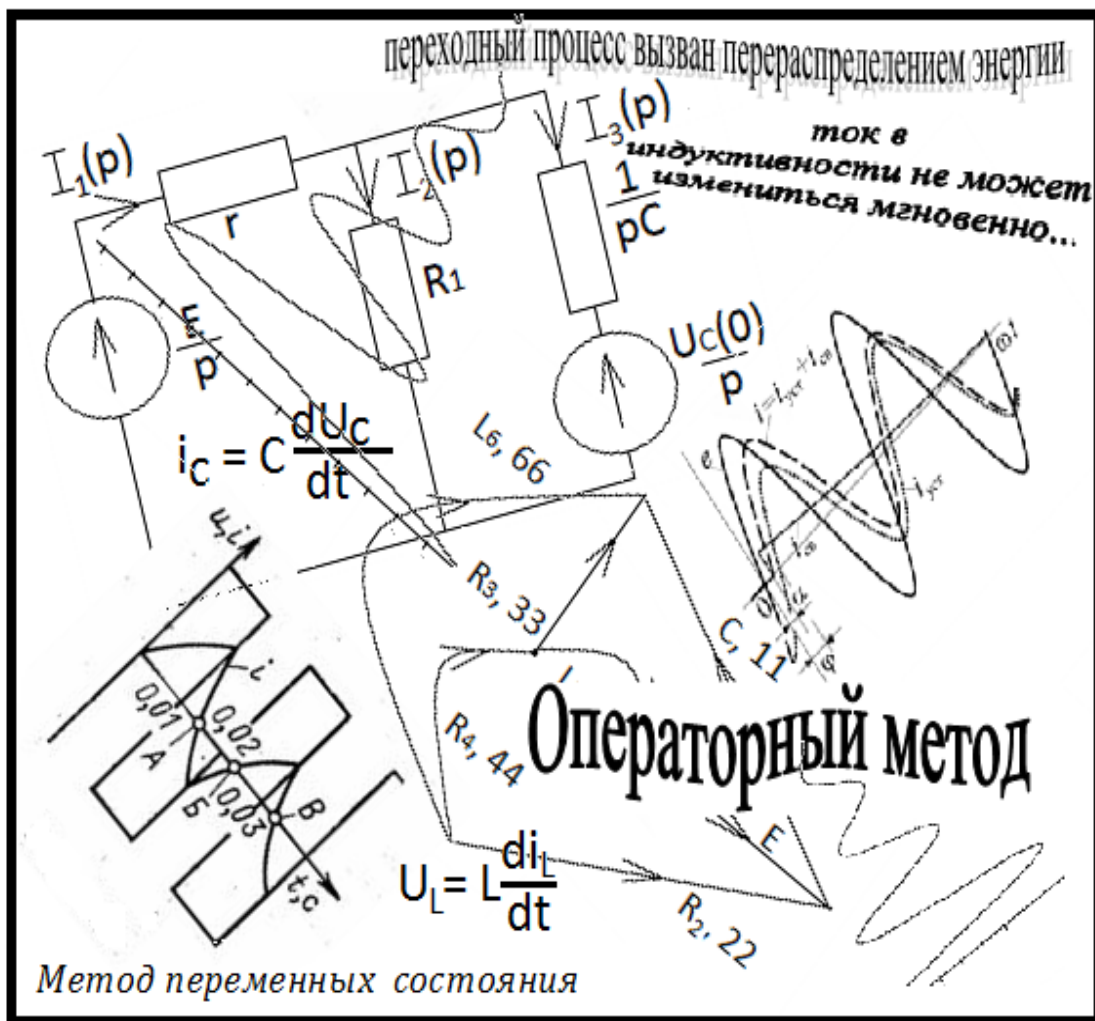


Применение операторного метода и метода переменных состояния для расчета переходных процессов



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

А. В. Денисова

**Применение операторного метода и метода
переменных состояния для расчета
переходных процессов**

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2012

Денисова А.В. Применение операторного метода и метода переменных состояния для расчета переходных процессов: Методические указания. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 105 с.

В пособии кратко излагаются математические основы операторного метода расчета переходных процессов и метода переменных состояния, способы получения и решения уравнений состояния. Приведены подробные примеры применения обоих методов расчета.

Пособие предназначено для студентов специальностей № 090900,161100, 140400,210700,211000, 220400, 221000.

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета КТ и У от 18 декабря, протокол №10.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012

© Денисова А.В., 2012

Содержание.

Операторный метод расчета переходных процессов	5
Расчет переходных процессов операторным методом	5
Свойства преобразования Лапласа	7
Нахождение оригинала по изображению	9
Последовательность расчета в операторном методе	11
Примеры	12
Пример 1	12
Пример 2	17
Пример 3	19
Пример 4	21
Пример 5	24
Пример 6	29
Метод переменных состояния	37
Методы составления уравнений состояния цепи	38
Метод составления уравнений состояния с помощью	39
уравнений Кирхгофа	
Топологический метод составления уравнений состояния.	39
Формирование уравнений состояния методом наложения.	40
Пример 1	41
Составление уравнений с помощью законов Кирхгофа	42
Составление уравнений топологическим методом	43
Составление уравнений методом наложения	44
Пример 2	45
Составление уравнений с помощью законов Кирхгофа	45
Составление уравнений топологическим методом	49
Составление уравнений методом наложения	51
Пример 3	54
Составление уравнений с помощью законов Кирхгофа	54
Составление уравнений топологическим методом	55
Составление уравнений методом наложения	56
Пример 4	58
Составление уравнений с помощью законов Кирхгофа	58
Составление уравнений топологическим методом	59
Составление уравнений методом наложения	61
Пример 5	62
Составление уравнений с помощью законов Кирхгофа	62
Составление уравнений топологическим методом	64
Составление уравнений методом наложения	65
Пример 6	66

Составление уравнений с помощью законов Кирхгофа	67
Составление уравнений топологическим методом	70
Составление уравнений методом наложения	71
Методы решения уравнения состояния цепи	73
Аналитические методы	74
Отыскание матричной экспоненты методом Кели-Гамильтона	74
Отыскание матричной экспоненты методом Сильвестра	75
Отыскание матричной экспоненты операторным методом	75
Пример 1	75
Пример 4	77
Пример 5	79
Пример 6	82
Отыскание решения уравнений состояния	83
Пример 4	83
Пример 5	84
Пример 6	86
Численные методы решения уравнений состояния	88
Приложения	90
Пример 1	90
Пример 2	92
Пример 3	94
Пример 4	96
Пример 5	97
Пример 6	98
История кафедры	101
Литература	103

Операторный метод расчета переходных процессов

Расчет переходных процессов в сложных цепях классическим методом очень часто затруднен нахождением постоянных интегрирования. В связи с этим был разработан *операторный* метод расчета, основанный на понятии изображения функций времени. В операторном методе каждой функции времени соответствует функция новой, комплексной переменной $p = s + j\omega$ и наоборот, функции от p отвечает определенная функция времени t . Переход от одной функции к другой осуществляется с помощью преобразования Лапласа.

Данный метод облегчает решение системы интегро-дифференциальных уравнений, составленных для цепи по законам Кирхгофа, а также позволяет освободиться от нахождения постоянных интегрирования путем введения начальных условий в уравнения исходной системы.

Таким образом, идея метода заключается в том, что из области действительного переменного t решение переносится в область комплексного переменного $p = s + j\omega$, где операции дифференцирования и интегрирования более просты, или же интегро-дифференциальные уравнения цепи в переходном режиме заменяются алгебраическими относительно некоторой комплексной переменной.

Операторный метод расчета сводится к четырем последовательным этапам.

1. От искомой функции $f(t)$, называемой *оригиналом*, переходят с помощью преобразования Лапласа к функции комплексного переменного p . Новую функцию обозначают через $F(p)$ и называют *изображением функции* $f(t)$.
2. Систему уравнений Кирхгофа для оригиналов, согласно правилам преобразования функций, их производных и интегралов преобразуют в операторные алгебраические уравнения для изображений.
3. Полученные операторные уравнения решают относительно $F(p)$.
4. От найденного изображения $F(p)$ переходят к оригиналу $f(t)$, который и является искомой функцией.

Расчет переходных процессов операторным методом.

Операторный метод расчета переходных процессов основывается на использовании линейного интегрального преобразования Лапласа, которое позволяет любые интегральные и дифференциальные временные соотношения свести к алгебраическим выражениям, получив систему алгебраических уравнений, зависящих от комплексной переменной p .

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$f(t)$ – оригинал, $F(p)$ – изображение, $\hat{=}$ - символ соответствия между оригиналом и изображением по Лапласу. Каждой функции времени $f(t)$ соответствует единственная функция переменной p : $f(t) \hat{=} F(p)$, и наоборот, каждой функции переменной p соответствует только одна функция времени: $F(p) \hat{=} f(t)$. Изображения наиболее часто используемых функций приведены в таблице 1.

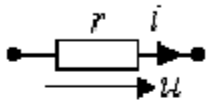
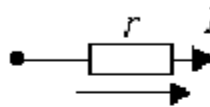
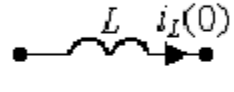
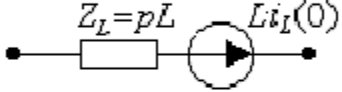
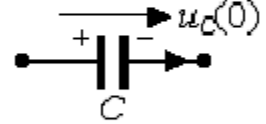
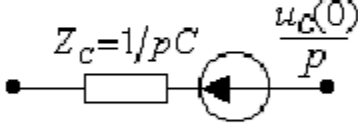

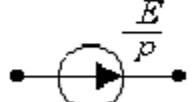

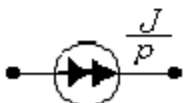
Таблица 1 Операторные изображения некоторых функций.

Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
$\delta(t) = 1(t)$	$\frac{1}{p}$
$A\delta_1(t)$	$\frac{A}{p}$
$\delta(t) = \frac{d\delta_1}{dt}$	1
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{(n+1)}}$
e^{-at}	$\frac{1}{(p+a)}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{a}{p(p+a)}$
$f(t)$	$F(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$

Применяя преобразование Лапласа, можно установить *правило перехода* от реальной цепи к операторной. Это правило приведено в таблице 2. Источники энергии переносятся в операторную цепь как операторные изображения констант, поскольку рассматриваются источники постоянного напряжения и тока. Ненулевые начальные условия моделируются источником тока в цепи, содержащей индуктивность, и источником напряжения, направленным в сторону разряда емкости в цепи с емкостью. Пользуясь этой таблицей, легко построить операторную

расчетную цепь, которая в дальнейшем рассчитывается как цепь постоянного тока. Из рассмотренного следует, что расчет переходного процесса операторным методом целесообразно начинать сразу с операторной схемы замещения, минуя этап составления системы интегро-дифференциальных уравнений.

Таблица 2

Исходная электрическая цепь	Операторная расчетная цепь
$i(t), u(t), e(t), J(t)$ 	$I(p), U(p), E(p), J(p)$ 
	
	
	
	

Свойства преобразования Лапласа.

При работе с изображениями можно использовать свойства преобразования Лапласа, которые позволяют упростить операторное изображение искомой функции. Очевидно, что соответствие между оригиналом и изображением взаимно однозначны, т. е. каждой функции $f(t)$ соответствует одна вполне определенная функция $F(p)$ и наоборот. Приведены наиболее часто используемые свойства.

Свойство линейности. При умножении оригинала на постоянную величину на ту же постоянную величину умножается и изображение: $af(t) \rightleftharpoons aF(p)$.

Если оригинал представлен суммой функций, то изображение этой суммы равно сумме изображений этих функций (изображение линейной комбинации функций есть линейная комбинация изображений):

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^n a_k F_k(p)$$

Теорема дифференцирования. Допустим, что некоторая функция $f(t)$ имеет изображение $F(p)$, тогда изображение производной этой функции $f'(t) \hat{=} pF(p) - f(0)$

Вычисление производной при нулевых начальных условиях ($f(0) = 0$) соответствует умножению изображения функции на множитель p : $f'(t) \hat{=} pF(p)$,

многократное дифференцирование при нулевых условиях:

$$f^k(t) \hat{=} p^k F(p)$$

Теорема интегрирования. Известно изображение некоторой функции $f(t)$. Изображение функции, являющейся интегралом функции $f(t)$ определяется

$$\int_0^t f(t) dt \hat{=} \frac{F(p)}{p}$$

Многократному (n раз) интегрированию соответствует общее выражение:

$$\int_0^t dt \int_0^t dt \dots \int_0^t f(t) dt \hat{=} \frac{F(p)}{p^n}$$

Теорема запаздывания. Теорема позволяет определить изображение функции $f(t - t_1)$, отличающейся от функции $f(t)$ тем, что она сдвинута вправо вдоль оси времени на t_1 (рис.1):

$$f(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1 \\ f(t - t_1) & \text{при } t > t_1 \end{cases}$$

$$f(t - t_1) \hat{=} e^{-pt_1} F(p)$$

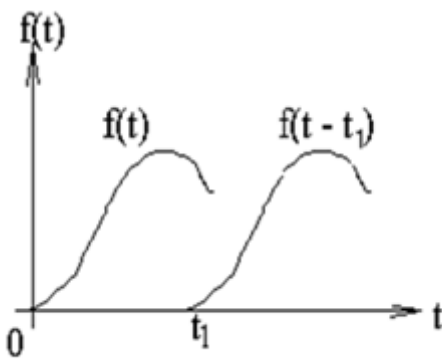


Рис.1

Таким образом, запаздывание функции на время t_1 соответствует умножению её изображения на e^{-pt_1} .

