## 9.2 Спектры модулированных и демодулированных сигналов

Ставится задача исследования влияния процесса модуляции в основном гармонического *сигнала – носителя* на параметры амплитудного частотного спектра полученного в результате модуляции сигнала с целью сравнения ширины спектра сигнала с полосой пропускания предоставленного канала связи (КС). И, хотя демодулированный сигнал формируется за пределами КС, в технической среде приемного полукомплекта аппаратуры передачи информации оцениваются и частотные параметры демодулированного сигнала.

Задача решается с использованием возможностей аппарата кронекеровских матричных структур. Погружение в аппарат кронекеровских матричных структур осуществим с помощью системы определений, свойств и примечаний, приводимых ниже.

**Определение 9.1.** Кронекеровским произведением двух векторов $x$ и $y$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, называется вектор $x \otimes y$, составленный из сепаратных произведений $\{x_i y_j ; i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\}$ их элементов так, что становится справедливым представление

$$x \otimes y = col\{x_i y_j ; i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\},\quad x \otimes y \in R^{nm}. \qquad (9.4)$$

**Примечание 9.1.** Очевидно, кроме кронекеровского произведения $x \otimes y$ векторов может быть построено также произведение $y \otimes x$ векторов, причем, в общем случае эти произведения оказываются не коммутативными так, что $x \otimes y \neq y \otimes x$, хотя наборы компонентов у них одинаковые.

**Определение 9.2** Если размерности векторов $x$ и $y$ одинаковы, то на их кронекеровском произведении $x \otimes y$ может быть построено согласованное сужение этого произведения $(x \otimes y)_S$, задаваемого представлением:

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})_S = col\{x_i y_i ; i = \overline{1,n}\}. \qquad (9.5)$$

**Примечание 9.2.** Согласованное сужение кронекеровского векторного произведения $x \otimes y$ может быть осуществлено с помощью оператора сужения с матрицей S вида

$$S = diag\{[0_{1\times(i-1)} \vdots 1 \vdots 0_{1\times(n-i)}]; i = \overline{1,n}\} \qquad (9.6)$$

так, что становится справедливой запись:

$$(x \otimes y)_S = S(x \otimes y). \qquad (9.7)$$

В качестве свойств кронекеровского произведения векторов рассмотрим правила дифференцирования кронекеровских векторных произведений по скалярному параметру, причем в основном сосредоточимся на случае, когда скалярным параметром является время.

**Свойство 9.1.** Дифференцирование векторной кронекеровской структуры в виде их кронекеровского произведения осуществляется по правилам дифференцирования сложной функции, представленной в мультикативной форме так, что:

$$\frac{d}{dt}(x(t)\otimes y(t)) \overset{\Delta}{=} \overset{\bullet}{(x(t)\otimes y(t))} = \dot{x}(t)\otimes y(t) + x(t)\otimes \dot{y}(t)\,. \qquad (9.8)$$

**Определение 9.3.** Кронекеровским произведением прямоугольных матриц $A\in R^{n\times m}, B\in R^{p\times q}$ называется матрица $(A\otimes B)$ размерности $(np\times mq)$, составленная в силу соотношения

$$A\otimes B = col\{row(A_{i,j}B;\ j=\overline{1,m});\ i=\overline{1,n}\}\,. \qquad (9.9)$$

**Примечание 9.3.** Кронекеровское произведение произвольных прямоугольных матриц не обладает коммутативностью так, что

$$A\otimes B \neq B\otimes A\,. \qquad (9.10)$$

Задача конструирования матричной модели процессов с модуляцией – демодуляцией в своей основе использует квадратные матрицы, коими являются матрицы состояния конечномерного источника информационного сигнала, конечномерномерных источников модулирующего и демодулирующего сигналов, канала связи, рассматриваемого в исследуемой проблеме как четырехполюсник и фильтра низких частот (ФНЧ), полоса пропускания которого согласована со спектром информационного сигнала. Поэтому ниже имеется в виду класс квадратных матриц.

