

8. КОНЕЧНЫЕ ЦЕПИ А. МАРКОВА В МОДЕЛИРОВАНИИ ДВОИЧНЫХ КАНАЛОВ СВЯЗИ

Изучение проблемы, вынесенной в заголовок раздела, начнем со следующих цитат из раздела пособия «основные понятия и определения».

Определение 0.14. Канал связи называется *первичным дискретным*, если по нему передаются *дискретные сигналы*, представляющие собой дискретные *по времени выборки* из непрерывных сигналов, осуществляемые в дискретные моменты времени $t = k(\Delta t)$ с интервалом дискретности Δt так, что в каждый дискретный момент времени сигнал выборки принадлежит простому полю Галуа $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, (p-1)\}$, без трансформации амплитудных частотных спектров вдоль оси частот. □

Определение 0.15. Канал связи называется *первичным двоичным* (или просто *двоичным*), если в определении **0.14** дискретного канала характеристика (модуль) p простого поля Галуа принимает значение $p = 2$. □

Определение 0.21. *Импульсной помехой* называется «паразитный» дискретный сигнал, длительность действия которого соизмерима с длительностью одного элементарного двоичного сигнала (бита) передаваемых по двоичному КС кодовых комбинаций (КК), под действием которого бит, на который накладывается импульсная помеха, принимает инверсное значение. □

Основным способом коррекции КК, вызванных импульсными помехами, является использование методов *помехозащитного кодирования и декодирования* КК путем введения в состав кодовых комбинаций избыточных проверочных разрядов.

Определение 0.22. Двоичной канал связи называется *симметричным*, если вероятность p_{01} трансформации символа «0» в символ «1» и вероятность p_{10} трансформации символа «1» в символ «0» при передаче по двоичному КС равны, что записывается в форме $p_{01} = p_{10} = p$, при этом p именуется вероятностью трансформации бита (элементарного сигнала) двоичного кода. □

Определение 0.23. Двоичной канал связи называется *несимметричным*, если вероятность p_{01} трансформации символа «0» в символ «1» и вероятность p_{10} трансформации символа «1» в символ «0» при передаче по двоичному КС не равны так, что выполняется неравенство $p_{01} \neq p_{10}$. □

Определение 0.24. Двоичной канал связи называется *симметрированным*, если при вероятности p_{01} трансформации

символа «0» в символ «1» и вероятности p_{10} трансформации символа «1» в символ «0» при передаче по двоичному КС не равных друг другу так, что выполняется неравенство $p_{01} \neq p_{10}$, за вероятность p , именуемой вероятностью трансформации бита (элементарного сигнала) двоичного кода, принимается величина, вычисляемая в силу соотношения $p = \max\{p_{01}, p_{10}\}$. \square

Таким образом предметом настоящего раздела будут: симметричные, несимметричные и симметрированные двоичные каналы связи, характеризующиеся в зависимости от принятой модели вероятностями p_{01}, p_{10}, p , дополненные условиями $p_{01} = p_{10} = p$, $p_{01} \neq p_{10}$ и $p = \max\{p_{01}, p_{10}\}$.

Возникает естественный вопрос: «Какими инструментальными и алгоритмическими средствами могут быть получены приведенные выше вероятности трансформации бита в двоичном канале связи?».

Ответ на первую часть вопроса довольно прост: «с помощью хорошо функционирующей системы статистического контроля состояния каналов связи в службах, задействованных в организации телекоммуникационного процесса». Ответ на вторую часть вопроса звучит так: «алгоритмическими средствами, согласованными с используемыми модельными представлениями процессов искажения информационных потоков в двоичных каналах при их передаче».

В настоящее время наиболее часто используемыми моделями двоичных каналов связи являются модели Гилберта, Эллиота–Гилберта, Смита–Боуэна–Джойса и Фричмана–Свободы. Первые три модели КС используют для этих целей конечные цепи Маркова (КЦМ) с двумя состояниями, последняя сориентирована на возможность использования КЦМ с произвольным числом состояний.

Сказанное делает неизбежным знакомство с элементами теории КЦМ.

8.1 Элементы теории конечных цепей Маркова

Определение 8.1. Конечной цепью Маркова называется макровектор, задаваемый в форме

$$\text{КЦМ} = \{S, P, T, \Pi, K\}, \quad (8.1)$$

в котором $S = \{S_i; i = \overline{1, n}\}$ – счетное множество состояний стохастического процесса, моделируемого с помощью КЦП; $P = [P_i; i = \overline{1, n}]$ – множество вероятностей $P_i (i = \overline{1, n})$ пребывания стохастического процесса в состояниях $S_i (i = \overline{1, n})$, обладающее стохастическим свойством $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, и представляемое в виде вектора –