Теорема сдвига. Теорема сдвига позволяет определить, как изменяется изображение при умножении оригинала на показательную функцию $e^{\pm at}$, где a - постоянное число.

Пусть новая функция имеет вид

$$\Psi(t) = f(t)e^{\pm at}$$

Её изображение

$$\Phi(p) = F(p \mp a)$$

Таким образом, умножение временной функции на экспоненциальный множитель приводит к «смещению» в области изображений независимой переменной p на $p \pm a$.

Теорема умножения изображений (теорема свертки - интеграл Бореля).

Теорема заключается в следующем: если

$$f_1(t) \doteq F_1(p), \quad f_2(t) \doteq F_2(p), \text{ то}$$

$$\Phi(p) = F_1(p)F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau$$

Таким образом, произведению изображений двух функций соответствует свертка их оригиналов. Теорема свертки широко используется при составлении таблиц операторных соотношений. Если изображение искомой функции может быть представлено в виде произведения двух (или более) сомножителей, то по оригиналам каждого из сомножителей можно вычислить оригинал исходной функции.

Теорема подобия. Теорема позволяет определить изображение функции времени при изменении масштаба её аргумента. Пусть известно изображение функции $f(t) \doteq F(p)$. Изображение функции $j(t) = f(at)$, где a - некоторая положительная постоянная, будет

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Умножение аргумента оригинала на положительное постоянное число a приводит к делению аргумента изображения и самого изображения на то же число a .

Нахождение оригинала по изображению

Существует три способа перехода от изображения к оригиналу.

Первый. С помощью обратного преобразования Лапласа. Переход от изображения к оригиналу выполняется с помощью так называемого интеграла Римана - Мелина, являющегося формулой обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

Для того, чтобы функция $F(p)$ являлась изображением функции $f(t)$, необходимо выполнение следующих условий: а) $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } p > c_0$, б) стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$, в) интеграл

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) dp$$

абсолютно сходится.

Практически чаще применяют теорему о вычетах, согласно которой оригиналом $F(p)$ является функция

$$f(t) = \sum_{p_k} \text{Res } F(p) e^{pt} \quad (t > 0)$$

$$f(t) = 0 \quad (t < 0)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint F(p) e^{pt} dp \\ &= \sum_{p_k} \text{Res } F(p) e^{pt} \end{aligned} \quad (1)$$

(Интегрирование вдоль бесконечной прямой параллельной мнимой оси и расположенной на расстоянии $c > c_0$ заменяется на интегрирование по замкнутому контуру, охватывающему все полюсы функции $F(p)$. Полюсы $F(p)$ есть значения p , при которых $F(p) = \infty$).

Вычетом функции (Res) в некотором полюсе называют величину, на которую уменьшается разделенный на $2\pi j$ контурный интеграл от этой функции, когда контур при его стягивании пересечет этот полюс.

Вычисления по последней формуле требуют применения методов теории вычетов, причем во многих случаях это оказывается весьма сложным. Поэтому большое значение имеют теоремы, позволяющие представить изображение в виде суммы более простых слагаемых и тем самым упростить переход от изображения к оригиналу.

Второй способ нахождения оригинала - использование теоремы разложения. Теорема разложения используется, когда изображение найдено в

виде рациональной дроби:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

Где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – полиномы относительно p .

Предположим, что знаменатель $F_2(p)$ имеет n простых корней p_1, p_2, \dots, p_k , тогда общая формула теоремы разложения:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{F_2'(p_k)} \quad (2)$$

В случае комплексных корней получаются два сопряженных слагаемых, сумма которых равна удвоенному значению действительной части:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq 2Re \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{F_2'(p_k)} \quad (3)$$

Если в полиноме $F_2(p)$ слагаемое $b_0 = 0$, тогда множитель p можно вынести за скобку, и знаменатель примет вид $F_2 = pF_3$. В этом случае при наличии n корней один корень уравнения $pF_3(p) = 0$ будет нулевым: $p_1 = 0$. Для этого частного случая теорема разложения принимает вид

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=2}^n \left[\frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right] \quad (4)$$

Третий способ определения оригинала заключается в использовании таблиц, где приводятся как изображения, так и соответствующие им оригиналы.

Существуют справочники, содержащие несколько сотен изображений и соответствующих им оригиналов. Следует только изображение привести к табличному виду. При использовании готовых таблиц следует выяснить, с помощью какого преобразования они составлены - Лапласа или Карсона. Если изображение дается по Карсону, то его следует поделить на p для получения изображения по Лапласу.

Последовательность расчета в операторном методе

В общем случае порядок расчета переходных процессов операторным методом следующий:

- 1) Составляется операторная схема замещения цепи, сложившейся *после коммутации* по правилу, приведенному в таблице 1. Выбираются положительные направления токов в ветвях.
- 2) Определяется докоммутационное состояние цепи (определяются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях до коммутации).
- 3) Любым способом расчета (с помощью уравнений Кирхгофа, методом контурных токов, методом узловых потенциалов, и т.д.) определяется операторное изображение искомой величины.
- 4) На основе полученного изображения находится оригинал искомой функции.

Примеры.

Пример 1. Решить задачу операторным методом. Схема цепи, параметры элементов и ЭДС следующие: $E=100$ В, $r=10$ Ом, $R_1=40$ Ом, $R_2=50$ Ом, $C=1000$ мкФ.

Найти токи в ветвях и напряжения на всех элементах цепи при замыкании ключа: $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $U_{R_1}(t)$, $U_{R_2}(t)$, $U_C(t)$, $U_r(t)$.

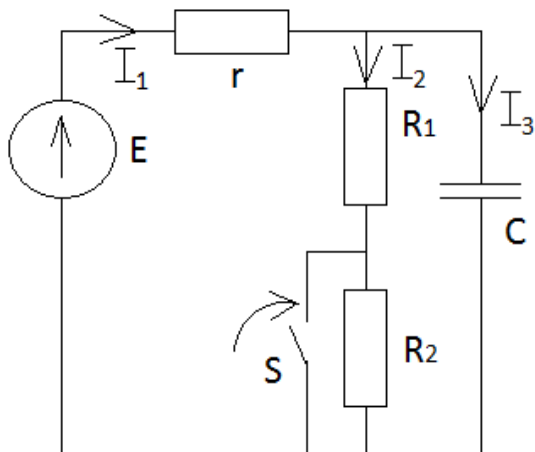


Рис.2

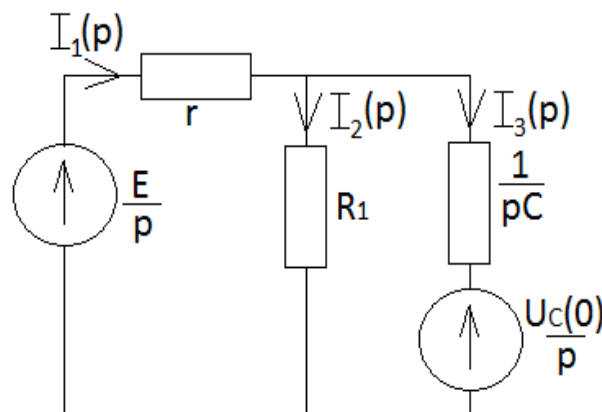


Рис.3

Решение.

1. Составляем операторную схему замещения для цепи после коммутации, пользуясь таблицей 1 (рис.3):

2. Определяем докоммутационное состояние цепи. Здесь необходимо определить напряжение на емкости $U_C(0)$, зная, что по закону коммутации $U_C(0)=U_C(0-)$. Для этого возвращаемся к рис.2. До коммутации в цепи существует постоянный ток, который не протекает через емкость, поэтому мы заменяем ее разрывом цепи. Значит, ток замыкается в первом контуре.

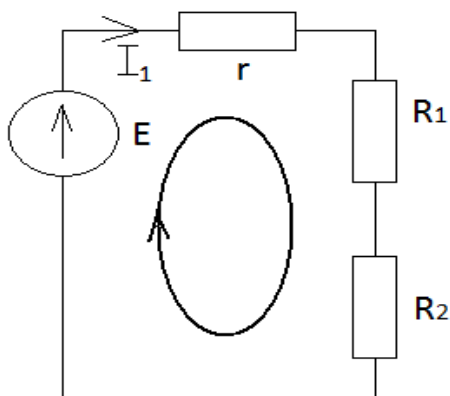


Рис.4

Схема приобретает вид (рис.4). Численное значение тока можно определить, составив для этого контура уравнение по 2-му закону Кирхгофа:

$$I r + I R_1 + I R_2 = E;$$

$$I = \frac{E}{r + R_1 + R_2} = 1 \text{ A.}$$

зажимаем, что и R_1 и R_2 , то есть параллельно с этими резисторами, равно: $U_C(0-)=U_C(0)$

$$U_C(0-) = U_{R_1} + U_{R_2} = I(R_1 + R_2) = 90 \text{ В}$$

$$U_{R_1} = 40 \text{ В}, U_{R_2} = 50 \text{ В.}$$

3. Определим операторные изображения искомых величин. Решать задачу можно любым известным способом (воспользоваться уравнениями Кирхгофа, методом контурных токов, узловых потенциалов и пр.).

Вспользуемся уравнениями Кирхгофа. В этой схеме три ветви и два узла, поэтому необходимо составить одно узловое и два контурных уравнения:

$$\begin{cases} i_1(p) = i_2(p) + i_3(p) \\ i_1(p)r + i_2(p)R_1 = \frac{E}{p} \\ i_2(p)R_1 - \frac{i_3(p)}{pC} = \frac{U_C(0)}{p} \end{cases} \quad (5)$$

Теперь выразим ток $i_2(p)$ из второго уравнения системы через ток $i_1(p)$:

$$i_2(p) = \frac{\frac{E}{p} - i_1(p)r}{R_1} \quad (6)$$

А затем, подставив

$$i_2(p)R_1 = \frac{E}{p} - i_1(p)r$$

в третье уравнение системы (5), выразим ток $i_3(p)$ через ток $i_1(p)$:

$$\begin{aligned} \frac{E}{p} - i_1(p)r - \frac{i_3(p)}{pC} &= \frac{U_C(0)}{p} \\ i_3(p) &= \left(\frac{E}{p} - \frac{U_C(0)}{p} - i_1(p)r \right) pC \end{aligned} \quad (7)$$

После этого можно подставить выражения (6) и (7) в первое уравнение, получив таким образом уравнение относительно $i_1(p)$

$$i_1(p) = \frac{\frac{E}{p} - i_1(p)r}{R_1} + pC \left[\frac{E}{p} - \frac{U_C(0)}{p} - i_1(p)r \right]$$

Подставляя известные нам значения ЭДС E , найденное в п.2 $U_C(0)$, значения сопротивлений и упрощая выражение, получим операторное изображение тока i_1 :

$$i_1(p) = \frac{0.01p + 2.5}{p(0.01p + 1.25)} \quad (8)$$

Теперь по формулам (6) и (7) можем определить операторные изображения токов $i_2(p)$ и $i_3(p)$:

$$i_2(p) = \frac{2.5}{p} - \frac{(0.01p + 2.5)}{4p(0.01p + 1.25)} \quad (9)$$

$$i_3(p) = 10^{-2} \left(\frac{-1.25}{0.01p + 1.25} \right) \quad (10)$$

4. Перейдем к оригиналам полученных величин, пользуясь разными способами.

- Сначала получим оригинал тока $i_1(t)$. Поскольку числитель и знаменатель полученного выражения (8) представляют собой полиномы от p , и дробь является рациональной (порядок числителя меньше порядка знаменателя), то перейдем от изображения к оригиналу по теореме разложения.

➤ Запишем числитель: $F_1(p) = 0.01p + 2.5$, знаменатель $F_2(p) = p(0.01p + 1.25)$, найдем производную знаменателя: $F_2'(p) = 0.02p + 1.25$. Приравняв знаменатель к нулю, определим его корни: $p_1=0$, $p_2=-125$. Подставляя корни, найдем значения числителя и производной знаменателя: $F_1(p_1) = F_1(0) = 2.5$, $F_2'(p_1) = F_2'(0) = 1.25$, $F_1(p_2) = F_1(-125) = 1.25$, $F_2'(p_2) = F_2'(-125) = -1.25$. Теперь можно получить оригинал тока $i_1(t)$ по формуле:

$$i_1(t) = \frac{F_1(p_1)e^{p_1t}}{F_2'(p_1)} + \frac{F_1(p_2)e^{p_2t}}{F_2'(p_2)} = \frac{2.5e^{0t}}{1.25} + \frac{1.25e^{-125t}}{(-1.25)}$$

$$i_1(t) = 2 - 1e^{-125t}$$

➤ Интересно также получить оригинал тока $i_1(t)$ по теореме о вычетах, при этом также необходимо приравнять знаменатель к нулю и определить его корни. Количество определяемых вычетов (слагаемых) будет равно количеству корней:

$$i_1(t) = i_1(p)(p - p_1)e^{p_1t} \Big|_{p_1} + i_1(p)(p - p_2)e^{p_2t} \Big|_{p_2}$$

$$i_1(t) = \frac{(0.01p + 2.5)(p - 0)e^{0t}}{p(0.01p + 1.25)} \Big|_{p=0} + \frac{(0.01p + 2.5)(p + 125)e^{-125t}}{p(0.01p + 1.25)} \Big|_{p=-125}$$

$$i_1(t) = \frac{(2.5)e^{0t}}{(1.25)} + \frac{(-1.25 + 2.5)e^{-125t}}{-1.25} = 2 - 1e^{-125t}$$

- Перейдем к отысканию оригинала тока $i_2(t)$.