**Определение 9.4.** Кронекеровской суммой квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ называется матрица $(A\oplus B)$, размерности $(nm\times nm)$, составленная в силу соотношения

$$A\oplus B = A\otimes I_B + I_A\otimes B\,, \qquad (9.11)$$

где $I_A, I_B$ – единичные матрицы, согласованные по размерности соответственно с матрицами $A$ и $B$.

**Примечание 9.4.** Для кронекеровской суммы квадратных матриц $A$ и $B$, а в общем случае произвольного числа матриц, существует альтернативное название – преобразование Сильвестра матриц, что записывается в форме

$$A\oplus B \overset{\Delta}{=} A\otimes I_B + I_A\otimes B \overset{\Delta}{=} Si\{A,B\}\,. \qquad (9.12)$$

Для случая трех квадратных матриц $A,B,C$ кронекеровская сумма или их преобразование Сильвестра будет записано в форме:

$$Si\{A,B,C\} = A \oplus B \oplus C = A \otimes I_B \otimes I_C + I_A \otimes B \otimes I_C + I_A \otimes I_B \otimes C. \quad (9.13)$$

Отметим, что как и кронекеровское произведение матриц кронекеровская сумма не коммутативна.

Кронекеровские матричные структуры, введенные выше, обладают следующими свойствами.

**Свойство 9.2.** Алгебраический спектр собственных значений кронекеровского произведения $A \otimes B$ квадратных матриц $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$ как матричной функции от матриц обладает тем свойством, что его элементы образованы попарными произведениями собственных значений кронекеровски перемножаемых матриц:

$$\sigma\{A \otimes B\} = \{\mu_k : \det(\mu I - A \otimes B) = 0; \mu_k = \lambda_{Ai}\lambda_{Bj}; i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}; k = \overline{1,mn}\}. \quad (9.14)$$

**Свойство 9.3.** Алгебраический спектр собственных значений кронекеровской суммы $A \oplus B$ квадратных матриц $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$ как матричной функции от матрицы обладает тем свойством, что его элементы образованы попарными суммами собственных значений кронекеровски суммируемых матриц:

$$\sigma\{A \oplus B\} = \{\nu_l : \det(\nu I - A \oplus B) = 0; \nu_l = \lambda_{Ai} + \lambda_{Bj}; i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}; l = \overline{1,mn}\}. \quad (9.15)$$

В (9.14) и (9.15) $\lambda_{Ai}$ и $\lambda_{Bj}$ собственные значения соответственно матриц $A$ и $B$.

Сделаем следующее примечание к свойствам 9.2 и 9.3.

**Примечание 9.5.** Алгебраические спектры собственных значений кронекеровских произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$ в силу (9.14) совпадают, аналогичным свойством в силу (9.15) обладают и спектры кронекеровских сумм $A \oplus B$ и $B \oplus A$.

**Свойство 9.4.** Определитель кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n, \quad (9.16)$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

**Свойство 9.5.** След кронекеровской суммы квадратных матриц удовлетворяет соотношению

$$tr(A \oplus B) = m \cdot trA + n \cdot trB, \quad (9.17)$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

**Свойство 9.6.** Ранг кронекеровского произведения квадратных матриц удовлетворяет условию:

$$rang(A \otimes B) = rangA \cdot rangB, \quad (9.18)$$

где $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$.

Для целей решения поставленной задачи полезно напомнить основные свойства кронекеровских матричных произведений произвольных матриц, которые оказываются необходимыми при преобразованиях матричных композиций, содержащих в своем составе эти произведения.

