

***D* – ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВОИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

Определение П2.1 (ОП2.1). Прямым *D*–преобразованием $F(d)$ двоичной последовательности $f(k)$, где k – дискретное время, выраженное в числе тактов длительности Δt , над простым полем Галуа $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, где $p = 2$ называется бесконечная сумма

$$F(d) = D\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)d^k, \quad (\text{П2.1})$$

при условии, что она сходится. □

Функция $F(d)$ называется *D*–образом двоичной последовательности $f(k)$.

Определение П2.2 (ОП2.2). Обратным *D*–преобразованием $D^{-1}\{F(d)\}$ *D*–образа $F(d)$ двоичной последовательности $f(k)$ называется преобразование, позволяющее по *D*–образу $F(d)$ двоичной последовательности $f(k)$ восстановить исходную последовательность $f(k)$ в силу соотношения

$$D^{-1}\{F(d)\} = f(k). \quad \square (\text{П2.2})$$

Последовательность $f(k)$ именуется оригиналом *D*–преобразования. Таким образом, $f(k)$ и $F(d)$ представляет собой взаимные *D*–трансформанты.

Канонически сложившегося аналитического обратного *D*–преобразования $D^{-1}\{F(d)\}$ пока не существует, но имеются способы их вычисления, которые опираются на определение прямого *D*–преобразования. Для иллюстрации этих способов запишем (П2.1) в развернутой форме

$$F(d) = f(0) + f(1)d + f(2)d^2 + f(3)d^3 + \dots + f(k)d^k + \dots \quad (\text{П2.3})$$

Первый способ вычисления обратного *D*–преобразования, записываемого в форме

$$D^{-1}\{F(d)\} = [f(0) \mid f(1)d \mid f(2)d^2 \mid \dots \mid f(k)d^k \mid \dots] = f(k) \quad (\text{П2.4})$$

на основе (П2.3) позволяет с учетом модальной арифметики записать:

$$\left. \begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{d \rightarrow 0} F(d); \\
 f(1) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{F(d) + f(0)}{d}; \\
 f(2) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{F(d) + f(0) + f(1)d}{d^2}; \\
 \text{М} \\
 f(k) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{F(d) + \sum_{i=0}^{k-1} f(i)d^i}{d^k}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.5})$$

Второй способ вычисления обратного D -преобразования, записываемого в форме (П2.4) на основе (П2.3) позволяет использованием операции дифференцирования по переменной d записать:

$$\left. \begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{d \rightarrow 0} F(d); \\
 f(1) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\partial F(d)}{\partial d}; \\
 f(2) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 F(d)}{\partial d^2}; \\
 \text{М} \\
 f(k) &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F(d)}{\partial d^k}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2.6})$$

Третий способ вычисления обратного D -преобразования для случая, когда $F(d)$ представим в виде отношения двух модулярных многочленов, записанных по степеням переменной d ,

$$F(d) = \frac{M(d)}{N(d)} = \frac{b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + b_3 d^3 + \dots + b_\lambda d^\lambda}{a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + \dots + a_n d^n} \quad (\text{П2.7})$$

позволяет путем деления ММ «уголком» с учетом модулярной (по $\text{mod } 2$) арифметики

$$\frac{b_0 + b_1 d + b_2 d^2 + b_3 d^3 + \mathbf{K} + b_\lambda d^\lambda}{a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + \mathbf{K} + a_n d^n} \left| \frac{a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + \mathbf{K} + a_n d^n}{\frac{b_0}{a_0} + \frac{a_1 + b_1}{a_0} d + \frac{a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}{a_0^2} d^2 + \mathbf{K}} \right.$$

$$\frac{(a_1 + b_1)d + (a_2 + b_2)d^2 + (a_3 + b_3)d^3 + \mathbf{K}}{\frac{a_0}{a_0}(a_1 + b_1)d + \frac{a_1}{a_0}(a_1 + b_1)d^2 + \frac{a_2}{a_0}(a_1 + b_1)d^3 + \mathbf{K}}$$

$$\left(\frac{a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}{a_0} \right) d^2 + \left(\frac{a_2(a_1 + b_1) + (a_3 + b_3)}{a_0} \right) d^3 + \mathbf{K} ,$$

для двоичной последовательности записать

$$f(k): f(0) = \frac{b_0}{a_0}, f(1) = \frac{a_1 + b_1}{a_0},$$

$$f(2) = \frac{a_1(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)}{a_0^2}, f(3) = \mathbf{K} \quad (\text{П2.8})$$

Рассмотрим теперь основные свойства прямого D -преобразования.

