ПРИЛОЖЕНИЕ 2

D – ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Определение П2.1 (**ОП2.1**). Прямым *D*–преобразованием $F(d)$ двоичной последовательности $f(k)$, где k – дискретное время, выраженное в числе тактов длительности Δt, над простым полем Галуа $GF(p)= =\{0,1,2,\ldots,p-1\}$, где $p=2$ называется бесконечная сумма

$$F(d)=D\{f(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)d^k\,, \qquad (\text{П}2.1)$$

при условии, что она сходится. □

Функция $F(d)$ называется *D*–образом двоичной последовательности $f(k)$.

Определение П2.2 (**ОП2.2**). Обратным *D*–преобразованием $D^{-1}\{F(d)\}$ *D*–образа $F(d)$ двоичной последовательности $f(k)$ называется преобразование, позволяющее по *D*–образу $F(d)$ двоичной последовательности $f(k)$ восстановить исходную последовательность $f(k)$ в силу соотношения

$$D^{-1}\{F(d)\}=f(k). \qquad \square\ (\text{П}2.2)$$

Последовательность $f(k)$ именуется оригиналом *D*–преобразования. Таким образом, $f(k)$ и $F(d)$ представляет собой взаимные *D*–трансформанты.

Канонически сложившегося аналитического обратного *D*–преобразования $D^{-1}\{F(d)\}$ пока не существует, но имеются способы их вычисления, которые опираются на определение прямого *D*–преобразования. Для иллюстрации этих способов запишем (П2.1) в развернутой форме

$$F(d)=f(0)+f(1)d+f(2)d^2+f(3)d^3+\ldots+f(k)d^k+\ldots \qquad (\text{П}2.3)$$

Первый способ вычисления обратного *D*–преобразования, записываемого в форме

$$D^{-1}\{F(d)\}=\left[f(0)\;\vdots\;f(1)d\;\vdots\;f(2)d^2\;\vdots\;\ldots\;\vdots\;f(k)d^k\;\vdots\;\ldots\right]=f(k) \qquad (\text{П}2.4)$$

на основе (П2.3) позволяет с учетом модальной арифметики записать:

$$\left.\begin{aligned}
& f(0)=\lim_{d\to 0} F(d)\,; \\
& f(1)=\lim_{d\to 0}\frac{F(d)+f(0)}{d}\,; \\
& f(2)=\lim_{d\to 0}\frac{F(d)+f(0)+f(1)d}{d^{2}}\,; \\
& \vdots \\
& f(k)=\lim_{d\to 0}\frac{F(d)+\sum\limits_{i=0}^{k-1} f(i)d^{i}}{d^{k}}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (П2.5)$$

Второй способ вычисления обратного D–преобразования, записываемого в форме (П2.4) на основе (П2.3) позволяет использованием операции дифференцирования по переменной d записать:

$$\left.\begin{aligned}
& f(0)=\lim_{d\to 0} F(d)\,; \\
& f(1)=\lim_{d\to 0}\frac{\partial F(d)}{\partial d}\,; \\
& f(2)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{2!}\frac{\partial^{2} F(d)}{\partial d^{2}}\,; \\
& \vdots \\
& f(k)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{k!}\frac{\partial^{k} F(d)}{\partial d^{k}}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (П2.6)$$

Третий способ вычисления обратного D–преобразования для случая, когда $F(d)$ представим в виде отношения двух модулярных многочленов, записанных по степеням переменной d,

$$F(d)=\frac{M(d)}{N(d)}=\frac{b_0+b_1d+b_2d^{2}+b_3d^{3}+\ldots+b_{\lambda}d^{\lambda}}{a_0+a_1d+a_2d^{2}+a_3d^{3}+\ldots+a_nd^{n}} \qquad (П2.7)$$

позволяет путем деления ММ «уголком» с учетом модулярной (по $mod\,2$) арифметики

$$
\begin{array}{l|l}
b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + b_3 d^3 + \ldots + b_\lambda d^\lambda & a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + \ldots + a_n d^n \\ \cline{2-2}
a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + \ldots + a_n d^n & \dfrac{b_0}{a_0} + \dfrac{a_1 + b_1}{a_0} d + \dfrac{a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}{a_0^2} d^2 + \ldots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\hline
(a_1 + b_1)d + (a_2 + b_2)d^2 + (a_3 + b_3)d^3 + \ldots \\
\dfrac{a_0}{a_0}(a_1 + b_1)d + \dfrac{a_1}{a_0}(a_1 + b_1)d^2 + \dfrac{a_2}{a_0}(a_1 + b_1)d^3 + \ldots \\
\hline
\left(\dfrac{a_1}{a_0}(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \right) d^2 + \left(\dfrac{a_2}{a_0}(a_1 + b_1) + (a_3 + b_3) \right) d^3 + \ldots ,
\end{array}
$$