строки $P = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_i \ \dots \ P_n] = \text{row}\{P_i; i = \overline{1, n}\}$; $T = \{\Delta t_i; i = \overline{1, n}\}$ – множество длительностей $\{\Delta t_i; i = \overline{1, n}\}$ пребывания стохастического процесса в состояниях S_i ($i = \overline{1, n}$); $\Pi = \text{col}\{\text{row}(P_{ij}); j = \overline{1, n}\}; i = \overline{1, n}\}$ – $(n \times n)$ –матрица вероятностей P_{ij} перехода (переходных вероятностей) из состояния S_i в состояние S_j ($i, j = \overline{1, n}$); $K = \{k : 0 \leq k < \infty\}$ – счетное множество дискретных моментов времени, с помощью которых параметризуется стохастический процесс так, что для вектора вероятностей $P(k+1)$ пребывания в состоянии перехода $S(k+1)$ при условии, что стохастический процесс находился с вероятностью $P(k)$ в исходном (текущем) состоянии $S(k)$, оказывается справедливым представлением в виде рекуррентной процедуры

$$P(k+1) = P(k)\Pi(k), P(0) = P(S(0)) \quad (8.2)$$

где $P(0) = P\{S(0)\}$ – вектор вероятностей пребывания стохастического процесса в состояниях $S(0)$, принимаемых за начальные. \square

Определение 8.2. Конечная цепь Маркова (8.1) называется *однородной*, если ее матрица вероятностей перехода является фиксированной для всех значений дискретного времени k так, что выполняется соотношение

$$\Pi(k) = \Pi = \text{fix}. \quad \square \quad (8.3)$$

Определение 8.3. Конечная цепь Маркова (8.1) называется *дискретной*, если длительности $\{\Delta t_i; i = \overline{1, n}\}$ пребывания стохастического процесса в состояниях S_i ($i = \overline{1, n}$) являются равными и фиксированными так, что выполняется соотношение

$$\Delta t_i = \Delta t_j = \Delta t = \text{fix}; i, j = \overline{1, n}. \quad \square \quad (8.4)$$

Определение 8.4. Конечная цепь Маркова (8.1) называется *непрерывной*, если длительности $\{\Delta t_i; i = \overline{1, n}\}$ пребывания стохастического процесса в состояниях S_i ($i = \overline{1, n}$) являются различными и в общем случае случайными так, что выполняется соотношение

$$\Delta t_i \neq \Delta t_j; i, j = \overline{1, n}; i \neq j. \quad \square \quad (8.5)$$

Определение 8.5. Состояние S_j стохастического процесса, моделируемого КЦМ (8.1), называется *поглощающим*, если вероятность P_{jj} перехода из состояния S_j в состояние S_j удовлетворяет условию $P_{jj} = 1$, при этом все остальные вероятности P_{ji} перехода из состояния S_j в состояние S_i ($i, j = \overline{1, n}; i \neq j$) удовлетворяет условию $P_{ji} = 0$. \square

Иначе говоря, поглощающее состояние однородной КЦМ это такое состояние, попав в которое однажды стохастический процесс не может выйти из него никогда.

Определение 8.6. Конечная цепь Маркова (8.1) называется *поглощающей*, если из множества $S_f(k_f)$ ее состояний есть хотя бы одно *поглощающее*. \square

Моделирование стохастического процесса с помощью поглощающей однородной дискретной КЦМ используется в задачах оценки временных затрат на стохастический переход из некоторого состояния $S_l(0)$, принимаемого за начальное, путем задания вектора распределения вероятностей пребывания стохастического процесса в состояниях $S(0)$ в форме

$$P(0) = P\{S(0)\} = [P_1(0) = 0, P_2(0) = 0, \dots, P_{l-1}(0) = 0, P_l(0) = 1, P_{l+1}(0) = 0, \dots, P_n(0) = 0]$$

и придания состоянию финального перехода $S_f(k_f)$ свойства поглощения с целью остановки стохастического процесса в состоянии S_f и оценки значения $k = k_f$ длительности этого перехода, выраженной в числе шагов.

Определение 8.7. Состояние S_j стохастического процесса, моделируемого КЦМ (8.1), называется *возвратным*, если стохастический процесс, стартующий из состояния $S(0) = S_j$, в своем развитии при $k \rightarrow \infty$ обязательно найдет такое $k = k_j$, что выполнится соотношение

$$S(k_j) = S_j, \quad (8.6)$$

причем $k_j = k_j \{P(0) = P\{S(0)\}\}$, или, что, то же самое, справедливо равенство для условной вероятности

$$P\left\{\left\{\lim_{k \rightarrow \infty} (S(k))_{k=k_j} = S_j\right\} \middle| S(0) = S_j\right\} = 1. \quad \square \quad (8.7)$$

Таким образом, *возвратное* состояние стохастического процесса, моделируемого КЦМ (8.1), – это состояние, посещаемое процессом при $k \rightarrow \infty$ бесконечное число раз.

Определение 8.8. Конечная цепь Маркова (8.1) называется *регулярной*, если все ее состояния являются *возвратными*. \square

Нетрудно понять, что регулярная КЦМ не содержит *поглощающих* состояний, и это обстоятельство иногда используется для определения регулярных цепей Маркова.