Свойство П2.1 (СП2.1). Прямое D -преобразование является линейным так, что выполняются условия:

$$1. D\{f(k) + g(k)\} = D\{f(k)\} + D\{g(k)\} = F(d) + G(d) \quad (\text{П2.9})$$

$$2. D\{\alpha f(k)\} = \alpha D\{f(k)\} = \alpha F(d), \text{ где } \alpha \in GF(p)|_{p=2}. \quad \square \quad (\text{П2.10})$$

Свойство **СП2.1** линейности D -преобразования строится на линейности операции суммирования в (П2.1).

Свойство П2.2 (СП2.2). (Свойство сдвига в области действительной переменной k) Пусть $D\{f(k)\} = F(d)$, тогда

$$D\{f(k+m)\} = d^{-m} F(d) + d^{-m} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) d^i. \quad \square \quad (\text{П2.11})$$

Доказательство справедливости свойства опирается на определение прямого D -преобразования смещенной на m тактов последовательности $f(k+m)$, которое в силу (П2.1) позволяет записать

$$D\{f(k+m)\} = f(m) + f(m+1)d + f(m+2)d^2 + \mathbf{K}$$

$$\mathbf{K} + f(m+k)d^k + \mathbf{K} \quad (\text{П2.12})$$

Если путем умножения с одновременным делением правой части (П2.12) на d^m и суммирования дважды по $\text{mod } 2$ линейной комбинации

$\sum_{i=0}^{m-1} f(i)d^i$ обеспечить равенство индексов λ компонент $f(\lambda)$ и степеней мультипликативного члена d^λ в (П2.12), то получим (П2.11).

■

Свойство П2.3 (СП2.3). (Свойство изменения масштаба в области переменной d). Пусть $\{f(k)\} = F(d)$, тогда

$$D\{\alpha^k f(k)\} = F(\alpha d). \quad \square \quad (\text{П2.13})$$

Доказательство справедливости свойства строится на непосредственном использовании прямого D -преобразования к последовательности $\alpha^k f(k)$, которое в силу (П2.1) дает

$$\begin{aligned} D\{\alpha^k f(k)\} &= \alpha^0 f(0) + \alpha^1 f(1)d + \alpha^2 f(2)d^2 + \dots + \alpha^k f(k)d^k + \dots = \\ &= f(0) + f(1)(\alpha d) + f(2)(\alpha d)^2 + \dots + f(k)(\alpha d)^k + \dots = \\ &= F(\alpha d). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Рассмотрим теперь D -преобразование типовых двоичных последовательностей.

1. Последовательность

$$f(k) = \delta(k): 1, 0, 0, \dots, 0, \dots \quad (\text{П2.14})$$

именуемая одиночным импульсом или дискретной δ -функцией над простым полем Галуа $GF(p)|_{p=2}$. Если к (П2.14) применить (П2.1), то получим

$$D\{f(k) = \delta(k)\} = F_\delta(d) = 1. \quad \blacksquare \quad (\text{П2.15})$$

2. Последовательность

$$f(k) = 1(k): 1, 1, 1, \dots, 1, \dots \quad (\text{П2.16})$$

именуется унитарным кодом или единичной последовательностью. Если к (П2.16) применить (П2.1), то получим

$$D\{f(k) = 1(k)\} = F(d) = 1 + d + d^2 + \dots + d^k + \dots \quad (\text{П2.17})$$

Если к (П2.17) применить формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии с показателем d с учетом специфики модулярной арифметики по $\text{mod } 2$ для (П2.17) можно записать

$$D\{f(k) = 1(k)\} = F(d) = \frac{1}{1+d}. \quad \blacksquare \quad (\text{П2.18})$$