**Свойство 9.7**

$$(P \otimes Q)(W \otimes V) = PW \otimes QV \,. \qquad (9.19)$$

**Свойство 9.8**

$$(P + Q) \otimes R = P \otimes R + Q \otimes R \,, \qquad (9.20)$$

$$P \otimes (Q + R) = P \otimes Q + P \otimes R \,, \qquad (9.21)$$

$$P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q) \otimes R \,. \qquad (9.22)$$

В (9.19) – (9.22) матрицы $P, Q, R, W, V$ имеют произвольные размерности, не противоречащие правилам перемножения и сложения матриц.

**Свойство 9.9**

$$P \otimes Q = (P \otimes I_Q)(I_P \otimes Q) \,, \qquad (9.23)$$

$$(P_1 \otimes Q_1)(P_2 \otimes Q_2)\ldots(P_R \otimes Q_K) = (P_1 P_2 \ldots P_K) \otimes (Q_1 Q_2 \ldots Q_K) \,, \qquad (9.24)$$

$$(P \otimes Q)^{-1} = P^{-1} \otimes Q^{-1} \,, \qquad (9.25)$$

$$I \otimes (P_1 P_2 \ldots P_K) = (I_{P1} \otimes P_1)(I_{P2} \otimes P_2)\ldots(I_{PK} \otimes P_K) \,. \qquad (9.26)$$

В выражениях (9.23) – (9.26) $I_{(*)}$ – единичная матрица по размерности согласованная с матрицей (*).

**Свойство 9.10.** Оператор сужения кронекеровского произведения векторов с матрицей сужения S удовлетворяет соотношению

$$S(PX \otimes QZ) = S(P \otimes Q)(X \otimes Z) \,. \qquad (9.27)$$

Воспользуемся приведенными в предыдущем разделе свойствами векторных и матричных кронекеровских структур для целей описания процессов преобразования информационного сигнала в результате амплитудной модуляции, передачи модулированного сигнала по каналу связи, его демодуляции на приемной стороне и фильтрации с помощью ФНЧ, которое представлено структурно рисунком 9.1.

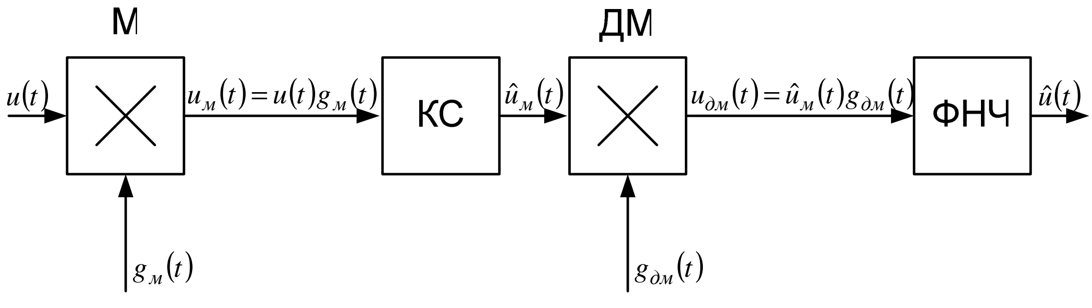


Рисунок 9.1

На рисунке 9.1: $u(t), u_м(t), \hat{u}_м(t), u_{дм}(t), \hat{u}(t), g_м(t), g_{дм}(t)$ – соответственно информационный сигнал (ИС), модулированный сигнал (МС), МС на выходе канала связи (КС), демодулированный сигнал (ДС), восстановленный ИС, наблюдаемый на выходе ФНЧ, сигналы модуляции (СМ) и демодуляции (СД); М, КС, ДМ, ФНЧ – соответственно модулятор, реализующий перемножение ИС и СМ; КС – канал связи, осуществляющий динамическое преобразование МС в соответствии с его передаточной функцией; демодулятор, реализующий еще одно перемножение преобразуемого сигнала на СД; фильтр низких частот, реализующий восстановление ИС на своем выходе.

