗК в пятом и первом разрядах с помощью помеховой последовательности

$$\xi(k): \xi(0) = 0, \xi(1) = 0, \xi(2) = 0, \xi(3) = 0, \xi(4) = 0, \xi(5) = 0, \xi(6) = 0, \\ \xi(7) = 0, \xi(8) = 0, \xi(9) = 0, \xi(10) = 1, \xi(11) = 0, \xi(12) = 0, \xi(13) = 0, \xi(14) = 1,$$

тогда на вход ДКУ из КС поступит искаженная двоичная кодовая последовательность

$$f(k) = u_{\partial}(k): u_{\partial}(0) = 1, u_{\partial}(1) = 0, u_{\partial}(2) = 0, u_{\partial}(3) = 1, u_{\partial}(4) = 0, u_{\partial}(5) = 1, u_{\partial}(6) = 1, \\ u_{\partial}(7) = 0, u_{\partial}(8) = 1, u_{\partial}(9) = 0, u_{\partial}(10) = 0, u_{\partial}(11) = 0, u_{\partial}(12) = 1, u_{\partial}(13) = 1, u_{\partial}(14) = 0.$$

Вычисление синдрома ошибки в среде декодирующего устройства с помощью рекуррентной процедуры $x(k+1) = Ax(k) + B_{\partial} u(k)$ сведем в таблицу 6.2

Таблица 6.2 – Проверка функционирования устройства рекуррентного декодирования

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$x_{\partial}(k+1) = A_{\partial} x_{\partial}(k) + B_{\partial} u_{\partial}(k)$
$u_{\partial}(k)$	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	$A_{\partial} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B_{\partial} = [00000001]^T$
$x_{\partial}(k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	
	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	
	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	
	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	
	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	

Таблица 6.2 позволяет записать для синдрома ошибки $E = x^T(n) \Big|_{n=15} = [00010001]$, который является синдромом двукратной ошибки в пятом и первом разрядах. ■

Завершая изучение возможностей рекуррентного помехозащитного кодирования и декодирования, реализуемого средствами ЛДДС, отметим еще одну возможность этого способа преобразования кодов. Она состоит в том, что в аппаратной среде рекуррентного ДКУ помимо синдрома ошибки может формироваться ее квазисиндром, который может быть использован для коррекции принятого из КС искаженного ПЗК, размещаемого в приемном регистре сдвига. В отличие от синдрома, который задает адрес искаженного разряда в структуре кода, квазисиндром \tilde{E}_j однократной ошибки в общем не выполняет адресных функций, но при дополнительных циклах деления в один и тот же момент, отсчитываемый от начала цикла, соответствующий искаженному разряду, формируется один и тот же синдром, с точностью до транспонирования совпадающий с матрицей входа ДКУ $\tilde{E}_j = B_{оку}^T (\forall j = \overline{1, n})$. Если синхронно с дополнительным циклом деления организовать вывод принятого искаженного ПЗК из приемного регистра сдвига, то искаженный разряд ПЗК можно исправить с помощью суммирования по модулю два искаженного разряда ПЗК и единичного сигнала, формируемого конъюнктом, реализующим основную конъюнкцию на квазисиндроме \tilde{E}_j .

В случае двукратной ошибки в принятом ПЗК при дополнительных циклах деления формируются два квазисиндрома, по своему положению соответствующих искаженным разрядам ПЗК, первый из которых $\tilde{E}_j = B_{оку}^T (\forall j = \overline{1, n})$, а второй $\tilde{E}_l = ((A^q + I)B_{оку})^T (\forall l = \overline{j+1, n}; q = l - j)$. Коррекция двукратной ошибки осуществляется аналогично однократной с помощью сумматора по модулю два и единичных сигналов, формируемых конъюнктами, реализующих основные конъюнкции на квазисиндромах \tilde{E}_j и \tilde{E}_l .

Указанная возможность опирается на положения следующих утверждений.

Утверждение 6.21. Квазисиндром $\tilde{E}_j = \tilde{E}(k), (k = n-j)$ ошибки $\xi_j = \xi(k) \Big|_{k=n-j}$ в j -м разряде ПЗК, формируемый с помощью ДКУ с ВМО в форме (6.78), (6.79), представляет собой состояние ДКУ определяемое выражением $x(k) \Big|_{k=n-j} = B_{оку}$ в транспонированном виде

$$\tilde{E}_j = B_{оку}^T.$$

□

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в (6.79) последовательности $\xi(k)$, составленной из n элементов (где n число разрядов ПЗК), в которой все элементы являются нулевыми кроме элемента $\xi(k)|_{k=n-j-1} = 1$, которая дает

$$x(k)|_{k=n-j} = B_{\text{окв}} = \tilde{E}_j^T. \quad \blacksquare$$

Утверждение 6.22. Квазисиндромы в транспонированном виде $\tilde{E}^T(k)$ при $k = n - j$ и $k = n - l$ ($j - l = q$), формируемые с помощью ДКУ с ВМО в форме (6.78),(6.79), представляют собой состояния ДКУ, определяемые соответственно выражениями

$$x(k)|_{k=n-j} = B_{\text{окв}}, \quad x(k)|_{k=n-l} = (A^q + I)B_{\text{окв}}.$$

Доказательство утверждения построим на основе формирования базы индукции. Для этой цели рассмотрим последовательность реализаций двоичных входных последовательностей $\xi(k)$. В результате при $x(0) \equiv 0$ с помощью (6.79) получим:

при $\xi(k): 0011000K 00$

- $k = 0; x(0) = 0; \xi(0) = 0$

- $k = 1; x(1) = Ax(0) + B\xi(0) = 0; \xi(1) = 0$

- $k = 2; x(2) = Ax(1) + B\xi(1) = 0; \xi(2) = 1$

- $k = 3; x(3) = Ax(2) + B\xi(2) = B; \xi(3) = 1$

- $k = 4; x(4) = Ax(3) + B\xi(3) = AB + B = (A + I)B;$

при $\xi(k): 0010100K 00$

- $k = 2; x(2) = Ax(1) + B\xi(1) = 0; \xi(2) = 1$

- $k = 3; x(3) = Ax(2) + B\xi(2) = B; \xi(3) = 0$

- $k = 4; x(4) = Ax(3) + B\xi(3) = AB; \xi(4) = 1$

- $k = 5; x(5) = Ax(4) + B\xi(4) = A^2B + B = (A^2 + I)B;$

при $\xi(k): 0010010K 00$

- $k = 3; x(3) = Ax(2) + B\xi(2) = B; \xi(3) = 0$

- $k = 4; x(4) = Ax(3) + B\xi(3) = AB; \xi(4) = 0$

- $k = 5; x(5) = Ax(4) + B\xi(4) = A^2B; \xi(5) = 1$

- $k = 6; x(6) = Ax(5) + B\xi(5) = A^3B + B = (A^3 + I)B;$

База индукции создана, поэтому

при $\xi(k): 0010 \times 0100$

$$\begin{aligned}
 & k=0; x(0)=0; \xi(0)=0 \\
 & k=1; x(1)=Ax(0)+B\xi(0)=0; \xi(1)=0 \\
 & k=2; x(2)=Ax(1)+B\xi(1)=0; \xi(2)=1 \\
 & k=3; x(3)=Ax(2)+B\xi(2)=B; \xi(3)=0 \\
 & k=4; x(4)=Ax(3)+B\xi(3)=AB; \xi(4)=0 \\
 & k=5; x(5)=Ax(4)+B\xi(4)=A^2B; \xi(5)=0
 \end{aligned}$$