Следует заметить, что при моделировании канала связи как стохастического процесса в основном используются модельные представления КС в форме дискретных однородных регулярных КЦМ. Нетрудно видеть, что дискретная однородная регулярная КЦМ может

быть задана с помощью графа. На рисунке 8.1 представлен граф КЦМ= $\{S, P, T, \Pi, K\}$ для случая $n = 3$.

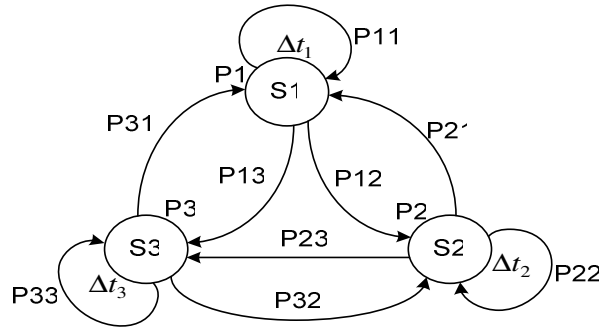


Рисунок 8.1

На основании представленного графа для компонентов рекуррентной процедуры (8.2) нетрудно записать

$$\begin{aligned} P_1(k+1) &= P_1(k)P_{11} + P_2(k)P_{21} + P_3(k)P_{31} \\ P_2(k+1) &= P_1(k)P_{12} + P_2(k)P_{22} + P_3(k)P_{32} \\ P_3(k+1) &= P_1(k)P_{13} + P_2(k)P_{23} + P_3(k)P_{33} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Соотношения (8.8) позволяют записать для представления (8.2) КЦМ в развернутой форме

$$[P_1(k+1) \ P_2(k+1) \ P_3(k+1)] = [P_1(k) \ P_2(k) \ P_3(k)] \cdot \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Из сравнения выражений (8.2) и (8.9) для КЦМ, представленной графом рисунок 8.1, следуют равенства

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [P_1(k+1) \ P_2(k+1) \ P_3(k+1)], \\ P(k) &= [P_1(k) \ P_2(k) \ P_3(k)], \quad \Pi = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Из рассмотренного частного случая следует общий вывод о том, что матрица Π вероятностей перехода КЦМ (8.1) является *стохастической* построчно. Это означает, что:

- все ее элементы неотрицательны,
- сумма элементов каждой строки равна единице так, что выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1. \quad (8.11)$$

Первое свойство стохастичности матрицы вытекает из свойств вероятности, второе – из того, что элементы строк матрицы Π переходных вероятностей представляют собой вероятности покидания

состояния, номер которого определяется номером строки, а следовательно первым индексом переходных вероятностей каждой строки. Очевидно, стохастический процесс с вероятностью, равной единице *покидает* любое состояние КЦМ с тем, чтобы перейти в любое, в том числе и *покидаемое*.

Вернемся к рекуррентной модели (8.2), описывающей динамику процесса изменения вектора вероятностей пребывания стохастического процесса моделируемого КЦМ, для случая, когда КЦМ является дискретной однородной регулярной так, что (8.2) можно записать в форме

$$P(k+1) = P(k)П, P(0) = P\{S(0)\}. \quad (8.12)$$

Явное решение уравнения (8.12) относительно вектора $P(k)$ найдем с помощью утверждения.

Утверждение 8.1. Явное решение векторно-матричного уравнения (8.12) имеет вид

$$P(k) = P(0)П^k. \quad \square \quad (8.13)$$

Доказательство утверждения осуществим по индукции, для чего построим базу индукции с использованием рекуррентной модели КЦМ (8.12). Тогда получим на основании (8.12):

$$P(1) = P(0)П,$$

$$P(2) = P(1)П = P(0)ПП = P(0)П^2,$$

$$P(3) = P(2)П = P(0)П^2П = P(0)П^3.$$

База индукции создана, на ее основе можно записать (8.13). ■

Воспользуемся представлением (8.13) для того, чтобы изучить свойства матрицы $П$ переходных вероятностей. Для этих целей сформулируем систему утверждений.

Утверждение 8.2. При любых значениях степени « k » матрица $П^k$ является стохастической. □

Доказательство утверждения осуществляется на основании (8.13) и предоставляется читателю. ■

Утверждение 8.3. Алгебраический спектр $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы $П$ переходных вероятностей $\sigma\{П\} = \{\lambda_i; \det(\lambda I - П) = 0; i = \overline{1, n}\}$ не может состоять из значений строго меньших единицы по модулю так, как это условие, записываемое в форме

$$|\lambda_i| < 1; \forall i = \overline{1, n}, \quad (8.14)$$

нарушает стохастическое свойство матрицы $П^k$. □

Доказательство. Построим на алгебраическом спектре $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы $П$ диагональную матрицу