При построении математической модели процессов будем полагать, что источник информационного сигнала (ИИС) является конечномерным, и он представим автономной системой; будем полагать также, что модулирующий сигнал также является конечномерным и потому источник модулирующего сигнала (ИМС) также представим автономной системой, это относится и к источнику демодулирующего сигнала (ИДС). Не автономное представление имеют канал связи (КС) и фильтр низких частот. Таким образом полное векторно-матричное описание (ВМО) задачи приобретает вид:

(ИИС) $\dot{z}_u(t) = \Gamma_u z_u(t);\ z_u(0);\ u(t) = P_u z_u(t);$ (9.28)

$\sigma\{\Gamma_u\} = \{\lambda_{uj} : det(\lambda_u I - \Gamma_u) = 0; j = \overline{1,l}\};$

$\dot{z}_м(t) = \Gamma_м z_м(t);\ z_м(0);\ g_м(t) = P_м z_м(t);$ (9.29)

$\sigma\{\Gamma_м\} = \{\lambda_{мk} : det(\lambda_м I - \Gamma_м) = 0; k = \overline{1,p}\};$

$u_м(t) = u(t) g_м(t);$ (9.30)

$\dot{z}_{кс}(t) = \Gamma_{кс} z_{кс}(t) + G_{кс} u_м(t);\ z_{кс}(0) = 0;\ \hat{u}_м(t) = P_{кс} z_{кс}(t);$ (9.31)

$\sigma\{\Gamma_{кс}\} = \{\lambda_{кci} : det(\lambda_{кс} I - \Gamma_{кс}) = 0; i = \overline{1,n}\};$

$\dot{z}_{дм}(t) = \Gamma_{дм} z_{дм}(t);\ z_{дм}(0);\ g_{дм}(t) = P_{дм} z_{дм}(t);$ (9.32)

$\sigma\{\Gamma_{дм}\} = \{\lambda_{дмr} : det(\lambda_{дм} I - \Gamma_{дм}) = 0; r = \overline{1,p}\};$

$u_{дм}(t) = \hat{u}_м(t) g_{дм}(t);$ (9.33)

$\dot{z}_ф(t) = \Gamma_ф z_ф(t) + G_ф u_{дм}(t);\ z_ф(0) = 0;\ \hat{u}(t) = P_ф z_ф(t);$ (9.34)

$\sigma\{\Gamma_ф\} = \{\lambda_{фv} : det(\lambda_ф I - \Gamma_ф) = 0; v = \overline{1,q}\};$

В моделях (9.28) – (9.34) векторы состояния $z_u \in R^l; z_м \in R^p; z_{кс} \in R^n; z_{дм} \in R^p; z_ф \in R^q$; векторы входов и выходов одномерные; матрицы входов, состояний и выходов характеризуются принадлежностями

$G_{кс} \in R^{l\times l}, G_ф \in R^{1\times q}; \Gamma_u \in R^{l\times l}, \Gamma_м \in R^{p\times p}, \Gamma_{кс} \in R^{n\times n},$

$\Gamma_{дм} \in R^{p\times p}, \Gamma_ф \in R^{q\times q};$

$P_u \in R^{1\times l}; P_м \in R^{1\times p}; P_{кс} \in R^{1\times n}; P_{дм} \in R^{1\times p}; P_ф \in R^{1\times q}.$

Не трудно видеть, что процесс амплитудной модуляции информационного сигнала в форме (9.30) с учетом правила формирования $u(t)$ и $g_M(t)$, представленных (9.28) и (9.29), в силу свойств кронекеровских произведений матриц может быть записан в виде

$$u_м(t) = u(t) \otimes g_м(t) = (P_u z_u(t) \otimes P_м z_м(t)) = (P_u \otimes P_м)(z_u(t) \otimes z_м(t)). \qquad (9.35)$$

Выражение (9.35) представляет модулированный сигнал $u_м(t)$ как функцию состояния системы с вектором состояния $z_u(t) \otimes z_м(t)$.