для двоичной последовательности записать

$$
f(k):\ f(0) = \frac{b_0}{a_0},\ f(1) = \frac{a_1 + b_1}{a_0},
$$

$$
f(2) = \frac{a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}{a_0^2}, f(3) = \ldots \qquad (П2.8)
$$

Рассмотрим теперь основные свойства прямого *D*–преобразования.

Свойство П2.1 (**СП2.1**). Прямое *D*–преобразование является линейным так, что выполняются условия:

1. $D\{f(k) + g(k)\} = D\{f(k)\} + D\{g(k)\} = F(d) + G(d)$ (П2.9)

2. $D\{\alpha f(k)\} = \alpha D\{f(k)\} = \alpha F(d)$, где $\alpha \in GF(p)\big|_{p=2}$. □ (П2.10)

Свойство **СП2.1** линейности *D*–преобразования строится на линейности операции суммирования в (П2.1).

Свойство П2.2 (**СП2.2**). (Свойство сдвига в области действительной переменной k) Пусть $D\{f(k)\} = F(d)$, тогда

$$
D\{f(k + m)\} = d^{-m} F(d) + d^{-m} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) d^i . \qquad □ \qquad (П2.11)
$$

Доказательство справедливости свойства опирается на определение прямого *D*–преобразования смещенной на m тактов последовательности $f(k + m)$, которое в силу (П2.1) позволяет записать

$$
D\{f(k + m)\} = f(m) + f(m + 1)d + f(m + 2)d^2 + \ldots
$$

$$
\ldots + f(m + k)d^k + \ldots \qquad (П2.12)
$$

Если путем умножения с одновременным делением правой части (П2.12) на d^m и суммирования дважды по $mod2$ линейной комбинации

$\sum_{i=0}^{m-1} f(i)d^i$ обеспечить равенство индексов λ компонентов $f(\lambda)$ и степеней мультипликативного члена d^{λ} в (П2.12), то получим (П2.11). ■

Свойство П2.3 (**СП2.3**). (Свойство изменения масштаба в области переменной d). Пусть $\{f(k)\} = F(d)$, тогда

$$D\{\alpha^k f(k)\} = F(\alpha d). \quad \square \qquad (\text{П}2.13)$$

Доказательство справедливости свойства строится на непосредственном использовании прямого *D*–преобразования к последовательности $\alpha^k f(k)$, которое в силу (П2.1) дает

$$D\{\alpha^k f(k)\} = \alpha^0 f(0) + \alpha^1 f(1)d + \alpha^2 f(2)d^2 + \ldots + \alpha^k f(k)d^k + \ldots =$$
$$= f(0) + f(1)(\alpha d) + f(2)(\alpha d)^2 + \ldots + f(k)(\alpha d)^k + \ldots =$$
$$= F(\alpha d). \qquad ■$$

Рассмотрим теперь *D*–преобразование типовых двоичных последовательностей.

1. Последовательность

$$f(k) = \delta(k): \quad 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots \qquad (\text{П}2.14)$$

именуемая одиночным импульсом или дискретной δ–функцией над простым полем Галуа $GF(p)\big|_{p=2}$. Если к (П2.14) применить (П2.1), то получим

$$D\{f(k) = \delta(k)\} = F_{\delta}(d) = 1. \quad ■ \qquad (\text{П}2.15)$$

2. Последовательность

$$f(k) = 1(k): 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \qquad (\text{П}2.16)$$

именуется унитарным кодом или единичной последовательностью. Если к (П2.16) применить (П2.1), то получим

$$D\{f(k) = 1(k)\} = F(d) = 1 + d + d^2 + \ldots + d^k + \ldots \qquad (\text{П}2.17)$$