М

$$\begin{aligned}
 & k=3+q; x(3+q)=Ax(2+q)+B\xi(2+q)=A^qB+B=(A^q+I)B; \\
 & k=n-j+q; x(n-l)=Ax(n-l-1)+B\xi(n-l-1)=A^qB+B=(A^q+I)B;
 \end{aligned}$$

Выражения доказывают справедливость положений утверждения. ■

6.4. Концепция подобия в теории линейных двоичных динамических систем

Концепция подобия в теории динамических систем над бесконечными полями получила в последнее время заметное распространение при решении широкого круга задач управления. В рамках векторно-матричного формализма метода пространства состояний в не параметризованной временем форме концепция подобия сводится к выполнению соотношения

$$\eta = M\chi. \tag{6.94}$$

В параметризованном временем виде соотношение (6.94) достигается в асимптотике так, что

$$\eta(\tau) = M\chi(\tau) - \theta(\tau), \tag{6.95}$$

при этом

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \theta(\tau) = 0 \quad \forall \chi(0), \eta(0). \tag{6.96}$$

В (6.94) – (6.96) χ – вектор состояния некоторого эталонного динамического процесса, η – вектор состояния конструируемой динамической среды, $\dim \eta = m$, $\dim \chi = \lambda$, M – $(m \times \lambda)$ – матрица в общем случае особого преобразования подобия; τ – принимает смысл непрерывного времени t ($\tau = t$) в непрерывных по времени процессах и смысл дискретного времени k ($\tau = k$), выраженного в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что $t = k \Delta t$, в

дискретных по времени процессах, θ – вектор невязки выполнения векторно-матричного подобия, задаваемого в форме

$$\eta(\tau) = M\chi(\tau); \quad \forall \chi(0), \eta(0), \quad (6.97)$$

Если на асимптотически сходящемся процессе (6.96) можно указать τ^* такое, что при $\tau \geq \tau^*$ соотношение (6.97) выполняется «почти точно», то τ^* следует называть временем установления векторно-матричного подобия (6.97). В технической среде достижение векторно-матричного подобия (6.97), обеспечиваемого путем выполнения условия (6.96), реализуется в виде связей по вектору состояния η и части компонентов вектора состояния χ так, что математическая модель по вектору невязки θ представляет собой автономную систему, которая для непрерывного времени имеет вид

$$\dot{\theta}(t) = A_\theta \theta(t); \quad \theta(0) = M\chi(0) - \eta(0), \quad (6.98)$$

и

$$\theta(k+1) = \bar{A}_\theta \theta(k); \quad \theta(0) = M\chi(0) - \eta(0), \quad (6.99)$$

для дискретного времени. Указанные связи должны быть выбраны так, чтобы процессы в (6.84) и (6.85)

$$\theta(t) = e^{A_\theta t} \theta(0); \quad \theta(k) = \bar{A}_\theta^k \theta(0), \quad (6.100)$$

сходились за назначенное время τ^* . Для процессов с непрерывным временем матрица A_θ должна быть гурвицевой, для процессов с дискретным временем матрица \bar{A}_θ должна иметь собственные значения в единичном круге.

К схеме (6.95), (6.98), (6.99) сводится задача регулирования в форме модального управления, задача слежения за конечномерным экзогенным воздействием, задача динамического наблюдения. К этой же схеме сводятся задачи адаптивного управления. Для случая единичной матрицы преобразования подобия ($M = I$), когда отношение подобия превращается в отношение тождественного равенства, разработаны методы решения обратных задач динамики.

Следует ожидать, что перенос концепции подобия на динамические системы над конечными полями, частным случаем которых являются двоичные динамические системы, заметно обогатит алгоритмическое обеспечение синтеза как линейных, так и нелинейных ДДС (конечных автоматов). Следует заметить при этом, что обеспечение условия вида (6.82) опирается на особые свойства матриц над конечным полем Галуа $GF(p)$ при $p=2$. Этими свойствами являются: свойство обнуления произвольной квадратной $m \times m$ -матрицей с элементами из конечного поля Галуа $GF(p)$ при $p=2$ своего характеристического полинома (Теорема Гамильтона-Кэли над конечным полем Галуа $GF(p)$ при $p=2$), свойство принадлежности

квадратной $m \times m$ -матрицы с элементами из конечного поля Галуа $GF(2)$ показателю μ и свойство нильпотентности индекса ν .

6.4.1 Концепция подобия в задаче двоичного динамического наблюдения состояния ЛДДС

Пусть линейная ДДС, состояние которой подлежит наблюдению, имеет векторно-матричное описание

$$\chi(k+1) = A\chi(k) + Bu(k), \quad \chi(0) = \chi_0, \quad \xi(k) = C\chi(k), \quad (6.101)$$

где χ, u, ξ – соответственно n -мерный вектор состояния, r -мерный вектор входной последовательности и λ -мерный вектор выходной последовательности, матрицы A, B, C согласованы по размерности с векторами χ, u, ξ . Элементы векторов и матриц принадлежат двоичному простому полю Галуа $GF(2)$.

Двоичное динамическое наблюдающее устройство (ДНУ), использующее всю доступную для непосредственного измерения информацию об ДДС (6.101) в виде входной последовательности $u(k)$ и выходной – $y(k)$, строится в форме

$$z(k+1) = \Gamma z(k) + L\xi(k) + Gu(k), \quad z(0) = z_0, \quad (6.102)$$

где z – m -вектор состояния ДНУ, матрица Γ определяет динамику процесса наблюдения в форме (6.96), а пара матриц (L, G) обладает свойствами

$$L = \arg \{ \text{contr}(\Gamma, L) \}, \quad G = \arg \{ \text{contr}(\Gamma, G) \}, \quad (6.103)$$

где $\text{contr} \{ (*), (\bullet) \}$ – предикат наличия полной управляемости пары матриц $\{ (*), (\bullet) \}$.