$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Свяжем матрицы Π и Λ матричным соотношением подобия $M\Lambda = \Pi M$. На основании этого соотношения и свойств матричной функции от матрицы для матрицы Π^k получим

$$\Pi^k = M\Lambda^k M^{-1} = M \text{diag}\{\lambda_i^k; i = \overline{1, n}\} M^{-1}. \quad (8.15)$$

Если в (8.15) совершить предельный переход $k \rightarrow \infty$, то получим в силу условия (8.14)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{\Pi^k = M\Lambda^k M^{-1} = M \text{diag}\{\lambda_i^k; i = \overline{1, n}\} M^{-1}\} = M \text{diag}\{\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_i^k; i = \overline{1, n})\} M^{-1} = 0.$$

Полученное соотношение противоречит стохастическому свойству матрицы Π^k при любом k . ■

Утверждение 8.4. В составе алгебраического спектра $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы Π переходных вероятностей $\sigma\{\Pi\} = \{\lambda_i; \det(\lambda I - \Pi) = 0; i = \overline{1, n}\}$ не может содержаться собственное значение строго большее единицы так, как это условие, записываемое в форме

$$\exists j: |\lambda_j| > 1, \quad (8.16)$$

нарушает стохастическое свойство матрицы Π^k . □

Доказательство. Построим на алгебраическом спектре $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы Π диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Свяжем матрицы Π и Λ матричным соотношением подобия $M\Lambda = \Pi M$, где M матрица диагонализации матрицы Π . На основании этого соотношения и свойств матричной функции от матрицы для матрицы Π^k запишем

$$\Pi^k = M\Lambda^k M^{-1} = M \text{diag}\{\lambda_i^k; i = \overline{1, n}\} M^{-1}. \quad (8.17)$$

Если в (8.17) совершить предельный переход $k \rightarrow \infty$, то получим в силу условия (8.14)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \{\Pi^k = M\Lambda^k M^{-1} = M \text{diag}\{\lambda_i^k; i = \overline{1, n}\} M^{-1}\} &= M \text{diag}\{\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_i^k; i = \overline{1, n})\} M^{-1} = \\ &= M \text{diag}\{0_{(j-1) \times (j-1)}, (\infty), 0_{(n-j) \times (n-j)}\} M^{-1} = (\infty) \cdot \text{row}\{\{ \text{col}(M_{ij} M_{jl}^{-1}) i = \overline{1, n}; l = \overline{1, n} \} \} \end{aligned}$$

Полученное соотношение противоречит стохастическому свойству матрицы Π^k при любом k . ■

Примечание 8.1. Наглядности ради рассмотрим ситуацию (8.17) на примере матриц 3×3 , для которой оказывается справедливой цепочка матричных равенств

$$\begin{aligned}
M \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot M^{-1} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\infty)^{0.5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\infty)^{0.5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} & \tilde{M}_{13} \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} & \tilde{M}_{23} \\ \tilde{M}_{31} & \tilde{M}_{32} & \tilde{M}_{33} \end{bmatrix} = \\
&= (\infty)^{0.5} \cdot \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} & \tilde{M}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\infty)^{0.5} = (\infty) \cdot \begin{bmatrix} M_{12}\tilde{M}_{21} & M_{12}\tilde{M}_{22} & M_{12}\tilde{M}_{23} \\ M_{22}\tilde{M}_{21} & M_{22}\tilde{M}_{22} & M_{22}\tilde{M}_{23} \\ M_{32}\tilde{M}_{21} & M_{32}\tilde{M}_{22} & M_{32}\tilde{M}_{23} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

здесь использовано обозначение $\tilde{M} = M^{-1}$.

Следствие 8.1. Из утверждений 8.3 и 8.4 следует, что только алгебраический спектр $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы Π переходных вероятностей $\sigma\{\Pi\} = \{\lambda_i; \det(\lambda I - \Pi) = 0; i = \overline{1, n}\}$, составленный из значений строго меньших единицы по модулю и одного значения строго равного единице, что записывается в форме

$$|\lambda_i| < 1; \forall i = \overline{1, n}; i \neq j: \lambda_j = 1, \quad (8.18)$$

сохраняется стохастическое свойство матрицы Π^k . \square

Докажем еще несколько полезных утверждений.

Утверждение 8.5. Вектор P_f финальных вероятностей регулярной однородной КЦМ, определяемый в силу соотношения

$$P_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \{P(k) = P(0)\Pi^k\}, \quad (8.19)$$

является левым собственным вектором матрицы переходных вероятностей Π , соответствующим единичному собственному значению, так, что выполняется векторно-матричное соотношение

$$P_f = P_f \Pi. \quad \square \quad (8.20)$$

Доказательство. Разложим вектор-строку $P(0)$ по левым собственным векторам $\xi_i: \xi_i \Pi = \lambda_i \xi_i; |\lambda_i| < 1; \forall i = \overline{1, n}; i \neq j: \lambda_j = 1$, в результате чего получим

$$P(0) = P_f + \sum_{i=1; i \neq j}^n \alpha_i \xi_i. \quad (8.21)$$

Подставим (8.21) в правую часть (8.19) и воспользуемся свойством матричной функции Π^k от матрицы Π , в результате сможем записать

