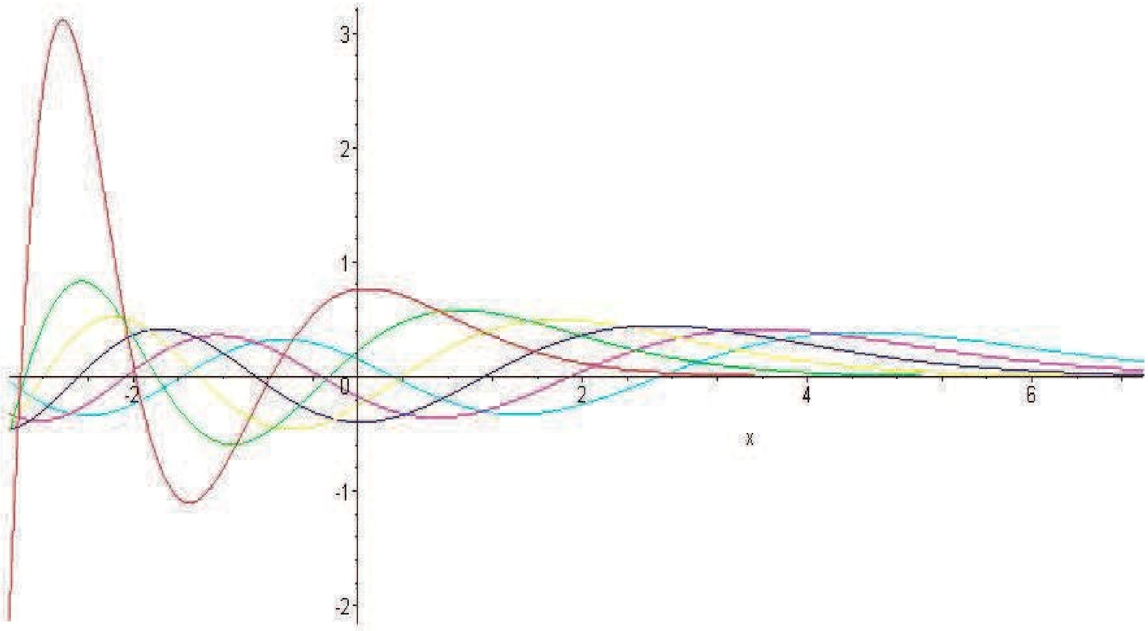
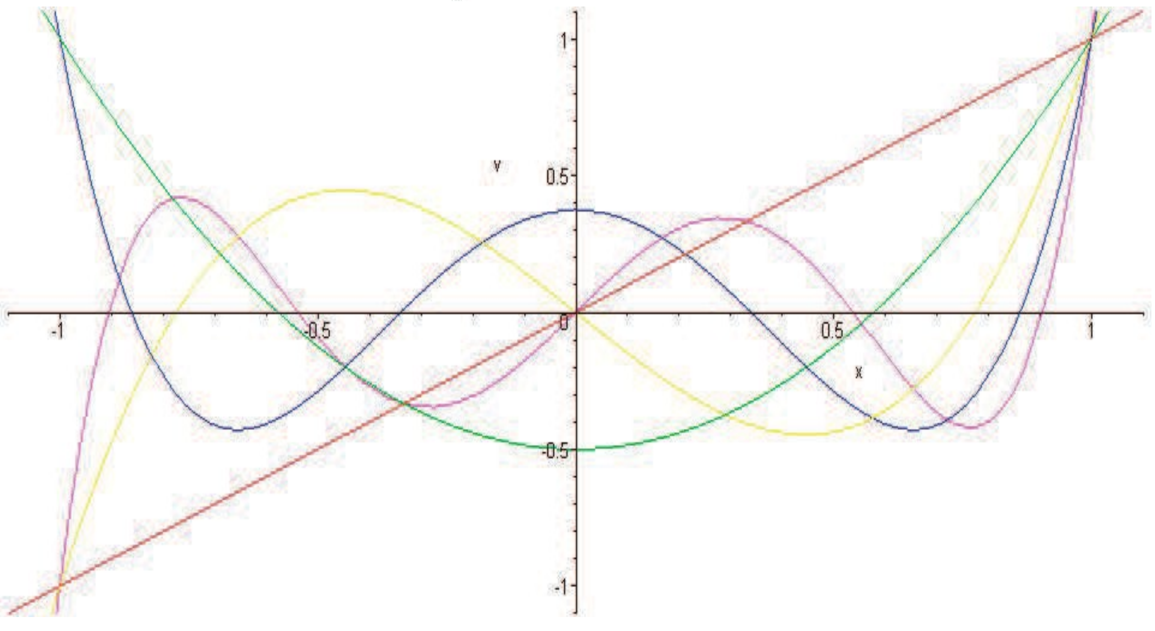
СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие





Санкт–Петербург

2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

С.Е. Холодова, С.И. Перегудин

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2012

Холодова С.Е., Перегудин С.И. Специальные функции в задачах математической физики. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 72 с.

В учебном пособии рассматриваются наиболее часто встречающиеся специальные функции — цилиндрические функции, присоединенные функции Лежандра, сферические функции, шаровые функции и их применение к решению краевых задач для уравнения Гельмгольца. Подробно излагаются примеры решения конкретных задач и приводятся задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих курс математической физики, а также для студентов, изучающих математическое моделирование физических процессов.

Пособие адресовано студентам естественнонаучного факультета, обучающимся по программам бакалавриата и магистратуры направления 010400 — “Прикладная математика и информатика”.

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета 23.10.2012, протокол № 10.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

Предисловие

Решение многих важных задач математической физики, связанных, например, с изучением процессов теплопроводности и взаимодействия излучения с веществом, распространения электромагнитных и звуковых волн, разработкой теории ядерных реакторов и внутреннего строения звезд, приводит к нахождению собственных функций задачи Штурма—Лиувилля для уравнения Лапласа или Гельмгольца, которые могут быть найдены аналитически только для небольшого количества областей.

В случаях самых простых областей — отрезка, прямоугольника, прямоугольного параллелепипеда — они выражаются через элементарные функции. Для некоторых областей — круга, кругового цилиндра, шара и других более сложных областей — собственные функции выражаются через так называемые специальные функции.

В настоящем пособии рассматриваются наиболее часто использующиеся специальные функции — цилиндрические функции, присоединенные функции Лежандра, сферические функции, шаровые функции и их применение к решению краевых задач для уравнения Гельмгольца.

1 Функции Бесселя

Функции Бесселя возникают при решении уравнений, связанных с оператором Лапласа Δ на плоскости

$$-\Delta u(x, y) \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u + f(x, y).$$

Действительно, в полярных координатах (r, φ)

$$x = r\cos\varphi; \qquad y = r\sin\varphi$$

это уравнение принимает вид

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\varphi^2} = \lambda\widetilde{u} + \widetilde{f}(r, \varphi), \qquad \widetilde{u}(r, \varphi) = u(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi).$$

Если решение $\widetilde{u}(r)$ не зависит от φ, то последнее уравнение при $f = 0$ принимает вид

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) + \lambda u(r) = 0$$

и является частным случаем уравнения Бесселя

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0. \tag{1.1}$$

Всякое решение уравнения Бесселя, не равное тождественно нулю, называется *цилиндрической функцией*.

1.1 Определение и простейшие свойства функции Бесселя

Изложим основные свойства цилиндрических функций.

Так как уравнение Бесселя (1.1) имеет особую точку $x = 0$, то его решение $u(x)$ можно искать в виде обобщенного степенного ряда

$$u(x) = x^{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{1.2}$$

где $a_0 \neq 0$, показатель σ и коэффициенты a_k подлежат определению. Степенной ряд (1.2), как известно, допускает почленное дифференцирование любое число раз [2], поэтому, подставив ряд (1.2) в уравнение (1.1), из требования обращения в нуль в полученном выражении коэффициентов при всех степенях x будем иметь следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{gathered} a_o(\sigma^2 - \nu^2) = 0, \\ a_1[(\sigma+1)^2 - \nu^2] = 0, \\ a_2[(\sigma+2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k[(\sigma+k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots . \end{gathered} \tag{1.3}$$

Из первого уравнения системы (1.3) вытекает, что $\sigma^2 - \nu^2 = 0$ или

$$\sigma = \pm\nu.$$

Заметим, что при $\nu \neq \dfrac{k}{2}, \quad k = 1, 2 \dots,$ выполняется условие

$$(\sigma + k)^2 - \nu^2 \neq 0, \quad k = 1, 2 \dots . \tag{1.4}$$

Из второго уравнения системы (1.3) при $\sigma = \pm\nu$ следует, что

$$a_1 = 0. \tag{1.5}$$

Согласно условию (1.4) из последнего уравнения системы (1.3) получаем рекуррентную формулу

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}, \quad k = 2, 3, \dots . \tag{1.6}$$

Из формул (1.5) и (1.6) вытекает, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, а коэффициенты с четными индексами могут быть выражены через a_0. Рассмотрим случай $\sigma = \nu$. Тогда, положив в формуле (1.6) $k = 2p$, получим,

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2^2 p(p+\nu)}. \tag{1.7}$$

Последовательно применяя формулу (1.7), получим

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+p)}. \tag{1.8}$$

Итак, решение уравнения Бесселя (1.1) определяется с точностью до произвольного множителя a_0. Выберем его в виде

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{1.9}$$

где Γ есть известная гамма-функция Эйлера. По свойству гамма-функции

$$\Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+p) = \Gamma(p+1+\nu).$$

Тогда из формул (1.8) и (1.9) получим

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\nu}\Gamma(p+1)\Gamma(p+\nu+1)}.$$

Рассмотрим ряд

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{1.10}$$

С помощью признака Даламбера можно установить, что ряд (1.10) сходится абсолютно при любых x.

Определение. Ряд (1.10) называется функцией Бесселя первого рода порядка ν и обозначается $J_\nu(x)$.

Очевидно, функция $J_\nu(x)$ является частным решением уравнения Бесселя (1.1).

Функция Бесселя $J_\nu(x)$, определяемая для вещественного аргумента x рядом (1.10), может быть аналитически продолжена с положительной вещественной полуоси на комплексную плоскость z с разрезом по отрицательной части вещественной оси. При нецелом ν точка $z = 0$ является точкой ветвления функции z^ν. Полученная функция Бесселя комплексного аргумента является аналитической в области $-\pi < \arg z < \pi$.

При целом значении ν функция Бесселя $J_\nu(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = \infty$.

Рассмотрим случай $\sigma = -\nu$. Проделав аналогичные выкладки, придём к следующему определению.

Определение. Ряд (1.10), соответствующий $\sigma = -\nu$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \tag{1.11}$$

называется функцией Бесселя второго рода порядка ν.

При нецелом ν функция $J_{-\nu}(x)$ представляет собой второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое от $J_\nu(x)$. Действительно, поскольку

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(1 + o(x^2)\right), \quad x \to 0, \quad \nu \neq \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то в случае нецелого ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ по-разному ведут себя в нуле: функция $J_\nu(x)$ имеет в нуле ноль ν–го порядка, а функция $J_{-\nu}(x)$ имеет в нуле полюс ν–го порядка. Таким образом, *при нецелом ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя порядка ν.*

Если же $\nu = n$ — целое число, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{1.12}$$

поэтому функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы и не образуют фундаментальную систему решений.

Докажем равенство (1.12). Поскольку $\Gamma(-k) = \infty$, $k = 0, 1, \ldots$, суммирование в формуле (1.11) фактически начинается со значения $k = n$, поэтому

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Цилиндрические функции Бесселя с соседними индексами и их производные связаны между собой рекуррентными соотношениями

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \tag{1.13}$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \tag{1.14}$$

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{1.15}$$

Каждая из формул (1.13)–(1.15) может быть доказана, пользуясь определением функции Бесселя, хотя достаточно таким образом проверить первые два из соотношений (1.13)–(1.15), поскольку последнее является их следствием.

Докажем равенство (1.13). Действительно, по определению функции Бесселя

$$-J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} +$$

$$+\frac{2\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\nu}{k+\nu}\right) \frac{(-1)^{k+1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu+1} = J_{\nu+1}(x).$$

Отметим частный случай формулы (1.14) при $\nu = 0$:

$$J'_0(x) = -J_1(x). \tag{1.16}$$

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ наиболее часто встречаются в приложениях, для них составлены подробные таблицы [6]. Формула (1.13) позволяет последовательно находить значения функций $J_2(x)$, $J_3(x)$ и т. д.

Формулы (1.14), (1.15) можно записать в виде

$$(x^\nu \cdot J_n u(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \left(x^{-\nu} \cdot J_n u(x)\right)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \tag{1.17}$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left[x^{\pm\nu} J_\nu(x)\right] = (\pm 1)^m x^{\pm\nu-m} J_{\nu\mp m}(x), \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Отметим, что *цилиндрические функции Бесселя с полуцелым индексом выражаются через элементарные функции.*

Действительно, учитывая, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

и принимая во внимание формулу понижения для гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

получим из (1.10)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Аналогичным образом можно получить, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Заметим, что с учетом рекуррентной формулы (1.13) и полученных выражений для функций $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ следует представление при целых n цилиндрической функции $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ через элементарные функции в виде [1, 4]

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_n\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) \right\},$$

где $P_n(v)$ и $Q_n(v)$ — полиномы степени не выше n относительно v, причём $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$.