Задачу наблюдения вектора χ состояния системы (6.101) в среде ДНУ (6.94) сформулируем в форме (6.81), записываемой в виде

$$z(k) = T\chi(k) + \theta(k), \quad \forall k, \quad (6.104)$$

где T – матрица преобразования подобия (в общем случае – особого). Уравнение (6.96) позволяет построить модель процесса наблюдения по вектору невязки наблюдения, которое принимает вид

$$\theta(k+1) = T\chi(k+1) + z(k+1) \quad (6.105)$$

Структурная модель процесса двоичного динамического наблюдения в форме (6.105) в соответствии с моделями (6.101) и (6.102) представлена

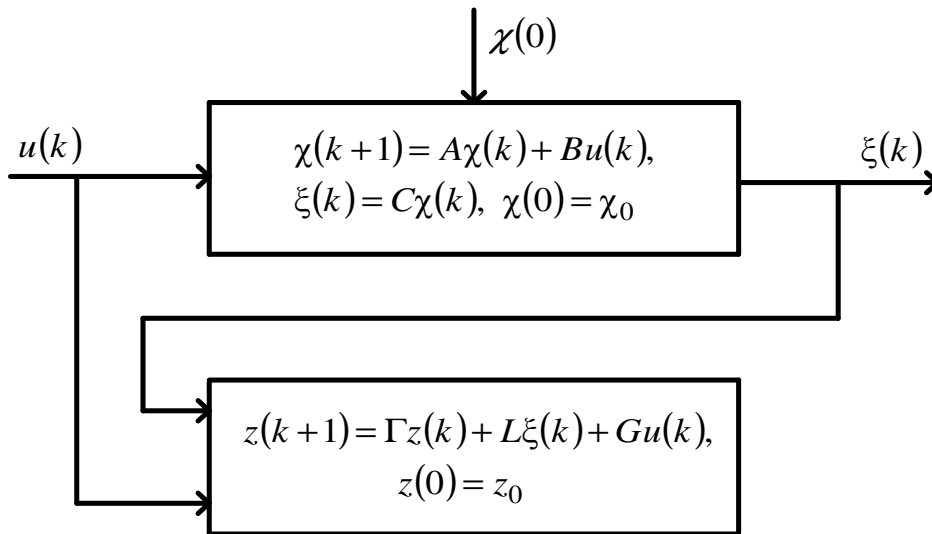


Рисунок 6.17. Модель процесса двойного динамического наблюдения состояния произвольной ЛДДС

Сформулируем теперь утверждение.

Утверждение 6.23. Если матрицы $\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{G}$ удовлетворяют матричным соотношениям

$$\mathbf{GT} + \mathbf{TA} = \mathbf{LC}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{TB}, \quad (6.106)$$

то процесс по вектору невязки наблюдения (ВНН) $\theta(k)$ описывается рекуррентным векторно-матричным уравнением

$$\theta(k+1) = \mathbf{\Gamma}\theta(k), \quad \theta(0) = \mathbf{T}\chi(0) + z(0). \quad \square (6.107)$$

Доказательство утверждения строится на подстановке в (6.107) векторно-матричных соотношений (6.93) и (6.94), в результате чего получим

$$\theta(k+1) = \mathbf{\Gamma}\theta(k) + (\mathbf{TA} + \mathbf{\Gamma T} + \mathbf{LC})\chi(k) + (\mathbf{TB} + \mathbf{G})u(k). \quad (6.108)$$

Если в (6.108) подставить (6.106), то приходим к (6.107). ■

Модель процесса двойного динамического наблюдения в форме процесса по ВНН (6.107) позволяет сформулировать требования к матричным компонентам наблюдаемой ДДС (6.101) и ДНУ (6.102), которые позволят обеспечить все возможные задачи наблюдения.

Так если ставится **задача наблюдения вектора $\chi(k)$ текущего состояния** ДДС (6.01), то следует воспользоваться явным (показательным) решением (6.107), записываемым в форме

$$\theta(k) = \mathbf{\Gamma}^k \theta(0), \quad \theta(0) = \mathbf{T}\chi(0) + z(0). \quad (6.109)$$

Следует заметить, что при нормальном использовании ДНУ его состояние при запуске обнуляется так, что $z(0) = 0$. С учетом этого обстоятельства (6.109) принимает вид

$$\theta(k) = \Gamma^k T \theta(0). \quad (6.110)$$

В свою очередь подстановка (6.102) в (6.96) дает

$$z(k) = T \chi(k) + \Gamma^k \theta(0). \quad (6.111)$$

Потребуем от матрицы Γ состояния ДНУ обладания свойством нильпотентности с индексом ν , тогда при $k \geq \nu$ устанавливается равенство

$$z(k) = T \chi(k). \quad (6.112)$$

Таким образом, вектор $z(k)$ состояния ДНУ с точностью до матрицы преобразования подобия T задает текущее состояние вектора $\chi(k)$ наблюдаемой ДДС (6.101). Заметим, что подобие (6.112) можно преобразовать в тождество, если в матричное уравнение Сильвестра (6.106) положить $T = I$, где I – единичная матрица, и решить уравнение (6.108) относительно матрицы L .

Поставим теперь задачу наблюдения вектора $\chi(0)$ начального состояния наблюдаемой ДДС (6.101). Для этого потребуем, чтобы матрица Γ принадлежала показателю μ так, что $\Gamma^\mu = I$. В этом случае при $k = \mu$ соотношение (6.110) примет вид

$$z(\mu) = T \chi(\mu) + \theta(0) = T \chi(\mu) + T \chi(0). \quad (6.113)$$

Дополним ситуацию еще одним условием, для чего предположим, что наблюдаемая ДДС (6.101) представляет собой регистр сдвига, функционирующий при $u(k) \equiv 0$ и $\chi(0) \neq 0$. Если учесть, что показатель μ удовлетворяет неравенствам

$$n \leq \mu \leq 2^n - 1, \quad (6.114)$$

то к моменту $k = \mu$ (6.113) примет вид

$$z(\mu) = T \chi(0). \quad (6.115)$$

Таким образом, (6.115) обнаруживает результат, который не достигается над бесконечными полями. Если наблюдаемая ДДС (6.101) представляет собой регистр сдвига размерности n с нулевой входной последовательностью $u(k) \equiv 0$ и ненулевым начальным состоянием $\chi(0)$, а двоичное наблюдающее устройство (6.94) таково, что его матрица Γ состояния принадлежит показателю μ , то в силу выполнения (6.115) состояние $z(k)$ ДНУ при $k = \mu$ является синдромом состояния $\chi(0)$.

Выделим еще одну постановочную версию задачи наблюдения состояния ДДС (6.101), предположив, что входная последовательность $u(k)$ формируется с помощью конечномерной автономной ДДС

$$\xi(k+1) = R \xi(k); \xi(0) = \xi_0; u(k) = S \xi(k). \quad (6.116)$$

Соотношения (6.116) задают источник входной последовательности (ИВП) $u(k)$.