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ P(k) = P(0)\Pi^k = \left\{ P_f + \sum_{i=1; i \neq j}^n \alpha_i \xi_i \right\} \Pi^k = P_f \lambda_j^k + \sum_{i=1; i \neq j}^n \alpha_i \lambda_i^k \xi_i \right\} &= \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ P_f \lambda_j^k + \sum_{i=1; i \neq j}^n \alpha_i \lambda_i^k \xi_i \right\}_{\lambda_j=1; |\lambda_i| < 1} &= P_f. \end{aligned} \quad \blacksquare (8.22)$$

Утверждение 8.6. Единичное собственное значение $\lambda_j = 1$ и соответствующий ему левый собственный вектор матрицы переходных вероятностей Π P_f (вектор финальных вероятностей) регулярной КЦМ единственные. \square

Доказательство. Предположим, что существует еще один вектор финальных вероятностей \bar{P}_f . Разложим вектор \bar{P}_f по векторам P_f и остальным $(n-2)$ -м собственным векторам, записав его, таким образом, в форме

$$\bar{P}_f = P_f + \sum_{i=1; i \neq j}^{n-1} \beta_i \xi_i. \quad (8.23)$$

Примем вектор \bar{P}_f за начальный, положив в (8.19) $P(0) = \bar{P}_f$. Тогда с использованием (8.19) и (8.23) получим

$$\bar{P}_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(P_f + \left(\sum_{i=1; i \neq j}^{n-1} \beta_i \xi_i \right) \right) \Pi^k \right\} = P_f + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1; i \neq j}^{n-1} \beta_i \lambda_i^k \xi_i \right)_{|\lambda_i| < 1} = P_f. \quad \blacksquare (8.24)$$

Утверждение 8.7. Матрица Π^∞ однородной КЦМ, определяемая выражением

$$\Pi^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \Pi^k \}, \quad (8.25)$$

может быть вычислена в силу соотношения

$$\Pi^\infty = M \operatorname{diag} \{ 0_{(j-1) \times (j-1)}; \lambda_j = 1; 0_{(n-j) \times (n-j)} \} M^{-1}. \quad \square (8.26)$$

Доказательство утверждения строится на цепочке равенств

$$\begin{aligned} \Pi^\infty &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \Pi^k = M \Lambda^k M^{-1} = M \operatorname{diag} \{ \lambda_i^k; i = \overline{1, n} \} M^{-1} \} = \\ &= M \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{diag} \left\{ \operatorname{diag} \left(\lambda_i^k; i = \overline{1, j-1} \right), \lambda_j^k, \operatorname{diag} \left(\lambda_i^k; i = \overline{j+1, n} \right) \right\} \right\}_{|\lambda_i| < 1; \lambda_j = 1} M^{-1} = \blacksquare (8.27) \\ &= M \operatorname{diag} \{ 0_{(j-1) \times (j-1)}; \lambda_j = 1; 0_{(n-j) \times (n-j)} \} M^{-1} = \operatorname{row} \left\{ \operatorname{col} \left(M_{ij} M_{jl}^{-1} \right); i = \overline{1, n}; l = \overline{1, n} \right\}. \end{aligned}$$

Утверждение 8.8. Матрица Π^∞ однородной КЦМ, определяемая выражением

$$\Pi^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \{ \Pi^k \},$$

представима в форме

$$\Pi^\infty = \operatorname{col} \left\{ \left(\Pi^\infty \right)^i = P_f; i = \overline{1, n} \right\}. \quad \square (8.28)$$

Доказательство утверждения строится на содержательном определении вектора финальных вероятностей P_f (8.19), которое можно записать расширительно

$$P_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \{P(k) = P(0)\Pi^k\} = P(0)\Pi^\infty, \forall P(0). \quad (8.29)$$

Подставим в (8.29) представление (8.28) и убедимся, что (8.29) выполняется при любом $P(0)$. Действительно в силу (8.29) и стохастического свойства вектора $P(0): \sum_{i=1}^n P_i(0) = 1$, выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned} P(0)\Pi^\infty &= \text{row}\{P_i(0); i = \overline{1, n}\} \text{col}\{(\Pi^\infty)^i = P_f; i = \overline{1, n}\} = \\ &= \sum_{i=1}^n P_f P_i(0) = P_f \sum_{i=1}^n P_i(0) = P_f, \forall P(0). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.29)$$

Примечание 8.2. Нетрудно видеть, что матрица Π^∞ оказывается вырожденной, обладает рангом равным единице ($\text{rang}(\Pi^\infty) = 1$), характеризуется бесконечным числом обусловленности ($\text{cond}(\Pi^\infty) = \infty$) и нулевым ($\text{rcond}(\Pi^\infty) = 0$). Это обстоятельство может быть использовано для численного формирования вектора–строки финальных вероятностей регулярной КЦМ.

