10. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

10.1. Прямая задача дискретного представления непрерывных сигналов. Матрица Грама. Базисные функции

Проблема дискретного представления непрерывных сигналов как элементов функционального пространства $x(t) \in L^2(T)$ имеет две *постановочные версии*.

В первой постановочной версии, именуемой *прямой задачей* дискретного представления сигналов, ставится задача сопоставления произвольного сигнала $x(t)$ с ограниченной энергией, т.е. $x(t) \in L^2(T)$ его дискретному численному представлению. Эта задача сводится к нахождению отображения пространства $L^2(T)$ в пространство $R^n(C^n)$, где n выбирается из соображений обеспечения допустимой погрешности представления.

Прямой подход к решению такой задачи состоит в выборе некоторого n-мерного подпространства $L^2(T)$, натянутого на систему линейно независимых функций, именуемых *базисными функциями* и образующих *функциональный базис*.

Если $\varphi_i(t), (i = \overline{1,n})$ – система *линейно независимых функций* в $L^2(T)$, то для $t \in T$ условие

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{\mathrm{i}} \varphi_{\mathrm{i}}(t) = 0$$

(10.1)выполняется почти всюду тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0, (i = \overline{1,n})$. Введем в рассмотрение линейное подпространство L^n, натянутое на базисные функции $\varphi_i(t)$, т.е. $L^n = L\{\varphi_{\mathrm{i}}(t)\}$. Тогда, если $x(t) \in L^n$, то он представим в виде линейной комбинации

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\mathrm{i}}\, \varphi_i(t),\ t \in T = \{t : t_0 \le t \le t_k\}, \tag{10.2}$$

при этом набор коэффициентов $\alpha_i\,(i = \overline{1,n})$ образует вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T \in R^n(C^n)$.

Напомним, что $L^2(T)$ есть пространство со *скалярным произведением*, определяемым выражением

$$(x, y) \underline{\Delta} \int_T x(t)\, y^*(t) dt\,. \tag{10.3}$$

Тогда искомое представление сигнала $x(t)$в $R^n(C^n)$ в виде вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ найдется из векторно-матричного соотношения, полученного из (10.2)–(10.3):

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_1) & \Lambda & (\varphi_n,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_2) & (\varphi_2,\varphi_2) & \Lambda & (\varphi_n,\varphi_2) \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \Lambda & \mathrm{M} \\ (\varphi_1,\varphi_n) & (\varphi_2,\varphi_n) & \Lambda & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \mathrm{M} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x,\varphi_1) \\ (x,\varphi_2) \\ \mathrm{M} \\ (x,\varphi_n) \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

или в свернутой форме:

$$G\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = G^{-1}\beta, \quad (10.5)$$

где

$$\beta = col\{(x,\varphi_i); i = \overline{1,n}\}; \quad (10.6)$$

$$G = row\{col[(\varphi_i,\varphi_j); i = \overline{1,n}]; j = \overline{1,n}\}. \quad (10.7)$$

Матрица G, определенная в форме (10.7) называется *матрицей Грама.* Она может быть использована для оценки линейной зависимости системы функций $(\varphi_i, \varphi_j,\ i, j = \overline{1,n})$. Критерием линейной независимости функций φ_i и φ_j является положительность определителя матрицы Грамма

$$\det G = \det\{(\varphi_i,\varphi_j);\quad i, j = \overline{1,n}\} > 0.$$

Если $x(t) \notin L^n$, то для любого вектора $x(t) \in L^2(T)$ существует единственный вектор $\hat{x} \in L^n$, задаваемый представлением

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} (x, \theta_i)\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t), \quad (10.8)$$

причем такой, что вектор разности (невязка) $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ортогонален всем векторам из L^n, в силу чего выполняется неравенство:

$$\|\eta\| = \| x - \hat{x} \| < \|x - \bar{x}\|,$$

где $\bar{x}$ – любой, но такой, что $\bar{x} \neq \hat{x}$, вектор из L^n.

Очевидно, справедливо $\hat{x}$ именовать ортогональной проекцией $x \in L^2(T)$ на L^n, $\tilde{x} = x - \hat{x}$ – вектором невязки, представляющим собой погрешность приближения x вектором $\hat{x}$.