Объединим системные компоненты – наблюдаемая ДДС (6.101), ДНУ (6.94) и ИВП (6.116), – процесса наблюдения, охарактеризовав его агрегированным вектором состояния $\bar{\chi} = [z^T, \chi^T, \xi^T]^T$. Тогда динамика системы с агрегированным вектором $\bar{\chi}$ описывается автономной ДДС

$$\bar{\chi}(k+1) = \bar{A}\bar{\chi}(k), \bar{\chi}(0) = [z^T(0), \chi^T(0), \xi^T(0)] \quad (6.117)$$

где матрица \bar{A} имеет представление

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma & LC & GS \\ 0 & A & BS \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}. \quad (6.118)$$

Агрегированная модель (6.117) с матричным компонентом \bar{A} (6.118) процесса двоичного динамического наблюдения представлена на рисунке 6.18.

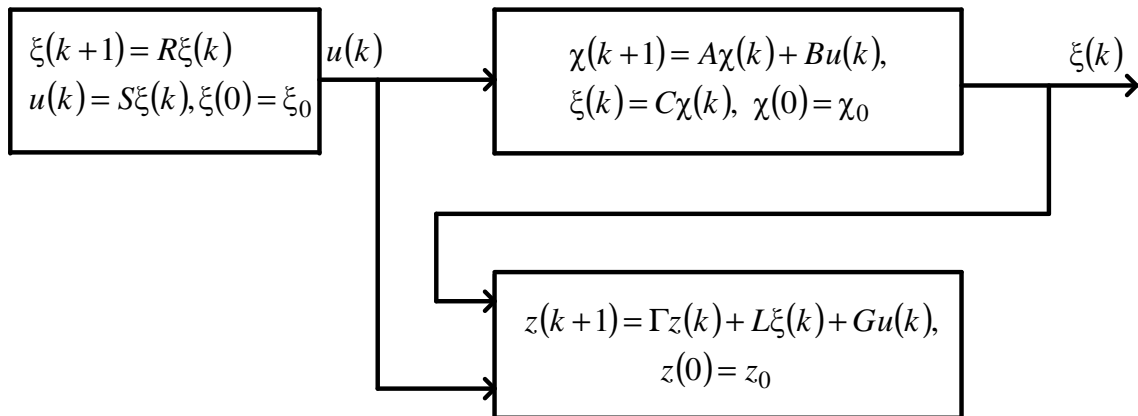


Рисунок 6.18. Модель двоичного динамического наблюдения

Для системы (6.117) явное решение $\bar{\chi}(k)$ в показательной форме принимает вид

$$\bar{\chi}(k) = \bar{A}^k \bar{\chi}(0). \quad (6.119)$$

С целью покомпонентного вычисления (6.119) сформулируем утверждение.

Утверждение 6.24. Показательная матричная функция \bar{A}^k матрицы \bar{A} вида (6.110) представима форме

$$\bar{A}^k = \begin{bmatrix} \Gamma^k & \Gamma^k T + T A^k & T(\Pi R^k + A^k \Pi) \\ 0 & A^k & \Pi R^k + A^k \Pi \\ 0 & 0 & R^k \end{bmatrix}, \quad (6.120)$$

где матрица T удовлетворяет матричному уравнению Сильвестра (6.116), а матрица Π – матричному уравнению Сильвестра

$$\Pi R + A\Pi = BS. \quad \square \quad (6.121)$$

Доказательство утверждения осуществляется на замене матричных членов LC и BS в представлении (6.116) матрицы \bar{A} , являющихся правыми частями уравнений Сильвестра (6.116) и (6.121), на их левые части, а также подстановке второго матричного соотношения (6.106) в (6.116) так, что становится справедливым матричное равенство

$$GS = TBS. \quad (6.122)$$

После проведенной модернизации представления (6.116) матрицы \bar{A} осуществляется конструирование базы индукции степеней матрицы A , что приводит к (6.120). ■

Если теперь в агрегированном векторе $\bar{\chi}$ выделить векторный компонент z , представляющий собой вектор состояния ДНУ, то в силу (6.119) и (6.120) для него можно записать

$$z(k) = \Gamma^k z(0) + (\Gamma^k T + T A^k) \chi(0) + T(\Pi R^k + A^k \Pi) \xi(0). \quad (6.123)$$

Выражение (6.123) обнаруживает все богатство решений задач двоичного динамического наблюдения, рассмотренных выше на основе частных композиций начальных состояний и свойств матричных компонентов.

Пример 6.5

Пусть требуется синтезировать ДНУ для наблюдения вектора состояния ДДС, A, B, C, H - описание которой имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 0], \quad H = [0].$$

С целью решения поставленной задачи в соответствии с (6.110) и (6.112) выберем в качестве модели ДНУ регистр сдвига третьего порядка, матрица Γ ВМ описания которого будет иметь следующий вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение

Решим поставленную задачу в форме $z(k) = \chi(k), k \geq v$, для чего в силу (6.112) выберем матрицу T в форме $T = I$. Решение уравнения

Сильвестра (6.106) относительно матрицы L и вычисление матрицы G дает

$$L = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad G = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

В силу (6.112) и того, что матрица Γ имеет индекс нильпотентности, равный трем, то, очевидно, что начиная с момента $k \geq 3$ вектор состояния z ДНУ должен будет совпасть с вектором состояния χ исходной ДДС. Покажем это, полагая, что входная последовательность $u(k)$ ДДС на первых семи тактах имеет вид $u(k): 1001010$, а начальное состояние $\chi(0)$ ДДС определяется вектором $\chi(0) = [011]^T$.

Таблица 6.3

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$u(k)$	0	1	0	0	1	0	1	0
$\chi^T(k)$	011	110	100	001	011	111	111	110
$z^T(k)$	000	000	000	001	011	111	111	110

Из таблицы 6.3 видно, что начиная с третьего такта, то есть с выполнением условия $k = 3$, вектор состояния z синтезированного ДНУ повторяет в форме $z(k) = \chi(k)$ состояние $\chi(k)$ наблюдаемой ДДС. С использованием полученных результатов структурная схема процесса двоичного динамического наблюдения вектора состояния ДДС примет вид, приведенный на рисунке 6.19.

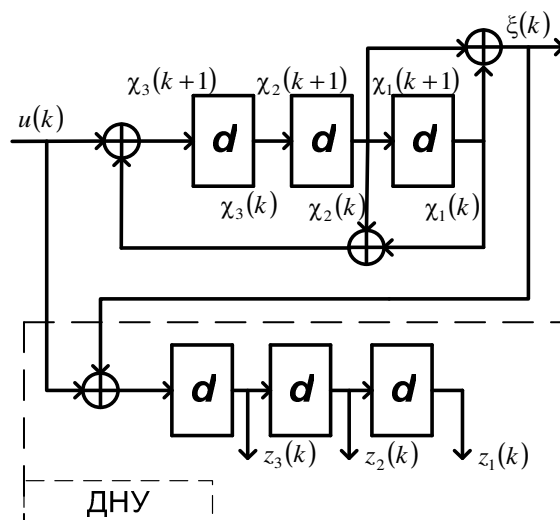


Рисунок 6.19. Структурное представление процесса двоичного динамического наблюдения

6.4.2 Процесс помехозащитного декодирования как процесс двоичного динамического наблюдения состояния двоичного канала связи