➤ Здесь необходимо обратить внимание на то, что выражение состоит из двух слагаемых и вспомнить свойство линейности: изображение линейной комбинации функций есть линейная комбинация изображений. То есть

будем искать оригинал первого слагаемого, а затем оригинал второго. Нетрудно увидеть, что оригинал первого представляет собой константу – 2.5. Оригиналу второго слагаемого отыщем по теореме разложения. Изображение тока i_2 :

$$i_2(p) = \frac{2.5}{p} - \frac{(0.01p + 2.5)}{p(0.04p + 5)}$$

Второе слагаемое:

$$\psi(p) = \frac{(0.01p + 2.5)}{p(0.04p + 5)}$$

Корни знаменателя те же, поскольку переходный процесс един во всей цепи: $p_1 = 0$, $p_2 = -125$. Запишем числитель: $F_1(p) = 0.01p + 2.5$, знаменатель $F_2(p) = p(0.04p + 5)$, найдем производную знаменателя: $F_2'(p) = 0.08p + 5$. Подставляя корни, найдем значения числителя и производной знаменателя: $F_1(p_1) = F_1(0) = 2.5$, $F_2'(p_1) = F_2'(0) = 5$, $F_1(p_2) = F_1(-125) = 1.25$, $F_2'(p_2) = F_2'(-125) = -5$. Теперь можно получить оригинал функции $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \left(\frac{F_1(p_1)e^{p_1 t}}{F_2'(p_1)} + \frac{F_1(p_2)e^{p_2 t}}{F_2'(p_2)} \right) = \frac{2.5e^{0t}}{5} + \frac{1.25e^{-125t}}{(-5)}$$

$$\psi(t) = 0.5 - 0.25e^{-125t}$$

а затем и оригинал тока $i_2(t)$ по формуле:

$$i_2(t) = 2.5 - \psi(t) = 2.5 - 0.5 + 0.25e^{-125t} = 2 + 0.25e^{-125t}$$

➤ Получим оригинал тока $i_2(t)$ по теореме о вычетах:

$$i_2(p) = \frac{2.5}{p} - \frac{(0.01p + 2.5)}{p(0.04p + 5)}$$

Приведем оба слагаемых к общему знаменателю и упростим:

$$i_2(p) = \frac{2.5(0.04p + 5) - (0.01p + 2.5)}{p(0.04p + 5)} = \frac{0.09p + 10}{p(0.04p + 5)}$$

Найдем ток $i_2(t)$:

$$i_2(t) = i_2(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + i_2(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2}$$

$$i_2(t) = \frac{(0.09p + 10)(p - 0)e^{0t}}{p(0.04p + 5)} \Big|_{p=0} + \frac{(0.09p + 10)(p + 125)e^{-125t}}{p(0.04p + 5)} \Big|_{p=-125}$$

$$i_2(t) = \frac{10e^{0t}}{5} + \frac{(-11.25 + 10)e^{-125t}}{(-5)} = 2 + 0.25e^{-125t}$$

• Ток $i_3(t)$ можно искать разными способами: воспользовавшись первым уравнением из системы уравнений Кирхгофа, найти разность токов i_1 и i_2 , оперируя изображениями, а затем перейти к оригиналу; воспользоваться выражением (7), определить изображение этого тока и затем перейти к оригиналу удобным способом; найти непосредственно разность оригиналов токов i_1 и i_2 . Наиболее простыми представляются два последних:

➤ Изображение тока i_3 из выражения (7):

$$i_3(p) = \left(\frac{E}{p} - \frac{U_C(0)}{p} - i_1(p)r \right) pC$$

В упрощенном виде:

$$i_3(p) = 10^{-2} \left(\frac{-1.25}{0.01p + 1.25} \right)$$

Здесь при переходе к оригиналу также необходимо вспомнить свойство линейности: при умножении оригинала на постоянную величину на ту же величину умножается и изображение, и наоборот.

По теореме разложения: $p = -125$; $F_1(p) = -1.25$; $F_2' = 0.01$;

$$i_3(t) = \frac{(-1.25)e^{-125t}}{0.01} 10^{-2} = -1.25e^{-125t}$$

По теореме о вычетах:

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i_3(p)(p - p_1)e^{p_1t} \Big|_{p_1} = 10^{-2} \left[\frac{-1.25(p + 125)e^{-125t}}{10^{-2}(p + 125)} \right] \Big|_{p=-125} \\ &= -1.25e^{-125t} \end{aligned}$$

➤ Вычитая непосредственно оригиналы:

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i_1(t) - i_2(t) \\ i_3(t) &= 2 - e^{-125t} - (2 + 0.25e^{-125t}) = -1.25e^{-125t} \end{aligned}$$

Осталось определить напряжения на всех элементах этой схемы: U_C , U_{R_1} , U_{R_2} , U_r .

$$\begin{aligned} U_C &= U_{R_1} = R_1 i_2(t) = 40(2 + 0.25e^{-125t}) = 80 + 10e^{-125t} \\ U_r &= r i_1(t) = 10(2 - e^{-125t}) = 20 - 10e^{-125t} \end{aligned}$$

Напряжение на резисторе R_2 изменилось до 0 в момент коммутации и мы принимаем это изменение за мгновенное, как и сам процесс коммутации. Напряжение на резисторе R_1 до коммутации равно 40 В ($U_{R_1} = IR_1$), а после нее равно напряжению на емкости.

Ту же задачу можно решать и методом двух узлов. Это частный случай метода узловых потенциалов, когда схема имеет только два узла. Потенциал одного из них принимают равным нулю, потенциал второго находят по формуле:

$$\varphi = \frac{\sum_{k=1}^n \pm E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

Где G_k – проводимость k -той ветви, подходящей к узлу, E_k – ЭДС в k -той ветви.

Напряжение между двумя узлами $\varphi_A - \varphi_B = \varphi - 0 = \varphi$.

В данном случае это позволяет сразу найти напряжение U_C :

$$U_C(p) = \frac{\frac{E}{pr} + \frac{U_C(0)}{p} pC}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R_1} + pC}$$

Приводя знаменатель и упрощая, получим операторное изображение напряжения U_C :

$$U_C(p) = \frac{10^2(10 + 0.09p)}{p(0.1p + 12.5)}$$

Оригинал находим по теореме о вычетах: $F_1(p) = 10 + 0.09p$, $F_2(p) = 0.1p^2 + 12.5p$, $F_2' = 0.2p + 12.5$, корни знаменателя $p_1 = 0$, $p_2 = -12.5$, значения числителя F_1 и производной знаменателя F_2' : $F_1(p_1) = 10$, $F_1(p_2) = -1.25$, $F_2'(p_1) = 12.5$, $F_2'(p_2) = -12.5$, оригинал:

$$U_C(t) = 10^2 \left[\frac{10e^{0t}}{12.5} - \frac{1.25e^{-12.5t}}{(-12.5)} \right] = 80 + 10e^{-12.5t}$$

Рассмотрим случаи, когда в цепи несколько реактивных элементов.

Пример 2.

Дано: $L_6 = 0,8$ Гн, $L_5 = 0,4$ Гн, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 110$ Ом, $C = 80$ мкФ. Переменные состояния: $U_C(t)$, $i_L(t)$

Выходные переменные: $U_2, U_3, U_4, i_2, i_3, i_4$

Решить задачу операторным методом, схема цепи на рис. 5

Решение.

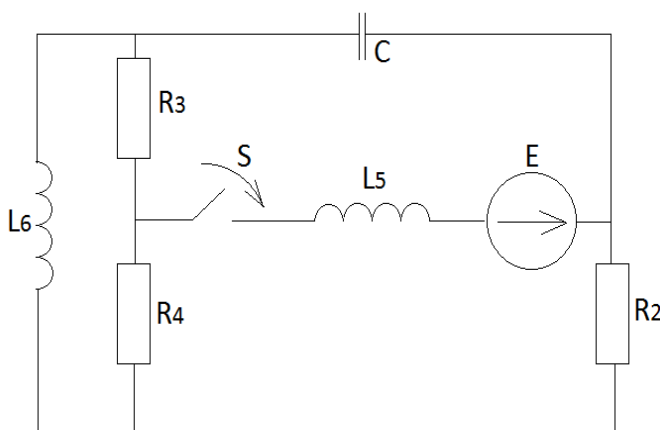


Рис.5

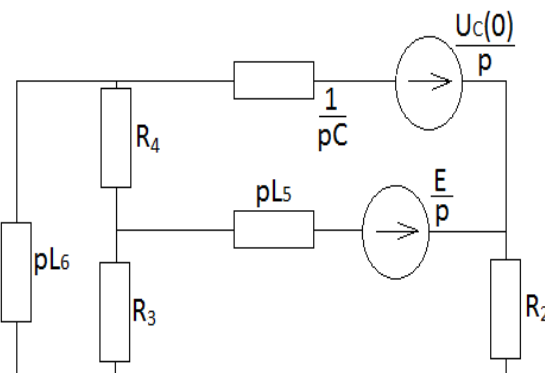


Рис.6

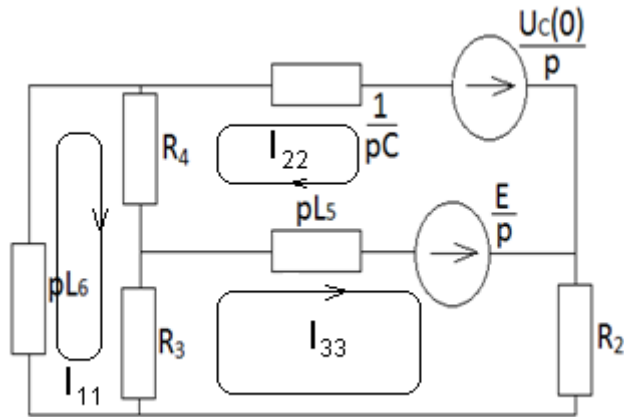


Рис.7

1. Составляем операторную схему замещения для цепи после коммутации, пользуясь таблицей 1 (рис.6):
2. Определим докоммутационное состояние цепи. До коммутации в данной схеме отсутствует источник энергии, поэтому $i_{L_5}(0) = 0$; $i_{L_6}(0) = 0$; $U_C(0) = 0$.
3. Данная схема содержит три реактивных элемента и шесть ветвей, поэтому искать токи, пользуясь уравнениями Кирхгофа, нерационально. Воспользуемся методом контурных токов для нахождения операторных изображений токов. Уравнения, составленные по рисунку 7:

$$I_{11}(pL_6 + R_3 + R_4) - I_{22}R_3 - I_{33}R_4 = 0 \quad (11)$$

$$I_{22}\left(pL_5 + \frac{1}{pC} + R_3\right) - I_{11}R_3 - pL_5I_{33} = -\frac{E}{p} \quad (12)$$

$$I_{33}(pL_5 + R_2 + R_4) - pL_5I_{22} - I_{11}R_4 = \frac{E}{p} \quad (13)$$

Выражаем контурный ток I_{11} из уравнения (11):

$$I_{11} = \frac{I_{22}R_3 + I_{33}R_4}{pL_6 + R_3 + R_4},$$

подставляем в (13):

$$I_{33}(pL_5 + R_2 + R_4) - pL_5I_{22} - \frac{(I_{22}R_3 + I_{33}R_4)R_4}{pL_6 + R_3 + R_4} = \frac{E}{p},$$

упрощаем и выражаем ток I_{22} :

$$I_{22} = \left[I_{33} \left(R_4 + R_2 + pL_5 - \frac{R_4^2}{pL_6 + R_3 + R_4} \right) - \frac{E}{p} \right] / \left[pL_5 + \frac{R_3R_4}{pL_6 + R_3 + R_4} \right].$$

Полученные таким образом токи подставляем в уравнение (12), и получаем уравнение относительно одной неизвестной, тока I_{33} :

$$\frac{\left[I_{33} \left(R_4 + R_2 + pL_5 - \frac{R_4^2}{pL_6 + R_3 + R_4} \right) - \frac{E}{p} \right] \left(pL_5 + \frac{1}{pC} + R_3 \right)}{\left[pL_5 + \frac{R_3 R_4}{pL_6 + R_3 + R_4} \right]} - \frac{I_{22} R_3^2}{pL_6 + R_3 + R_4} - \frac{I_{33} R_3 R_4}{pL_6 + R_3 + R_4} - pL_5 I_{33} = -\frac{E}{p}$$

После преобразований и упрощений полученного выражения операторное изображение тока I_{33} будет следующим:

$$I_{33} = \frac{E(16p^2 + 10^4 p + 1.625 * 10^6)}{p(60.8p^3 + 9840p^2 + 2.482 * 10^6 p + 1.25 * 10^8)}$$

Проверить правильность этого выражения можно, если отыскать корни знаменателя и сравнить с собственными числами матрицы A , найденной методом переменных состояния (см. стр. 47). Определим также два других контурных тока:

$$I_{22} = -\frac{E(p + 57.353)}{60.8p^3 + 9840p^2 + 2.482 * 10^6 p + 1.25 * 10^8}$$

$$I_{11} = \frac{E(1740p^2 + 1.1 * 10^6 p + 178.75 * 10^6)}{p(0.8p + 130)(60.8p^3 + 9840p^2 + 2.482 * 10^6 p + 1.25 * 10^8)}$$

После отыскания контурных токов нетрудно найти изображения токов в ветвях, однако полученные выражения громоздки, и отыскание оригиналов также потребует больших вычислений, поэтому здесь они не приводятся.