Сформируем агрегированную систему, описывающую процесс по данному вектору состояния, опираясь на модели (9.28), (9.29), представляющих процессы по компонентам введенного вектора состояния, опираясь на свойства матричных кронекеровских структур. В результате получим следующую цепочку равенств:

$$\frac{d}{dt}(z_u(t) \otimes z_м(t)) \overset{\Delta}{=} (z_u(t) \overset{\bullet}{\otimes} z_м(t)) = \dot{z}_u(t) \otimes z_м(t) + z_u(t) \otimes \dot{z}_м(t) =$$

$$= \Gamma_u z(t) \otimes z_м(t) + z(t) \otimes \Gamma_м z_м(t) = (\Gamma_u \otimes I_м + I_u \otimes \Gamma_м)(z_u(t) \otimes z_м(t)) = \qquad (9.36)$$

$$= (\Gamma_u \oplus \Gamma_м)(z(t) \otimes z_м(t)); \; z_u(0) \otimes z_м(0).$$

$$u_м(t) = (P_u \otimes P_м)(z_u(t) \otimes z_м(t))$$

Нетрудно видеть, что агрегированная автономная система с матрицей состояния $(\Gamma_u \oplus \Gamma_м)$ будет обладать спектром собственных значений

$$\sigma\{(\Gamma_u \oplus \Gamma_м)\} = \{\mu_v = \lambda_{uj} + \lambda_{мk}; j = \overline{1,l}; k = \overline{1,p}\}. \qquad (9.37)$$

Для целей дальнейших исследований опишем процесс прохождения модулированного сигнала через канал связи, используя кронекеровские представления, для чего продолжим агрегирование и введем в рассмотрение составной вектор состояния

$$\tilde{z} = col\{z_u \otimes z_м \quad z_{кс}\}. \qquad (9.38)$$

Сформулируем утверждение.

**Утверждение 9.1.** Процессы в канале связи при подаче на его вход модулированного внешнего сигнала (9.30), компоненты которого задаются с помощью (9.28) и (9.29), могут быть представлены автономной системой:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{\Gamma}\tilde{z}(t); \; \tilde{z}(0) = col\{z_u(0) \otimes z_м(0) \quad z_{кс}(0)\} \qquad (9.39)$$

$$z_{кс}(t) = \tilde{P}_z \tilde{z}(t), \hat{u}_м(t) = \tilde{P}_{кс}\tilde{z}(t),$$

где матричные компоненты соотношений вычисляются с помощью выражений

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_u \oplus \Gamma_м & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ G_{кс}(P_u \otimes P_м) & \vdots & \Gamma_{кс} \end{bmatrix}, \qquad (9.40)$$

$$\tilde{P}_z = \begin{bmatrix} 0 & I_{кс} \end{bmatrix}, \tilde{P}_{кс} = \begin{bmatrix} 0 & P_{кс} \end{bmatrix}. \qquad \square\ (9.41)$$

**Доказательство.** Доказательство утверждения строится на покомпонентном формировании производной по времени от вектора (9.38) с использованием исходной модели (9.31) КС, представления (9.35), (9.36) процесса формирования модулированного информационного сигнала. ■

Нетрудно видеть, что агрегированная автономная система с матрицей состояния $\tilde{\Gamma}$ (9.40) будет обладать спектром собственных значений

$$\sigma\{\tilde{\Gamma}\} = \{\mu_\nu = (\lambda_{uj} + \lambda_{мk}; j = \overline{1,l}; k = \overline{1,p}) \cup \sigma\{\Gamma_{кс}\} = \{\lambda_{кс i}; i = \overline{1,n}\}\}, \qquad (9.42)$$

который уже не включает в себя спектр собственных значений матрицы состояния ИИС.