Полученные соотношения позволяют сформировать алгоритмы вычисления вектора–строки P_f финальных вероятностей однородной дискретной регулярной КЦМ, моделирующей некоторый дискретный стохастический процесс.

Алгоритм 8.1

Вычисления вектора–строки P_f финальных вероятностей однородной дискретной регулярной КЦМ

1. Построить граф переходов стохастического процесса, моделируемого с помощью однородной дискретной регулярной КЦМ;
2. Сформировать матрицу переходных вероятностей Π КЦМ;
3. Решить векторно-матричное уравнение относительно левого собственного вектора–строки P_f , соответствующего единичному ($\lambda_f = 1$) собственному значению матрицы Π , в форме $P_f = P_f \Pi$, с учетом выполнения условия $\sum_{i=1}^n P_{fi} = 1$. ■

Возможен также численный алгоритм формирования вектора–строки P_f финальных вероятностей однородной дискретной регулярной КЦМ, основанный на равенстве (8.28).

Алгоритм 8.2

Вычисления вектора–строки P_f финальных вероятностей однородной дискретной регулярной КЦМ

1. Выполнить п.п.1 и 2 алгоритма 8.1;
2. Сформировать матрицу Π^k , где $k = \arg\{rcond(\Pi^k) \leq 10^{-12}\}$;
3. Положить $P_f = (\Pi^k)^i; i = \overline{1, n}$.
4. Проверить выполнения условия $P_f = P_f \Pi$.

Пример 8.1 Рассматривается регулярная КЦМ с матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$. Решить пример с помощью алгоритмов 8.1 и 8.2.

Решение с помощью алгоритма 8.1

1. Пункты п.п.1,2 алгоритма 8.1. выполнены.
2. Решим векторно-матричное уравнение $P_f = P_f \Pi$, с учетом

выполнения условия $\sum_{i=1}^n P_{fi} = 1$, которые принимают вид

$$P_{f1} = 0.1P_{f1} + 0.33333P_{f2} + 0.6P_{f3};$$

$$P_{f2} = 0.2P_{f1} + 0.33333P_{f2} + 0.25P_{f3};$$

$$P_{f3} = 0.7P_{f1} + 0.33333P_{f2} + 0.15P_{f3};$$

$$P_{f1} + P_{f2} + P_{f3} = 1.$$

Полученные соотношения позволяют записать векторно-матричное выражение, если просуммировать последнюю строчку с первой, в форме

$$[1 \ 0 \ 0] = [P_{f1} \ P_{f2} \ P_{f3}] \begin{bmatrix} 1.9 & 0.2 & 0.7 \\ 0.667 & -0.667 & 0.333 \\ 0.4 & 0.25 & -0.85 \end{bmatrix}.$$

Откуда для вектора–строки финальных вероятностей получим
 $P_f = [P_{f1} \quad P_{f2} \quad P_{f3}] = [0.355 \quad 0.253 \quad 0.392]$.

Решение с помощью алгоритма 8.2

1. Пункты п.1 алгоритма 8.2. выполнен.

2.

$$\Pi^k = \begin{bmatrix} 0.355 & 0.253 & 0.392 \\ 0.355 & 0.253 & 0.392 \\ 0.355 & 0.253 & 0.392 \end{bmatrix}; k = \arg\{rcond(\Pi^k) \leq 10^{-12}\} = \arg\{1.4e-014 \leq 10^{-12}\} = 14$$

3. $P_f = [P_{f1} \quad P_{f2} \quad P_{f3}] = (\Pi^k)^j = [0.355 \quad 0.253 \quad 0.392]$.

4. Осуществим проверку выполнения условия $P_f = P_f \Pi$, в результате чего получим

$$P_f = P_f \Pi = [0.355 \quad 0.253 \quad 0.392] \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix} = [0.355 \quad 0.253 \quad 0.392] \quad \blacksquare$$

Пример 8.2. Рассматривается регулярная КЦМ с матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ в общем виде, используя алгоритм 8.1.

Решение с помощью алгоритма 8.1

1. Пункты п.п.1,2 алгоритма 8.1. выполнены.

2. Решим векторно-матричное уравнение $P_f = P_f \Pi$, с учетом

выполнения условия $\sum_{i=1}^n P_{fi} = 1$, которые принимают вид

$$P_{f1} = (1 - P_{12})P_{f1} + P_{21}P_{f2};$$

$$P_{f2} = P_{12}P_{f1} + (1 - P_{21})P_{f2};$$

$$P_{f1} + P_{f2} = 1.$$

Полученные соотношения позволяют записать векторно-матричное выражение, если просуммировать последнюю строчку с первой, в форме

$$[1 \ 0] = [P_{f1} \ P_{f2}] \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ 1 + P_{21} & -P_{21} \end{bmatrix}.$$

Откуда для вектора–строки финальных вероятностей получим

$$P_f = [P_{f1} \ P_{f2}] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ 1 + P_{21} & -P_{21} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{P_{21}}{P_{12} + P_{21}} & \frac{P_{12}}{P_{12} + P_{21}} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \quad (8.30)$$

8.2 Моделирование двоичных каналов связи с помощью конечных цепей Маркова

Погрузим теперь двоичный канал связи в инструментарий конечных регулярных однородных цепей Маркова. Сделаем это с помощью следующего определения.