Пример 3.

В схеме второго порядка на рис. 8 после замыкания ключа рассчитать переходный процесс операторным методом. Дано: $L = 5$ мГн, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $C = 4$ мкФ, $J = 30$ А.

Переменные состояния: $U_C(t), i_L(t)$

Выходные переменные: напряжения на резисторах R_1 и R_2 - U_1, U_2

Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S .

Решение.

1. В соответствии с порядком расчета составим схему замещения цепи для послекоммутационного состояния (рис. 9).

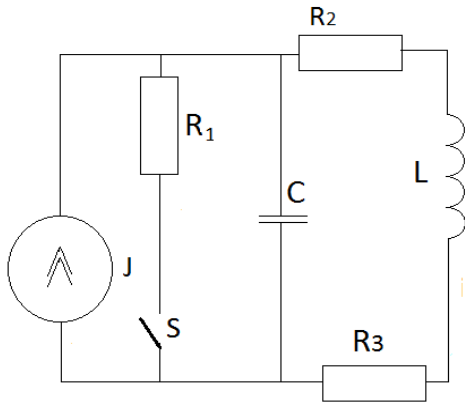


Рис. 8

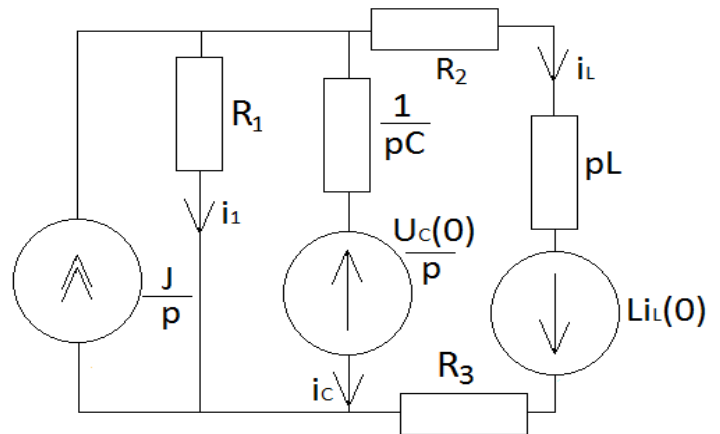


Рис. 9

2. Определим докоммутационное состояние цепи (токи в индуктивностях и напряжения на емкостях). Цепь для расчета представлена на рис.10. В цепи действует постоянный ток, поэтому заменяем индуктивность перемычкой, а емкость – разрывом цепи, и анализируем данную цепь.

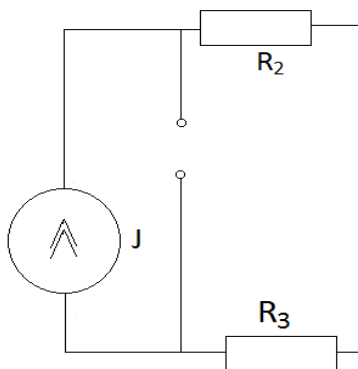


Рис. 10

$$U_2 = JR_2 = 300; U_3 = JR_3 = 600; i_L(0) = J = 30;$$

$$U_C(0) = J(R_2 + R_3) = 900.$$

Теперь, определив все параметры операторной схемы замещения, составим операторные уравнения (см. рис.9) и определим операторные изображения искомых величин.

$$i_1(p) + i_c(p) + i_L(p) = \frac{J}{p}$$

$$i_1(p)R_1 - i_c(p) \frac{1}{pC} = \frac{U_C(0)}{p}$$

$$\frac{i_c(p)}{pC} - i_L(p)(R_3 + pL + R_2) = -\frac{U_C(0)}{p} - Li_L(0)$$

Выразим ток $i_L(p)$ из третьего уравнения, а ток $i_c(p)$ – из второго, и подставим их в первое:

$$i_L(p) = \frac{\frac{U_C(0)}{p} + Li_L(0) + \frac{i_c(p)}{pC}}{R_3 + pL + R_2} = \frac{Li_L(0) + i_1(p)R_1}{R_3 + pL + R_2}$$

$$i_c(p) = \left[i_1(p)R_1 - \frac{U_C(0)}{p} \right] pC$$

$$i_1(p) + \left[i_1(p)R_1 - \frac{U_C(0)}{p} \right] pC + \frac{Li_L(0) + i_1(p)R_1}{R_3 + pL + R_2} = \frac{J}{p}$$

Таким образом, получили выражение, в котором все величины, кроме $i_1(p)$, известны. Выразим ток $i_1(p)$.

$$i_1(p) \left[1 + R_1 p C + \frac{R_1}{R_3 + pL + R_2} \right] = \frac{J}{p} + U_C(0)C - \frac{Li_L(0)}{R_3 + pL + R_2}$$

Домножим на $R_3 + pL + R_2$ числитель и знаменатель и получим выражение:

$$i_1(p) = \frac{\left[\frac{J}{p} + U_C(0)C \right] (R_3 + pL + R_2) - Li_L(0)}{(R_3 + pL + R_2)(1 + R_1 p C) + R_1}$$

Так как $i_C = i_1 R_1 p C - U_C(0)C$, то

$$i_C(p) = \frac{\left[\frac{J}{p} + U_C(0)C \right] (R_3 + pL + R_2) R_1 p C - Li_L(0) R_1 p C}{(R_3 + pL + R_2)(1 + R_1 p C) + R_1} - U_C(0)C$$

После упрощения данного выражения имеем:

$$i_C(p) = \frac{R_1 p C \left[\frac{J}{p} (R_3 + R_2 + pL) - Li_L(0) \right] - U_C(0)C [R_3 + R_2 + R_1 + pL]}{R_3 + R_2 + R_1 + pL + R_1 p C (R_3 + R_2 + pL)}$$

Операторное изображение тока i_1 :

$$i_1(p) = \frac{18 * 10^{-6} p^2 + 0.108 p + 900}{4 * 10^{-7} p^3 + 7.4 * 10^{-3} p^2 + 50 p}$$

$$i_C(p) = \frac{-18 * 10^{-6} p - 0.108}{4 * 10^{-7} p^2 + 7.4 * 10^{-3} p + 50}$$

4. Определим оригиналы функций. Воспользуемся теоремой разложения. Определим корни знаменателя, приравняв его к нулю. В первом случае имеем три корня, во втором два.

$$p_1 = -9250 + j6280, p_2 = -9250 - j6280, p_3 = 0$$

Поскольку корни являются комплексно-сопряженными (в первом случае к ним добавится нулевой корень), решение может быть найдено с помощью выражения (3).

Тогда ток $i_C(t)$ после преобразований получится:

$$i_C(t) = e^{-9250t} [50,16 \sin (6280t - 63^\circ)]$$

При анализе выражения для тока $i_1(p)$ видим, что в полиноме знаменателя слагаемое $b_0 = 0$. В этом случае при наличии n корней один корень уравнения $pF_3(p) = 0$ будет нулевым: $p_1 = 0$. Для этого частного случая теорема разложения принимает вид (4), и ток равен:

$$i_1(p) = 18 + e^{-9250t} [56.7 \sin (6280t + 28.5^\circ)]$$

Пример 4.

Решить задачу операторным методом для схемы второго порядка на рис. 11 после размыкания ключа. Дано: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 35$ Ом, $C = 5$ мкФ, $E = 50$ В.

Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S (ключ размыкается).

Решение.

1. В соответствии с порядком расчета составим схему замещения цепи для послекоммутационного состояния (рис.12).

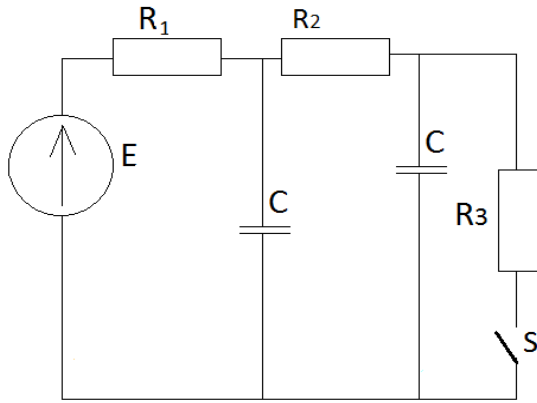


Рис. 11

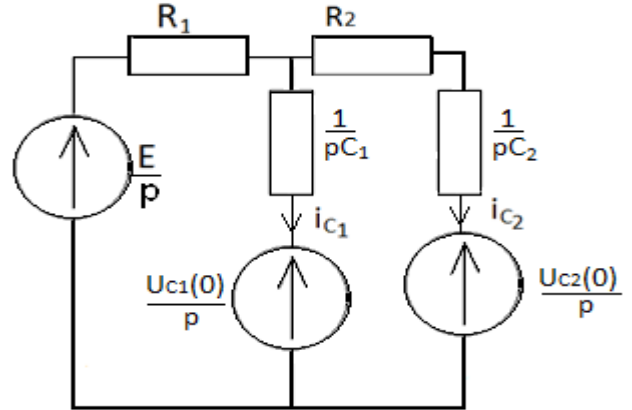


Рис. 12

2. Определим докоммутационное состояние цепи (напряжения на емкостях). Цепь для расчета представлена на рис.13.

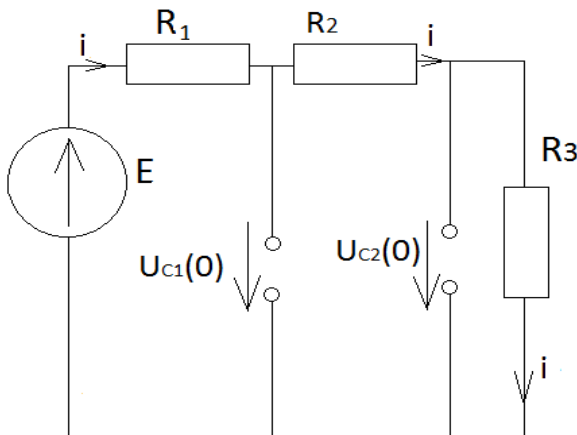


Рис. 13

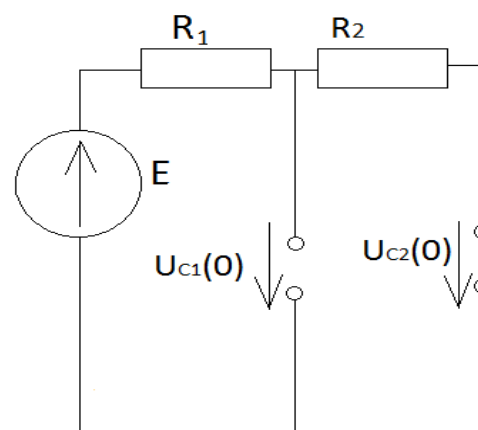


Рис. 14

В цепи действует постоянный ток, поэтому заменяем емкости разрывами цепи, и анализируем данную цепь. Ток в цепи равен

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{50}{85} = 0.6; \quad U_{C_2}(0) = U_{R_3} = iR_3 = 20.6,$$

$$U_{C_1}(0) = U_{R_2} + U_{R_3} = 39,$$

$$U_{R_1} = iR_1, \quad U_{R_2} = iR_2$$

После коммутации (рис.14) ток равен нулю, $U_{C_1} = U_{C_2} = E$.

3. Применим для решения данной задачи метод двух узлов.

Напряжение U_{ab} между точками а и в может быть найдено по формуле:

$$\varphi = \frac{\sum_{k=1}^n \pm E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

$$U_{ab} = \frac{\frac{U_{C_1}(0)}{p} pC_1 + \frac{U_{C_2}(0)}{p} \frac{1}{\left[\frac{1}{pC_2} + R_2\right]} + \frac{E}{pR_1}}{\frac{1}{R_1} + pC_1 + \frac{1}{\left[\frac{1}{pC_2} + R_2\right]}}$$

Упростив данное выражение и подставив числа, получим изображение напряжения U_{ab} :

$$U_{ab} = \frac{5.734 \cdot 10^{-3} p^2 + 133.81 p + 5 \cdot 10^5}{0.15 \cdot 10^{-3} p^3 + 3.5 p^2 + 10^4 p}$$

4. Определим оригинал этого напряжения, воспользовавшись теоремой разложения.