Нетрудно видеть, что вектор погрешности $\tilde{x}$ представления элемента $x(t)$ в форме его проекции $\hat{x}(t)$ может быть охарактеризован его абсолютной оценкой $\tilde{\Delta}$ и относительной оценкой $\tilde{\delta}$, соответственно задаваемых выражениями

$$\tilde{\Delta} = \|\tilde{x} = x - \hat{x}\|;\ \tilde{\delta} = \tilde{\Delta}/\|x\|.$$

Вернемся к выражению (8.8), в нем $\theta_i (i = \overline{1,n})$ – элементы взаимных базисных функций, которые представимы в виде линейной комбинации $\{\varphi_i\}$ так, что

$$\theta_k = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj} \varphi_j(t), \tag{10.9}$$

причем

$$(\varphi_i, \theta_k) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{kj}^{*} (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} , \tag{10.10}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

В матричной форме соотношение (10.10) записывается следующим образом:

$$\Gamma^{*} G = I \Rightarrow \Gamma = [G^{-1}]^{*}. \tag{10.11}$$

Тогда с использованием взаимного базиса $\{\theta_i, i = \overline{1,n}\}$ для α_i можно записать

$$\alpha_i = (x, \theta_i), i = \overline{1,n}. \tag{10.12}$$

Очевидно, как и в случае конечномерных линейных пространств, в качестве базиса предпочтительнее использовать систему *ортонормированных функций*.

Систем ортонормированных базисных функций достаточно много. Ниже приводится наиболее употребительные из них.

1. *Комплексные гармонические функции (базис Фурье)*

Пусть $L^2(T): T = \left\{t : -T/2 \le t \le T/2\right\}$; тогда $\hat{x}(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{j\omega_k t}$,

где $\alpha_k = \dfrac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\omega_k t} dt$; $\varphi_k = e^{j\omega_k t}$, $\omega_k = k\omega$, $\omega = 2\pi/T$.

2. *Полиномы Лежандра*

$$T = \{t : -1 \le t \le 1\}$$

$$\varphi_0(t) = 1/\sqrt{2}; \varphi_1(t) = \sqrt{3/2}\, t;\ \varphi_2(t) = \sqrt{5/2}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right);$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{7/2}\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right);\ \varphi_4(t) = \sqrt{9/2}\left(\frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}\right);$$

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} P_n(t),$$

$P_n(t)$ – полином Лежандра, определяемый выражением $P_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$, или в рекуррентной форме:

$$P_n(t)=\frac{2n-1}{n}tP_{n-1}(t)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(t).$$

3. *Полиномы Чебышева*

$T=\{t:-1\le t\le 1\}$. В отличие от приведенных выше систем базисных функций полиномы Чебышева образуют систему ортонормированных функций с неединичным весом $(w\ne 1)$, т.е.

$$(\varphi_i,\varphi_j)_\omega=\delta_{ij},$$

где

$$(\varphi_i,\varphi_j)_\omega \underline{\underline{\Delta}} \int_T w(t)\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt, \quad w(t)>0.$$

Полиномы Чебышева характеризуются весом $w(t)=(1-t^2)^{-1/2}$, сами же функции $\varphi_n(t)$ строятся с помощью рекуррентной процедуры:

$$\varphi_n(t)=2^n(2\pi)^{-1/2}T_n(t), \quad n=0,1,2...,$$

где $T_n(t)$ – полином Чебышева n-го порядка, определяемый соотношениями.

$$T_0(t)=1; \qquad T_n(t)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos t), n\ge 1.$$

4. *Функции Лагерра*

$$T=\{t:0\le t<\infty\}; \quad w(t)=e^{-t};$$

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{n!}L_n(t), \quad n=0,1,2,...$$

где $L_n(t)$ – полином Лагерра, определяемый соотношением

$$L_n(t)=e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t});$$

или рекуррентно:

$$L_n(t)=(2n-1-t)L_{n-1}(t)-(n-1)^2L_{n-2}(t).$$

5. *Функции Эрмита*

$$T=\{t:-\infty<t<\infty\}, \qquad w(t)=e^{-t^2},$$

$$\varphi_n(t)=(2^n n!\pi^{1/2})^{-1/2}H_n(t), \quad n=0,1,2,...,$$

где $H_n(t)$ – полином Эрмита, определяемый соотношением

$$H_n(t)=(-1^n)e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}),$$

или рекуррентно с помощью процедуры:

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t).$$

6. *Функции Уолша*

$T = \{t : 0 \le t \le 1\}, \quad \omega(t) = 1.$

Для задания функции Уолша используют два *индекса*, т.е. базисная функция $\varphi_n(t)$ записывается в форме $\varphi_n^k(t)$ с двумя индексами (n и k). Функции $\varphi_n^k(t)$ определяются соотношениями:

$$\varphi_0(t) = 1; \quad 0 \le t \le 1;$$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t \le 1/2 \\ -1; & 1/2 < t \le 1; \end{cases}$$

$$\varphi_2^1(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t < 1/4; \quad 3/4 < t < 1; \\ -1; & 1/2 < t < 3/4; \end{cases}$$

$$\varphi_2^2(t) = \begin{cases} 1; & 0 \le t < 1/4; \quad 1/2 < t < 3/4; \\ -1; & 1/4 < t < 1/2; \quad 3/4 < t \le 1 \end{cases}$$

Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ Λ

$$\varphi_{m+1}^{(2k-1)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); & 0 \le t < 1/2; \\ (-1)^{k+1}\varphi_m^{(k)}(2t-1); \\ 1/2 < t \le 1; \end{cases}$$ ■

$$\varphi_{m+1}^{(2k)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); & 0 \le t < 1/2; \\ (-1)^k \varphi_m^{(k)}(2t-1); & 1/2 < t \le 1; \end{cases}$$

10.2.Обратная задача дискретного представления непрерывных сигналов. Теорема В.Котельникова – К.Шеннона

Во второй постановочной версии, именуемой *обратной задачей* дискретного представления сигналов рассматривается непрерывный сигнал $x(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле (ограниченность, кусочная непрерывность, наличие конечного числа разрывов первого рода, отсутствие разрывов второго рода и абсолютная интегрируемость). Сигнал $X(t)$ имеет ограниченный частотный Фурье – спектр $X(j\omega)$ в том смысле, что

$X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \le \omega \le \omega_m$;

$X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$,

где $X(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = F\{X(t)\}.$

Построим дискретное представление сигнала $x(t)$ в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{10.13}$$

в котором $\alpha_k = x(k\Delta t)$ – отсчеты непрерывной функции $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$.

Возникают естественные вопросы:

1. С каким интервалом дискретности Δt следует снимать отсчеты $x(k\Delta t)$?

2. Каковыми должны быть базисные функции $\varphi_k(t)$ в представлении (10.13) с тем, чтобы невязка $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \tag{10.14}$$

этого представления обладала нормой $\|\tilde{x}(t)\|$ сколь угодно близкой к нулю?

На эти вопросы отвечает

Теорема В. Котельникова – К. Шеннона (ТКШ)

Пусть непрерывный сигнал $x(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле так, что к нему может быть применено преобразование Фурье, и при этом обладает ограниченным частотным спектром $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$.

Тогда дискретное представление сигнала (10.13) обладает нулевой невязкой (10.14), если

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_m};\ \varphi_k(t) = \frac{\sin[\omega_m(t - \Delta t k)]}{\omega_m(t - \Delta t k)}; \alpha_k = x(k\Delta t). \tag{10.15}$$

Доказательство.

В силу преобразуемости по Фурье для сигнала $x(t)$ оказываются справедливыми интегральные преобразования Фурье

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} dt.$$

Учтем ограниченность спектра $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$, тогда для обратного интеграла Фурье получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega) e^{j\omega t} dt. \tag{10.16}$$

Но $X(j\omega)$ в силу ограниченности спектра предствим бесконечным рядом по частоте, записываемый в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=\infty}^{\infty} C_k e^{j\Delta_k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega}, \qquad (10.17)$$

где $\Delta_k = k\Delta = k\dfrac{2\pi}{2\omega_m} = k\dfrac{\pi}{\omega_m}$.