Если к (П2.17) применить формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии с показателем d с учетом специфики модулярной арифметики по $mod\,2$ для (П2.17) можно записать

$$D\{f(k) = 1(k)\} = F(d) = \frac{1}{1+d}. \quad ■ \qquad (\text{П}2.18)$$

3. Периодическая последовательность с целочисленным периодом T

$f(k)=f(k+T)$:

$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(T-1), f(0), f(1), f(2), \ldots, f(T-1), \qquad (\text{П}2.19)$$
$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(T-1), f(0), f(1), f(2), \ldots, f(T-1), \ldots$$

Если к периодической последовательности $f(k)=f(k+T)$, записанной в форме (П2.19), применить прямое *D*–преобразование, то в силу (П2.1) можно записать

$$F(d)=D\{f(k)=f(k+T)\}$$
$$=\left(f(0)+f(1)d+f(2)d^2+\ldots+f(T-1)d^{T-1}\right)\left(1+d^T+d^{2T}+d^{3T}+\ldots\right) \qquad (\text{П}2.20)$$

Если к выражению (П2.20) применить формулу суммы членов геометрической прогрессии с показателем d^T, то получим для периодической последовательности с учетом специфики модулярной арифметики по $mod\,2$

$$F(d)=D\{f(k)=f(k+T)\}=$$
$$=\frac{f(0)+f(1)d+f(2)d^2+\ldots+f(T-1)d^{T-1}}{1+d^T}. \qquad \blacksquare \quad (\text{П}2.21)$$

Если встает задача преобразования модулярных многочленов над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p=2$ с привлечением возможностей аппарата *D*–преобразования, то возникает необходимость ввести в рассмотрение прямого *D*–преобразования ММ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \qquad (\text{П}2.22)$$

где $a_i\in GF(p)\big|_{p=2}$, $i=\overline{0,n}$; с целью вычисления его образа $F(d)=D\{f(x)\}$. Вычисление *D*–образа ММ $f(x)$ зависит от того, каким разрядом вперед ММ $f(x)$ передается в канальной среде: младшим или старшим, в силу чего модулярный многочлен имеет два *D*-образа $F(d)$. Способы вычисления *D*-образов ММ $f(x)$ (П2.22) зададим с помощью утверждений.

Утверждение П2.1 (**УП2.1**). *D*-образ $F(d)$ модулярного многочлена $f(x)$ (П2.22) при его передаче младшим разрядом вперед задается соотношением

$$F(d)=D\{f(x)\}=f(x)\big|_{x=d}=$$
$$=a_n+a_{n-1}d+a_{n-2}d^2+\ldots+a_1d^{n-1}+a_0d^n. \qquad \square \quad (\text{П}2.23)$$

Доказательство утверждения строится на формировании последовательности $f(k)$ из коэффициентов ММ $f(x)$ с учетом его передачи младшим разрядом вперед

$$f(k): \quad a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0, 0, 0, 0, \ldots \qquad (\text{П}2.24)$$

с последующим применением к (П2.24) *D*–преобразования (П2.1). ■

Утверждение П2.2 (**УП2.2**). *D*–образ $F(d)$ модулярного многочлена $f(x)$ (П2.22) при его передаче старшим разрядом вперед задается соотношением

$$F(d) = D\{f(x)\} = \tilde{f}\left(x^{-1}\right)\Big|_{x^{-1}=d} =$$
$$= a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \ldots + a_{n-1} d^{n-1} + a_n d^n, \qquad (\text{П}2.25)$$

где $\tilde{f}\left(x^{-1}\right)$ – полином по отрицательным степеням x^{-1} задается в силу представления

$$f(x) = x^n \tilde{f}\left(x^{-1}\right) =$$
$$= x^n \left(a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots + a_{n-1} x^{-(n-1)} + a_n x^{-n}\right) \qquad \square \quad (\text{П}2.26)$$

Доказательство утверждения строится на формировании последовательности $f(k)$ из коэффициентов ММ $f(x)$ с учетом его передачи старшим разрядом вперед

$$f(k): \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, 0, \ldots \qquad (\text{П}2.27)$$

с последующим применением к последовательности (П2.27) прямого *D*–преобразования (П2.1) и констатацией факта совпадения порядка следования коэффициентов $a_i \left(i = \overline{0, n}\right)$ в последовательности (П2.27) и в ММ $\tilde{f}\left(x^{-1}\right)$ (П2.26). ■