Определение 8.9. Двоичным каналом связи, процессы в котором моделируются однородной регулярной конечной цепью Маркова, называется макровектор, задаваемый в форме

$$\text{ДКС} = \{S, P, T, \Pi, K, \{(p_{01}, p_{10})_i; i = \overline{1, n}\}\}, \quad (8.31)$$

в котором $S = \{S_i; i = \overline{1, n}\}$ – счетное множество состояний стохастического процесса изменения свойств ДКС, моделируемого с помощью КЦП; $P = [P_i; i = \overline{1, n}]$ – множество вероятностей P_i ($i = \overline{1, n}$) пребывания стохастического процесса в состояниях S_i ($i = \overline{1, n}$), обладающее стохастическим свойством $\sum_{i=1}^n P_i = 1$, и

представляемое в виде вектора – строки $P = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n] = \text{row}\{P_i; i = \overline{1, n}\}$; $T = \{\Delta t_i; i = \overline{1, n}\}$ – множество длительностей $\{\Delta t_i; i = \overline{1, n}\}$ пребывания стохастического процесса в состояниях S_i ($i = \overline{1, n}$); $\Pi = \text{col}\{\text{row}(P_{ij}); j = \overline{1, n}; i = \overline{1, n}\}$ – $(n \times n)$ –матрица вероятностей P_{ij} перехода (переходных вероятностей) из состояния S_i в состояние S_j ($i, j = \overline{1, n}$); $K = \{k : 0 \leq k < \infty\}$ – счетное множество дискретных моментов времени, с помощью которых параметризуется стохастический процесс так, что для вектора вероятностей $P(k+1)$ пребывания в состоянии перехода $S(k+1)$ при условии, что стохастический процесс находился с вероятностью $P(k)$ в исходном (текущем) состоянии $S(k)$, оказывается справедливым представление в виде рекуррентной процедуры

$$P(k+1) = P(k)\Pi(k), P(0) = P\{S(0)\}, \quad (8.32)$$

где $P(0) = P\{S(0)\}$ – вектор вероятностей пребывания стохастического процесса в состояниях $S(0)$, принимаемых за начальные;

$\{(p_{01}, p_{10})_i; i = \overline{1, n}\}$ – множество пар вероятностей трансформации бита двоичного кода при передаче по двоичному каналу связей соответственно 0 в 1 и наоборот для случая, когда ДКС как дискретный стохастический процесс находится в состоянии $S_i, (i = \overline{1, n})$. □

Утверждение 8.9. Если ДКС моделируется однородной регулярной цепью Маркова, характеризующейся вектором финальных вероятностей $P_f = \text{row}\{P_{fi}; i = \overline{1, n}\}$, а искажение бита двоичного кода, передаваемого по ДКС, характеризуется парой вероятностей трансформации $\{(p_{01}, p_{10})_i; i = \overline{1, n}\}$, когда дискретный стохастический процесс изменения свойств канала находится в состоянии $S_i, (i = \overline{1, n})$, то интегральная пара (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации будет характеризоваться вероятностями, вычисленными в силу соотношений

$$p_{01} = \sum_{i=1}^n P_{fi}(p_{01})_i; p_{10} = \sum_{i=1}^n P_{fi}(p_{10})_i. \quad \square \quad (8.33)$$

Доказательство утверждения предлагается сделать читателю. ■

Сформулированное утверждение позволяет построить алгоритм формирования пользовательской модели двоичного канала связи, характеризующегося интегральной парой (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС.

Алгоритм 8.3

Вычисления интегральной пары (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС.

1. Построить граф переходов стохастического процесса изменения свойств двоичного КС, моделируемого с помощью однородной дискретной регулярной КЦМ;

2. Сформировать матрицу переходных вероятностей Π КЦМ;

3. Решить векторно-матричное уравнение относительно левого собственного вектора–строки P_f , соответствующего единичному ($\lambda_f = 1$) собственному значению матрицы Π , в форме $P_f = P_f \Pi$, с

учетом выполнения условия $\sum_{i=1}^n P_{fi} = 1$;

4. Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС с помощью соотношения (8.32). ■

Пример 8.3. Рассматривается ДКС, моделируемый регулярной КЦМ с двумя состояниями $S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4})$ и $S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 3 \cdot 10^{-5})$, матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix}, \text{ в которой } P_{12} = 0.45; P_{21} = 0.55 .$$

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС.