➤ Найдем корни знаменателя, приравняв его к нулю.

$$0.15 \cdot 10^{-3} p^3 + 3.5 p^2 + 10^4 p = 0$$

Корни: $p_1 = 0$, $p_2 = -20000$, $p_3 = -3333.3$

Числитель: $F_1 = 5.734 \cdot 10^{-3} p^2 + 133.81 p + 5 \cdot 10^5$

Знаменатель: $F_2 = 0.15 \cdot 10^{-3} p^3 + 3.5 p^2 + 10^4 p$

Производная знаменателя: $F_2' = 0.15 \cdot 10^{-3} \cdot 3p^2 + 3.5 \cdot 2p + 10^4$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины: $F_1(0) = 5 \cdot 10^5$, $F_2'(0) = 10^4$, $F_1(p_1) = 117709$, $F_2'(p_1) = -8331$, $F_1(p_2) = 115800$, $F_2'(p_2) = 50000$. Таким образом, $U_{ab}(t) = 50e^{0t} - 14e^{-3333t} + 2.3e^{-20000t}$. Проверим, подставив нулевое значение времени: $U_{ab}(t) = 50 - 14e^0 + 2.3e^0 = 38.2$ В. То же значение получено нами при анализе цепи до коммутации, а поскольку $U_{ab} = U_{C_1}(0)$, то для этого напряжения действует закон коммутации, и его значение до коммутации равно значению в первый момент после нее.

Подставив же бесконечное время, получим $U_{ab} = 50$ В, что также соответствует сделанному ранее анализу цепи после коммутации.

Определив оригинал данного напряжения, можно определить все остальные искомые величины:

$$U_{C_1} = U_{ab} = 50e^{0t} - 14e^{-3333t} + 2.3e^{-20000t}$$

$$i_{C_1} = C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} = 0.23e^{-3333t} - 0.23e^{-20000t}$$

$$E = U_1 + U_{ab}; U_1 = E - U_{ab} = 14e^{-3333t} - 2.3e^{-20000t}$$

$$i_1 = 0.7e^{-3333t} - 0.11e^{-20000t}$$

$$i_{C_2} = i_1 - i_{C_1} = 0.7e^{-3333t} - 0.11e^{-20000t} - (0.23e^{-3333t} - 0.23e^{-20000t}) = 0.47e^{-3333t} + 0.12e^{-20000t}$$

$$U_{R_2} = i_{C_2} R_2 = 14.1e^{-3333t} + 3.6e^{-20000t}$$

$$U_{C_2} = U_{ab} - U_{R_2} = 50 - 28.1e^{-3333t} - 1.3e^{-20000t}$$

Проверить это решение можно, найдя ток i_{C_2} через производную от последнего выражения:

$$i_{C_2} = C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} = 5 * 10^{-6} [(-28.1)(-3333)e^{-3333t} + (-1.3)(-2000)e^{-20000t}] = 0.47e^{-3333t} + 0.12e^{-20000t}$$

➤ Определим теперь оригинал напряжения U_{ab} , пользуясь теоремой о вычетах:

$$U_{ab} = \frac{5.734 * 10^{-3} p^2 + 133.81p + 5 * 10^5}{0.15 * 10^{-3} p^3 + 3.5p^2 + 10^4 p}$$

Корни знаменателя: $p_1 = 0$, $p_2 = -20000$, $p_3 = -3333.3$ Три корня – значит, вычетов тоже будет три.

$$U_{ab}(t) = U_{ab}(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + U_{ab}(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2} + U_{ab}(p)(p - p_3)e^{p_3 t} \Big|_{p_3}$$

$$U_{ab}(t) = \frac{(5.734 * 10^{-3} p^2 + 133.81p + 5 * 10^5)(p - 0)e^{0t}}{0.15 * 10^{-3} p^3 + 3.5p^2 + 10^4 p} \Big|_{p=0} + \frac{(5.734 * 10^{-3} p^2 + 133.81p + 5 * 10^5)(p + 20000)e^{-20000t}}{0.15 * 10^{-3} p^3 + 3.5p^2 + 10^4 p} \Big|_{p=-20000} + \frac{(5.734 * 10^{-3} p^2 + 133.81p + 5 * 10^5)(p + 3333)e^{-3333t}}{0.15 * 10^{-3} p^3 + 3.5p^2 + 10^4 p} \Big|_{p=-3333}$$

$$U_{ab}(t) = \frac{5 * 10^5}{10^4} + \frac{(5.734 * 10^{-3} p^2 + 133.81p + 5 * 10^5)e^{-20000t}}{0.15 * 10^{-3} p(p + 3333)} \Big|_{p=-20000} + \frac{(5.734 * 10^{-3} p^2 + 133.81p + 5 * 10^5)e^{-3333t}}{0.15 * 10^{-3} p(p + 20000)} \Big|_{p=-3333} = 50 + 2.3e^{-20000t} - 14e^{-3333t}$$

Пример 5.

Определить токи и напряжения в цепи второго порядка (рис.15) операторным методом. Переходный процесс возникает в цепи после

замыкания ключа. Дано: $R_1 = 12 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $L = 8 \text{ мГн}$, $J = 6 \text{ А}$.

Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S (ключ закрывается).

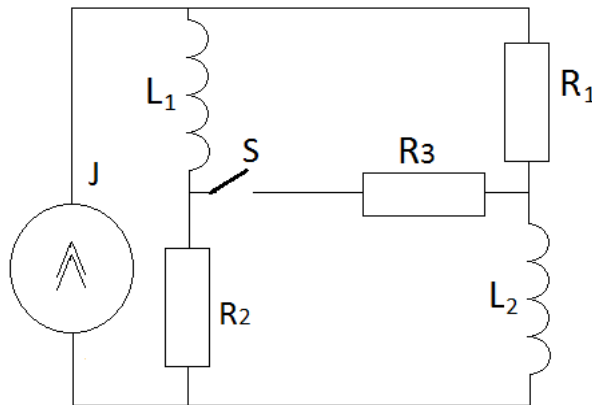


Рис. 15

2. Определим докоммутационное состояние цепи, чтобы найти токи в индуктивностях в нулевой момент времени, которые по закону коммутации сохраняют свое значение и в первый момент времени после коммутации. Для этого воспользуемся схемой на рис.17:

$$i_1 R_1 = i_2 R_2; i_1 + i_2 = J$$

Отсюда $i_{L_1}(0) = i_2(0) = 4 \text{ А}; i_{L_2}(0) = i_1(0) = 2 \text{ А}; U_{R_1}(0) = 24 \text{ В}; U_{R_2}(0) = 24 \text{ В}.$

Также проанализируем схему в новом установившемся режиме (после коммутации) – рис.18. Поскольку в установившемся режиме нет падения напряжения на индуктивных элементах цепи, то заменяем индуктивности отрезками проводов.

Таким образом, получаем параллельное соединение трех резисторов. $i_1 R_1 = i_2 R_2 = -i_3 R_3; i_1 + i_2 - i_3 = J$. Подставив численные значения, получим токи в цепи по окончании переходного процесса: $i_1 = 0.86; i_2 = 1.71; i_3 = -3.43$.

Решение.

1. Составим схему замещения данной цепи для послекоммутационного состояния (см. рис. 16).

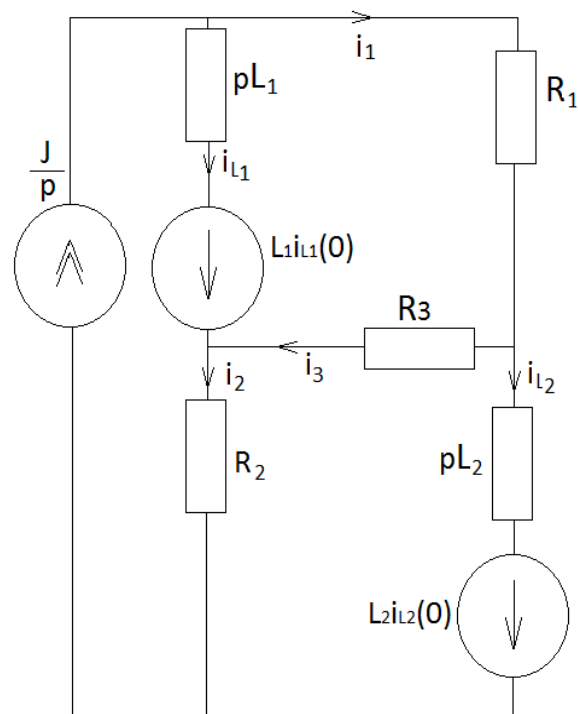


Рис. 16

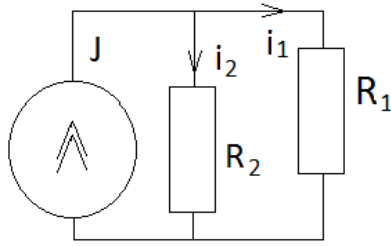


Рис. 17

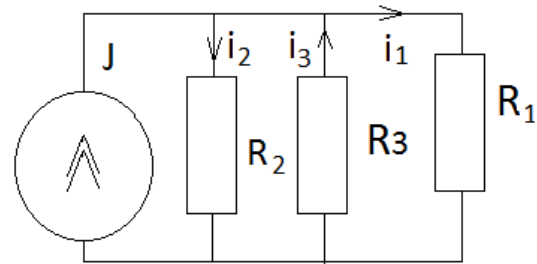


Рис. 18

3. Решать эту задачу удобнее, составив для нее уравнения Кирхгофа:

$$i_{L_1} + i_1 = J/p \quad (14)$$

$$i_{L_1} + i_3 - i_2 = 0 \quad (15)$$

$$i_1 - i_3 - i_{L_2} = 0 \quad (16)$$

$$i_1 R_1 + i_3 R_3 - i_{L_1} L_1 p = -L_1 i_{L_1}(0) \quad (17)$$

$$i_2 R_2 + i_3 R_3 - i_{L_2} L_2 p = -L_2 i_{L_2}(0) \quad (18)$$

Из уравнения (14) выразим i_{L_1} , подставим в (15), из (16) получим i_{L_2} :

$$i_{L_1} = J/p - i_1$$

$$J/p - i_1 + i_3 - i_2 = 0$$

$$i_{L_2} = i_1 - i_3 = J/p - i_2$$

Теперь можно исключить ток i_2 из контурных уравнений:

$$i_1 R_1 + i_3 R_3 - \left(\frac{J}{p} - i_1\right) L_1 p = -L_1 i_{L_1}(0)$$

$$\left(\frac{J}{p} - i_1 + i_3\right) R_2 + i_3 R_3 - (i_1 - i_3) L_2 p = -L_2 i_{L_2}(0)$$

Из уравнения (17) выражаем ток i_3 :

$$i_3 = \frac{-L_1 i_{L_1}(0) + J L_1 - i_1 (R_1 + L_1 p)}{R_3}, \text{ и подставляем в (18):}$$

$$\begin{aligned} & -i_1 (R_2 + L_2 p) + (R_2 + R_3 + L_2 p) \left[\frac{-L_1 i_{L_1}(0) + J L_1 - i_1 (R_1 + L_1 p)}{R_3} \right] + \frac{J R_2}{p} \\ & = -L_2 i_{L_2}(0) \end{aligned}$$

После упрощения данного выражения и подстановки известных чисел, получим изображение тока i_1 :

$$i_1(p) = \frac{128 * 10^{-6} p^2 + 192 * 10^{-3} p + 108}{64 * 10^{-6} p^3 + 192 * 10^{-3} p^2 + 126 p}$$

4. Определим оригинал тока.

➤ При использовании теоремы разложения корни знаменателя будут: $p_1 = 0$; $p_2 = -969.7$, $p_3 = -2030.3$. Числитель выражения: $F_1 = 128 *$

$10^{-6}p^2 + 192 * 10^{-3}p + 108$, знаменатель выражения: $F_2 = 64 * 10^{-6}p^3 + 192 * 10^{-3}p^2 + 126p$, производная знаменателя: $F_2' = 192 * 10^{-6}p^2 + 384 * 10^{-3}p + 126$. Определим значения числителя и производной знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = 108; F_1(p_2) = 42; F_1(p_3) = 245.8; F_2'(p_1) = 126; F_2'(p_2) = -65.8; F_2'(p_3) = 137.8$$

Тогда: $i_1(t) = 0.857 - 0.638e^{-969.7t} + 1.78e^{-2030.3t}$

Найдем изображения и оригиналы других искомым токов. Определим

изображение тока $i_3(p)$ по формуле: $i_3 = \frac{-L_1 i_{L_1}(0) + J L_1 - i_1(R_1 + L_1 p)}{R_3}$.