Продолжим наращивание агрегированной автономной системы, описывающей преобразование сигнала, с тем, чтобы включить в состав процесса преобразования демодуляцию принятого из КС модулированного сигнала $\hat{u}_м(t)$. Для этой цели в рассмотрение вводится составной вектор состояния

$$\tilde{\tilde{z}} = col\{z_u \otimes z_м \otimes z_{дм} \quad z_{кс} \otimes z_{дм}\} \qquad (9.43)$$

**Утверждение 9.2.** Процесс демодуляции сигнала $\hat{u}_м(t)$, полученного из модулированного сигнала $u_м(t)$, прошедшего через канал связи, при подаче его на вход демодулятора (9.33), может быть представлен автономной системой:

$$\dot{\tilde{\tilde{z}}}(t) = \tilde{\tilde{\Gamma}}\tilde{\tilde{z}}(t);\ \tilde{\tilde{z}}(0) = col\{z_u(0) \otimes z_м(0) \otimes z_{дм}(0) \quad z_{кс}(0) \otimes z_{дм}(0)\}; \qquad (9.44)$$

$$u_{дм}(t) = \tilde{\tilde{P}}_{дм}\, \tilde{\tilde{z}}(t),$$

где матричные компоненты соотношений вычисляются с помощью выражений

$$\tilde{\tilde{\Gamma}} = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_u \otimes I_м \otimes I_{дм} + I_u \otimes \Gamma_м \otimes I_{дм} + I_u \otimes I_м \otimes \Gamma_{дм} & 0 \\ \hline G_{кс}(P_u \otimes P_м \otimes I_{кс}) & \Gamma_{кс} \otimes I_{дм} + I_{кс} \otimes \Gamma_{дм} \end{array}\right],$$

(9.45)

$$\tilde{\tilde{P}}_{дм} = \begin{bmatrix} 0 & P_{кс} \otimes P_{дм} \end{bmatrix}.$$

Очевидно процесс модуляции и демодуляции следует считать согласованным, если модуляция-демодуляция осуществляется сигналами, характеризующимися матрицами $\Gamma_М, \Gamma_Д$, порождающими в спектре собственных значений матрицы $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ нулевые элементы (см.□(9.45).

**Доказательство.** Доказательство утверждения строится на покомпонентном формировании производной по времени от вектора

(9.43) с использованием исходной модели (9.31) КС, представления (9.35),(9.36) процесса формирования модулированного информационного сигнала. ■

Явное решение системы (9.44) имеет вид

$$\tilde{\tilde{z}}(t)=\exp\left\{\tilde{\tilde{\Gamma}}t\right\}\tilde{\tilde{z}}(0),\quad u_{дм}(t)=\tilde{\tilde{P}}_{дм}\tilde{\tilde{z}}(t).$$

(9.47)

Нетрудно видеть, что агрегированная автономная система с матрицей состояния $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ (9.45) будет обладать спектром собственных значений

$$\sigma\left\{\tilde{\tilde{\Gamma}}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\tilde{\mu}_v=\left(\lambda_{uj}+\lambda_{мk}+\lambda_{дмr};j=\overline{1,l};k,r=\overline{1,p}\right)\mathrm{Y}\\ \mathrm{Y}\,\sigma\{\Gamma_{кс}\oplus\Gamma_{дм}\}=\left\{\lambda_{ксi}+\lambda_{дмr};i=\overline{1,n};r=\overline{1,p}\right\}\end{array}\right\},\tag{9.48}$$

который включает в себя спектр собственных значений матрицы состояния ИИС, если процессы модуляции и демодуляции согласованы.