Задачу декодирования систематических помехозащищенных кодов, подвергшихся воздействию на функциональном и модельном уровнях, зададим следующим образом. Кодировующее устройство (КУ) на выходе которого формируется (n, k) -помехозащищенный код y , выводимый в канал связи в виде двоичной кодовой последовательности $y(k)$, старшим разрядом вперед, представляется n -разрядным регистром сдвига, начальное состояние которого $\chi(0)$ представляет собой передаваемую помехозащищенную кодовую посылку. Векторно-матричное модельное представление КУ имеет вид

$$x(k+1) = \mathbf{F}x(k); x(0); y(k) = \mathbf{P}x(k), \quad (6.124)$$

где \mathbf{F} – матрица размерности $(n \times n)$ является нильпотентной с индексом нильпотентности ν равным n так, что $\nu = n$. Формирователь импульсной помехи ξ , которая в канале связи (КС) искажает передаваемую кодовую посылку y , также представим n -разрядным регистром сдвига, который будем именовать регистром канала связи (РКС). РКС характеризуется нулевой входной последовательностью и вектором начального состояния $\chi(0)$, который представляет собой n -разрядный вектор помехи ξ , выводимый в КС в виде последовательности $\xi(k)$ старшим разрядом вперед. Векторно-матричное описание РКС имеет вид

$$\chi(k+1) = \mathbf{A}\chi(k), \quad \chi(0) = \chi_0, \quad \xi(k) = \mathbf{C}\chi(k). \quad (6.125)$$

Матрица \mathbf{A} совпадает с матрицей \mathbf{F} и так же является нильпотентной с индексом нильпотентности $\nu = n$.

Процесс искажения кодовой последовательности $y(k)$, при передаче по КС представим суммированием в простом двоичном поле $GF(2)$, в результате чего формируется искаженная кодовая комбинация $f = y + \xi$, в виде кодовой последовательности

$$f(k) = y(k) + \xi(k). \quad (6.126)$$

Процесс декодирования реализуем в форме построения ДНУ, формирующего к моменту $k = n$ состояние $z(n)$, которое с точностью до матрицы преобразования подобия представляло бы собой вектор $\chi(0)$ начального состояния РКС. Векторно-матричное описание ДНУ – декодирующего устройства (ДКУ) принимает вид

$$z(k+1) = \mathbf{\Gamma}z(k) + \mathbf{L}f(k), \quad z(0), \quad (6.127)$$

а структурное представление процесса декодирования – так, как показано на рисунке 6.20

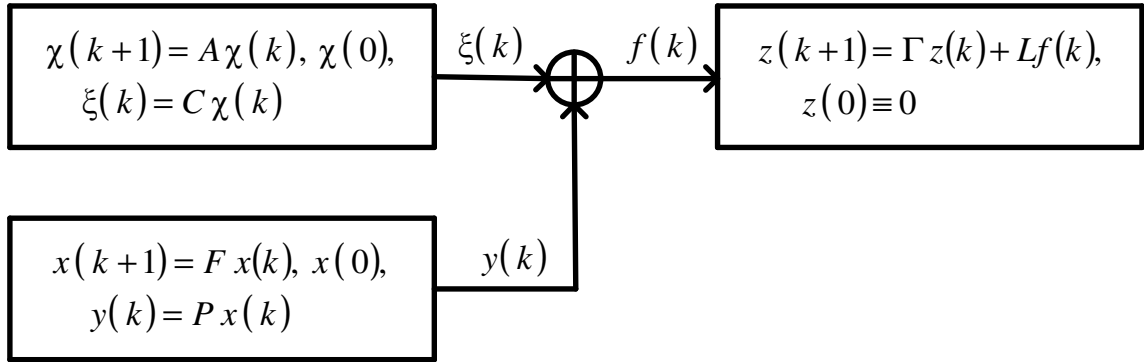


Рисунок 6.20. Структурное представление двоичного динамического наблюдения начального состояния регистра канала связи

Поставленная задача опирается на следующее утверждение.

Утверждение 6.27. Вектор $z(k)$ состояния ДКУ, построенного по структуре двоичного наблюдающего устройства для наблюдения векторов $x(0)$ и $\chi(0)$, задается соотношением

$$z(k) = \Gamma^k z(0) + (T_\chi A^k + \Gamma^k T_x) \chi(0) + (T_x F^k + \Gamma^k T_x) x(0), \quad (6.128)$$

где матричные компоненты T_χ и T_x вычисляются как решение матричных уравнений Сильвестра

$$T_\chi A + \Gamma T_\chi = LC, \quad T_x F + \Gamma T_x = LP. \quad \square \quad (6.129)$$

Доказательство утверждения ведется по той же схеме, что и доказательство утверждения 6.26. В рассмотрение вводится агрегированный вектор

$$\bar{z} = [z^T, \chi^T, x^T]. \quad (6.130)$$

Вектор (6.130) подчиняется рекуррентному векторно-матричному уравнению

$$\bar{z}(k+1) = \bar{\Gamma} \bar{z}(k); \bar{z}(0) = [z^T(0), \chi^T(0), x^T(0)], \quad (6.131)$$

явное решение которого в показательной форме имеет вид

$$\bar{z}(k) = \bar{\Gamma}^k \bar{z}(0). \quad (6.132)$$

В (6.131) и (6.132) матрицы $\bar{\Gamma}$ и $\bar{\Gamma}^k$ имеют вид

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma & LC & LP \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix}; \bar{\Gamma}^k = \begin{bmatrix} \Gamma^k & T_\chi A^k + \Gamma^k T_x & T_x F^k + \Gamma^k T_x \\ 0 & A^k & 0 \\ 0 & 0 & F^k \end{bmatrix} \quad (6.133)$$

Подстановка $\bar{\Gamma}^k$ из (6.133) в (6.132) и выделение из $\bar{z}(k)$ компонента $z(k)$ приводит к (6.128). ■

В стандартной постановке задачи декодирования сформированный ДКУ синдром ошибки представляет собой образ вектора начального состояния $\chi(0)$ РКС, образованного с помощью матрицы преобразования подобия T_χ . В этой связи выясним при каких условиях и свойствах матричных компонентов соотношения (6.128) последнее вырождается в соотношение вида (6.125), записываемое в форме

$$z(k) = T_\chi \chi(0). \quad (6.134)$$

Решение поставленной задачи получим с использованием положений следующего утверждения.