После упрощений получим выражение:

$$i_3(p) = \frac{-1152 * 10^{-3}p - 1296}{p[192 * 10^{-6}p^2 + 576 * 10^{-3}p + 378]}$$

Корни знаменателя будут те же. Определим оригинал тока. Числитель выражения: $F_1 = -1152 * 10^{-3}p - 1296$, знаменатель выражения: $F_2 = p[192 * 10^{-6}p^2 + 576 * 10^{-3}p + 378]$, производная знаменателя: $F_2' = 576 * 10^{-6}p^2 + 1152 * 10^{-3}p + 378$. Определим значения числителя и производной знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = -1296; F_1(p_2) = -179; F_1(p_3) = 1042; F_2'(p_1) = 378; F_2'(p_2) = -197.4; F_2'(p_3) = 413.3$$

Тогда: $i_3(t) = -3.428 + 0.91e^{-969.7t} + 2.52e^{-2030.3t}$

Зная оригиналы двух токов и оперируя ими, можем найти все остальные:

$$i_{L_2} = i_1 - i_3$$

$$i_{L_1} = J - i_1$$

$$i_2 = i_{L_1} + i_3$$

Имеем: $i_{L_2}(t) = 4.285 - 1.548e^{-969.7t} - 0.74e^{-2030.3t}$

$$i_{L_1}(t) = 5.143 + 0.638e^{-969.7t} - 1.78e^{-2030.3t}$$

$$i_2(t) = 1.715 + 1.548e^{-969.7t} + 0.74e^{-2030.3t}$$

Проверим результат на сходимость, подставив ноль в показатель экспоненты. Получим: $i_2(0) = 1.715 + 1.548 + 0.74 = 4 \text{ А}$

$$i_1(0) = 0.857 - 0.638 + 1.78 = 2 \text{ А}$$

$$i_1(\infty) = 0.857$$

$$i_2(\infty) = 1.715$$

$$i_3(\infty) = -3.4$$

➤ Определим оригиналы с помощью вычетов.

$$i_1(p) = \frac{128 * 10^{-6}p^2 + 192 * 10^{-3}p + 108}{64 * 10^{-6}p^3 + 192 * 10^{-3}p^2 + 126p}$$

Корни знаменателя те же: $p_1 = 0; p_2 = -969.7, p_3 = -2030.3$.

Тогда:

$$i_1(t) = i_1(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + i_1(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2} + i_1(p)(p - p_3)e^{p_3 t} \Big|_{p_3}$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \\ &= \frac{(128 * 10^{-6} p^2 + 192 * 10^{-3} p + 108)(p - 0)e^{0t}}{64 * 10^{-6} p^3 + 192 * 10^{-3} p^2 + 126p} \Big|_{p=0} \\ &+ \frac{(128 * 10^{-6} p^2 + 192 * 10^{-3} p + 108)(p + 969.7)e^{-969.7t}}{64 * 10^{-6} p^3 + 192 * 10^{-3} p^2 + 126p} \Big|_{p=-969.7} \\ &+ \frac{(128 * 10^{-6} p^2 + 192 * 10^{-3} p + 108)(p + 2030.3)e^{-2030.3t}}{64 * 10^{-6} p^3 + 192 * 10^{-3} p^2 + 126p} \Big|_{p=-2030.3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \\ &= \frac{108}{126} + \frac{(128 * 10^{-6} p^2 + 192 * 10^{-3} p + 108)(p + 969.7)e^{-969.7t}}{64 * 10^{-6} p(p + 2030.3)(p + 969.7)} \Big|_{p=-969.7} \\ &+ \frac{(128 * 10^{-6} p^2 + 192 * 10^{-3} p + 108)(p + 2030.3)e^{-2030.3t}}{64 * 10^{-6} p(p + 2030.3)(p + 969.7)} \Big|_{p=-2030.3} \\ &= 0.857 - 0.638e^{-969.7t} + 1.78e^{-2030.3t} \end{aligned}$$

$$i_3(p) = \frac{-1152 * 10^{-3} p - 1296}{p[192 * 10^{-6} p^2 + 576 * 10^{-3} p + 378]}$$

$$i_3(t) = i_3(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + i_3(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2} + i_3(p)(p - p_3)e^{p_3 t} \Big|_{p_3}$$

$$\begin{aligned} i_3(t) &= \\ &= \frac{(-1152 * 10^{-3} p - 1296)(p - 0)e^{0t}}{p[192 * 10^{-6} p^2 + 576 * 10^{-3} p + 378]} \Big|_{p=0} \\ &+ \frac{(-1152 * 10^{-3} p - 1296)(p + 969.7)e^{-969.7t}}{192 * 10^{-6} p[(p + 969.7)(p + 2030.3)]} \Big|_{p=-969.7} \\ &+ \frac{(-1152 * 10^{-3} p - 1296)(p + 2030.3)e^{-2030.3t}}{192 * 10^{-6} p[(p + 969.7)(p + 2030.3)]} \Big|_{p=-2030.3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3(t) &= -\frac{1296}{378} + \frac{(-1152 * 10^{-3} p - 1296)e^{-969.7t}}{192 * 10^{-6} p(p + 2030.3)} \Big|_{p=-969.7} \\ &+ \frac{(-1152 * 10^{-3} p - 1296)e^{-2030.3t}}{192 * 10^{-6} p(p + 969.7)} \Big|_{p=-2030.3} \\ &= -3.428 + 0.91e^{-969.7t} + 2.52e^{-2030.3t} \end{aligned}$$

Пример 6.

Определить токи и напряжения в цепи второго порядка (рис.19) операторным методом. Дано: $R_1 = R_4 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ Ф}$, $L = 0,3 \text{ Гн}$.

Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S (ключ закрывается).

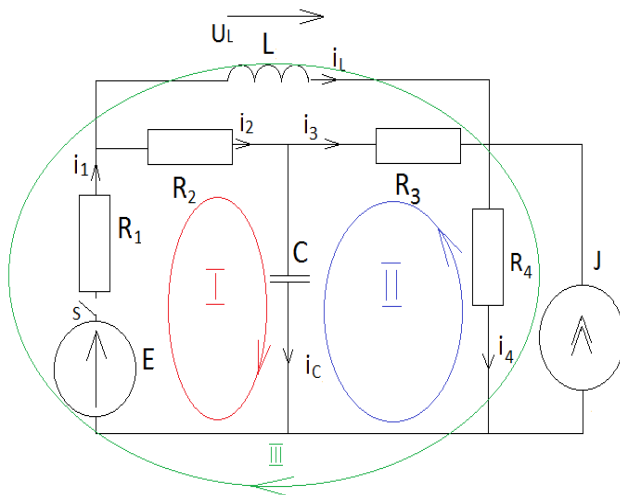


Рис. 19

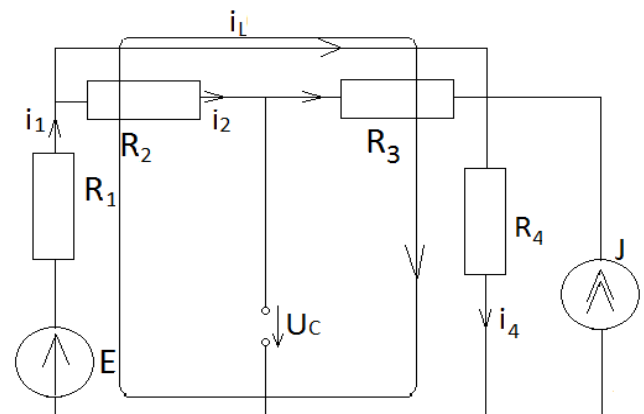


Рис. 20

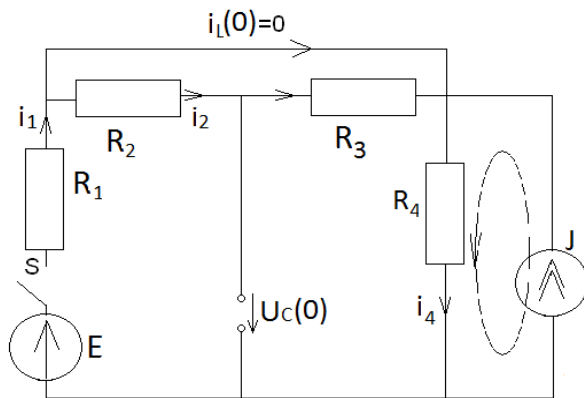


Рис. 21

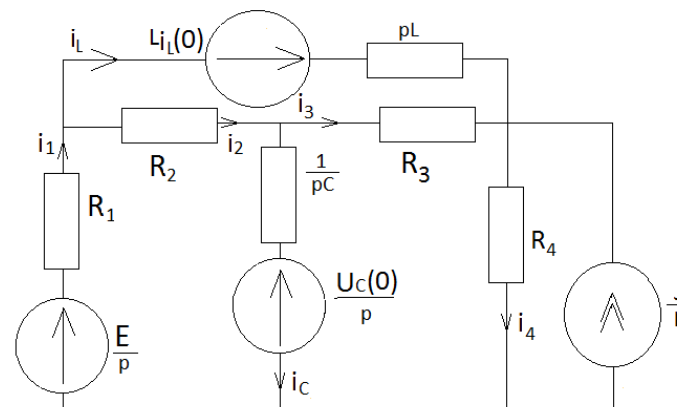


Рис. 22

Решение для этой схемы в данном пособии проведено дважды: сначала проанализирована работа схемы при наличии источника тока, затем – при равенстве тока источника нулю (при отсутствии источника).

Первое решение для схемы с источником. $E = 5 \text{ В}$, $J = 3 \text{ А}$

1. Составим схему замещения данной цепи для послекоммутационного состояния (рис.20). Резисторы R_2 и R_3 оказываются замкнуты накоротко перемычкой, поэтому ток через них не протекает, т.о. ток равен: $i_L(\infty) = \frac{E-E_J}{R_1+R_4} = 0.5 \text{ А}$. Напряжение $U_C = U_{R_4} = 0.5 \text{ В}$.

2. Определим докоммутационное состояние цепи. Для этого воспользуемся схемой на рис.21 Видно, что источник энергии отключен, поэтому все токи во всех ветвях, кроме ветви R_4 , нулевые. В ветви R_4 протекает ток источника.

3. Составим уравнения Кирхгофа для операторной схемы замещения (рис.22):

$$i_1 = i_2 + i_L \quad (19)$$

$$i_2 = i_3 + i_C \quad (20)$$

$$i_4 = i_3 + i_L + J/p \quad (21)$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 + \frac{i_C}{pC} = \frac{E}{p} - \frac{U_C(0)}{p} \quad (22)$$

$$i_3 R_3 + i_4 R_4 - \frac{i_C}{pC} = \frac{U_C(0)}{p} \quad (23)$$

$$-i_3 R_3 - i_2 R_2 + i_L pL = Li_L(0) \quad (24)$$

Тогда из уравнения (24) ток $i_L = \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2 + Li_L(0)}{pL}$, из (20) ток $i_C = i_2 - i_3$.

Подставим ток i_C в уравнение (22):

$$i_1 R_1 = \frac{E}{p} - \frac{i_C}{pC} - i_2 R_2 - \frac{U_C(0)}{p}$$

$$i_1 R_1 = \frac{E}{p} - \frac{1}{pC} (i_2 - i_3) - i_2 R_2 - \frac{U_C(0)}{p}$$

Тогда

$$i_1 = \frac{E - U_C(0)}{pR_1} - \frac{1}{pCR_1} (i_2 - i_3) - \frac{i_2 R_2}{R_1}$$

Найдем ток i_4 из (21): $i_4 = i_3 + i_L + J/p = i_3 + \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2}{pL} + J/p$.

Подставив найденные токи в уравнение (23), получим:

$$i_3 R_3 + R_4 \left[i_3 + \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2 + Li_L(0)}{pL} + J/p \right] - \frac{i_2 - i_3}{pC} = \frac{U_C(0)}{p}$$

После упрощения данного выражения получим:

$$\begin{aligned} i_3 (R_3 pLC + R_4 pLC + L + R_4 R_3 C) + i_2 (R_2 R_4 C - L) \\ = U_C(0) - JR_4 LC - LCR_4 i_L(0) \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь выразим ток i_1 через i_C и i_4 : $i_1 = i_4 + i_C$

Подставим в него все токи, полученные ранее в зависимости от i_2 и i_3 :

$$\begin{aligned} \frac{E - U_C(0)}{pR_1} - \frac{1}{pCR_1}(i_2 - i_3) - \frac{i_2 R_2}{R_1} \\ = i_2 - i_3 + i_3 + \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2 + Li_L(0)}{pL} + J/p \end{aligned}$$

Упрощая, получим:

$$\begin{aligned} i_3 \left[\frac{1}{CR_1} - \frac{R_3}{L} \right] = i_2 \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) p + \frac{R_2}{L} + \frac{1}{CR_1} \right] + J + i_L(0) \\ + \frac{U_C(0) - E}{R_1} \end{aligned} \quad (26)$$

Далее выражаем ток i_3 через ток i_2 и подставляем в выражение (25).

После упрощений и подстановки численных значений получим операторное изображение тока i_2 :

$$i_2 = -\frac{11 + 4p}{16p^2 + 88p + 40}$$

Теперь можно вычислить операторное изображение тока i_3 , подставив полученное изображение тока i_2 в выражение (26):

$$i_3 = \frac{9}{16p^2 + 88p + 40}$$

Изображение тока i_L найдем, воспользовавшись уравнением (24):

$$i_L = -\frac{40p + 20}{p(16p^2 + 88p + 40)} = -\frac{10p + 5}{p(4p^2 + 22p + 10)}$$

Изображение тока в емкости:

$$i_C = -\frac{4p + 20}{16p^2 + 88p + 40} = -\frac{p + 5}{4p^2 + 22p + 10}$$

Изображение тока i_4 :

$$i_4 = -\frac{48p^2 + 233p + 100}{p(16p^2 + 88p + 40)}$$

4. Получим теперь оригиналы токов.