Отметим, что *функции Бесселя $J_n(x)$ с целыми индексами являются коэффициентами разложения функции $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ в ряд Лорана*, то есть

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n. \tag{1.18}$$

Действительно, так как функция $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ аналитична по переменной z во всей комплексной плоскости, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, то её можно разложить в ряд Лорана, причём коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}\, z^{-n-1} dz, \quad n = \overline{-\infty, +\infty},$$

где γ — любой замкнутый контур, окружающий начало координат. Вводя новую комплексную переменную $t = \dfrac{zx}{2}$ и использую разложение

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x^2}{4t} \right)^k,$$

получим

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int\limits_{\gamma_1} \mathrm{e}^{t-\frac{x^2}{4t}} \cdot t^{-n-1} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k}}{2^{2k}} \int\limits_{\gamma_1} \mathrm{e}^t \cdot t^{-(k+n+1)} dt, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где γ_1 — образ контура γ на плоскости t. Интеграл в формуле (1.19) можно вычислить, применяя теорию вычетов, то есть

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \mathrm{e}^t \cdot t^{-(k+n+1)} dt = \operatorname{res} \left. \frac{\mathrm{e}^t}{t^{k+n+1}} \right|_{t=0} = \frac{1}{(k+n)!},$$

следовательно,

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = J_n(x).$$

Для функции Бесселя справедливо интегральное представление

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots. \tag{1.20}$$

Если x — действительное число и $z = \mathrm{e}^{i\varphi}$, то выражение (1.18) принимает вид

$$\mathrm{e}^{ix\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \mathrm{e}^{in\varphi}. \tag{1.21}$$

Отделяя в выражении (1.21) действительные части, получим разложение функции $\cos(x \sin\varphi)$ в виде ряда Фурье:

$$\cos(x\sin\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot \cos n\varphi = J_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\varphi, \tag{1.22}$$

откуда

$$J_{2k}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos 2k\varphi\,d\varphi,\quad k=\overline{0,\infty}.$$

Сравнивая мнимые части в выражении (1.21), получим

$$J_{2k+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin(2k+1)\varphi\,d\varphi,\ k=\overline{0,\infty}. \tag{1.23}$$

Так как при чётных n

$$\int\limits_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi=0,$$

а при нечётных n

$$\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi=0,$$

то из выражений (1.22), (1.23) можно заключить справедливость представления (1.20).

При больших значениях x имеют место асимптотические формулы

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \tag{1.24}$$

Подробное доказательство этого факта можно найти в книге [5].

Корни функций Бесселя. Если $\nu>-1$, то все корни уравнения $J_\nu(x)=0$ — действительные числа. Доказательство можно найти в книге [3].

В приложениях чаще встречаются функции Бесселя с целым индексом. Всякое уравнение $J_n(x)=0$ имеет счётное множество положительных корней, то есть корни можно занумеровать, располагая в порядке возрастания

$$\mu_1^{(n)}<\mu_2^{(n)}<\ldots<\mu_k^{(n)}<\ldots.$$

Приведём вычисленные с точностью до четырех десятичных знаков значения первых шести нулей функции $J_0(x)$:

$$\mu_1^{(0)}=2,4048;\quad \mu_2^{(0)}=5,5201;\quad \mu_3^{(0)}=8,6537;$$
$$\mu_4^{(0)}=11,7915;\quad \mu_5^{(0)}=14,9309;\quad \mu_6^{(0)}=18,0711.$$

Используя асимптотику функции $J_\nu(x)$, то есть формулу (1.24), можно получить приближённую формулу для корней $J_\nu(x)$

$$\mu_k^{(\nu)} \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi.$$

1.2 Другие цилиндрические функции

Наряду с функциями Бесселя $J_\nu(x)$ в широком классе задач используются другие типы цилиндрических функций. К их числу относятся:

функции Ханкеля первого рода

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{i}{\sin\pi\nu}\left[J_\nu(x)\mathrm{e}^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right], \quad \nu \neq n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \frac{i}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right], \quad \nu = n;$$

функции Ханкеля второго рода

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\left[J_\nu(x)\mathrm{e}^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right], \quad \nu \neq n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \frac{i}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right], \quad \nu = n;$$

функции Неймана

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin\pi\nu}\left[J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)\right], \quad \nu \neq n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right], \quad \nu = n;$$

функции мнимого аргумента — Инфельда и Макдональда соответственно

$$I_\nu(x) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\nu i\right) J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi i}{2}\exp\left(\frac{\pi}{2}\nu i\right) H_\nu^{(1)}(ix).$$

Функции Ханкеля первого и второго рода выражаются через функции Бесселя и Неймана следующим образом:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \tag{1.25}$$

Формулы (1.25) справедливы и при комплексном аргументе на всей комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси.

Пользуясь асимптотикой для функций Бесселя $J_\nu(x)$, получим следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\Big[i\big(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\big)\Big] + O(x^{-\frac{3}{2}}), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\Big[-i\big(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\big)\Big] + O(x^{-\frac{3}{2}}), \\ N_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\big(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\big) + O(x^{-\frac{3}{2}}), \\ I_\nu(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi x}}\big(1 + O(x^{-1})\big), &\quad K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, \mathrm{e}^{-x}\big(1 + O(x^{-1})\big). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Из формул (1.26) следует, что при больших действительных значениях аргумента функция Неймана представляет собой осциллирующую функцию аргумента x, причём её амплитуда убывает с ростом x как $x^{-\frac{1}{2}}$, а расстояние между нулями стремится к π. Функция Инфельда $I_\nu(x)$ экспоненциально возрастает, а функция Макдональда $K_\nu(x)$ экспоненциально убывает.

Любая пара из функций $\big\{J_\nu(x), N_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)\big\}$ образует фундаментальную систему решений уравнения Бесселя при любых ν. Наиболее удобно общее решение уравнения Бесселя записывать в виде

$$u(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

или

$$u(x) = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x).$$

Если в уравнении Бесселя положить аргумент равным ix, то функции Инфельда и Макдональда будут представлять фундаментальную систему решений полученного уравнения, общее решение которого можно записать в виде

$$u(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x).$$

В заключение приведём формулы, описывающие поведение цилиндрических функций при малых значениях аргумента ($x \to 0$):

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^\nu, \quad \nu \geq 0;$$

$$N_\nu(x) \approx \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \ln \dfrac{x}{2}, & \nu = 0, \\ -\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{-\nu}, & \nu > 0; \end{cases}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) \approx \begin{cases} \pm i\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{x}{2}, & \nu = 0, \\ \mp i\dfrac{\Gamma(\nu)}{\pi}\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{-\nu}, & \nu > 0; \end{cases}$$

$$K_\nu(x) \approx \begin{cases} \ln\dfrac{2}{x}, & \nu = 0, \\ \dfrac{1}{2}\Gamma(\nu)\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{-\nu}, & \nu > 0. \end{cases}$$

Из рекуррентных формул для функций Бесселя несложно получить рекуррентные соотношения и для остальных цилиндрических функций:

$$Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}Z_\nu(z), \qquad Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2Z'_\nu(z),$$
$$\frac{d}{dz}\Big(z^\nu Z_\nu(z)\Big) = z^\nu Z_{\nu-1}(z), \qquad \frac{d}{dz}\Big(z^{-\nu} Z_\nu(z)\Big) = -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z),$$
$$\Big(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n\big(z^\nu Z_\nu(z)\big) = z^{\nu-n}Z_{\nu-n}(z),$$
$$\Big(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n\big(z^{-\nu} Z_\nu(z)\big) = z^{-(\nu-n)}Z_{\nu+n}(z),$$

где $Z_\nu(z)$ — любая из функций $J_\nu(z), N_\nu(z), H_\nu^{(1,2)}(z)$:

$$I_{\nu+1}(z) - I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\nu}{z}I_\nu(z),\ I_{\nu+1}(z) + I_{\nu-1}(z) = 2I'_\nu(z),\ I'_0(z) = I_1(z),$$
$$K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z}\,K_\nu(z), \qquad K_{\nu+1}(z) + K_{\nu-1}(z) = -2K'_\nu(z),$$
$$K'_0(z) = -K_1(z), \qquad I_{-n}(z) = I_n(z), \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z).$$

1.3 Применение цилиндрических функций к решению краевых задач

1. Рассмотрим задачу об *остывании бесконечного круглого цилиндра* радиуса r_0 с начальной температурой, зависящей только от расстояния точки до оси цилиндра, и нулевой температурой на поверхности цилиндра. Необходимо решить смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \tag{1.27}$$

$$u\Big|_{r=r_0} = 0, \tag{1.28}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(r). \tag{1.29}$$

обладающую цилиндрической симметрией, решение которой будет зависеть только от переменных r и t, то есть $u = u(r,t)$, а оператор Лапласа будет состоять лишь из одного слагаемого $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$.

Найдем решение в виде

$$u(r,t) = R(r)T(t). \tag{1.30}$$

Подставим (1.30) в (1.27) и произведем разделение переменных, тогда

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\lambda^2. \tag{1.31}$$

Функция $R(r)$ есть решение задачи Штурма—Лиувилля:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda^2 rR = 0, \tag{1.32}$$

$$|R(0)| < \infty, \qquad R(r_0) = 0. \tag{1.33}$$

Записывая уравнение (1.32) в эквивалентной форме

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0,$$

и вводя новую независимую переменную $x = \lambda r$

$$\frac{dR}{dr} = \lambda\frac{dR}{dx}, \qquad \frac{d^2R}{dr^2} = \lambda^2\frac{d^2R}{dx^2},$$

после замены получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Общее решение последнего уравнения является линейной комбинацией частных решений $J_0(x)$, $N_0(x)$

$$R = CJ_0(x) + DN_0(x);$$

возвращаясь к переменной r, получим общее решение исходного уравнения

$$R = CJ_0(\lambda r) + DN_0(\lambda r). \tag{1.34}$$

Цилиндрическая функция Бесселя $J_0(\lambda r)$ ограничена на отрезке $[0, r_0]$. Таким образом, для выполнения условия $|R(0)| < \infty$ необходимо потребовать $D = 0$. Параметр λ определяется из уравнения $J_0(\lambda r) = 0$, откуда находятся собственные значения

$$\lambda r_0 = \mu_k^{(0)} \Rightarrow \lambda = \lambda_k = \frac{\mu_k^{(0)}}{r_0}, \qquad k = \overline{1, \infty}$$

и соответствующие собственные функции

$$R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{r_0}\right), \qquad k = \overline{1, \infty}. \tag{1.35}$$

Из (1.31) следует уравнение для функции T

$$T' + \left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} a\right)^2 T = 0,$$

откуда

$$T_k(t) = A_k \exp\left[-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} a\right)^2 t\right],$$

следовательно,

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(a\mu_k^{(0)}/r_0\right)^2 t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right). \tag{1.36}$$

Коэффициенты A_k выбираются из начального условия (1.29)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) = \varphi(r).$$

Коэффициенты Фурье A_k определяются по общим ортогональным системам как

$$A_k = \frac{\int\limits_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) dr}{\int\limits_0^{r_0} r\left[J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right)\right]^2 dr}. \tag{1.37}$$

Для интеграла в знаменателе имеем

$$\int\limits_0^{r_0} r\left[J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right)\right]^2 dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2,$$

и коэффициенты Фурье выражаются

$$A_k = \frac{2}{r_0^2} \frac{1}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \int\limits_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{r_0} r\right) dr. \tag{1.38}$$

2. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях круглой мембраны радиуса r_0. Нужно найти нетривиальные решения $v = v(r, \varphi)$ задачи

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 v = 0, \tag{1.39}$$

$$v\Big|_{r=r_0} = 0, \qquad |v(r,\varphi)| < \infty. \tag{1.40}$$

Согласно методу разделения переменных положим $v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Уравнение (1.39) примет вид

$$\frac{1}{R}\left[r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda^2 r^2 R\right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2. \tag{1.41}$$

К дифференциальному уравнению для угловой функции

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0$$

присоединим условие 2π-периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Следовательно

$$\mu = n, \qquad \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad n = \overline{0, \infty}. \tag{1.42}$$

Для радиальной функции имеем задачу Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{n^2}{r}R + \lambda^2 r R = 0, \tag{1.43}$$

$$|R(0)| < \infty, \qquad R(r_0) = 0, \qquad n = \overline{0, \infty}. \tag{1.44}$$

Введем новую переменную $x = \lambda r$, тогда

$$\frac{dR}{dr} = \lambda \frac{dR}{dx}, \qquad \frac{d^2 R}{dr^2} = \lambda^2 \frac{d^2 R}{dx^2},$$

и уравнение (1.43) приводится к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0$$

с общим решением в переменной r

$$R = C_n J_n(\lambda r) + D_n N_n(\lambda r).$$

Цилиндрическая функция $J_n(x)$ ограничена в окрестности $x = 0$, функция $N_n(x)$ не ограничена на $[0, r_0]$. Для выполнения условия $|R(0)| < \infty$ положим $D_n = 0$. Полагая $C_n = 1$, найдём собственные значения и собственные функции

$$\lambda = \lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}, \qquad R_{k,n}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right). \tag{1.45}$$

Собственные значения и собственные функции исходной задачи соответственно равны

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{r_0},\ v_{k,n}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\left\{\begin{array}{l}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{array}\right. \ n = \overline{0, \infty}, k = \overline{1, \infty}.$$

Замечание 1. Пользуясь методом решения задачи (1.39), (1.40), можно построить решение смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right], \qquad 0 \le r \le r_0,\ t > 0,$$

$$u\Big|_{r=r_0} = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$u\Big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r, \varphi).$$

Замечание 2. Задача Штурма—Лиувилля для уравнения Бесселя

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r}R + \lambda^2 r R = 0,$$

$$|R(0)| < \infty, \qquad R'(r_0) = 0$$

решается аналогично. Её собственные значения и собственные функции выражаются формулами (1.45) при условии, что под $\mu_k^{(n)}$, $k = \overline{1, \infty}$, следует понимать положительные корни уравнения

$$J'(x) = 0.$$

Собственные функции будут ортогональны с весом r и имеют квадрат нормы

$$\int_0^{r_0} r J_n^2\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) dr = \frac{r_0^2}{2}\left[1 - \frac{n^2}{\left(\mu_k^{(n)}\right)^2}\right] J_n\left(\mu_k^{(n)}\right).$$

2 Классические ортогональные полиномы

2.1 Полиномы Лежандра

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big] + \lambda y = 0, \quad -1 \le x \le 1, \tag{2.1}$$

$$\big|y(-1)\big| < \infty, \quad \big|y(1)\big| < \infty. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) называется *дифференциальным уравнением Лежандра*.