Утверждение 6.26. Если ДНУ начального состояния $\chi(0) = 0$ функционирует так, что всегда $z(0) = 0$, то есть перед запуском его состояние обнуляется, матрица Γ принадлежит показателю $\mu = n$, матрицы A и F обладают индексом нильпотентности $\nu = n$, матрица преобразования подобия T_x обладает свойством

$$T_x G^T = O. \quad (6.135)$$

где G – образующая матрица систематического кода, то выполняется соотношение векторно-матричного подобия

$$z(n) = T_\chi \chi(0). \quad \square \quad (6.136)$$

Доказательство утверждения строится на определениях свойств нильпотентности матрицы и принадлежности матрицы показателю, а также на использовании условия $z(0) = 0$, что приводит (6.128) к виду

$$z(n) = T_\chi \chi(0) + T_x x(0). \quad (6.137)$$

Напомним, что вектор $x(0)$ формируется из информационной части $x_u(0)$ систематического помехозащищенного кода с помощью образующей матрицы G кода в силу соотношения

$$x(0) = G^T x_u(0) \quad x(0) = G^T x_u(0). \quad (6.138)$$

Если (6.138) подставить в (6.137) и учесть (6.135), то получим (6.136). ■

Следует заметить, что в силу (6.135) матрица T_x как решение матричного уравнения Сильвестра (6.129) является проверочной матрицей систематического кода.

Пример 6.6

В качестве примера рассмотрим аналитику решения в виде (6.130) задачи конструирования декодирующего устройства в форме ДНУ циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$.

Сконструируем ДКУ в форме ДНУ и кодирующее устройство в виде модельных представлений «вход-состояние-выход» с матричными компонентами

$$A = F = \left[\mathbf{O}_7 \left| \begin{array}{c} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_6^T \end{array} \right. \right], \quad C = P = \left[\mathbf{I} \left| \mathbf{O}_6^T \right. \right]$$

соответственно.

Решение

Решение относительно матрицы T матричного уравнения (6.105) дает

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует заметить тождественность результата для вычисленной матрицы T каноническому представлению проверочной матрицы \tilde{H} циклического кода, который в рассматриваемом примере соответствует образующему многочлену $g(x) = x^3 + x + 1$, которая имеет вид

$$\tilde{H} = \left[\tilde{G}^T \left| \mathbf{I} \right. \right]^T = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^T.$$

Заметим также, что процесс декодирования состоит в вычислении вектора ошибки (применительно к данному примеру – вектору состояния регистра канала связи см. рисунок 6.20) посредством умножения матрицы T^T на вектор начального состояния $\chi(0)$ РКС. Нетрудно видеть, что в силу равенств матриц T и \tilde{H}^T , процесс декодирования циклических кодов полностью совпадает с классическим его представлением. Структурная схема процесса декодирования циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ представлена на рисунке 6.21. На рисунке 6.21 РКС – регистр канала связи, начальное состояние которого соответствует выводимой из него в канал связи двоичной последовательности $\xi(k)$, искажающей двоичную последовательность $y(k)$ помехозащищенного кода передачи; КУ кодирующее устройство, реализующее помехозащитное систематическое кодирование информационного кода $x_u^T(0)$, выводимого из параллельного регистра хранения, моделирующего источник информации, в силу правила (6.138), принимающего вид $\tilde{G}^T x_u^T(0)$; ДНУ–ДКУ – двоичное наблюдающее устройство начального состояния РКС, формирующее вектор

наблюдение в форме синдрома искажения, реализуя тем самым помехозащитное декодирование. ■

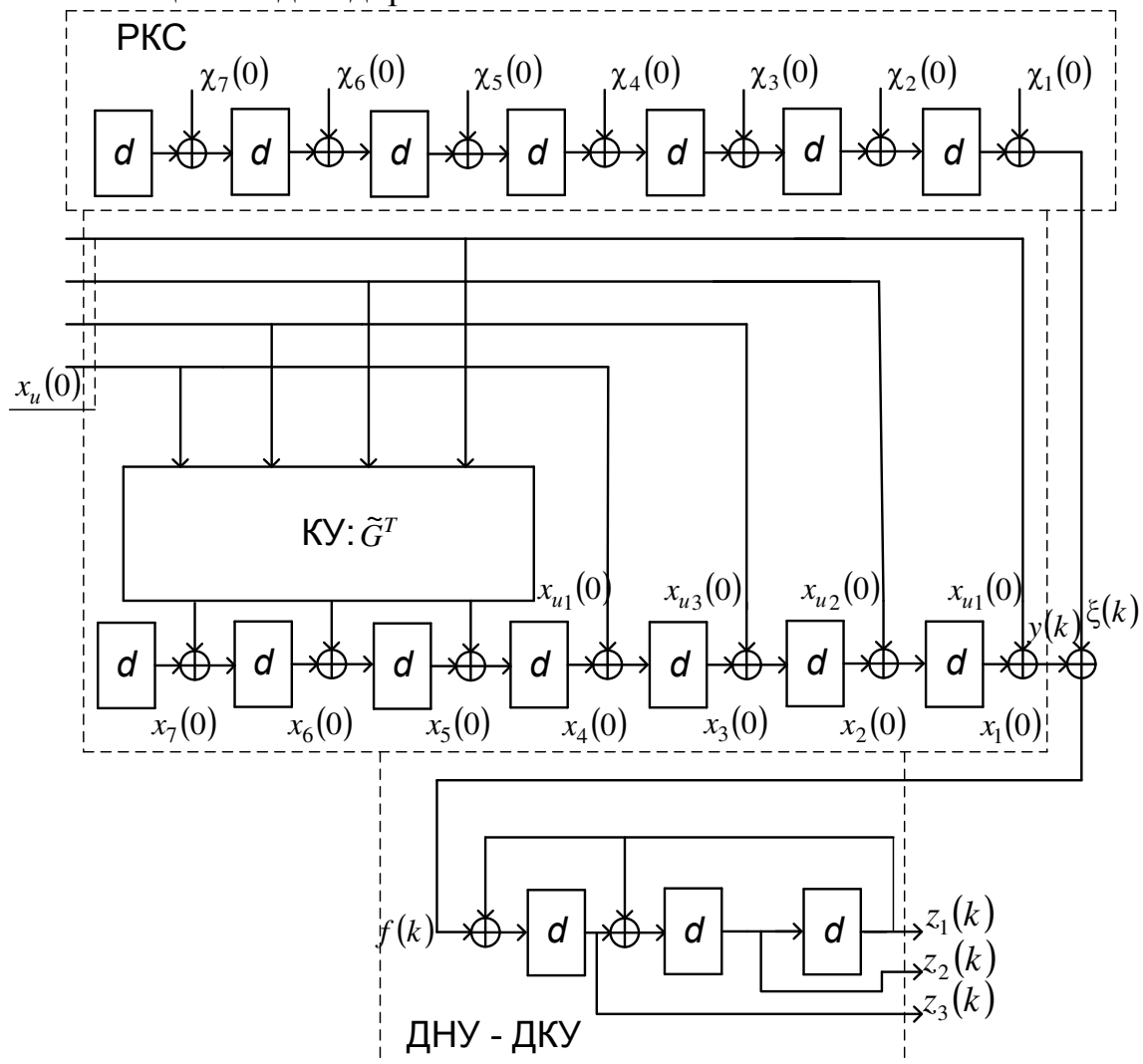


Рисунок 6.21. Структурная схема декодирующего устройства

6.4.3 Синтез двоичных динамических систем в логике произвольных линейных триггеров на базе концепции подобия