Введем обозначение $\dfrac{\pi}{\omega_m} = \Delta t$, тогда становится справедливой запись ряда (10.17) в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Delta t\omega}, \qquad (10.18)$$

при этом коэффициенты ряда C_k вычисляются в силу соотношения

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega) e^{-jk\omega\Delta t} d\omega. \qquad (10.19)$$

Сравнивая представления (10.16) и (10.19) нетрудно установить для моментов времени $t = k\Delta t$ выполнение равенства

$$C_k = \frac{\pi}{\omega_m} x(-k\Delta t). \qquad (10.20)$$

Подставим выражение (10.20) в ряд Фурье (10.18)

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Delta t\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_m} X(-k\Delta t) e^{jk\Delta t\omega}.$$

Если спектральную функцию $X(j\omega)$ исходного сигнала $x(t)$ полученного выше вида подставить в обратный интеграл Фурье (10.16), то для сигнала $x(t)$ получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_m} X(-k\Delta t) e^{jk\Delta t\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Произведем в полученном выражении замену $k = -k$, тогда получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \frac{1}{j(t-k\Delta t)} e^{j(t-k\Delta t)\omega} \Big|_{-\omega_m}^{\omega_m} =$$

$$= \frac{1}{j(t-k\Delta t)} \left\{ e^{j(t-k\Delta t)\omega_m} - e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m} \right\} =$$

$$= \frac{2}{(t-k\Delta t)} \frac{e^{j(t-k\Delta t)\omega_m} - e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m}}{2j} = 2\frac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}.$$

Подставим полученное представление интеграла в выражение для оригинала $x(t)$, тогда будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\, 2\frac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)} =$$

$$= \sum_{k}^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \ , \qquad \blacksquare$$

где $\alpha_k = x(k\Delta t);\ \varphi_k(t) = \dfrac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m};\ \Delta t = \dfrac{\pi}{\omega_m}.$

Примечание 10.1

Базисная функция $\varphi_k(t) = \dfrac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}$ называется функцией *отсчета*, она обладает свойствами:

1. при $t = k\Delta t$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ в силу первого замечательного предела обладает максимумом, равным единице;

2. в моменты времени t кратные Δt, так что $t = \pm l(\Delta t)$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ принимает нулевое значение;

3. на бесконечно большом интервале времени функции отсчета с различными индексами $\varphi_\nu(t)$ и $\varphi_\mu(t)$ ортогональны так что система базисных функций $\varphi_k(t) = \dfrac{\sin\left[(t-k\Delta t)\omega_m\right]}{(t-k\Delta t)\omega_m}$ является системой ортогональных базисных функций.

Примеры и задачи

10.1. Построить конечномерную систему базисных функций $\left\{\varphi_i(t); i = \overline{1,n};\ t \in T\right\}$ по следующим данным:

$T = [0,1]; n = 3;\quad \psi_1(t) = 1;\quad \psi_2(t) = t,\quad \psi_3(t) = t^2.$

Определить $C_{ij}\ (i, j = \overline{1,3})$, при которых функции $\varphi_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_{ij}\psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис.

10.2. Построить конечномерные системы базисных функций $\{\varphi_i(t), i=\overline{1,n}; t\in T\}$ по следующим данным:

$T=[0,1]$; $n=3$; $\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=t$; $\psi_3(t)=t^2$

Определить $C_{ij}\,(i,\,j=\overline{1,n})$, при которых функции $\varphi_i(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}C_{ij}\psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис.

10.3. Решить задачу 10.2 для функций:

$\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=e^{-t}$; $\psi_3(t)=e^{-2t}$.

10.4. Решить задачу 10.2 для функций:

$\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=e^{t}$; $\psi_3(t)=e^{2t}$.

10.5. Дано $T=[-1,1]$; $n=3$; $\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=t$; $\psi_3(t)=t^2$. Определить $C_{ij}\,(i,\,j=\overline{1,n})$, при которых функции $\varphi_i(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}C_{ij}\psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис. Проверить полученную систему функций на ортонормированность.

10.6. Решить задачу 10.5 для

$\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=e^{-t}$; $\psi_3(t)=e^{-2t}$.

10.7. Решить задачу 10.5. для

$\psi_1(t)=1$; $\psi_2(t)=e^{t}$; $\psi_3(t)=e^{2t}$.

10.8. Дано $T=[0,1]$; $n=3$. Определить, образуют ли базисные системы следующие наборы функций:

а) $\varphi_1(t)=-1/3$; $\varphi_2(t)=1+2t$; $\varphi_3(t)=2-\sqrt{2}t+5t^2$;

б) $\varphi_1(t)=3$; $\varphi_2(t)=1-3e^{-t}$; $\varphi_3(t)=1+e^{-t}+e^{-2t}$;

в) $\varphi_1(t)=10$; $\varphi_2(t)=2-e^{t}$; $\varphi_3(t)=1+2e^{t}-4t^{2t}$.