Будем искать решение уравнения (2.1) в окрестности $x = 0$ в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{2.3}$$

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1), после очевидных преобразований получим тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda - k^2 - k)a_k\Big]x^k = 0,$$

из которого

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda - k^2 - k)a_k = 0, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Итак, справедлива рекуррентная формула

$$a_{k+2} = -\frac{\lambda - k^2 - k}{(k+2)(k+1)}a_k, \tag{2.4}$$

позволяющая выразить все чётные коэффициенты через коэффициент a_0, а все нечётные коэффициенты — через a_1. При $a_0 \ne 0$, $a_1 = 0$ получим частное решение, содержащее только чётные степени x

$$y_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}\, x^{2p}, \tag{2.5}$$

при $a_0 = 0, a_1 \ne 0$ — частное решение, содержащее только нечётные степени x

$$y_2(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}\, x^{2p+1}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что ряды для $y_1(x)$ и $y_2(x)$ сходятся на отрезке $[-1;1]$. Если $\lambda = n(n+1)$, то $|y(-1)| < \infty$, $|y(1)| < \infty$. Действительно, принимая во внимание рекуррентную формулу (2.4), при $\lambda = n(n+1)$ получим

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \ldots = a_{n+2p} = \ldots = 0,$$

то есть один из рядов (2.5) или (2.6) обрывается и представляет собой многочлен степени n

$$y(x) = P_n(x), \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Найденные многочлены являются собственными функциями задачи (2.1), (2.2). Они называются *многочленами или полиномами Лежандра.* Рассмотрим некоторые свойства этих многочленов.

1. Полиномы Лежандра ортогональны на отрезке [0; 1] с весом $p(x) = 1$, то есть

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

Действительно, согласно уравнению Лежандра справедливы тождества:

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\Big] + n(n+1)P_n(x) \equiv 0,$$
$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\Big] + m(m+1)P_m(x) \equiv 0.$$

Умножив первое из них на $P_m(x)$, второе — на $P_n(x)$, вычитая полученные результаты один из другого и проинтегрировав разность по отрезку [−1; 1], получим

$$\int\limits_{-1}^{1} \left\{ P_m \frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\Big] - P_n \frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dP_m}{dx}\Big] \right\} dx =$$
$$= \big[m(m+1) - n(n+1)\big] \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx$$

или

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2)\Big[\frac{dP_n}{dx}P_m - \frac{dP_m}{dx}P_n\Big] \right\} dx =$$
$$= (m-n)(m+n+1) \int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx,$$

следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx =$$

$$= \frac{1}{(m-n)(m+n+1)}\Big[(1-x^2)\Big(\frac{dP_n}{dx}P_m - \frac{dP_m}{dx}P_n\Big)\Big]\Big|_{-1}^{1} = 0$$

при $n \neq m$.

2. Полиномы Лежандра либо чётные, либо нечётные функции.

3. Для полиномов Лежандра справедлива формула Родриго

$$P_n(x) = C\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \tag{2.7}$$

Действительно, введя функцию $u(x) = C(x^2-1)^n$, которая, очевидно, является решением дифференциального уравнения

$$(x^2-1)u' - 2nxu = 0,$$

и продифференцировав его $n+1$ раз, применяя формулу Лейбница для производной от произведения двух функций, получим равенство

$$\frac{d}{dx}\Big[(x^2-1)\frac{du^{(n)}}{dx}\Big] - n(n+1)u^{(n)} = 0,$$

из которого следует, что функция $u^{(n)}(x)$ есть решение уравнения Лежандра при $q = n(n+1)$, причём $u^{(n)}(x)$ — полином порядка n, совпадающий с многочленом Лежандра.

4. Полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n различных простых нулей внутри отрезка $[-1;\ 1]$.

Действительно, так как функция $u(x)$ имеет на концах отрезка $[-1;\ 1]$ нули кратности n, то, согласно теоремы Ролля, производная $u'(x)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале $(-1;\ 1)$. Последовательно применяя теорему Ролля, можно заключить, что $u''(x)$ имеет по крайней мере два различных нуля на интервале $(-1; 1)$, $\ldots$; $u^{(n)}(x)$ имеет по крайней мере n различных нулей на интервале $(-1; 1)$. Но, согласно известной теоремы алгебры, многочлен степени n имеет не более n нулей, следовательно, многочлен $u^{(n)}(x)$ имеет ровно n нулей на отрезке $[-1;\ 1]$ и все они простые.

5. Полагая в формуле (2.7) $C = \dfrac{1}{2^n \cdot n!}$, получим нормированные многочлены Лежандра

$$\overline{P}_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \tag{2.8}$$

Используя формулу (2.8), приведём явные выражения для первых пяти полиномов Лежандра:

$$\overline{P}_0(x) = 1, \qquad \overline{P}_1(x) = x, \qquad \overline{P}_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$
$$\overline{P}_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad \overline{P}_4(x) = \frac{1}{8}\big(35x^4 - 30x^2 + 3\big).$$

В дальнейшем под полиномами Лежандра будем понимать нормированные полиномы и черту в обозначениях не использовать.

Пусть $x = (r, \varphi, \theta)$, $\quad y = (0, 0, 1)$. Разложим функцию $\dfrac{1}{|x - y|}$ в ряд по степеням r:

$$\begin{gathered} \frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r\mathrm{e}^{i\varphi})(1 - r\mathrm{e}^{-i\varphi})}} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(\cos\theta)\; r^k. \end{gathered} \tag{2.9}$$

При $|r| < 1$, $0 \le \theta \le \pi$ ряд (2.9) сходится и его можно почленно дифференцировать по r и φ бесконечное число раз. Полученные ряды будут равномерно сходящимися по r и φ при $|r| \le r_0$, $0 \le \theta \le \pi$, где $r_0 < 1$. Учитывая гармоничность функции $\dfrac{1}{|x - y|}$ в шаре $|x| < 1$, принимая во внимание вид оператора Лапласа в сферической системе координат, то есть

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

имеем

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(a_k(\cos\theta)) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k-2}\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\big(\sin\theta\frac{da_k}{d\theta}\big) + k(k+1)a_k\Big].$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{da_k}{d\theta}\Big) + k(k+1)a_k = 0$$

для любого $k = \overline{0, \infty}$. Это означает, что функции $a_k(\cos\theta)$ являются решениями уравнения (2.1), поэтому справедливо представление

$$a_k(\cos\theta) = C_k P_k(\cos\theta).$$

Таким образом, разложение (2.9) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(\cos\theta) r^k. \tag{2.10}$$

Положив в равенстве (2.10) $\theta = 0$ и учитывая, что $P_k(1) = 1$, получим

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k, \qquad |r| < r,$$

следовательно, $C_k = 1$ для любого $k = \overline{0, \infty}$.

Итак, справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k, \quad |r| < 1. \tag{2.11}$$

Функция $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}}$ называется *производящей функцией для полиномов Лежандра.*

Докажем справедливость двух рекуррентных соотношений:

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \tag{2.12}$$

$$(2k+1)P_k(x) = P'_{k+1}(x) - P'_{k-1}(x). \tag{2.13}$$

Для этого, дифференцируя тождество (2.1) по r и по x и умножая его на $1 - 2rx + r^2$, получим тождества

$$(x - r)\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k = (1 - 2rx + r^2)\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(x) r^{k-1},$$

$$r\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k = (1 - 2rx + r^2)\sum_{k=0}^{\infty} P'_k(x) r^k.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим соотношение (2.12) и соотношение

$$P_k(x) = P'_{k-1}(x) - 2xP'_k(x) + P'_{k+1}(x). \tag{2.14}$$

Продифференцировав равенство (2.12) и исключив из полученного соотношения и соотношения (2.14) произведение $xP'_k(x)$, получим равенство (2.13).

Заметим, что с помощью соотношения (2.12) и формул $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ можно определить все многочлены Лежандра, а формула (2.13) позволяет выразить интеграл $\int P_k(x)dx$ через многочлены $P_{k+1}(x)$ и $P_{k-1}(x)$.

$$6.\ \|P_k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_k^2(x)dx = \frac{2}{2k+1}. \tag{2.15}$$

Для доказательства формулы (2.15) один из множителей $P_k(x)$ подынтегральной функции, выразив через $P_{k-1}(x)$ и $P_{k-2}(x)$ по формуле (2.12), заменив в ней k на $k-1$, воспользовавшись ортогональностью полиномов P_k и P_{k-2}, получим

$$\|P_k\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_k\Big(\frac{2k-1}{k}xP_{k-1} - \frac{k-1}{k}P_{k-2}\Big)dx = \frac{2k-1}{k}\int\limits_{-1}^{1} xP_kP_{k-1}dx.$$

Выражая далее по формуле (2.12) произведение xP_k и учитывая ортогональность полиномов P_{k-1} и P_{k+1}, получим

$$\|P_k\|^2 = \frac{2k-1}{k}\int\limits_{-1}^{1} P_{k-1}\Big(\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1} + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}\Big)dx = \frac{2k-1}{2k+1}\|P_{k-1}\|^2,$$

следовательно,

$$\|P_k\|^2 = \frac{2k-1}{2k+1}\frac{2k-3}{2k-1}\dots\frac{1}{3}\|P_0\|^2 = \frac{2}{2k+1}.$$

7. $\|P_k\| \le 1$ при $|x| \le 1$.

8. Приведём без доказательства теорему о разложимости функции в ряд Фурье по полиномам Лежандра.

Теорема разложения. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1;1]$ функция $f(x)$ разложима в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по полиномам Лежандра

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(x), \quad \text{где} \quad f_k=\frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx, -$$

коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$.

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\Big[(1-x^2)\frac{dz}{dx}\Big]+\Big(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\Big)z=0, \tag{2.16}$$

$$\big|z(-1)\big|<\infty, \quad \big|z(1)\big|<\infty. \tag{2.17}$$

Собственные функции задачи (2.16), (2.17) называются присоединенными функциями Лежандра. В уравнении (2.16) $m \in \mathbf{N}$ — параметр, поэтому задача (2.16), (2.17) представляет собой семейство задач Штурма—Лиувилля. При $m=0$ задача (2.16), (2.17) совпадает с рассмотренной задачей (2.1), (2.2).

Покажем, что собственные функции задачи (2.16), (2.17) выражаются через полиномы Лежандра.

С этой целью произведём в уравнении (2.16) замену

$$z(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}Z(x).$$

Тогда получим уравнение относительно функции $Z(x)$

$$(1-x^2)Z''(x)-2x(m+1)Z'+(\ \lambda-m(m+1)\ )Z=0. \tag{2.18}$$

Заметим, что такое же уравнение получилось бы из уравнения Лежандра при дифференцировании его m раз с учетом формулы Лейбница, поэтому ограниченным на отрезке $[-1;\ 1]$ решением уравнения (2.18) при $\lambda=k(k+1)$ будет функция

$$Z(x)=\frac{d^m}{dx^m}P_k(x),$$

где $P_k(x)$ — полином Лежандра. Соответственно ограниченное на отрезке $[-1;\ 1]$ решение уравнения (2.16), то есть собственная функция задачи (2.16), (2.17) при $\lambda=k(k+1)$, а, следовательно, и присоединенная функция Лежандра, $P_k^{(m)}$ имеет вид

$$Z(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_k(x)\overset{def}{=}P_k^m(x). \tag{2.19}$$

Итак, установлено, что собственные функции задачи (2.16), (2.17) выражаются через полиномы Лежандра, а собственные значения этой задачи совпадают с собственными значениями задачи (2.1), (2.2).

2.2 Применение полиномов Лежандра к решению краевых задач

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\left(l^2 - r^2\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{2.20}$$

$$u\Big|_{r=0} = 0, \tag{2.21}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{2.22}$$

Действуя по схеме метода разделения переменных, положим

$$u(R,t) = R(r)T(t).$$

После разделения переменных получим

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left[\left[l^2 - r^2\right]\frac{\partial r}{\partial r}\right] = -\lambda. \tag{2.23}$$

В точке $r = l$ коэффициент $k(r) = l^2 - r^2$ обращается в нуль, и задача Штурма—Лиувилля $R(r)$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dr}\left[\left(l^2 - r^2\right)\frac{\partial R}{\partial r}\right] + \lambda R = 0, \tag{2.24}$$

$$R(0) = 0, \qquad |R(l)| < \infty. \tag{2.25}$$

Полагая $r = xl$, $\dfrac{dR}{dr} = \dfrac{1}{l}\dfrac{dR}{dx}$, перейдем от уравнения (2.24) к уравнению Лежандра на отрезке $[-1;1]$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1 - x^2\right)\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \lambda R = 0.$$

Это уравнение имеет ограниченные решения на отрезке $[-1,1]$, если $\lambda = n(n+1)$, и этими ограниченными решениями являются многочлены Лежандра $\overline{P}_n(x)$. На левом конце отрезка собственные функции должны быть равны нулю. Следовательно, в решении необходимо учесть только многочлены Лежандра нечетной степени, поэтому

$$\lambda_n = 2n(2n-1), \quad R_n(r) = \overline{P}_{2n-1}\left(\frac{r}{l}\right), \quad n = \overline{1,\infty}. \tag{2.26}$$

Итак, решение поставленной задачи представляется в виде ряда

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\sqrt{2n(2n-1)}at + B_n \sin\sqrt{2n(2n-1)}at\right]\overline{P}_{2n-1}\left(\frac{r}{l}\right).$$

Коэффициенты A_nи B_n определяются из требования выполнения начальных условий с учетом значения нормы:

$$A_n = \frac{4n-1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\overline{P}_{2n-1}\left(\frac{r}{l}\right)dr,$$

$$B_n = \frac{4n-1}{al\sqrt{2n(2n-1)}}\int\limits_0^l \varphi(x)\overline{P}_{2n-1}\left(\frac{r}{l}\right)dr.$$

3 Сферические функции

3.1 Определение и простейшие свойства сферических функций

Рассмотрим следующую задачу Штурма—Лиувилля на единичной сфере:

$$\Delta_{\vartheta\varphi}Y + \lambda Y = 0, \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{3.1}$$

$$Y(\vartheta,\varphi) = Y(\vartheta,\varphi+2\pi), \tag{3.2}$$

$$|Y(0,\varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < \infty, \tag{3.3}$$

где $\Delta_{\vartheta\varphi}$— угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат, имеющая вид

$$\Delta_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{3.4}$$

Определение. Ограниченные на единичной сфере решения уравнения (3.1), удовлетворяющие условию периодичности по φ и обладающие непрерывными производными до второго порядка, называются *сферическими функциями.*

Решение задачи (3.1)–(3.3) будем искать методом разделения переменных в виде

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в уравнение (3.1), получим для $\Phi(\varphi)$ задачу

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \qquad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \tag{3.6}$$

которая имеет нетривиальное решение при $\nu = m^2$ вида

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots .$$

Для функции $\Theta(\vartheta)$ получаем задачу

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Theta}{\partial\vartheta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0, \\ 0 < \vartheta < \pi, \qquad |\Theta(0)| < \infty, \qquad |\Theta(\pi)| < \infty. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Если сделать замену $x = \cos\vartheta$, $y(x) = y(\cos\vartheta) = \theta(\vartheta)$, то задача (3.7) принимает вид

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\tfrac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \tfrac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0, \\ -1 < x < 1, \qquad |y(\pm 1)| < \infty. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Задача (3.8) является задачей Штурма—Лиувилля для присоединенных функций Лежандра. Поэтому собственные значения имеют вид

$$\lambda_n = n(n+1),$$

а собственные функции $\theta_{nm}(\vartheta) = y_{nm}(\cos\vartheta) = P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$, причём $m \leq$ $\leq n$.