Решение

1. Зафиксируем выполнение п.п.1,2 алгоритма 8.3;
2. С помощью формулы (8.30) вычислим вектор финальных вероятностей

$$P_f = [P_{f1} \quad P_{f2}] = \left[\frac{P_{21}}{P_{12} + P_{21}} \quad \frac{P_{12}}{P_{12} + P_{21}} \right] = \left[\frac{0.55}{1} \quad \frac{0.45}{1} \right] = [0.55 \quad 0.45];$$

3. С помощью соотношения (8.32) вычислим интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС

$$p_{01} = \sum_{i=1}^n P_{fi} (p_{01})_i = 0.55 \cdot 10^{-3} + 0.45 \cdot 10^{-4} = 0.595 \cdot 10^{-3};$$

$$p_{10} = \sum_{i=1}^n P_{fi} (p_{10})_i = 0.55 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 0.45 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 0.1785 \cdot 10^{-4}.$$

Примеры и задачи

8.1. Регулярная КЦМ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ с помощью алгоритмов 8.1.

8.2. Решить задачу 8.1 с помощью алгоритма 8.2.

8.3. Регулярная КЦМ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$, используя алгоритм 8.1.

8.4. ДКС моделируется регулярной КЦМ с двумя состояниями $S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4})$ и $S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 3 \cdot 10^{-5})$ и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix},$$

в которой $P_{12} = 0.45; P_{21} = 0.55$.

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС.

8.5. Регулярная КЦМ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} - P_{13} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & 1 - P_{21} - P_{23} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & 1 - P_{31} - P_{32} \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$, используя алгоритм 8.1.

8.6. ДКС моделируется регулярной КЦМ с тремя состояниями

$$S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 10^{-3}),$$

$$S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 10^{-4}),$$

$$S_3 : (p_{01}, p_{10})_3 = (10^{-5}, 10^{-5})$$

и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС, при этом вычисление вектора финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ осуществить с помощью алгоритма 8.1.

8.7. ДКС моделируется регулярной КЦМ с тремя состояниями

$$S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 10^{-3}),$$

$$S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 10^{-4}),$$

$$S_3 : (p_{01}, p_{10})_3 = (10^{-5}, 10^{-5})$$

и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \\ 0.333 & 0.333 & 0.334 \end{bmatrix}.$$

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС, при этом вычисление вектора финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ осуществить с помощью алгоритма 8.2.

8.8. ДКС моделируется регулярной КЦМ с тремя состояниями

$$S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 10^{-4}),$$

$$S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 10^{-5}),$$

$$S_3 : (p_{01}, p_{10})_3 = (10^{-5}, 10^{-4})$$

и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \\ 0.333 & 0.333 & 0.334 \end{bmatrix}.$$

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС, при этом вычисление вектора финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ осуществить с помощью алгоритма 8.1.

8.9. ДКС моделируется регулярной КЦМ с тремя состояниями

$$S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 10^{-4}),$$

$$S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 10^{-5}),$$

$$S_3 : (p_{01}, p_{10})_3 = (10^{-5}, 10^{-4})$$

и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \\ 0.333 & 0.333 & 0.334 \end{bmatrix}.$$

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС, при этом вычисление вектора финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ осуществить с помощью алгоритма 8.2.

8.10. ДКС моделируется регулярной КЦМ с двумя состояниями $S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 10^{-4})$ и $S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 5 \cdot 10^{-5})$ и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix},$$

в которой $P_{12} = 0.35; P_{21} = 0.7$.

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС, при этом вычисление вектора финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ осуществить с помощью алгоритма 8.1.

8.11. ДКС моделируется регулярной КЦМ с двумя состояниями $S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 10^{-4})$ и $S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 5 \cdot 10^{-5})$ и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix},$$

в которой $P_{12} = 0.35; P_{21} = 0.7$.

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС, при этом вычисление вектора финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ осуществить с помощью алгоритма 8.2.

Решение вариантов задач

8.1. Регулярная КЦМ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.6 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$ с помощью алгоритмов 8.1.

Решение (см. в тексте параграфа 8.1).

8.2. Решить задачу 8.1 с помощью алгоритма 8.2.

Решение (см. в тексте параграфа 8.1).

8.3. Регулярная КЦМ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix}.$$

Найти вектор–строку финальных вероятностей $P_f = P_f \Pi$, используя алгоритм 8.1.

Решение (см. в тексте параграфа 8.1).

8.4. ДКС моделируется регулярной КЦМ с двумя состояниями $S_1 : (p_{01}, p_{10})_1 = (10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4})$ и $S_2 : (p_{01}, p_{10})_2 = (10^{-4}, 3 \cdot 10^{-5})$ и матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix},$$

в которой $P_{12} = 0.45; P_{21} = 0.55$.

Вычислить интегральную пару (p_{01}, p_{10}) вероятностей трансформации соответственно 0 в 1 и наоборот бита двоичного кода при передаче его по ДКС.

Решение (см. в тексте параграфа 8.2).