10.9. Определить, образуют ли ортонормированные функции $\varphi_i(t)$ примера 10.2 также ортонормированный базис на интервале

$T=[0\,,2]$.

10.10. Определить, образуют ли ортонормированные функции $\varphi_i(t)$ примера 10.5 и примера 10.6 ортонормированный базис на интервале $T=[-2\,,2]$.

10.11. Дан интервал $T=[0,1]$; $n=3$; система функций: $\varphi_1(t)=1$; $\varphi_2(t)=t$; $\varphi_3(t)=t^2$. Построить на функциях $\psi_i(t)$ ортонормированный базис с весом $w(t)=e^{-t}$.

10.12. Конечномерное представление сигналов $x(t)\in L^2(T)$. Дано $T=[0,\infty]$; $x(t)\in L^2(T)$; $x(t)=1$ при $0\le t\le 1$ $x(t)=0$ при $1<t<\infty$, а также система линейно-независимых функций: $\{\psi_i(t)\}=\{e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}\}$.

Требуется найти:

а) конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^3$ сигнала $x\in L^2(T)$, где L^3 – подпространство, натянутое на $\psi_i(t)$;

б) конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^3$ сигнала $x\in L^2(T)$, где L^3 – подпространство, натянутое на $\varphi_i(t)$; систему ортонормированных функций, построенных на $\psi_i(t)$:

в) ошибку конечномерного представления $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|$;

Решить задачу 10.2 для L^3, натянутого на систему линейно-независимых функций: $\{\psi_i(t)\}=\{1,\ t,\ t^2\}$; $i=\overline{1,3}$.

10.13. Дано $T=[-1,\ 1]$; $x(t)\in L^2(T)$: $x(t)=-1$ при $-1\le t\le 0$ $x(t)=0$ при $0<t\le 1$. Найти конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^3$ сигнала $x(t)$ и оценить норму ошибку представления $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|$, где L^3 натянуто на:

а) первые три базисные функции Фурье;
б) первые три базисные функции Лежандра;
в) первые три базисные функции Чебышева.

10.14. Дано $T=[-1,\ 1]$; $x(t)\in L^2(T)$; $x(t)=1$ при $t\in T$ и $x(t)=0$ при $t\notin T$. Найти конечномерное представление $\hat{x}(t)\in L^n$ сигнала $x(t)$ и норму ошибки представления $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|$, натянутого на базисные функции Фурье для случаев: 1) $n=1$; 2) $n=2$; 3) $n=5$; 4) $n=10$.

10.15. Решить задачу 10.14 для случая базисных функций Лежандра.

10.16. На основе решения задачи 10.14 и 10.15 построить графические зависимости $\|\eta\|=\left\|x(t)-\hat{x}(t)\right\|=f(n)$, где n – размерность пространства L^n для $n=1, 2, 5, 10$.

10.17. Дано $T=[0,\infty)$, $x(t)\in L^2(T)$, $x(t)=\begin{cases}2 \text{ при } 0\le t<1,\\ 1 \text{ при } 1\le t<2,\\ 0 \text{ при } 2\le t<\infty.\end{cases}$.

Найти конечномерное представление сигнала $\hat{x}(t) \in L^n$, где L^n натянуто на базисные функции Лагерра для:

а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

10.18. Дано $T = [0, \infty)$, $x(t) \in L^2(T)$ $x(t) = \begin{cases} 2 \text{ } при \text{ } 0 \le t < 2 \\ 0 \text{ } при \text{ } 2 \le t < \infty \end{cases}$.

Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала $x(t)$, где L^n натянуто на базисные функции Лагерра для:

а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

10.19. Решить задачу 10.18 для $x(t) \in L^2(T)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ } при \text{ } 0 \le t \le 1 \\ 0 \text{ } при \text{ } 2 \le t < \infty \end{cases}$$

10.20. Для задач 10.17, 10.18 и 10.19 построить зависимости $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$ как функции числа членов представления n, где $n = 1, 2, 5, 10$.

10.21. Дано $T = [0,1]$, $x(t) \in L^2(T)$, $x(t) = \begin{cases} -1 \text{ } при \text{ } 0 \le t < 1/3 \\ 0 \text{ } при \text{ } 1/3 \le t < 2/3 \\ 1 \text{ } при \text{ } 2/3 \le t < 1 \end{cases}$

Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала $x(t)$ и норму ошибки представления $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$, натянутого на базисные функции Уолша для:

а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

Решение вариантов задач

Задача 10.1. Построить конечномерную систему базисных функций $\{\varphi_i(t); i = \overline{1,n};\ t \in T\}$ по следующим данным:

$T = [0,1]; n = 3$; $\psi_1(t) = 1$; $\psi_2(t) = t$, $\psi_3(t) = t^2$.