Выпишем систему сферических функций n-ого порядка:

$$Y_n^{(m)}(\vartheta, \phi) = P_n^{(|m|)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \qquad (-n \leq m \leq n). \tag{3.9}$$

Собственные функции задачи (3.6) можно записать в тригонометрическом виде:

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \sin m\varphi, \\ \cos m\varphi, \end{cases} \qquad m = \overline{0, n}.$$

В этом случае систему сферических функций, условившись, что положительный верхний индекс m функции $Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi)$ соответствует умножению на $\sin m\varphi$, а отрицательный — на $\cos m\varphi$, можно записать в виде

$$\begin{gathered} Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\sin m\varphi, \\ Y_n^{(-m)}(\vartheta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\vartheta)\cos m\varphi, \qquad m = \overline{0, n}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Учитывая полноту системы тригонометрических функций и системы присоединенных уравнений Лежандра, можно утверждать справедливость следующей теоремы.

Теорема *(о полноте сферических функций)*

Система сферических функций полна на единичной сфере

$\Sigma : \{0 \le \vartheta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.

Вследствие общих свойств собственных функций сферические функции ортогональны на единичной сфере (для функций вида (3.10)):

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{(m_1)}(\vartheta,\varphi)Y_{n_2}^{(m_2)}(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 0$$

при $n_1 \ne n_2, m_1 \ne m_2$.

Для доказательства рассмотрим сферические функции разных порядков. Пусть $Y_{n_1}^{m_1}(\theta,\varphi)$ и $Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)$ $(k \ne m)$ — две такие функции. Функции

$$u_{n1} = r^k Y_{n_1}^{m_1}(\theta\varphi) \qquad \text{и} \qquad u_{n2} = r^m Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)$$

гармоничны в любой ограниченной окрестности начала координат. Действительно, они регулярны в любой конечной области и удовлетворяют уравнению Лапласа, поэтому вследствие формулы Грина

$$\iint_\Sigma \left(u_{n_1}\frac{\partial u_{n_2}}{\partial n} - u_{n_2}\frac{\partial u_{n_1}}{\partial n}\right)dS = 0. \tag{3.11}$$

В данном случае дифференцирование по нормали к поверхности $\sum$ совпадает с дифференцированием по r, т. е. $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$. Поэтому

$$\iint_\Sigma \left(u_{n_1}\frac{\partial u_{n_2}}{\partial n} - u_{n_2}\frac{\partial u_{n_1}}{\partial n}\right)dS = \frac{1}{r}\iint_\Sigma (n_1 u_{n_2}u_{n_1} - n_2 u_{n_2}u_{n_1})\,dS =$$

$$= \frac{n_1 - n_2}{r}\iint_\Sigma u_{n_2}u_{n_1}dS = (n_1 - n_2)r^{n_1+n_2-1}\iint_\Sigma Y_{n_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)dS = 0,$$

а так как $n_1 \ne n_2, m_1 \ne m_2$, то

$$\iint_\Sigma Y_{n_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)dS = 0, \qquad (m \ne k). \tag{3.12}$$

Переходя к сферическим функциям (3.10) одного порядка, можно заметить, что интеграл по поверхности Σ можно представить в виде повторного интеграла, содержащего интегрирование по φ в пределах от 0 до 2π. Но в функции (3.10) одного порядка угол φ входит посредством множителей

$$1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \ \ldots, \cos n\varphi, \sin n\varphi, \tag{3.13}$$

образующих в промежутке $(0, 2\pi)$ ортогональную систему. Поэтому интеграл в пределах от 0 до 2π от произведения любой пары из них равен нулю. Следовательно, равен нулю и интеграл по Σ.

Укажем часто используемые при решении краевых задач выражения для интеграла от квадрата сферических функций:

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{\Sigma} [P_n(\cos\theta)]^2\, dS = \frac{4\pi r^2}{2\pi+1}, \\ &\iint\limits_{\Sigma} [P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi]^2\, dS = \iint\limits_{\Sigma} [P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi]^2\, dS = \\ &= \frac{2\pi r^2}{2\pi+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

где r — радиус шаровой поверхности Σ.

Установим интегральные формулы, содержащие произвольную сферическую функцию и полином Лежандра.

Пусть Σ, как и выше, шаровая поверхность с центром в начале координат, а $x(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ — точка внутри Σ. Представив гармоническую функцию как

$$u_n(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n^m(\theta, \varphi),$$

получим

$$u_n(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u_n}{\partial n} - u_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right] dS, \tag{3.15}$$

где R — расстояние между точкой x и переменной точкой $\xi(R, \theta, \varphi)$ на Σ. В рассматриваемом случае:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}, \qquad R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma}, \tag{3.16}$$

где γ — переменный угол между радиус-векторами точек x и ξ.

Разложим функцию $\dfrac{1}{R}$ в равномерно сходящийся ряд:

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_0^k}{r^{k+1}}P_k(\cos\gamma), \qquad (r_0 < r) \tag{3.17}$$

и заметим, что на сфере Σ

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} r^n Y_n(\theta\varphi) = n r^{n-1} Y_n(\theta, \varphi),$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{r_0^k}{r^{k+2}}P_k(\cos\gamma). \tag{3.18}$$

Вследствие этих соотношений

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u_n}{\partial n} - u_n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = n r^n Y_n^m(\theta, \varphi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_0^k}{r^{k+2}}P_k(\cos\gamma) +$$
$$+ r^n Y_n^m(\theta, \varphi)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{r_0^k}{r^{k+2}}P_k(\cos\gamma) = \tag{3.19}$$
$$= r^{n-2} Y_n^m(\theta, \varphi)\sum_{k=0}^{\infty}(n+k+1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^k P_k(\cos\gamma).$$

Подставив это выражение в формулу Грина, получим

$$u_n(r_0, \theta_0, \varphi_0) = r_0^n Y_n(\theta_0, \varphi_0) =$$
$$= \frac{r^n}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\sum_{k=0}^{\infty}(n+k+1)\left(\frac{r_0}{R}\right)^k Y_n^m(\theta, \varphi) P_k(\cos\gamma)\frac{dS}{R^2}. \tag{3.20}$$

Интегрируя почленно равномерно сходящийся рад в правой чисти этого соотношения, придём к ряду

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^n Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) = \sum_{k=0}^{\infty}{}_k\left(\frac{r_0}{r}\right)^k, \tag{3.21}$$

коэффициенты которого

$$C_k = \frac{n+k+1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} Y_n^m(\theta, \varphi) P_k(\cos\gamma)\frac{dS}{r^2} \tag{3.22}$$

не зависят ни от r_0, ни от r, поскольку отношение $\dfrac{dS}{r^2}$ остаётся инвариантным при изменении r. Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях отношений $\dfrac{r_0}{r}$ в ряде (3.21) и приняв во внимание формулу (3.22), придём к формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{\Sigma} Y_n^m(\theta, \varphi) P_k(\cos\gamma)\,dS = 0, \qquad (n \neq k), \\ &\iint\limits_{\Sigma} Y_n^m(\theta, \varphi) P_n(\cos\gamma)\,dS = \frac{4\pi r^2}{2n+1} Y_n^m(\theta_0, \varphi_0). \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Из теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Система сферических функций замкнута.

Следствие 2. Система сферических функций исчерпывает все собственные функции задачи Штурма—Лиувилля (3.1)–(3.3). Каждому собственному значению $\lambda_n = n(n+1)$ соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций, т. е. каждое собственное значение является $(2n+1)$ – кратно вырожденным.

Для сферических функций справедлива теорема разложимости Стеклова.

Теорема (*разложение по сферическим функциям*)

Если $f(\theta, \varphi)$ — функция, имеющая ограниченное изменение на шаровой поверхности Σ единичного радиуса и абсолютно интегрируема на Σ, то в точках непрерывности она может быть разложена в равномерно сходящийся рад по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^m(\theta, \varphi). \tag{3.24}$$

Этот ряд иногда называют рядом Лапласа.

При доказательстве существования разложения (3.24) будем использовать теорему о разложении в ряд по полиномам Лежандра: если в промежутке $0 \leq \gamma \leq \pi$ функция $\psi(\gamma) \sin\gamma$ абсолютно интегрируема по γ, а функция $\psi(\gamma)$ имеет ограниченное изменение, то в любом интервале, лежащем внутри рассматриваемого промежутка и являющемся интервалом непрерывности функции $\psi(\gamma)$, эта последняя функция $\psi(y)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по полиномам Лежандра:

$$\psi(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\gamma),$$

где

$$a_n = \frac{2k+1}{2} \int_0^{\pi} \psi(\gamma') P_n(\cos\gamma') \sin\gamma' d\gamma'.$$

Обозначим через θ', φ' координаты переменной точки на Σ, а через γ — угол между радиусами, проведенными из центра шаровой поверхности в точки (θ', φ') и (θ, φ).

Предположим сначала, что ряд (3.24) сходится и его можно почленно интегрировать. Умножив этот ряд на полином Лежандра $P_k(\cos\gamma)$ и интегрируя по Σ, вследствие соотношений ортогональности получим

$$\iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) dS = \sum_{n=0}^{\infty} \iint\limits_{\Sigma} Y_k(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) dS = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^m(\theta, \varphi),$$

откуда

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} f(\theta', \varphi') P_n(\cos\gamma) dS. \tag{3.25}$$

Введём новые сферические координаты (γ, ω) с полюсом в точке (θ, φ). Заметив, что

$$dS = \sin\gamma \, d\gamma \, d\omega,$$

перепишем соотношение (3.25) в виде

$$\begin{aligned} Y_n^m = \frac{2n+1}{2} \int\limits_0^{\pi} P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\gamma, \omega) \, d\omega = \\ = \frac{2n+1}{2} \int\limits_0^{\pi} \Phi(\gamma) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\gamma, \omega) \, d\omega \, -$$

среднее значение функции $f(\theta', \varphi')$ на окружности $\gamma = \text{const}$ с центром в точке (θ, φ).

Функция $\Phi(\gamma)$ имеет ограниченное изменение и абсолютно интегрируема, когда $0 \leq \gamma \leq \pi$. В самом деле, функция $f(\theta, \varphi)$ обладает этими свойствами по предположению; при усреднении же они, очевидно, сохраняются. Кроме того, функция $\Phi(\gamma)$ непрерывна в окрестности точки $\gamma = 0$, так как функция f непрерывна при $\gamma = 0$. Следовательно, в точке $\gamma = 0$ функция $\Phi(\gamma)$ может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$\Phi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int\limits_0^{\pi} \Phi(\gamma) P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma. \tag{3.27}$$

Здесь учтено, что $P_n(1) = 1$. Но согласно формуле (3.26), ряд в правой части формулы (3.27) равен $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n^m$, где значения Y_k^m определены соотношением (3.25). С другой стороны, вследствие непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$ в точке (θ, φ) для любого заданного положительного числа ε можно указать такое зависящее только от ξ число η, что при любом ω

$$|f(\gamma, \omega) - f(\theta, \varphi)| < \varepsilon, \qquad \text{когда} \qquad \gamma < \eta, \qquad 0 \leq \omega \leq 2\pi.$$

Так как значение $|\Phi(\gamma)|$ лежит между наибольшим и наименьшим значениями величины $|f(\gamma, \omega)|$ на окружности $\gamma = \mathrm{const}$, то из предыдущего неравенства следует, что при $\gamma < \eta$

$$|\Phi(\gamma) - f(\theta, \varphi)| < \varepsilon.$$

Поскольку число ε сколь угодно мало, то

$$\Phi(0) = f(\theta, \varphi).$$

Подставив полученные выражения в соотношение (3.27), получим разложение вида (3.24), что завершает доказательство.

Так как любая сферическая функция может быть представлена в виде линейной комбинации линейно – независимых ортогональных сферических функций, образующих систему (3.10), из доказанной теоремы вытекает полнота этой последней системы.