Решая поставленную задачу, следует отметить, что банк линейных триггеров состоит из D - и T - триггеров при этом так, как передаточная функция элемента памяти (ЭП), выполненного в виде D - триггера, характеризуется передаточной функцией

$$\Phi_{DЭП}(d) = d, \quad (6.131)$$

а в виде T - триггера – характеризуется передаточной функцией

$$\Phi_{TЭП}(d) = \frac{1}{1+d}, \quad (6.132)$$

то векторы состояний ДДС, имеющих D - и T - триггерную реализацию, оказываются связанными отношениями подобия

$$x_T(k) = M x_D(k), \quad \forall k. \quad (6.133)$$

Пусть в результате синтеза ДДС, решающей задачу преобразования входной последовательности $u(k)$ в выходную $y(k)$, получена D – триггерная реализация системы, имеющая векторно-матричное представление

$$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u(k), \quad y_D(k) = C_D x_D(k) + N u(k). \quad (6.134)$$

Требуется, опираясь на условие векторно-матричного подобия (6.133), построить T – триггерную реализацию системы

$$x_T(k+1) = A_T x_T(k) + B_T u(k), \quad y_T(k) = C_T x_T(k) + N u(k), \quad (6.135)$$

решающую ту же задачу кодопреобразования. Поставленную задачу решим, опираясь на следующие утверждения.

Утверждение 6.29. Матричные компоненты векторно-матричных представлений (6.134) и (6.135) ДДС, решающих одну и ту же задачу кодопреобразования входной последовательности $u(k)$ в выходную $y(k)$, связаны соотношениями

$$A_T = M A_D M^{-1}, \quad (6.136)$$

$$B_T = M B_D, \quad C_T = C_D M^{-1}. \quad \square (6.137)$$

Доказательство утверждения строится на использовании (6.133), которое должно выполняться для $\forall k$, а потому оказывается справедливой запись

$$x_T(k+1) = M x_D(k+1), \quad \forall k. \quad (6.138)$$

Подстановка в (6.138) соотношений (6.134) и (6.135) приводит к справедливости (6.136) и первого соотношения в (6.137). Второе соотношение в (6.137) получается после подстановки (6.133) в выражение для выходной последовательности $y(k)$ в (6.135). ■

Утверждение 6.30. Матричное условие подобия (6.136), записанное в форме

$$M A_D = A_T M, \quad (6.139)$$

представимо в виде неоднородного матричного уравнения Сильвестра

$$M A_D + \bar{A}_T M = \bar{B}_T L_D, \quad (6.140)$$

где $\dim A_D = \dim \bar{A}_T$, (A_D, L_D) – полностью наблюдаемая пара матриц, (\bar{A}_T, \bar{B}_T) – полностью управляемая пара матриц, алгебраические спектры собственных значений матриц A_D и \bar{A}_T не пересекаются, то есть $\sigma\{A_D\} \cap \sigma\{\bar{A}_T\} = \emptyset$, размерности матриц \bar{B}_T, L_D согласованы в силу соотношения $\dim \bar{B}_T = \dim L_D$. □

Доказательство утверждения строится на представлении матрицы A_T в форме

$$A_T = \bar{A}_T + \bar{B}_T \bar{N}_T, \quad (6.141)$$

где матрица \bar{N}_T допускает представление

$$\bar{N}_T = L_D M^{-1}. \quad (6.142)$$

Выражение (6.142) допускает эквивалентное представление

$$L_D = \tilde{N}_T M. \quad (6.143)$$

Подстановка (6.143) в (6.140) с учетом (6.141) приводит к (6.139). ■

Утверждение **6.28** является основой следующего алгоритма синтеза ДДС в логике T – триггеров.

Алгоритм 6.13

конструирования двоичных динамических систем
в логике произвольных линейных триггеров

1. Выполнить **A6.2**, получив представление линейной ДДС в форме (6.134).

2. Назначить произвольные матрицы \bar{A}_T, \bar{B}_T и L_D , удовлетворяющие условиям **У6.28**.

3. Решить матричное уравнение Сильвестра (6.140) относительно матрицы подобия M и вычислить матрицу M^{-1} .

4. Сконструировать матричные компоненты T –триггерной реализации линейной ДДС (6.135) с помощью соотношений (6.136) и (6.137). ■

Следует отметить, что так, как нелинейные ДДС, именуемые конечными автоматами, имеют линейные аналоги, то, как представляется авторам, концепция подобия может быть распространена и на этот класс ДДС.

Пример 6.7.

Построить для декодирующего устройства циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ модельное представление ДДС в логике линейных T –триггеров.

Решение

1. Выполнение п.1 алгоритма 6.13 формирует модельное «вход-состояние-выход» представление декодирующего устройства с матричными компонентами

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_D = [1 \ 0 \ 0], \quad N = [1].$$

2. Назначение произвольных матриц \bar{A}_T, \bar{B}_T и L_D , удовлетворяющих условиям утверждения **6.30**, дает

3.

$$\tilde{\mathbf{A}}_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_D = [1 \ 0 \ 0].$$

4. Выполнение п.3 алгоритма, состоящее в решении матричного уравнения Сильвестра (6.138) относительно матрицы подобия \mathbf{M} , приводит к матрице

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

соответственно.

5. С помощью соотношений (6.136) и (6.137) конструирование матричных компонентов \mathbf{T} -триггерной реализации ДДС, описываемой матричными компонентами, полученными в п.1 алгоритма, дает матричные компоненты искомого векторно-матричного описания

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_T = [1 \ 0 \ 1].$$

Структурное представление векторно-матричного описания искомой ДДС с полученными компонентами $\mathbf{A}_T, \mathbf{B}_T, \mathbf{C}_T$ имеет вид, как показано на рисунке 6.22. ■

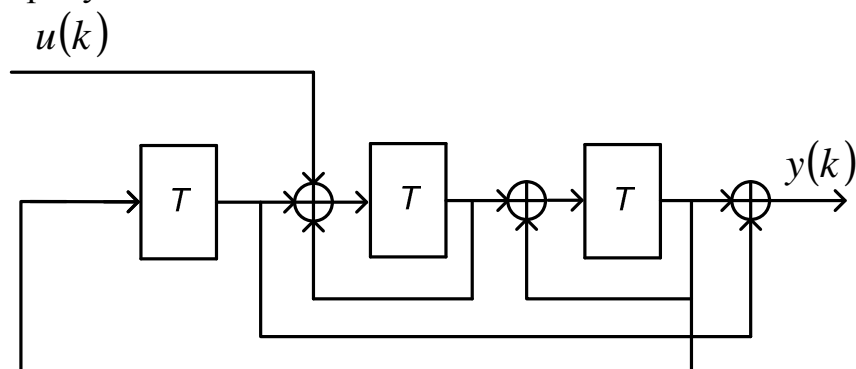


Рисунок 6.22

Примеры и задачи

6.1. Построить структурное представление линейной ДДС, преобразующей входную единичную последовательность $u(k) = 1(k)$ в периодическую периода $T = 7$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

6.2. Сконструировать линейную ДДС, осуществляющей деление произвольной входной ДКП (задаваемой в виде ММ $u(x)$) на неприводимый многочлен $\beta(x) = x^3 + x + 1$ с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед.