➤ Ток i_3 :

$$i_3 = \frac{9}{16p^2 + 88p + 40}$$

Числитель: $F_1(p) = 9$, знаменатель: $F_2(p) = 16p^2 + 88p + 40$, производная знаменателя: $F_2'(p) = 32p + 88$. Корни знаменателя будут: $p_1 = -0.5$; $p_2 = -5$. Определим значения числителя и производной знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = 9; F_1(p_2) = 9; F_2'(p_1) = 72; F_2'(p_2) = -72$$

Тогда: $i_3(t) = 0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t}$

Ток i_2 :

$$i_2 = -\frac{11 + 4p}{16p^2 + 88p + 40}$$

Числитель: $F_1(p) = 4p + 11$, знаменатель: $F_2(p) = 16p^2 + 88p + 40$,
 производная знаменателя: $F_2'(p) = 32p + 88$. Корни знаменателя
 будут: $p_1 = -0.5$; $p_2 = -5$. Определим значения числителя и производной
 знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = 9; F_1(p_2) = -9; F_2'(p_1) = 72; F_2'(p_2) = -72$$

Тогда: $i_2(t) = -0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t}$

Ток i_L :

$$i_L = -\frac{10p + 5}{p(4p^2 + 22p + 10)}$$

Числитель: $F_1(p) = 10p + 5$, знаменатель: $F_2(p) = 4p^3 + 22p^2 + 10p$,
 производная знаменателя: $F_2'(p) = 12p^2 + 44p + 10$. Корни знаменателя
 будут: $p_1 = 0$, $p_2 = -0.5$; $p_3 = -5$. Определим значения числителя и
 производной знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = 5; F_1(p_2) = 0; F_1(p_3) = -45; F_2'(p_1) = 10; F_2'(p_2) = -9; F_2'(p_3) = 90$$

Тогда: $i_L(t) = -0.5 + 0.5e^{-5t}$

Для проверки получим напряжение U_L двумя способами:

$$U_L = U_2 + U_3 = i_2 R_2 + i_3 R_3 = 3(-0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t}) + 3(0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t}) = -0.75e^{-5t}$$

$$U_L = L \frac{di_L}{dt} = 0.3(0.5)(-5)e^{-5t} = -0.75e^{-5t}$$

Теперь получим остальные токи, оперируя полученными оригиналами:

$$i_4 = i_3 + i_L + J = 0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t} - 0.5 + 0.5e^{-5t} + 3 = 2.5 + 0.125e^{-0.5t} + 0.375e^{-5t}$$

$$i_C = i_2 - i_3 = -0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t} - 0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t} = -0.25e^{-0.5t}$$

$$i_1 = i_C + i_4 = -0.25e^{-0.5t} + 2.5 + 0.125e^{-0.5t} + 0.375e^{-5t}$$

$$i_1 = 2.5 - 0.125e^{-0.5t} + 0.375e^{-5t}$$

➤ Получим теперь те же оригиналы с помощью теоремы о вычетах:

$$i_3 = \frac{9}{16p^2 + 88p + 40}$$

$$i_3(t) = i_3(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + i_3(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2}$$

$$i_3(t) = \frac{9(p + 0.5)e^{-0.5t}}{16(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-0.5} + \frac{9(p + 5)e^{-5t}}{16(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-5}$$

$$i_3(t) = \frac{9e^{-0.5t}}{16 * 4.5} + \frac{9e^{-5t}}{16(-4.5)} = 0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t}$$

$$i_2 = -\frac{11 + 4p}{16p^2 + 88p + 40}$$

$$i_2(t) = i_2(p)(p - p_1)e^{p_1t} \Big|_{p_1} + i_2(p)(p - p_2)e^{p_2t} \Big|_{p_2}$$

$$i_2(t) = -\frac{(11 + 4p)(p + 0.5)e^{-0.5t}}{16(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-0.5} - \frac{(11 + 4p)(p + 5)e^{-5t}}{16(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-5}$$

$$i_2(t) = -\frac{(11 - 2)e^{-0.5t}}{16 * 4.5} - \frac{(11 - 20)e^{-5t}}{16(-4.5)} = -0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t}$$

$$i_L = -\frac{10p + 5}{p(4p^2 + 22p + 10)}$$

$$i_L(t) = i_L(p)(p - p_1)e^{p_1t} \Big|_{p_1} + i_L(p)(p - p_2)e^{p_2t} \Big|_{p_2} + i_L(p)(p - p_3)e^{p_3t} \Big|_{p_3}$$

Здесь к уже известным корням добавляется еще один: $p_1 = 0$, $p_2 = -0.5$; $p_3 = -5$.

$$i_L(t) = -\frac{10(p + 0.5)(p - 0)e^{0t}}{4p(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=0} - \frac{10(p + 0.5)(p + 0.5)e^{-0.5t}}{4p(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-0.5} - \frac{10(p + 0.5)(p + 5)e^{-5t}}{4p(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-5}$$

$$i_L(t) = -\frac{10e^{0t}}{4(p + 5)} \Big|_{p=0} - \frac{10(p + 0.5)e^{-0.5t}}{4p(p + 5)} \Big|_{p=-0.5} - \frac{10e^{-5t}}{4p} \Big|_{p=-5}$$

$$i_L(t) = -\frac{10}{20} - \frac{10e^{-5t}}{4(-5)} = -0.5 + 0.5e^{-5t}$$

Второе решение (источник тока отключен) $E = 1 \text{ В}$, $J = 0 \text{ А}$

1. Составим схему замещения данной цепи для послекоммутационного состояния (рис.20). Резисторы R_2 и R_3 оказываются замкнуты накоротко перемычкой, поэтому ток через них не протекает, т.о. ток равен: $i_L(\infty) = \frac{E}{R_1 + R_4} = 0.5 \text{ А}$. Напряжение $U_C = U_{R_4} = 0.5 \text{ В}$.

2. Определим докоммутационное состояние цепи. Для этого воспользуемся схемой на рис.21 Видно, что источник энергии отключен, поэтому все токи во всех ветвях нулевые.

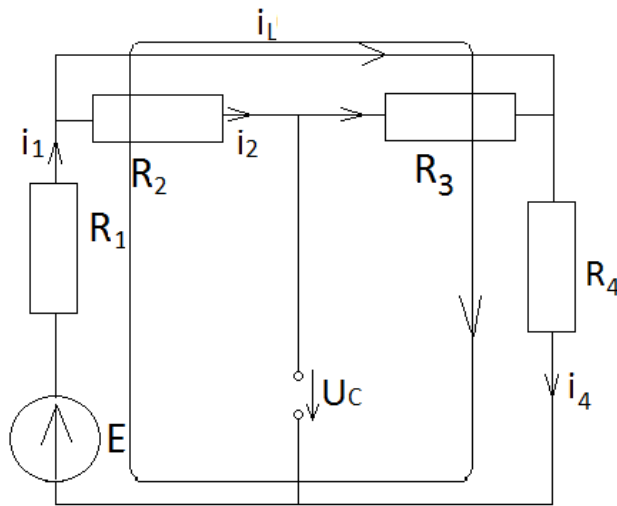


Рис. 23

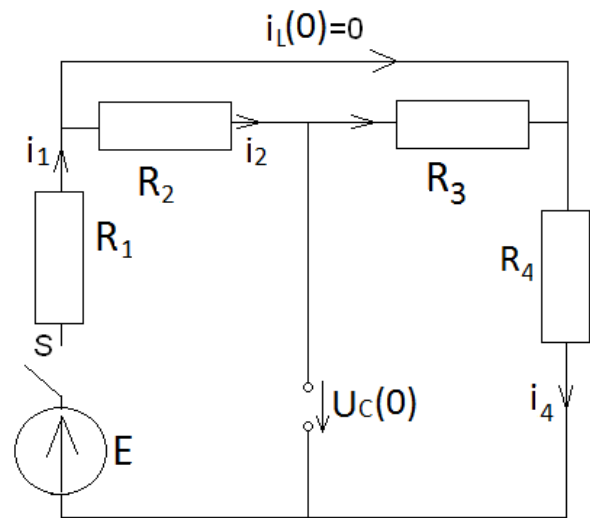


Рис. 24

3. Составим уравнения Кирхгофа для операторной схемы замещения (рис.22):

$$i_1 = i_2 + i_L, \quad i_2 = i_3 + i_C, \quad i_4 = i_3 + i_L$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 + \frac{i_C}{pC} = \frac{E}{p}$$

$$i_3 R_3 + i_4 R_4 - \frac{i_C}{pC} = 0$$

$$-i_3 R_3 - i_2 R_2 + i_L pL = 0$$

Тогда ток $i_L = \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2}{pL}$, ток $i_C = i_2 - i_3$. Подставим ток i_C в первое контурное уравнение:

$$i_1 R_1 = \frac{E}{p} - \frac{i_C}{pC} - i_2 R_2$$

$$i_1 R_1 = \frac{E}{p} - \frac{1}{pC} (i_2 - i_3) - i_2 R_2$$

Тогда

$$i_1 = \frac{E}{pR_1} - \frac{1}{pCR_1} (i_2 - i_3) - \frac{i_2 R_2}{R_1}$$

Найдем ток i_4 : $i_4 = i_3 + i_L = i_3 + \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2}{pL}$.

Подставив найденные токи во второе контурное уравнение, получим:

$$i_3 R_3 + R_4 \left[i_3 + \frac{i_3 R_3 + i_2 R_2}{pL} \right] - \frac{i_2 - i_3}{pC} = 0$$

После упрощения данного выражения получим:

$$i_3(R_3pLC + R_4pLC + L + R_4R_3C) + i_2(R_2R_4C - L) = 0 \quad (27)$$

Теперь выразим ток i_1 через i_c и i_4 : $i_1 = i_4 + i_c$

Подставим в него все токи, полученные ранее в зависимости от i_2 и i_3 :

$$\frac{E}{pR_1} - \frac{1}{pCR_1}(i_2 - i_3) - \frac{i_2R_2}{R_1} = i_2 - i_3 + i_3 + \frac{i_3R_3 + i_2R_2}{pL}$$

Упрощая, получим:

$$i_3 \left[\frac{1}{pCR_1} - \frac{R_3}{pL} \right] + \frac{E}{pR_1} = i_2 \left[1 + \frac{R_2}{pL} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{pCR_1} \right]$$

Далее выражаем ток i_2 через ток i_3 :

$$i_2 = i_3 \left[\frac{L - CR_1R_3 + ELC}{pLCR_1 + CR_1R_2 + pLCR_2 + L} \right] \quad (28)$$

и подставляем в выражение (27):

После упрощений и подстановки численных значений получим операторное изображение тока i_3 :

$$i_3 = -\frac{1.125}{2p^2 + 11p + 5}$$

Теперь можно вычислить операторное изображение тока i_2 , подставив полученное изображение тока i_3 в выражение (22):

$$i_2 = \frac{0.5p + 1.375}{2p^2 + 11p + 5}$$

Изображение тока i_L найдем, воспользовавшись третьим контурным уравнением:

$$i_L = \frac{5p + 2.5}{p(p + 0.5)(p + 5)}$$

4. Получим теперь оригиналы токов i_3 , i_2 , i_L .

➤ Ток i_3 :

$$i_3 = -\frac{1.125}{2p^2 + 11p + 5}$$

Числитель: $F_1(p) = -1.125$, знаменатель: $F_2(p) = 2p^2 + 11p + 5$,
 производная знаменателя: $F_2'(p) = 4p + 11$. Корни знаменателя
 будут: $p_1 = -0.5$; $p_2 = -5$. Определим значения числителя и производной
 знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = -1.125; F_1(p_2) = -1.125; F_2'(p_1) = 9; F_2'(p_2) = -9$$

Тогда: $i_3(t) = -0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t}$

Ток i_2 :

$$i_2 = \frac{0.5p + 1.375}{2p^2 + 11p + 5}$$

Числитель: $F_1(p) = 0.5p + 1.375$, знаменатель: $F_2(p) = 2p^2 + 11p + 5$,
 производная знаменателя: $F_2'(p) = 4p + 11$. Корни знаменателя

будут: $p_1 = -0.5$; $p_2 = -5$. Определим значения числителя и производной знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = 1.125; F_1(p_2) = -1.125; F_2'(p_1) = 9; F_2'(p_2) = -9$$

$$\text{Тогда: } i_2(t) = 0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t}$$