Представив каждую из сферических функций $Y_k(\theta, \varphi)$ в виде линейной формы от сферических функций системы (3.10)

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = a_{0k} P_n^m(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{m} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta) \tag{3.28}$$

и подставив эти выражения в соотношение (3.24), получим разложение произвольной функции $f(\theta, \varphi)$ по системе сферических функций (3.13):

$$f(\theta, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{0n} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{k} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta) \right\}. \tag{3.29}$$

Можно проверить с помощью формул (3.14), что коэффициенты ряда (3.29) определяются следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} a_{0n} &= \frac{2n+1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta',\varphi')P_n^m(\cos\gamma)\,dS,\\ a_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta',\varphi')P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi'\,dS,\\ b_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\iint\limits_{\Sigma} f(\theta',\varphi')P_n^m(\cos\theta')\sin m\varphi'\,dS. \end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

3.2 Шаровые функции

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре радиуса a:

$$\Delta u = 0. \qquad (3.31)$$

Найдём решение уравнения (3.31) методом разделения переменных, отделяя прежде всего радиальную зависимость:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = R(r)Y(\vartheta,\varphi). \qquad (3.32)$$

Подставляя (3.32) в (3.31) и разделяя переменные, получим

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)} \equiv -\frac{\Delta_{\vartheta\varphi}Y}{Y(\vartheta,\varphi)}. \qquad (3.33)$$

Учитывая, что из рассмотренной в предыдущем параграфе задачи Штурма—Лиувилля для сферических функций вытекает

$$\frac{\Delta_{\vartheta\varphi}Y}{Y(\vartheta,\varphi)} = -n(n+1), \qquad (3.34)$$

получим из (3.33) и (3.34) уравнение для радиальной части

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0. \qquad (3.35)$$

Последнее уравнение является уравнением Эйлера, решение которого ищется в виде

$$R(r) = r^{\sigma}. \qquad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в (3.35) и сокращая на r^{σ}, получим характеристическое уравнение

$$\sigma(\sigma+1) - n(n+1) = 0,$$

решения которого $\sigma = n$ и $\sigma = -(n+1)$. Таким образом, получим два семейства частных решений для уравнения Лапласа

$$u_{nm}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\vartheta,\varphi), \\ r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\vartheta,\varphi). \end{cases} \tag{3.37}$$

Определение. Функции $u_{nm}(r,\vartheta,\varphi)$, определяемые формулой (3.37) и являющиеся частными решениями уравнения Лапласа в сферической системе координат, называются шаровыми функциями.

Функции $r^n Y_n^{(m)}(\vartheta,\varphi)$, ограниченные в начале координат и растущие на бесконечности, используются для решения внутренней задачи, функции $r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\vartheta,\varphi)$, неограниченные в окрестности начала координат и стремящиеся к нулю на бесконечности, — для решения внешней задачи.

3.3 Собственные функции шара

Построим собственные функции шара K_a. Введём сферическую систему координат (r,ϑ,φ), $0 \le r \le a$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ с началом в центре шара. Оператор Лапласа в сферической системе имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta\varphi} u,$$

где

$$\Delta_{\vartheta\varphi} u = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} - \tag{3.38}$$

сферический оператор Лапласа. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля для шара

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad M \in K_a, \tag{3.39}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial r} + \beta u\right)\Bigg|_{r=a} = 0, \qquad u \ne 0. \tag{3.40}$$

Решение строим методом разделения переменных, отделяя радиальную переменную r:

$$u(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\nu(\vartheta,\varphi) \ne 0. \tag{3.41}$$

Подставляя (3.41) в уравнение (3.38), записанное в сферической системе координат, и разделяя переменные, получим

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \lambda r^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi\nu}}{\nu(\vartheta,\varphi)} = \mu. \tag{3.42}$$

Собственные функции должны быть ограничены в K_a и периодичны по φ с периодом 2π. Поэтому из (3.42) для функции Θ получаем задачу Штурма—Лиувилля

$$\Delta_{\theta\varphi}\nu + \mu\nu = 0, \qquad 0 < \vartheta < \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$\nu(\vartheta, \varphi) \equiv \nu(\vartheta, \varphi + 2\pi,$$
$$|\nu(0,\varphi)| < \infty, \qquad |\nu(\pi,\varphi)| < \infty, \qquad \nu(\vartheta,\varphi) \ne 0,$$

собственными функциями которых являются сферические функции

$$\nu = \nu_{nm}(\vartheta, \varphi) = Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi),$$

а собственные значения

$$\mu = \mu_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n.$$

Для каждого $\mu = n(n+1)$ из (3.42) получаем уравнение для $R(r)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R = 0, \tag{3.43}$$

решение которого, согласно (3.39), должно удовлетворять граничному условию

$$\left(\alpha\frac{dR}{dr} + \beta R\right)\bigg|_{r=a} = 0,$$

и естественному условию ограниченности

$$|R(0)| < \infty.$$

С помощью замены

$$R(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}}$$

задача для R приводится к задаче Штурма—Лиувилля

$$r^2y" + ry' + \left[\lambda r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]y = 0, \tag{3.44}$$

$$\left(\alpha y' + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a}\right)y\right)\bigg|_{r=a} = 0, \tag{3.45}$$

$$|y(0)| = 0. \tag{3.46}$$

Общее решение уравнения (3.44) имеет вид

$$y(r) = C_1 J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda r}) + C_2 N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda r}).$$

Учитывая поведение функций Неймана в нуле и условие ограниченности (3.46), получаем

$$C_2 = 0.$$

Пусть $C_1 = 1$. Для определения λ из (3.45) получаем дисперсионное уравнение

$$\alpha\sqrt{\lambda}J'_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) + \left(\beta - \frac{\alpha}{2a}\right) J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Пусть $\mu = a\sqrt{\lambda}$. Тогда функцию $R(r)$ можно записать в виде

$$R(r) = R_{nk}(r) = \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} r\right)}{\sqrt{r}}, \; n = 0, 1, \; \ldots, \; k = 1, 2, \; \ldots,$$

где $\mu_k^{(n+1/2)}$ — –й корень уравнения

$$\alpha\mu J'_{n+1/2}(\mu) + \left(\beta\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) J_{n+1/2}(\mu) = 0 \tag{3.47}$$

при фиксированном $n = 0, 1, \ldots$.

Таким образом, собственные функции шара имеют вид

$$\begin{gathered} u_{knm}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a} r\right) Y_n^{(m)}(\vartheta, \varphi), \\ k = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n, \end{gathered} \tag{3.48}$$

где

$$\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2 -$$

соответствующие собственные значения.

Заметим, что каждому собственному значению λ_{kn} соответствует $2n+1$ линейно независимых собственных функций ($\operatorname{rang} \lambda_{kn} = 2n+1$).

Найдём норму собственных функций:

$$\begin{gathered} \|u_{knm}\|^2 = \int\limits_{K_a} u_{knm}^2 d\nu = \int\limits_0^\alpha \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^\pi u_{knm}^2 r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \\ = \left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|^2 \cdot \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2, \end{gathered}$$

где

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\right\|^2 = \int\limits_0^a J_{n+1/2}^2\left(\sqrt{\lambda}r\right) r\,dr = \tag{3.49}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\left(J'_{n+1/2}\right)^2\left(a\sqrt{\lambda}\right) + \left(1 - \frac{(n+1/2)^2}{a^2\lambda}\right) J_{n+1/2}^2\left(a\sqrt{\lambda}\right)\right\}.$$

Рассмотрим отдельно первую, вторую и третью краевые задачи.

Для задачи Дирихле (α=0, β=1) собственные значения λ_{kn} определяются равенством

$$J_{n+1/2}(\mu) = 0, \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k^{(n+1/2)}}{a}\right)^2,$$

где $\mu_k^{(n+1/2)}$ — корни уравнения $J_{n+1/2}(\mu) = 0$.

Поэтому

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\right\|_1^2 = \frac{a^2}{2}(J'_{n+1/2})^2(\mu_k^{(n+1/2)}). \tag{3.50}$$

Для задачи Неймана ($\alpha = 1, \beta = 0$) собственные значения λ_{kn} определяются указанным выше равенством, где $\mu_k^{(n+1/2)}$ — корни уравнения

$$\mu'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2}\mu J_{n+1/2}(\mu) = 0.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\right\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left\{1 - \frac{n(n+1)}{\left[\mu_k^{(n+1/2)}\right]^2}\right\} J_{n+1/2}^2(\mu_k^{(n+1/2)}). \tag{3.51}$$

Для третьей краевой задачи ($\alpha = 1, \beta = h$) в выражении для собственных значений $\mu_k^{(n+1/2)}$ — корни уравнения

$$\mu'_{n+1/2}(\mu) + \left(ah - \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(\mu) = 0.$$

Квадрат нормы для третьей краевой задачи можно вычислить двумя способами:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\right\|^2 = \frac{a^2}{2}\left\{1 - \frac{n(n+1) + ah(1-ah)}{\left[\mu_k^{(n+1/2)}\right]^2}\right\} J_{n+1/2}^2(\mu) \tag{3.52}$$

или

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2} \right\|^2 = \frac{a^2}{2} \left\{ 1 + 4 \frac{\left[\mu_k^{(n+1/2)}\right]^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{(1 - 2ah)^2} \right\} (J'_{n+1/2})^2(\mu). \quad (3.53)$$

Формула (3.52) удобна для малых, а формула (3.53) — для больших значениях h.

3.4 Применение сферических функций к решению краевых задач

Рассмотрим приложение теории сферических функций к решению задач Дирихле и Неймана.

Пусть Σ — шаровая поверхность, определяемая в сферической системе координат R, θ, φ уравнением $R = R_0$ и $f(\theta, \varphi)$ — функция, заданная на Σ и разлагающаяся в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi). \quad (3.54)$$

Как известно, функция $\dfrac{Y_n(\theta, \varphi)}{R^{n+1}}$ гармоническая, а поэтому и отличающаяся от нее только постоянным множителем функция

$$\left(\frac{R_0}{R} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

гармонична в любой области, не содержащей точки $R = 0$. Поэтому функция

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta, \varphi) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{k+1}, \qquad (R_0 \le R)$$

гармонична вне шаровой поверхности Σ. Так как

$$u(R_0, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi),$$

то функция $u(r, \theta, \varphi)$ является решением внешней задачи Дирихле для области, лежащей вне шаровой поверхности Σ, при граничном условии $u\Big|_R = R_0 = f(\theta, \varphi)$.

По теореме Кельвина функция

$$u(R,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(\theta,\varphi)\left(\frac{R}{R_0}\right)^k,\qquad (R_0\geq R)$$

гармонична внутри Σ, поэтому представляет решение соответствующей внутренней задачи Дирихле при том же граничном условии.

Рассмотрим теперь функцию

$$u_1(R,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{R_0^2}{k+1}Y_k(\theta,\varphi)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{k+1},$$

гармоническую вне Σ. Направление нормали внутрь Σ примем за положительное. При этом $\dfrac{\partial}{\partial n}=-\dfrac{\partial}{\partial R}$, так что

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{R=R_0}=-\left.\frac{\partial u_1}{\partial R}\right|_{R=R_0}=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi).$$

Таким образом, функция $u_1(R,\theta,\varphi)$ является решением внешней задачи Неймана для области вне Σ при граничном условии $\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{R=R_0}=$ $=f(\theta,\varphi)$.

Внутренняя задача Неймана имеет решение только в том случае, если функция из граничного условия $f(\theta,\varphi)$ удовлетворяет соотношению

$$\iint\limits_{\Sigma}f(\theta',\varphi')\,dS=0. \tag{3.55}$$

Вследствие ортогональности сферических функций разного порядка

$$\iint\limits_{\Sigma}Y_k(\theta',\varphi')\,dS=\begin{cases}4\pi R_0^2Y_0, & \text{при } k=0,\\ 0, & \text{при } k\neq 0,\end{cases}$$

где Y_0 — постоянная. Следовательно, условие (3.55) выполняется, если в (3.54) $Y_0=0$, т. е. если

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(\theta,\varphi).$$

В этом случае функция

$$u(R,\theta,\varphi) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_0}{k} Y_k(\theta,\varphi) \left(\frac{R}{R_0}\right)^k, \qquad (R_0 \geq R),$$

где C — произвольная постоянная, разрешает внутреннюю задачу Неймана для шара при граничном условии $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{R=R_0} = f(\theta,\varphi)$. Действительно, функция $u(R,\theta,\varphi)$ гармонична внутри Σ, а ее нормальная производная на Σ совпадает с $f(\theta,\varphi)$ (нормаль к Σ считаем направленной по радиусу вне Σ).

4 Краевые задачи для уравнения Гельмгольца

Рассматривается метод разделения переменных решения краевых задач для уравнения Гельмгольца.

4.1 Частные решения уравнения Гельмгольца в полярной системе координат

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + cu = 0, \quad c = \mathrm{const} \tag{4.1}$$

в полярной системе координат (r,φ) и построим его решения, представимые в виде

$$u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi). \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в уравнение (4.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + cr^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда получаем уравнение для функции $R(r)$

$$r^2 R'' + rR' + (cr^2 - \lambda)R = 0 \tag{4.3}$$

и уравнение для функции $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

Поскольку переменная φ — циклическая, функция Φ должна быть периодической с периодом 2π. Следовательно, для определения $\Phi(\varphi)$ имеем задачу Штурма—Лиувилля с периодическим условием

$$\begin{aligned}
&\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\\
&\Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi) \qquad \varphi,\\
&\Phi(\varphi) \not\equiv 0.
\end{aligned}$$

Её решения имеют вид

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad \lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots, \infty.$$

Подставляя найденное значение λ_n в (4.3), получим

$$r^2R'' + rR' + (cr^2 - n^2)R = 0.$$

Рассмотрим отдельно случаи $c > 0$ и $c < 0$.

Пусть $c = k^2 > 0$. Общее решение уравнения

$$r^2R'' + rR' + (k^2r^2 - n^2)R = 0$$

можно записать в виде

$$R = R_n(r) = C_1J_n(kr) + C_2N_n(kr)$$

или в виде

$$R = R_n(r) = A_1H_n^{(1)}(kr) + A_2H_n^{(2)}(kr),$$

где $J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ — функции Бесселя, Неймана, Ханкеля первого и второго рода n-го порядка соответственно.

Таким образом, при $c = k^2$ уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2u = 0$$

имеет следующие серии решений

$$J_n(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$N_n(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$H_n^{(1)}(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$H_n^{(2)}(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi. \end{cases} \tag{4.7}$$

Решения

$$J_n(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

ограничены при $r = 0$, решения (4.5)–(4.7) при $r \to 0$ неограничены. При $r \to \infty$ решения

$$u_n^{(1)}(r,\varphi) = H_n^{(1)}(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

удовлетворяют условиям излучения вида

$$\frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial r} - iku_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

а решения

$$u_n^{(2)}(r,\varphi) = H_n^{(2)}(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases}$$

удовлетворяют условиям излучения вида

$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial r} + iku_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Рассмотрим случай $c = -\varkappa^2 < 0$. Общее решение уравнения

$$r^2R'' + rR' - (\varkappa^2 r^2 + n^2)R = 0$$

можно записать в виде

$$R = R_n(r) = C_1 I_n(\varkappa r) + C_2 K_n(\varkappa r),$$

где $I_n(x)$, $K_n(x)$ — функции Инфельда и Макдональда n-го порядка соответственно. Следовательно, уравнение

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0$$

на плоскости имеет следующие серии решений:

$$I_n(\varkappa r)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad K_n(\varkappa r)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

причём решения

$$I_n(\varkappa r)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, \infty \tag{4.8}$$

ограничены при $r = 0$ и неограниченно возрастают при $n \to \infty$, а решения

$$K_n(\varkappa r)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad n = 0, 1, \ldots, \infty \tag{4.9}$$

неограничены при $r = 0$ и равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$.