3. Периодическая последовательность с целочисленным периодом T

$$f(k) = f(k+T):$$

$$f(0), f(1), f(2), \dots, f(T-1), f(0), f(1), f(2), \dots, f(T-1), \quad (\text{П2.19})$$

$$f(0), f(1), f(2), \dots, f(T-1), f(0), f(1), f(2), \dots, f(T-1), \dots$$

Если к периодической последовательности $f(k) = f(k+T)$, записанной в форме (П2.19), применить прямое D -преобразование, то в силу (П2.1) можно записать

$$F(d) = D\{f(k) = f(k+T)\}$$

$$= (f(0) + f(1)d + f(2)d^2 + \dots + f(T-1)d^{T-1})(1 + d^T + d^{2T} + d^{3T} + \dots) \quad (\text{П2.20})$$

Если к выражению (П2.20) применить формулу суммы членов геометрической прогрессии с показателем d^T , то получим для периодической последовательности с учетом специфики модулярной арифметики по $\text{mod } 2$

$$F(d) = D\{f(k) = f(k+T)\} =$$

$$= \frac{f(0) + f(1)d + f(2)d^2 + \dots + f(T-1)d^{T-1}}{1 + d^T}. \quad \blacksquare \quad (\text{П2.21})$$

Если встает задача преобразования модулярных многочленов над простым полем Галуа $GF(p)$ при $p = 2$ с привлечением возможностей аппарата D -преобразования, то возникает необходимость ввести в рассмотрение прямого D -преобразования ММ

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (\text{П2.22})$$

где $a_i \in GF(p)|_{p=2}$, $i = \overline{0, n}$; с целью вычисления его образа $F(d) = D\{f(x)\}$. Вычисление D -образа ММ $f(x)$ зависит от того, каким разрядом вперед ММ $f(x)$ передается в канальной среде: младшим или старшим, в силу чего модулярный многочлен имеет два D -образа $F(d)$. Способы вычисления D -образов ММ $f(x)$ (П2.22) зададим с помощью утверждений.

Утверждение П2.1 (УП2.1). D -образ $F(d)$ модулярного многочлена $f(x)$ (П2.22) при его передаче младшим разрядом вперед задается соотношением

$$F(d) = D\{f(x)\} = f(x)|_{x=d} =$$

$$= a_n + a_{n-1}d + a_{n-2}d^2 + \dots + a_1d^{n-1} + a_0d^n. \quad \square \quad (\text{П2.23})$$

Доказательство утверждения строится на формировании последовательности $f(k)$ из коэффициентов ММ $f(x)$ с учетом его передачи младшим разрядом вперед

$$f(k): \quad a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \mathbb{K}, a_1, a_0, 0, 0, 0, \mathbb{K} \quad (\text{П2.24})$$

с последующим применением к (П2.24) D -преобразования (П2.1). ■

Утверждение П2.2 (УП2.2). D -образ $F(d)$ модулярного многочлена $f(x)$ (П2.22) при его передаче старшим разрядом вперед задается соотношением

$$\begin{aligned} F(d) &= D\{f(x)\} = \tilde{f}(x^{-1}) \Big|_{x^{-1}=d} = \\ &= a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \mathbb{K} + a_{n-1} d^{n-1} + a_n d^n, \end{aligned} \quad (\text{П2.25})$$

где $\tilde{f}(x^{-1})$ – полином по отрицательным степеням x^{-1} задается в силу представления

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \tilde{f}(x^{-1}) = \\ &= x^n (a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \mathbb{K} + a_{n-1} x^{-(n-1)} + a_n x^{-n}) \quad \square \quad (\text{П2.26}) \end{aligned}$$

Доказательство утверждения строится на формировании последовательности $f(k)$ из коэффициентов ММ $f(x)$ с учетом его передачи старшим разрядом вперед

$$f(k): \quad a_0, a_1, a_2, \mathbb{K}, a_{n-1}, a_n, 0, 0, 0, \mathbb{K} \quad (\text{П2.27})$$

с последующим применением к последовательности (П2.27) прямого D -преобразования (П2.1) и констатацией факта совпадения порядка следования коэффициентов a_i ($i = \overline{0, n}$) в последовательности (П2.27) и в ММ $\tilde{f}(x^{-1})$ (П2.26). ■