Определить C_{ij} $(i, j = \overline{1,3})$, при которых функции $\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, \psi_j(t)$ образуют ортонормированный базис.

Решение. Чтобы построить ортонормированный базис на линейно-независимых базисных функциях $\psi_1(t) = 1, \psi_2(t) = t, \psi_3(t) = t^2$ для $T = [0,1]$, воспользуемся алгоритмом ортогонализации Грамма–Шмидта. В соответствии с этим алгоритмом получаем систему ортонормированных функций:

$$\mathrm{v}_1(t) = \psi_1(t); \varphi_1(t) = \{\|\mathrm{v}_1(t)\|\}^{-1}\, \mathrm{v}_1(t);$$

$$\mathrm{v}_2(t) = \psi_2(t) - (\varphi_1, \psi_2)\varphi_1(t); \varphi_2(t) = \{\|\mathrm{v}_2(t)\|\}^{-1}\, \mathrm{v}_2(t);$$

$$\mathrm{v}_3(t) = \psi_3(t) - (\varphi_1, \psi_3)\varphi_1(t) - (\varphi_2, \psi_3)\varphi_2(t); \varphi_3(t) = \{\|\mathrm{v}_3(t)\|\}^{-1}\, \mathrm{v}_3(t).$$

В итоге получаем:

1. $\mathrm{v}_1(t) = \psi_1(t) = 1; \quad \|\mathrm{v}_1(t)\| = 1; \quad \varphi_1(t) = \psi_1(t) = 1.$

2. $(\varphi_1, \psi_2) = \int\limits_T \varphi_1(t)\psi_2(t)\, dt = \int\limits_0^1 t\, dt = 1/2;$

$$\mathrm{v}_2(t) = t - 1/2; \qquad \|\mathrm{v}_2(t)\| = \left[\int\limits_T \mathrm{v}_2^2(t)\, dt\right]^{1/2} = \left[\int\limits_0^1 (t^2 - t + 1/4)\, dt\right]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\varphi_2(t) = \{\|\mathrm{v}_2(t)\|\}^{-1}\, \mathrm{v}_2(t) = 2\sqrt{3}(t - 1/2).$$

3. $(\varphi_1, \psi_3) = \int\limits_T \varphi_1(t)\psi_3(t)\, dt = \int\limits_0^1 t^2 dt = 1/3;$

$$(\varphi_2, \psi_3) = \int\limits_T \varphi_2(t)\psi_3(t)\, dt = \int\limits_0^1 2\sqrt{3}(t^3 - \frac{1}{2}t^2)\, dt = \frac{\sqrt{3}}{6};$$

Пров

$$\mathrm{v}_3(t) = t^2 - t + 1/6; \qquad \|v_3(t)\| = \left[\int\limits_0^1 (t^2 - t + 1/6)^2\, dt\right]^{1/2} = 0{,}255;$$

$$\varphi_3(t) = \{\|\mathrm{v}_3(t)\|\}^{-1}\, \mathrm{v}_3(t) = 0{,}6536 - 3{,}922\,t + 3{,}922\,t^2.$$

ерим на ортогональность пары построенных функций $(\varphi_1\varphi_2), (\varphi_1, \varphi_3), (\varphi_2, \varphi_3)$:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_0^1 2\sqrt{3}(t - 1/2)dt = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t)\Big|_0^1 = 0;$$

$$(\varphi_1, \varphi_3) = \int\limits_0^1 (0{,}6536 - 3{,}922t + 3{,}922t^2)dt = 0;$$

$$(\varphi_2, \varphi_3) = \int\limits_0^1 2\sqrt{3}(t - 1/2)(0{,}6536 - 3{,}922t + 3{,}922t^2)dt = 0.$$

В итоге решения задачи получена система ортонормированных на $T = [0, 1]$ функций:

$$\varphi_1(t) = 1;\ \varphi_2(t) = 2\sqrt{3}(t - 1/2);\ \varphi_3(t) = 0{,}6536 - 3{,}922t + 3{,}922t^2.$$