4.2 Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в круговом кольце

Пусть D — круговое кольцо: $a < r < b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad (r, \varphi) \in D, \tag{4.10}$$

$$u\big|_{r=a} = f_1(\varphi), \tag{4.11}$$

$$u\big|_{r=b} = f_2(\varphi). \tag{4.12}$$

Построенные ранее системы частных решений (4.4)–(4.7) ограничены в D. Для решения поставленной задачи используем системы вещественных решений

$$J_n(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \qquad N_n(kr)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi. \end{cases}$$

Из этих систем построим две другие системы, одна из которых удовлетворяет однородному условию при $r = a$, а другая однородному условию при $r = b$. Такими системами являются

$$u_n^{(a)}(r, \varphi) = R_n^{(a)}(r)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases} \tag{4.13}$$

и

$$u_n^{(b)}(r, \varphi) = R_n^{(b)}(r)\begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \tag{4.14}$$

где

$$R_n^{(a)}(r) = J_n(kr)N_n(ka) - J_n(ka)N_n(kr),$$
$$R_n^{(b)}(r) = J_n(kr)N_n(kb) - J_n(ka)N_n(kr),$$
$$u_n^{(a)}\big|_{r=a} = 0, \qquad u_n^{(b)}\big|_{r=b} = 0.$$

Решение краевой задачи (4.10)–(4.12) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} \left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в граничное условие (4.11) и разлагая $f_1(\varphi)$ в тригонометрический ряд, получим, учитывая, что $R_n^{(a)} = 0$, соотношения

$$C_n = f_{1n}^{(c)}, \qquad D_n = f_{1n}^{(s)}, \tag{4.16}$$

где $f_{1n}^{(c)}$, $f_{1n}^{(s)}$ — коэффициенты Фурье функции $f_1(\varphi)$.

Аналогично из граничного условия (4.12) получим

$$A_n = f_{2n}^{(c)}, \qquad B_n = f_{2n}^{(s)}, \tag{4.17}$$

где $f_{2n}^{(c)}$, $f_{2n}^{(s)}$ — коэффициенты Фурье функции $f_2(\varphi)$.

Разрешимость краевой задачи (4.10)–(4.12) исследуется аналогично разрешимости краевой задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри круга. Поэтому здесь укажем лишь окончательный результат.

Если k^2 не является собственным значением задачи Штурма — Лиувилля для кольца

$$\begin{gathered} \Delta u + \lambda u = 0, \qquad (r,\varphi) \in D, \\ u\big|_{r=a} = 0, \qquad u\big|_{r=b} = 0, \qquad u \not\equiv 0, \end{gathered} \tag{4.18}$$

то $R_n^{(a)}(b) \neq 0$ и $R_n^{(b)}(a) \neq 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots \infty$, все коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n однозначно определяются из (4.16) и (4.17). Краевая задача (4.10)–(4.12) имеет при этом единственное решение, которое представляется формулой

$$\begin{gathered} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} \left(f_{2n}^{(c)} \cos n\varphi + f_{2n}^{(s)} \sin n\varphi \right) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} \left(f_{1n}^{(c)} \cos n\varphi + f_{1n}^{(s)} \sin n\varphi \right). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Если k^2 является собственным значением задачи (4.18), то краевая задача (4.10)–(4.12) либо не имеет решения, либо решение существует, но не единственно. В этом случае при некотором целом значении $n = n_0$

$$R_{n_0}^{(a)}(b) = R_{n_0}^{(b)}(a) = 0, \quad k^2 = \lambda_m^{(n_0)}.$$

Если хотя бы один из коэффициентов Фурье $f_{1n_0}^{(c)}$, $f_{1n_0}^{(s)}$, $f_{2n_0}^{(c)}$, $f_{2n_0}^{(s)}$ не равен нулю, то исходная краевая задача (1.10)–(1.12) не имеет решения. Условием разрешимости при $k^2 = \lambda_m^{(n_0)}$ является требование

$$f_{1n_0}^{(c)} = f_{1n_0}^{(s)} = f_{2n_0}^{(c)} = f_{2n_0}^{(s)} = 0.$$

Решение при этом имеет вид

$$u = \sum_{n \neq n_0} \left[\frac{R_n^{(a)}(r)}{R_n^{(a)}(b)} \left(f_{2n}^{(c)} \cos n\varphi + f_{2n}^{(s)} \sin n\varphi \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{R_n^{(b)}(r)}{R_n^{(b)}(a)} \left(f_{1n}^{(c)} \cos n\varphi + f_{1n}^{(s)} \sin n\varphi \right) \right] +$$
$$+ R_{n_0}^{(a)}(r) \left(A_{n_0} \cos n_0\varphi + B_{n_0} \sin n_0\varphi \right) + R_{n_0}^{(b)}(r) \left(C_{n_0} \cos n_0\varphi + D_{n_0} \sin n_0\varphi \right),$$

где A_{n_0}, B_{n_0}, C_{n_0}, D_{n_0} — произвольные постоянные.

Аналогично решаются и другие краевые задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри кругового кольца.

4.3 Частные решения уравнения Гельмгольца в сферической системе координат

При решении краевых задач для уравнения Гельмгольца внутри шара, вне шара и в шаровом слое необходимо построить частные решения уравнения

$$\Delta u + cu = 0, \qquad c = \text{const}$$

в сферической системе координат (r, θ, φ), представимые в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) v(\theta, \varphi).$$

Подставляя искомый вид решения в уравнение Гельмгольца и разделяя переменные, получим

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr} \right) + cr^2 R}{R(r)} \equiv -\frac{\Delta_{\theta\varphi} v}{v(\theta, \varphi)} = \lambda,$$

где $\Delta_{\theta\varphi}$ — сферический оператор Лапласа. Отсюда получаем уравнение для $R(r)$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (cr^2 - \lambda) R = 0 \qquad (4.20)$$

и уравнение для функции $v(\theta, \varphi)$

$$\Delta_{\theta\varphi} v + \lambda v = 0. \qquad (4.21)$$

Решение уравнения (4.21) должно быть периодическим по φ с периодом 2π и ограниченным при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Это даёт задачу Штурма—Лиувилля

$$
\begin{gathered}
\Delta_{\theta\varphi} v + \lambda v = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \\
v(\theta,\, \varphi + 2\pi) \equiv v(\theta, \varphi) \qquad\quad \theta \quad \varphi, \\
\big|v(0,\, \varphi)\big| < \infty, \quad \big|v(\pi,\, \varphi)\big| < \infty, \quad v(\theta,\, \varphi) \not\equiv 0.
\end{gathered}
$$

Собственными значениями этой задачи являются $\lambda = \lambda_n = n(n+ +1), \quad n = 0, 1, \ldots, \infty$, а собственными функциями — сферические функции

$$
Y_n(m)(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases}
$$

Рассмотрим уравнение (4.20) при $\lambda = n(n+1)$

$$
r^2 R'' + 2rR' + (cr^2 - n(n+1))R = 0. \tag{4.22}
$$

Введём новую функцию $y(r)$ соотношением

$$
R(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}}.
$$

Тогда уравнение (4.22) примет вид

$$
r^2 y'' + ry' + \left[cr^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] y = 0. \tag{4.23}
$$

Рассмотрим отдельно случаи $c > 0$ и $c < 0$. Пусть $c = k^2 > 0$. Тогда общее решение уравнения (4.23) можно записать в виде

$$
y = C_1 J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + C_2 N_{n+\frac{1}{2}}(kr)
$$

или в виде

$$
y = A_1 H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) + A_2 H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr),
$$

где $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функции Бесселя, Неймана, Ханкеля первого и второго рода порядка $(n + \dfrac{1}{2})$ соответственно.

Таким образом для уравнения

$$
\Delta u + k^2 u = 0
$$

построены четыре серии частных решений

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \tag{4.24}$$

$$\frac{H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \qquad \frac{H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \tag{4.25}$$

$$n = 0, 1, \ldots, \infty, \; m = 0, 1, \ldots, n.$$

Решения

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

ограничены при $r = 0$, решения остальных трёх серий неограничены при $r \to 0$.

Решения

$$u^{(1)}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{r}} H^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

удовлетворяют условию излучения вида

$$\frac{\partial u^{(1)}_{nm}}{\partial r} - iku^{(1)}_{nm} = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad r \to \infty,$$

а решение

$$u^{(2)}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$

удовлетворяет при $r \to \infty$ условию

$$\frac{\partial u^{(2)}_{nm}}{\partial r} + iku^{(2)}_{nm} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

При $c = -\varkappa^2 < 0$ уравнение (4.22) имеет вид

$$r^2 y'' + ry' - \left[\varkappa^2 r^2 + \big(n + \frac{1}{2}\big)^2\right] y = 0.$$

Его общее решение

$$y = C_1 I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r) + y = C_2 K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r),$$

где $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ и $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функции Инфельда и Макдональда порядка $(n + \dfrac{1}{2})$ соответственно.

Следовательно, для уравнения

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0$$

построены две серии частных решений:

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \quad \text{и} \quad \frac{K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r)}{\sqrt{r}} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$
$$n = 0, 1, \dots, \infty, \qquad m = 0, 1, \dots, n.$$

Решения

$$\frac{1}{\sqrt{r}} I_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \tag{4.26}$$

ограничены при $r = 0$ и неограниченно возрастают при $r \to \infty$, а решения

$$\frac{1}{\sqrt{r}} K_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \tag{4.27}$$

равномерно стремятся к нулю при $r \to \infty$ и неограничены при $r \to 0$.

4.4 Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в шаровом слое

Рассмотрим задачу

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad\qquad a < r < b, \tag{4.28}$$

$$P_1[u] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_1 u\Big|_{r=a} = f_1(\theta,\varphi), \qquad |\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0, \tag{4.29}$$

$$P_2[u] \equiv \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial r} - \beta_2 u\Big|_{r=b} = f_2(\theta,\varphi), \qquad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0 \tag{4.30}$$

Построим две серии частных решений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ так, что все решения одной серии удовлетворяют однородному граничному условию при $r = a$, а все решения второй серии — однородному граничному условию при $r = b$.

Итак, используя решение (4.24), построим решения, удовлетворяющие граничному условию

$$P_1[u_n^{(a)}] \equiv \alpha_1 \frac{\partial u_n^{(a)}}{\partial r} - \beta_1 u_n^{(a)}\Big|_{r=a} = 0.$$

Эти решения имеют вид

$$u_n^{(a)}(r,\theta,\varphi) = R_n^{(a)}(r) P_n(m)(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases}$$

где

$$R_n^{(b)}(r) = \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} q_2(k,b) - \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} p_2(k,b),$$
$$q_2(k,b) = \alpha_2 k N'_{n+\frac{1}{2}}(kb) + [\beta_2 - \frac{\alpha_2}{2b}] N_{n+\frac{1}{2}}(kb),$$
$$p_2(k,b) = \alpha_2 k J'_{n+\frac{1}{2}}(kb) + [\beta_2 - \frac{\alpha_2}{2b}] J_{n+\frac{1}{2}}(kb).$$

Решение краевой задачи (4.28)–(4.30) запишем в виде разложения по этим решениям:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} R_n^{(a)}(r) P_n^{(m)}(\cos\theta)(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} R_n^{(b)}(r) P_n^{(m)}(\cos\theta)(C_{nm}\cos m\varphi + D_{nm}\sin m\varphi).$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются из граничного условия при $r = b$, коэффициенты C_{nm} и D_{nm} — из граничного условия при $r = a$.

Если k^2 не является собственным значением соответствующей задачи Штурма—Лиувилля для шарового слоя, то все коэффициенты определяются однозначно из граничных условий и решение имеет вид

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R_n^{(a)}(r)}{P_2[R_n^{(a)}(b)]} P_n^{(m)}(\cos\theta)(f_{2nm}^{(c)}\cos m\varphi + f_{2nm}^{(s)}\sin m\varphi) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R_n^{(b)}(r)}{P_1[R_n^{(b)}(a)]} P_n^{(m)}(\cos\theta)(f_{1nm}^{(c)}\cos m\varphi + f_{1nm}^{(s)}\sin m\varphi),$$

где $f_{1nm}^{(c)}$, $f_{1nm}^{(s)}$, $f_{2nm}^{(c)}$, $f_{2nm}^{(s)}$ — коэффициенты Фурье функций $f_1(\theta,\varphi)$, $f_2(\theta,\varphi)$ соответственно при разложении их по системе сферических функций. Формулы для их вычисления аналогичны соответствующим формулам решения краевой задачи внутри шара.

Если $k^2 = \lambda_{n_0}^{(i)}$, где $\lambda_{n_0}^{(i)}$ — собственное значение соответствующей задачи Штурма—Лиувилля для шарового слоя и хотя бы один из коэффициентов $f_{1n_0m}^{(c)}$, $f_{1n_0m}^{(s)}$, $f_{2n_0m}^{(c)}$, $f_{2n_0m}^{(s)}$ отличен от нуля, то поставленная задача (4.28)–(4.30) решения не имеет.

Если $k^2 = \lambda_{n_0}^{(i)}$ и все коэффициенты $f_{1n_0m}^{(c)}$, $f_{1n_0m}^{(s)}$, $f_{2n_0m}^{(c)}$, $f_{2n_0m}^{(s)}$ равны нулю, то решение существует, но не единственно. Оно имеет вид

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{R_n^{(a)}(r)}{P_2[R_n^{(a)}(b)]}P_n^{(m)}(\cos\theta)(f_{1nm}^{(c)}\cos m\varphi+f_{1nm}^{(s)}\sin m\varphi)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{R_n^{(b)}(r)}{P_1[R_n^{(b)}(a)]}P_n^{(m)}(\cos\theta)(f_{2nm}^{(c)}\cos m\varphi+f_{2nm}^{(s)}\sin m\varphi)+$$
$$+R_{n_0m}^{(a)}(r)\sum_{m=0}^{n_0}(\cos\theta)(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi),$$

где A_m, B_m — произвольные коэффициенты. При $k^2=\lambda_{n_0}^{(i)}$ функции $R_{n_0}^{(a)}(r)$, $R_{n_0}^{(b)}(r)$ являются линейно зависимыми.