6.3. Сконструировать (A, B, C, N) – представление ЛДДС по ее передаточной функции $\Phi(d)$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

6.4. 0.1. Массив сообщений Q характеризуется мощностью $[Q] = V_u = 120$ так, что число информационных разрядов ПЗК $k = \min \arg\{2^k \geq V_u = 120\} = 7$;

0.2. Передача сообщений должна осуществляться ПЗК с полной блоковой систематикой, обладающим способностью исправлять ошибки первой и второй кратности ($s=2$);

0.3. Разработать устройства помехозащитного кодирования и декодирования рекуррентного типа на основе линейных двоичных динамических систем.

6.5. Синтезировать ДНУ для наблюдения вектора состояния линейной ДДС, A, B, C, H – описание которой имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ 0], \quad H = [0].$$

6.6. На основе образующего ММ $g(x) = x^3 + x + 1$ сконструировать ДКУ в форме ДНУ и кодирующее устройство в виде модельных представлений «вход-состояние-выход» с матричными компонентами

$$A = F = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_7 & \begin{array}{c} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_6^T \end{array} \end{array} \right], \quad C = P = [I \ | \ \mathbf{O}_6^T]$$

соответственно.

6.7. Построить для декодирующего устройства циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ модельное представление ДДС в логике линейных T -триггеров.

6.8. Сконструировать проверочную H и образующую G матрицы ПЗК основе образующего ММ $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ путем решения матричных уравнений Сильвестра (6.129).

6.9. Построить структурное представление линейной ДДС, преобразующей входную последовательность в виде одиночного импульса $u(k) = \delta(k)$ в периодическую периода $T = 7$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

6.10. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС, преобразующей входную последовательность в виде одиночного импульса $u(k) = \delta(k)$ в периодическую периода $T = 7$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

6.11. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС, описываемой передаточной функцией $\Phi(d) = \frac{(1+d)(1+d+d^3)}{1+d^5}$ в каноническом управляемом базисе.

6.12. Линейная ДДС описывается передаточной функцией, задаваемой цепочкой эквивалентных представлений

$$\Phi(d) = \frac{(1+d)(1+d+d^3)}{1+d^5} = \frac{1+d^2+d^3+d^4}{1+d^5} = \frac{1+d+d^3}{1+d+d^2+d^3+d^4}$$

6.12.1. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС в каноническом наблюдаемом базисе с передаточной функцией

$$\Phi(d) = \frac{1+d^2+d^3+d^4}{1+d^5};$$

6.12.2. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС в каноническом управляемом базисе с передаточной функцией

$$\Phi(d) = \frac{1+d^2+d^3+d^4}{1+d^5};$$

6.12.3. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС в каноническом наблюдаемом базисе с передаточной функцией

$$\Phi(d) = \frac{1 + d + d^3}{1 + d + d^2 + d^3 + d^4};$$

6.12.4. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС в каноническом управляемом базисе с передаточной функцией

$$\Phi(d) = \frac{1 + d + d^3}{1 + d + d^2 + d^3 + d^4};$$

6.12.5. Используя (A, B, C, N) – представление линейной ДДС в произвольном каноническом базисе с передаточными функциями

$$\Phi(d) = \frac{1 + d + d^3}{1 + d + d^2 + d^3 + d^4}; \Phi(d) = \frac{1 + d + d^3}{1 + d + d^2 + d^3 + d^4};$$

показать тождественность их выходных последовательностей $y(k)$ при $u(k) = 1(k)$.

6.13. Построить (A, B, C, N) – представление линейной ДДС, осуществляющей деление произвольной входной ДКП (задаваемой в виде ММ $u(x)$) на неприводимый многочлен $\beta(x) = x^3 + x + 1$ с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед, проверить ее работоспособность на примере деления $u(x) = x^5 + x^2$ на $\beta(x)$.

6.14. Построить (A, B) – представление рекуррентного декодирующего устройства с образующим ММ $g(x) = x^3 + x^2 + 1$, построить проверочную и образующую матрицы кода, используя представление (6.91).

6.15. На основании проверочной матрицы ПЗК $(7,4)$, записанной в транспонированном виде

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

построить векторно-матричное (A, B) – представление вида (6.78) УДММ кодирующего и декодирующего устройств.

Решение вариантов задач

Задача 6.1. Построить структурное представление линейной ДДС, преобразующей входную единичную последовательность $u(k) = 1(k)$ в периодическую периода $T = 7$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга $(7,4)$.

Решение (см. в тексте параграфа 6.1).

Задача 6.2. Сконструировать линейную ДДС, осуществляющей деление произвольной входной ДКП (задаваемой в виде ММ $u(x)$) на неприводимый многочлен $\beta(x) = x^3 + x + 1$ с учетом передачи ДКП старшим разрядом вперед.

Решение (см. в тексте параграфа 6.1).

Задача 6.3. Сконструировать (A, B, C, N) – представление ЛДДС по ее передаточной функции $\Phi(d)$, обеспечивающую размещение в регистре хранения информационных разрядов кода Хэмминга (7,4).

Решение (см. в тексте параграфа 6.2)

Задача 6.4.

0.1. Массив сообщений Q характеризуется мощностью $[Q] = V_u = 120$ так, что число информационных разрядов ПЗК $k = \min \arg \{2^k \geq V_u = 120\} = 7$;

0.2. Передача сообщений должна осуществляться ПЗК с полной блоковой систематикой, обладающим способностью исправлять ошибки первой и второй кратности ($s=2$);

0.3. Разработать устройства помехозащитного кодирования и декодирования рекуррентного типа на основе линейных двоичных динамических систем.

Решение (см. в тексте параграфа 6.3)

Задача 6.5. Синтезировать ДНУ для наблюдения вектора состояния линейной ДДС, A, B, C, H – описание которой имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 0], \quad H = [0].$$

Решение (см. в тексте параграфа 6.4.1)

Задача 6.6. На основе образующего ММ $g(x) = x^3 + x + 1$ сконструировать ДКУ в форме ДНУ и кодирующее устройство в виде модельных представлений «вход-состояние-выход» с матричными компонентами

$$A = F = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_7 & \begin{array}{c} \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ \mathbf{O}_6^T \end{array} \end{array} \right], \quad C = P = [I \mid \mathbf{O}_6^T]$$

соответственно.

Решение (см. в тексте параграфа 6.4.2)

Задача 6.7. Построить для декодирующего устройства циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x + 1$ модельное представление ДДС в логике линейных T -триггеров.

Решение (см. в тексте параграфа 6.4.3.).