Очевидно, процесс модуляции и демодуляции следует считать согласованным, если модуляция–демодуляция осуществляется сигналами, источники которых характеризуются матрицами состояния $\Gamma_м,\Gamma_{дм}$, алгебраические спектры собственных значений содержат элементы равные по модулю и различающиеся знаками. Таким свойством обладают гармонические сигналы модуляции и демодуляции одинаковых частот. Если сигналы модуляции и демодуляции одночастотные, то выполняется условие

$$\sigma\{\Gamma_м\}=\{\lambda_{м1}=j\omega_м;\lambda_{м2}=-j\omega_м\},\sigma\{\Gamma_{дм}\}=\{\lambda_{дм1}=j\,\omega_{дм};\lambda_{дм2}=-j\omega_{дм}\}.$$

Согласование процессов по структуре собственных значений модуляции–демодуляции наступает при выполнении условия $\omega_м\equiv\omega_{дм}=\omega$, которое влечет за собой совпадение спектров

$$\sigma\{\Gamma_м\}=\{\lambda_{м1}=j\omega;\lambda_{м2}=-j\omega\},\sigma\{\Gamma_{дм}\}=\{\lambda_{дм1}=j\omega;\lambda_{дм2}=-j\omega\}.$$

В результате согласования спектров структура мод модулированного сигнала примет вид

$$\sigma\left\{\tilde{\Gamma}\right\}=\left\{\mu_v=\left(\lambda_{uj}\pm \mathrm{j}\omega;j=\overline{1,l};\right)\mathrm{Y}\,\sigma\{\Gamma_{кс}\}=\left\{\lambda_{ксi};i=\overline{1,n}\right\}\right\}\tag{9.49}$$

и будет характеризоваться шириной частотного спектра $\Delta\omega=2\omega$. В свою очередь структура мод демодулированного сигнала примет вид

$$\sigma\left\{\tilde{\tilde{\Gamma}}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\tilde{\mu}_v=\left(\lambda_{uj};\lambda_{uj}\pm j2\omega;j=\overline{1,l};k,r=\overline{1,p}\right)\mathrm{Y}\\ \mathrm{Y}\,\sigma\{\Gamma_{кс}\oplus\Gamma_{дм}\}=\left\{\lambda_{ксi}\pm j\omega;i=\overline{1,n};r=\overline{1,p}\right\}\end{array}\right\}.$$

Гармоники основной частоты ω и удвоенной 2ω призван подавить фильтр низких частот. Если агрегировать процессы модуляции–демодуляции–фильтрации, то получим автономную систему, описываемую векторно-матричным уравнением с кронекеровскими векторными и матричными компонентами

$$\begin{bmatrix} \dot{z_и \otimes z_м \otimes z_{дм}} \\ \dot{z_{кс} \otimes z_{дм}} \\ \dot{z_Ф} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} Si\{\Gamma_и, \Gamma_м, \Gamma_{дм}\} & 0 & 0 \\ \hdashline G_{кс} \cdot (P_и \otimes P_м \otimes I_{дм}) & Si\{\Gamma_{кс}, \Gamma_{дм}\} & 0 \\ \hdashline 0 & G_Ф \cdot (P_{кс} \otimes P_{дм}) & \Gamma_Ф \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} z \otimes z_М \otimes z_Д \\ x \otimes z_Д \\ z_Ф \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} z_и(0) \otimes z_м(0) \otimes z_{дм}(0) \\ \mathrm{z}_{кс}(0) \otimes z_{дм}(0) \\ z_Ф(0) \end{bmatrix},$$

$$\hat{u}(t) = \tilde{\tilde{\tilde{P}}} \cdot \begin{bmatrix} z \otimes z_М \otimes z_Д \\ x \otimes z_Д \\ z_Ф \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & P_Ф \end{array}\right] \begin{bmatrix} z \otimes z_М \otimes z_Д \\ x \otimes z_Д \\ z_Ф \end{bmatrix} = P_ф z_Ф(t). \qquad \blacksquare$$

Следует заметить, что с учетом фазового сдвига модулированного сигнала в канале связи для целей максимизации величины принятого и выделенного из состава демодулированного сигнала с помощью ФНЧ информационного сигнала $\hat{u}(t)$, должно быть осуществлено согласование сигналов модуляции и демодуляции по фазе, что осуществляется выбором начального состояния $z_{дм}(0)$.