4.5 Примеры решения краевых задач для уравнения Гельмгольца

1. Внутри круга $r\le a$ решить задачу

$$\Delta u-\varkappa^2 u=0,$$
$$u\big|_{r=a}=|\sin\varphi|.$$

Общее решение задачи Дирихле для данного уравнения имеет вид

$$u(r,\varphi)=A_0\frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(\varkappa r)}{I_n(\varkappa a)}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right).$$

Определим коэффициенты A_n и B_n:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{\pi},$$
$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|\cos n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin\varphi|\cos n\varphi d\varphi=$$
$$=-\frac{2}{\pi(n^2-1)}\left(1+(-1)^n\right),$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|\sin n\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin\varphi|\sin n\varphi d\varphi=0.$$

Следовательно,

$$u = \frac{2}{\pi}\frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\frac{I_n(\varkappa r)}{I_n(\varkappa a)}\cos n\varphi$$

или

$$u = \frac{2}{\pi}\frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\frac{I_{2k}(\varkappa r)}{I_{2k}(\varkappa a)}\cos 2k\varphi.$$

2. Решить вне круга задачу

$$\Delta u - u = 0, \qquad r > a,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin^4\varphi,$$
$$u \to 0 \qquad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Общее решение задачи Неймана для этого уравнения вне круга можно представить в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n(\varkappa r)}{\varkappa K'(\varkappa a)}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right).$$

Так как

$$\sin^4\varphi = \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right]^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2\varphi) =$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi,$$

то подставляя общее решение в граничное условие, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

Отсюда найдём

$$A_0 = \frac{3}{8}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}, \quad A_0 = \frac{1}{8},$$

остальные коэффициенты равны нулю. Следовательно, решение имеет вид

$$u = \frac{3}{8}\frac{K_0(\varkappa r)}{\varkappa K_0'(\varkappa a)} - \frac{1}{2}\frac{K_2(\varkappa r)}{\varkappa K_2'(\varkappa a)}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\frac{K_4(\varkappa r)}{\varkappa K_4'(\varkappa a)}\cos 4\varphi.$$

3. Внутри круга единичного радиуса решить задачу

$$\Delta u + \left(\mu_1^{(3)}\right)^2 u = 0, \qquad 0 \le r < 1,$$
$$u\Big|_{r=a} = \sin\varphi + \cos^2\varphi,$$

где $\mu_1^{(3)}$ — первый ненулевой корень уравнения

$$J_3 = 0.$$

Общее решение исходного уравнения внутри круга имеет вид

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\mu^{(3)} r) \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

В данном случае $k^2 = \left(\mu_1^{(3)}\right)^2$ совпадает с собственным значением задачи Штурма—Лиувилля внутри единичного круга. Поэтому для существования решения необходимо отсутствие третьей гармоники Фурье в граничной функции. Так как

$$f(\varphi) = \sin\varphi + \cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \sin\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

решение рассматриваемой задачи существует, но не единственно. Оно может быть представлено в виде

$$u = \frac{1}{2}\frac{J_0(\mu_1^{(3)} r)}{J_0(\mu_1^{(3)})} + \frac{J_1(\mu_1^{(3)} r)}{J_1(\mu_1^{(3)})}\sin\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\frac{J_2(\mu_1^{(3)} r)}{J_2(\mu_1^{(3)})} + J_3(\mu_1^{(3)}) \left(A_3 \cos 3\varphi + B_3 \sin 3\varphi\right),$$

где A_3, B_3 — произвольные постоянные.

4. Внутри сферы $r \le a$ решить задачу

$$\Delta u - u = 0,$$
$$u\Big|_{r=a} = \cos 2\theta + \sin\theta \sin\varphi.$$

Общее решение внутренней задачи Дирихле для этого уравнения имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{a} I_{n+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r} I_{n+\frac{1}{2}}(a)} P_n^{(m)}(\cos\theta) \left(A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\right).$$

Для определения коэффициентов разложим граничную функцию по сферическим функциям. Из граничного условия следует, что отличны от нуля будут только коэффициенты A_{n_0} и B_{n_1}. Далее $\cos 2\varphi$ разложим по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$, а $\sin\varphi$ — по присоединенным функциям $P_n^{(1)}(\cos\theta)$:

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3}P_0(\cos\theta),$$
$$\sin\theta = P_1^{(1)}(\cos\theta).$$

Следовательно, $A_{00} = -\dfrac{1}{3}$, $A_{20} = \dfrac{4}{3}$, $B_{11} = 1$, остальные коэффициенты равны нулю. Таким образом, решение имеет вид

$$u = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{I_{\frac{1}{2}}(r)}{I_{\frac{1}{2}}(a)} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{I_{\frac{5}{2}}(r)}{I_{\frac{5}{2}}(a)}P_2(\cos\theta) +$$
$$+\sqrt{\frac{a}{r}}\frac{I_{\frac{3}{2}}(r)}{I_{\frac{3}{2}}(a)}P_1^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi.$$

5. Вне сферы $r \geq a$ решить задачу

$$\begin{aligned}
&\Delta u + u = 0,\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \cos\theta + \sin^2\theta\cos 2\varphi,\\
&\frac{\partial u}{\partial r} - iu = O\left(\frac{1}{r}\right) \qquad\quad r \to \infty.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\cos\theta = P_1(\cos\theta), \quad \sin^2\theta\cos 2\varphi = \frac{1}{3}P_2^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi,$$

решение поставленной задачи имеет вид

$$u = \frac{r^{-\frac{1}{2}}H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(r)}{\dfrac{\partial}{\partial a}\left[a^{-\frac{1}{2}}H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(a)\right]}\cos\theta + \frac{r^{-\frac{1}{2}}H^{(1)}_{\frac{5}{2}}(r)}{\dfrac{\partial}{\partial a}\left[a^{-\frac{1}{2}}H^{(1)}_{\frac{5}{2}}(a)\right]}\sin^2\theta\cos 2\varphi.$$

6. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\Delta u + k^2 u = 0,\ 0 \leq r < r_0,\ J_n(kr_0) \neq 0, \quad n = 0, 1,\ \ldots, \tag{4.31}$$
$$\left.u\right|_{r=r_0} = a\cos^3\varphi + b\sin^3\varphi + p\cos\varphi + q\sin\varphi + c. \tag{4.32}$$

Уравнение Гельмгольца в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+k^2u=0. \tag{4.33}$$

Будем искать решения $u(r, \varphi)$ уравнения (4.33) в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

учитывая ограниченность в нуле радиальной функции и 2π периодичность угловой функции. Подставим функцию $v(r, \varphi)$ в уравнение (4.33) и разделим переменные:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{\partial R}{\partial r}\right)+k^2r^2R}{R}=-\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi}=\lambda=\text{const}.$$

Функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \qquad \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \tag{4.34}$$

и

$$r^2R''+rR'+\left(k^2r^2-\lambda\right)R=0, \qquad |R(0)|<\infty. \tag{4.35}$$

Собственные функции задачи (4.34) при условии 2π периодичности:

$$\Phi_n(\varphi)=\widetilde{A}_n\cos n\varphi+\widetilde{B}_n\sin n\varphi,\ \lambda=n^2, \quad n=0,1,2,\ \ldots.$$

Общее решение уравнения (4.35):

$$R_n(r)=C_nJ_n(kr)+D_nY_n(kr),$$

где J_n, Y_n — функции Бесселя и Неймана. Так как функция $R_n(r)$ должна быть ограничена в нуле, а функция Неймана в нуле не ограничена, следовательно, коэффициент при ней должен быть равен нулю. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(kr)\left[A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right], \tag{4.36}$$

где $A_n=C_n\widetilde{A}_n$, $B_n=C_n\widetilde{B}_n$ — постоянные, подлежащие определению из краевого условия. Запишем условие (4.32) в виде

$$u(r_0,\varphi)=a\cos^3\varphi+b\sin^3\varphi+p\cos\varphi+q\sin\varphi+c=$$
$$=c+\frac{3a+p}{4}\cos\varphi+\frac{a}{4}\cos 3\varphi+\frac{3b+q}{4}\sin\varphi-\frac{a}{4}\sin 3\varphi.$$

Имеем

$$u(r_0,\varphi) = A_0 J_0(kr_0) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr_0)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right] =$$
$$= c + \frac{3a+p}{4}\cos\varphi + \frac{a}{4}\cos 3\varphi + \frac{3b+q}{4}\sin\varphi - \frac{a}{4}\sin 3\varphi.$$

Следовательно,

$$A_0 = \frac{c}{J_0(kr_0)}, A_1 = \frac{1}{J_1(kr_0)}\left(\frac{3a}{4}+p\right), A_2 = 0, A_3 = \frac{a}{4J_3(kr_0)},$$
$$B_1 = \frac{1}{J_1(kr_0)}\left(\frac{3b}{4}+q\right), \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{b}{4J_3(kr_0)},$$
$$A_n = B_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 4.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4.36), получим

$$u(r,\varphi) = c\frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} + \frac{J_1(kr)}{J_1(kr_0)}\left[\left(\frac{3a}{4}+p\right)\cos\varphi + \left(\frac{3b}{4}+q\right)\sin\varphi\right] +$$
$$+\frac{J_3(kr)}{J_3(kr_0)}\left(\frac{a}{4}\cos 3\varphi - \frac{b}{4}\sin 3\varphi\right).$$

7. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:

$$\Delta u + 4u = 0, \qquad 0 \leq r < 1, \tag{4.37}$$
$$u\Big|_{r=1} = \sin^3\varphi. \tag{4.38}$$

Уравнение Гельмгольца в полярных координатах (r,φ) имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + 4u = 0. \tag{4.39}$$

Будем искать решения $u(r,\varphi)$ уравнения (4.39) в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi),$$

учитывая ограниченность в нуле радиальной функции и 2π периодичность угловой функции. Подставим функцию $v(r,\varphi)$ в уравнение (4.39) и разделим переменные:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{\partial R}{\partial r}\right) + 4^2 r^2 R}{R} = -\frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = \lambda = \text{const}.$$

Функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \qquad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \tag{4.40}$$

и

$$r^2 R'' + rR' + \left(4r^2 - \lambda\right) R = 0, \qquad |R(0)| < \infty. \tag{4.41}$$

Собственные функции задачи (4.40) при условии 2π периодичности:

$$\Phi_n(\varphi) = \widetilde{A}_n \cos n\varphi + \widetilde{B}_n \sin n\varphi,\ \lambda = n^2, \quad n = 0, 1, 2,\ \ldots.$$

Общее решение уравнения (4.35) имеет вид

$$R_n(r) = C_n J_n(2r) + D_n Y_n(2r),$$

где J_n, Y_n — функции Бесселя и Неймана. Так как функция $R_n(r)$ должна быть ограничена в нуле, а функция Неймана в нуле не ограничена, следовательно, коэффициент при ней должен быть равным нулю. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца будем искать в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(2r)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right], \tag{4.42}$$

где $A_n = C_n\widetilde{A}_n$, $B_n = C_n\widetilde{B}_n$ — постоянные, подлежащие определению из краевого условия. Запишем условие (4.38) в виде

$$u(1,\varphi) = \sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Имеем

$$u(1,\varphi) = A_0 J_0(2) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(2)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right] =$$
$$= \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi.$$

Следовательно,

$$B_1 = \frac{3}{4J_1(2)}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\frac{1}{J_3(2)},$$
$$A_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 0, \qquad B_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 4.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (4.42), получим

$$u(r,\varphi) = \frac{3}{4}\frac{J_1(2r)}{J_1(2)}\sin\varphi - \frac{1}{4}\frac{J_3(2r)}{J_3(2)}\sin 3\varphi.$$

8. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad 0 \le r < r_0, \tag{4.43}$$

$$J_{n/2}(kr_0) \neq 0, \qquad n = 1, 3, \ \ldots,$$

$$u\Big|_{r=r_0} = a + \cos\vartheta + c\cos^2\vartheta. \tag{4.44}$$

Уравнение Гельмгольца в сферических координатах (r, φ, ϑ) имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + k^2 u = 0. \tag{4.45}$$

Так как граничное значение $u\Big|_{r=r_0}$ функции u не зависит от φ и коэффициенты уравнения (4.45) не зависят от φ, решение задачи Дирихле (4.43), (4.44) также не зависит от φ и его можно искать в виде

$$u(r, \varphi, \vartheta) \equiv u(r, \vartheta),$$

где функции $u(r, \vartheta)$ удовлетворяют уравнению (4.45) с $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \equiv 0$:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + k^2 u = 0. \tag{4.46}$$

Будем искать решения $u(r, \vartheta)$ уравнения (4.46) в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Theta(\vartheta),$$

учитывая $|R(0)| < \infty$, $|\Theta(0)| < \infty$, $|\Theta(\pi)| < \infty$. Подставим функцию $v(r, \vartheta)$ в уравнение (4.46) и разделим переменные:

$$\frac{r^2 R'' + 2rR' + k^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta'' + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\Theta'}{\Theta} = \lambda = \text{const}.$$

Функции $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями связанных задач:

$$\Theta'' + \operatorname{ctg}\vartheta\cdot\Theta' + \lambda\Theta = 0, \qquad |\Theta(0)| < \infty, \quad |\Theta(\pi)| < \infty, \tag{4.47}$$

и

$$r^2 R'' + 2rR' + \left(k^2 r^2 - \lambda\right) R = 0, \qquad |R(0)| < \infty. \tag{4.48}$$

Уравнение $\Theta'' + \operatorname{ctg}\vartheta \cdot \Theta' + \lambda\Theta = 0$ заменой переменной $\cos\vartheta = z$ преобразуется в уравнение Лежандра

$$\left(1 - z^2\right)\Theta'' - 2z\Theta' + \nu(\nu+1)\Theta = 0, \qquad \nu(\nu+1) = \lambda.$$

Его общее решение имеет вид

$$\Theta(z) = CP_\nu(z) + DQ_\nu(z),$$

где $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ — функции Лежандра первого и второго рода нулевого порядка $\Big(P_\nu(z) \equiv P_\nu^{(0)}(z)$ и $Q_\nu(z) \equiv Q_\nu^{(0)}(z)\Big)$. Оно ограничено на $[-1,1]$ только при $\nu = n,\ (n = 0, 1,\ \ldots)$, то есть при $\lambda = n(n+1)$ и $D = 0$.

Задача (4.48) при $\lambda = n(n+1)$ имеет вид

$$r^2R'' + 2rR' + \left(k^2r^2 - n(n+1)\right)R = 0,$$

ее общее решение:

$$R_n(r) = \widetilde{A}_n\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}} + \widetilde{B}_n\frac{Y_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}},$$

где $J_{n+1/2}$ и $Y_{n+1/2}$ — функции Бесселя и Неймана. Поскольку $|R_n(0)| < < \infty$, а $Y_{n+1/2}(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, то полагаем $\widetilde{B}_n = 0$.

Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца будем искать в виде

$$u(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\frac{J_{n+1/2}\sqrt{2}r}{\sqrt{r}}P_n(\cos\vartheta), \tag{4.49}$$

где $A_n = C_n\widetilde{A}_n$ — постоянная, подлежащая определению из краевого условия. Запишем условие (4.44) в виде

$$u(1,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nJ_{n+1/2}\sqrt{2}P_n(\cos\vartheta) = 3\cos^2\vartheta.$$

Поскольку

$$3\cos^2\vartheta = P_0(\cos\vartheta) + 2P_2(\cos\vartheta),$$

значит

$$u(1,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nJ_{n+1/2}\sqrt{2}P_n(\cos\vartheta) = P_0(\cos\vartheta) + 2P_2(\cos\vartheta).$$

Следовательно,

$$A_0 = \frac{1}{J_{1/2}(\sqrt{2})}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{2}{J_{5/2}(\sqrt{2})}, \qquad A_n = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 3.$$

Подставляя эти коэффициенты и выражения

$$P_0(\cos\vartheta) = 1, \qquad P_2(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}$$

в (4.49), получим

$$u(r,\vartheta) = \frac{J_{1/2}(\sqrt{2}r)}{J_{1/2}(\sqrt{2})\sqrt{r}} + \frac{J_{5/2}(\sqrt{2}r)}{J_{5/2}(\sqrt{2})\sqrt{r}}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right).$$

4.6 Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. *Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге:*

1. $\Delta u + u = 0, 0 \leq r < 2,\ u\Big|_{r=2} = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi.$
2. $\Delta u + 2u = 0, 0 \leq r < 2,\ u\Big|_{r=2} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + \cos\varphi + 2.$
3. $\Delta u + 3u = 0, 0 \leq r < 1,\ u\Big|_{r=1} = \cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi.$
4. $\Delta u + 4u = 0, 0 \leq r < 2,\ u\Big|_{r=2} = -4\cos^3\varphi + \sin\varphi + 7.$
5. $\Delta u + 5u = 0, 0 \leq r < 3,\ u\Big|_{r=3} = 12\sin^3\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi.$
6. $\Delta u + 6u = 0, 0 \leq r < 1,$
   $u\Big|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi - 2\cos\varphi + 4\sin\varphi.$
7. $\Delta u + 7u = 0, 0 \leq r < 3,$
   $u\Big|_{r=3} = 3\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi - 3\cos\varphi + 2\sin\varphi.$
8. $\Delta u + 8u = 0, 0 \leq r < 4,$
   $u\Big|_{r=4} = 4\cos^3\varphi + 4\sin^3\varphi + 2\cos\varphi - 4\sin\varphi.$
9. $\Delta u + 10u = 0, 0 \leq r < 3,$
   $u\Big|_{r=3} = \cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi - 3\cos\varphi + 2\sin\varphi.$
10. $\Delta u + u = 0, 0 \leq r < 3,$
    $u\Big|_{r=3} = 9\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi - 2\cos\varphi + 5\sin\varphi.$

Задание 2. *Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре:*

1. $\Delta u + 2u = 0, \quad 0 \le r < 2,\ u\Big|_{r=2} = 3 + 2\cos\vartheta + 6\cos^2\vartheta.$
2. $\Delta u + 2u = 0, \quad 0 \le r < 3,\ u\Big|_{r=3} = 6 - 3\cos\vartheta - 3\cos^2\vartheta.$
3. $\Delta u + 3u = 0, \quad 0 \le r < 1,\ u\Big|_{r=1} = -3 + 5\cos\vartheta - 3\cos^2\vartheta.$
4. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \le r < 4,\ \ u\Big|_{r=4} = 12\cos\vartheta + 6\cos\vartheta.$
5. $\Delta u + 5u = 0, \quad 0 \le r < 5,\ u\Big|_{r=5} = -9 + \cos^2\vartheta.$
6. $\Delta u + 6u = 0,\ 0 \le r < 4,\ u\Big|_{r=4} = -2 + 8\cos\vartheta + 3\cos^2\vartheta.$
7. $\Delta u + 7u = 0,\ 0 \le r < 3,\ u\Big|_{r=3} = 3 + 12\cos\vartheta - 9\cos^2\vartheta.$
8. $\Delta u + 8u = 0,\ 0 \le r < 2,\ u\Big|_{r=2} = -6\cos\vartheta + 9\cos^2\vartheta.$
9. $\Delta u + 10u = 0,\ 0 \le r < 5,\ u\Big|_{r=5} = 6 + 5\cos\vartheta - 6\cos^2\vartheta.$
10. $\Delta u + 9u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u\Big|_{r=1} = -3 - 2\cos\vartheta + 3\cos^2\vartheta.$

Задание 3. *Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового цилиндра $0 \le r \le a$, $0 \le z \le h$ со следующими граничными условиями:*

1. $u|_{r=a} = \cos^2\varphi\,, \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0\,.$
2. $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0\,, \quad u|_{z=0} = r^2\sin 2\varphi\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0\,.$
3. $u|_{r=a} = z\sin\varphi\,, \quad u|_{z=0} = 0\,, \quad u|_{z=h} = 1\,.$
4. $u|_{r=a} = 1 + 2\cos 2\varphi\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0\,.$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового цилиндра высоты h, в основании которого лежит круговой сектор $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le \alpha$, со следующими граничными условиями:

5. $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = 0\,, \quad u|_{r=a} = 1\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0\,.$
6. $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0\,, \quad u|_{r=a} = z\cos 2\varphi\,, \quad u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0\,.$
7. $u|_{\varphi=0} = \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\pi} = 0\,,\ u|_{r=a} = 0\,, \quad u|_{z=0} = 0,\ u|_{z=h} = r^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{3\varphi}{2}\,.$

8. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0\,, \quad u|_{r=a} = 0\,, \quad u\Big|_{z=0} = r^4 \cos 4\varphi\,,$
$u\Big|_{z=h} = 1\,.$

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямого кругового тора прямоугольного сечения $a \le r \le b, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le h$ со следующими граничными условиями:

9. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0\,, \quad u|_{z=0} = r\sin\varphi\,, \quad u\Big|_{z=h} = 0\,.$

10. $u|_{r=a} = 1\,, \quad u|_{r=b} = \sin \pi z\,, \quad u|_{z=0} = 0\,, \quad u|_{z=h} = 0\,.$

11. $u|_{r=a} = \cos 2\varphi\,, \quad u|_{r=b} = \sin\varphi\,, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0\,.$

12. Найти стационарное распределение температуры внутри прямого цилиндра произвольного поперечного сечения, боковая поверхность которого теплоизолирована, на нижнем основании $z = 0$ поддерживается постоянная температура T_1, на верхнем $z = h$ — постоянная температура T_2.

Решить внутреннюю задачу Дирихле для шара $0 \le r \le a$ с граничными условиями:

13. $u\Big|_{r=a} = \cos\theta + \cos^2\theta\,.$

14. $u\Big|_{r=a} = 1 + \sin\theta\cos\varphi\,.$

15. $u\Big|_{r=a} = \sin^2\theta + 15\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi\,.$

16. $u\Big|_{r=a} = 1 + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \sin^5\theta\cos 5\varphi\,.$

Решить внутреннюю задачу Неймана для шара $0 \le r \le a$ с граничными условиями:

17. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \cos\theta\,.$

18. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin^3\theta\sin 3\varphi + \sin\theta\cos\varphi\,.$

19. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin^{10}\theta\sin 10\varphi\,.$

Решить внутреннюю третью краевую задачу для шара $0 \le r \le a$ с граничными условиями:

20. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right|_{r=a} = \sin^2\theta\,, \quad h = \text{ const}\,.$

21. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right|_{r=a} = \sin\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,, \quad h = \text{ const}\,.$

22. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right|_{r=a} = 1 + \sin^7\theta\cos 7\varphi\,, \quad h = \text{ const}\,.$

Решить внешнюю задачу Дирихле для шара $r \ge a$ с граничными условиями:

23. $u\big|_{r=a} = \sin^2\theta + 15\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\varphi\,.$

24. $u\big|_{r=a} = 1 + \sin\theta\cos\theta\sin\varphi + \sin^5\theta\cos 5\varphi\,.$

Решить внешнюю задачу Неймана для шара $r \ge a$ с граничными условиями:

25. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin^3\theta\sin 3\varphi + \sin\theta\cos\varphi\,.$

26. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin^{10}\theta\sin 10\varphi\,.$

Решить уравнение Лапласа внутри шарового слоя $0 \le r \le a$ с граничными условиями:

27. $u\big|_{r=a} = \cos\theta\,, \quad u\big|_{r=b} = 0\,.$

28. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0\,, \quad u\big|_{r=b} = 15\sin^3\theta\sin 3\varphi\,.$

29. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin\theta\sin\varphi\,, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,.$

30. $u\big|_{r=a} = \cos^3\theta\,, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \sin^2\theta\cos 2\varphi\,.$

Задание 4. *Решить задачу для уравнения Пуассона в шаровом слое* $a \le r \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$ *:*

1. $\Delta u = xz\,, \quad 1 \le r \le 2\,,$
   $u|_{r=1} = 0\,, \quad u|_{r=2} = 0\,.$

2. $\Delta u = xz\,, \quad 1 \le r \le 2\,,$
   $u|_{r=1} = 0\,, \quad u|_{r=2} = 1\,.$

3. $\Delta u = xz\,, \quad 1 \le r < 2\,,$
   $u|_{r=1} = 1\,, \quad u|_{r=2} = 0\,.$

4. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 2\,,$
   $u|_{r=1} = 1\,, \quad u|_{r=2} = 1\,.$

5. $\Delta u = xz\,, \quad 1 \le r < 2\,,$
   $u|_{r=1} = 1\,, \quad u|_{r=2} = 2\,.$

6. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 2\,,$
   $u|_{r=1} = 2\,, \quad u|_{r=2} = 1\,.$

7. $\Delta u = xz\,, \quad 1 \le r < 2\,,$
   $u|_{r=1} = 2\,, \quad u|_{r=2} = 2\,.$

8. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 2\,,$
   $u|_{r=1} = 3\,, \quad u|_{r=2} = 1\,.$

9. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} \le r < 1\,,$
   $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1\,, \quad u|_{r=1} = -1\,.$

10. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1\,, \quad u|_{r=1} = 0\,.$

11. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} \le r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1\,, \quad u|_{r=1} = 1\,.$

12. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = 0\,, \quad u|_{r=1} = 0\,.$

13. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = -1\,, \quad u|_{r=1} = 0\,.$

14. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = -1\,, \quad u|_{r=1} = -1\,.$

15. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1\,, \quad u|_{r=1} = -1\,.$

16. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = -1\,, \quad u|_{r=1} = 1\,.$

17. $\Delta u = xz\,, \quad \dfrac{1}{2} < r < 1\,,$
    $u\Big|_{r=\frac{1}{2}} = 1\,, \quad u|_{r=1} = -2\,.$

18. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
    $u|_{r=2} = 0\,, \quad u|_{r=3} = 0\,.$

19. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = 0\,, \quad u|_{r=3} = -1\,.$

20. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = -1\,, \quad u|_{r=3} = 0\,.$

21. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = 1\,, \quad u|_{r=3} = 3\,.$

22. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = 1\,, \quad u|_{r=3} = -3\,.$

23. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = 0\,, \quad u|_{r=3} = 4\,.$

24. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = 2\,, \quad u|_{r=3} = 0\,.$

25. $\Delta u = xz\,, \quad 2 < r < 3\,,$
$u|_{r=2} = 1\,, \quad u|_{r=3} = -2\,.$

26. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 3\,,$
$u|_{r=1} = 1\,, \quad u|_{r=3} = 1\,.$

27. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 3\,,$
$u|_{r=1} = 0\,, \quad u|_{r=3} = 1\,.$

28. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 3\,,$
$u|_{r=1} = 1\,, \quad u|_{r=3} = 0\,.$

29. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 3\,,$
$u|_{r=1} = -1\,, \quad u|_{r=3} = 1\,.$

30. $\Delta u = xz\,, \quad 1 < r < 3\,,$
$u|_{r=1} = 1\,, \quad u|_{r=3} = -1\,.$

Список литературы

[1] *Бейтман Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейн. М: Наука. 1966. Т. 2. 582 с.

[2] *Будак Б.М.* Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. М.: Наука, 1965. 606 с.

[3] *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов М.: Физматгиз, 1970. 712 с.

[4] *Свешников А.Г.* Лекции по математической физике: учеб. пособие / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. 352 с.

[5] *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики: учеб. пособие для ун-тов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1972. 736 с.

[6] *Янке Е.* Специальные функции, формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М.: Наука, 1977. 342 с.

Содержание

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспондент АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 7 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом.

Холодова Светлана Евгеньевна, Перегудин Сергей Иванович

Специальные функции в задачах математической физики

Учебное пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета информационных
технологий, механики

и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49