Ток i_L :

$$i_L = \frac{5p + 2.5}{p(2p^2 + 11p + 5)}$$

Числитель: $F_1(p) = 5p + 2.5$, знаменатель: $F_2(p) = 2p^3 + 11p^2 + 5p$, производная знаменателя: $F_2'(p) = 6p^2 + 22p + 5$. Корни знаменателя будут: $p_1 = 0$, $p_2 = -0.5$; $p_3 = -5$. Определим значения числителя и производной знаменателя при разных корнях:

$$F_1(p_1) = 2.5; F_1(p_2) = 0; F_1(p_3) = -22.5; F_2'(p_1) = 5; F_2'(p_3) = 45$$

$$\text{Тогда: } i_L(t) = 0.5 - 0.5e^{-5t}$$

Для проверки получим напряжение U_L двумя способами:

$$\begin{aligned} U_L = U_2 + U_3 &= i_2 R_2 + i_3 R_3 \\ &= 3(0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t}) + 3(-0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t}) \\ &= 0.75e^{-5t} \end{aligned}$$

$$U_L = L \frac{di_L}{dt} = 0.3(-0.5)(-5)e^{-5t} = 0.75e^{-5t}$$

Теперь получим остальные токи, оперируя полученными оригиналами:

$$\begin{aligned} i_4 &= i_3 + i_L = -0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t} + 0.5 - 0.5e^{-5t} \\ &= 0.5 - 0.125e^{-0.5t} - 0.375e^{-5t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_C &= i_2 - i_3 = 0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t} - 0.125e^{-0.5t} - 0.125e^{-5t} \\ i_C &= 0.25e^{-0.5t} \end{aligned}$$

$$i_1 = i_C + i_4 = 0.25e^{-0.5t} + 0.5 - 0.125e^{-0.5t} - 0.375e^{-5t}$$

$$i_1 = 0.5 + 0.125e^{-0.5t} - 0.375e^{-5t}$$

➤ Получим теперь те же оригиналы с помощью теоремы о вычетах:

$$i_3 = -\frac{1.125}{2p^2 + 11p + 5}$$

$$i_3(t) = i_3(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + i_3(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2}$$

$$i_3(t) = \frac{-1.125(p + 0.5)e^{-0.5t}}{2(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-0.5} + \frac{-1.125(p + 5)e^{-5t}}{2(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-5}$$

$$i_3(t) = \frac{-1.125e^{-0.5t}}{2 * 4.5} + \frac{-1.125e^{-5t}}{2(-4.5)} = -0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t}$$

$$i_2 = \frac{0.5p + 1.375}{2p^2 + 11p + 5}$$

$$i_2(t) = i_2(p)(p - p_1)e^{p_1 t} \Big|_{p_1} + i_2(p)(p - p_2)e^{p_2 t} \Big|_{p_2}$$

$$\begin{aligned}
 i_2(t) &= \frac{(0.5p + 1.375)(p + 0.5)e^{-0.5t}}{2(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-0.5} \\
 &\quad + \frac{(0.5p + 1.375)(p + 5)e^{-5t}}{2(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-5} \\
 i_2(t) &= \frac{(0.5(-0.5) + 1.375)e^{-0.5t}}{2 * 4.5} + \frac{(0.5(-5) + 1.375)e^{-5t}}{2(-4.5)} \\
 &= 0.125e^{-0.5t} + 0.125e^{-5t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i_L &= \frac{5p + 2.5}{p(2p^2 + 11p + 5)} \\
 i_L(t) &= i_L(p)(p - p_1)e^{p_1t} \Big|_{p_1} + i_L(p)(p - p_2)e^{p_2t} \Big|_{p_2} + i_L(p)(p \\
 &\quad - p_3)e^{p_3t} \Big|_{p_3}
 \end{aligned}$$

Здесь к уже известным корням добавляется еще один: $p_1 = 0$, $p_2 = -0.5$; $p_3 = -5$.

$$\begin{aligned}
 i_L(t) &= \frac{5(p + 0.5)(p - 0)e^{0t}}{2p(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=0} + \frac{5(p + 0.5)(p + 0.5)e^{-0.5t}}{2p(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-0.5} \\
 &\quad + \frac{5(p + 0.5)(p + 5)e^{-5t}}{2p(p + 5)(p + 0.5)} \Big|_{p=-5} \\
 i_L(t) &= \frac{5e^{0t}}{2(p + 5)} \Big|_{p=0} + \frac{5(p + 0.5)e^{-0.5t}}{2p(p + 5)} \Big|_{p=-0.5} + \frac{5e^{-5t}}{2p} \Big|_{p=-5} \\
 i_L(t) &= \frac{5}{10} + \frac{5e^{-5t}}{2(-5)} = 0.5 - 0.5e^{-5t}
 \end{aligned}$$

Как видно, изменение параметров источников привело к изменению вида изображения, при этом корни знаменателя остались неизменными. Именно они определяются структурой цепи, то есть количеством, видом и схемой включения элементов.

Метод переменных состояния.

Метод переменных состояния – метод, основанный на описании состояния электрической цепи системой дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных искомым переменных, которые называются переменными состояния. Под переменными состояния обычно понимают токи в индуктивностях и напряжения на емкостях, потому что через них можно определить любые другие напряжения и токи в цепи. Действительно, зная закон изменения этих переменных во времени, их всегда можно заменить источниками ЭДС и тока с известными параметрами. Остальная цепь оказывается резистивной,

а следовательно, всегда рассчитывается при известных параметрах источников. Кроме того, начальные значения этих переменных относятся к независимым, т.е. в общем случае рассчитываются проще других. Систему уравнений для первых производных переменных состояния цепи обычно называют уравнениями состояния. При расчете методом переменных состояния, кроме самих уравнений состояния, связывающих первые производные $\frac{d\psi}{dt}$ ($\frac{di_L}{dt}$) и $\frac{dq}{dt}$ ($\frac{dU_C}{dt}$) с самими переменными ψ (i_L) и q (U_C) и источниками внешних воздействий – ЭДС и тока, необходимо составить систему алгебраических уравнений, связывающих искомые величины с переменными состояния и источниками внешних воздействий. Таким образом, полная система уравнений в матричной форме записи имеет вид

$$X' = AX + BU \quad (29)$$

$$Y = CX + DU$$

Здесь X и X' - столбцовые матрицы соответственно переменных состояния и их первых производных по времени; U - матрица-столбец источников внешних воздействий; Y - столбцовая матрица выходных (искомых) величин; A - квадратная размерностью $n \times n$ (где n – число переменных состояния) матрица параметров, называемая матрицей Якоби; B - прямоугольная матрица связи между источниками и переменными состояния (число строк равно n , а столбцов – числу источников m); C - прямоугольная матрица связи переменных состояния с искомыми величинами (число строк равно числу искомых величин k , а столбцов – n); D - прямоугольная размерностью $k \times m$ матрица связи входа с выходом.

Начальные условия для уравнения (29) задаются вектором начальных значений $X(0)$.

Метод распространяется на непрерывные и на дискретные линейные и нелинейные цепи и системы. Метод переменных состояния часто применяется для расчета разветвленных цепей и цепей со многими входами и выходами.

Применение данного метода расчета потребует решения двух основных задач: 1) составления уравнений состояния цепи и 2) их решения.

Методы составления уравнений состояния цепи.

Существует три способа составления уравнений состояния (см. рис. 25). В данном пособии рассматриваются все указанные методы. Метод уравнений Кирхгофа и метод наложения более удобно применять для простых цепей с небольшим количеством реактивных элементов. Топологический метод является наиболее формализованным и больше всего подходит для расчета

переходных процессов в сложных схемах со многими реактивными элементами с помощью математических пакетов.



Рис. 25

Метод составления уравнений состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

Порядок расчета.

1. Выбирают переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях.

2. Формируют уравнения состояния. Для этого составляют систему уравнений Кирхгофа для послекоммутационной схемы и разрешают их относительно производных переменных состояния:

$\frac{di_L}{dt} = \underline{i}_L$; $\frac{du_C}{dt} = \underline{u}_C$. Уравнения записывают в канонической форме и в матричной форме при решении на ЭВМ.

3. Составляют алгебраические уравнения для выходных переменных (искомых токов ветвей и напряжений на элементах). Рассматривая схему, находят уравнения, связывающие переменные состояния и выходные переменные. Полученные уравнения записывают в матричной форме.

Топологический метод составления уравнений состояния.

Порядок расчета.

1. Составляется ориентированный граф схемы, на котором выделяется дерево, охватывающее все конденсаторы и источники напряжения (ЭДС). Резисторы включаются в дерево по необходимости: для охвата деревом всех узлов. В ветви связи включаются катушки индуктивности, источники тока и оставшиеся резисторы.

2. Осуществляется нумерация ветвей графа (и элементов в схеме), проводимая в следующей последовательности: первыми нумеруются участки графа (схемы) с конденсаторами, затем резисторами,

включенными в дерево, следующими нумеруются ветви связи с резисторами и, наконец, ветви с индуктивными элементами.

3. Составляется таблица связи, описывающая соединение элементов в цепи. В первой строке таблицы перечисляются емкостные и резистивные элементы дерева, а также источники напряжения (ЭДС). В первом столбце перечисляются резистивные и индуктивные элементы ветвей связи, а также источники тока. Процедура заполнения таблицы заключается в поочередном мысленном замыкании ветвей дерева с помощью ветвей связи до получения контура с последующим обходом последнего согласно ориентации соответствующей ветви связи. Со знаком «+» записываются ветви графа, ориентация которых совпадает с направлением обхода контура, и со знаком «-» ветви, имеющие противоположную ориентацию.

4. По таблице связи (табл.3) составляются уравнения Кирхгофа, описывающие данную схему. Осуществляется расписывание таблицы по столбцам и по строкам. В первом случае получаются уравнения по первому закону Кирхгофа, во втором – по второму. При расписывании таблицы соединений по строкам напряжения на пассивных элементах необходимо брать со знаками, противоположными табличным.

Затем уравнения разрешаются относительно производных переменных состояния (которыми являются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях), и таким образом уравнения состояния формируются таким же способом, как и в предыдущем методе. Если схема имеет «неправильные» размещения: а) контура, состоящие только из ветвей с источниками ЭДС и емкостных ветвей или только из емкостных ветвей; б) узлы схемы, в которых стягиваются ветви либо только с источниками тока и индуктивностями, либо только ветви с индуктивностями; в) узлы схемы, к которым не подключено ни одной емкостной ветви или ветви с источником напряжения и в то же время подключено более одной резистивной ветви, иными словами, в число ветвей связи попадает емкостная ветвь, или в число ветвей дерева – ветвь, содержащая индуктивный элемент, то вычисление U_C и i_L потребует еще и решения систем линейных алгебраических уравнений.

5. Далее по необходимости составляются уравнения выходных переменных. Рассматривая схему, находят уравнения, связывающие переменные состояния и выходные переменные. Полученные уравнения записывают в матричной форме.

Формирование уравнений состояния методом наложения.

Порядок расчета.

1. Выбирают переменные состояния (которыми являются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях).

2. Для каждого индуктивного и емкостного элемента записывают выражения для напряжения и тока: $i_{C_1} = C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt}$;

.....

$$U_{L_1} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}$$

.....

Тогда в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i_{C_1} \\ \vdots \\ i_{C_d} \\ \dot{U}_{L_1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{L_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{C_1} \\ \vdots \\ \dot{U}_{C_d} \\ i_{L_1} \\ \vdots \\ i_{L_j} \end{bmatrix},$$

Или $\begin{bmatrix} i_C \\ U_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_C \\ i_L \end{bmatrix}$

3. В послекоммутационной схеме индуктивные элементы заменяют источниками тока, а емкостные элементы – источниками ЭДС. Затем, применяя свойство наложения (ток в любой ветви равен сумме составляющих токов от каждого из источников в отдельности) рассматривают частные схемы, в каждой из которых действует только один из источников, входящих в исходную схему: E, J, i_L, U_C . Суммируя частные решения для отдельных источников с учетом выбранных положительных направлений напряжений и токов, находим полные значения искомых величин.

4. Составляют систему уравнений для выходных переменных. Рассматривая схему, находят уравнения, связывающие переменные состояния и выходные переменные. Полученные уравнения записывают в матричной форме.

В каждом из приведенных примеров представлены все три указанных способа решения.

Пример 1.

Составить уравнения состояния и уравнения выходных переменных для схемы на рис. 2 после замыкания ключа. Дано: $E=100$ В, $r=10$ Ом, $R_1=40$ Ом, $R_2=50$ Ом, $C=1000$ мкФ.

Найти токи в ветвях и напряжения на всех элементах цепи при замыкании ключа: $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $U_{R1}(t)$, $U_{R2}(t)$, $U_C(t)$, $U_r(t)$.

Решение.

Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

В соответствии с порядком расчета:

1. Выбираем переменные состояния – напряжение на емкости (U_C)
2. Составляем уравнения Кирхгофа. Для этого обозначим направления токов в схеме и их номера (см. рис. 26).

Уравнения, описывающие данную схему:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_1 r + i_2 R_1 &= E \\ U_C - i_2 R_1 &= 0 \end{aligned}$$

Из данных уравнений следует:

$$i_2 = \frac{E - i_1 r}{R_1} = \frac{U_C}{R_1}$$

$$i_1 = \frac{E - U_C}{r}$$

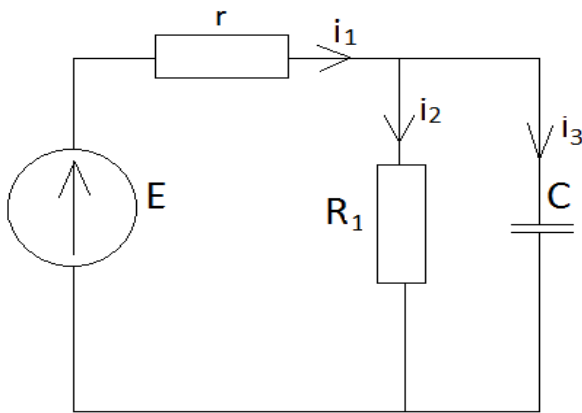


Рис. 26

$$i_3 = i_C = \frac{E - U_C}{r} - \frac{U_C}{R_1}$$

Отсюда уравнение состояния:

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} = \frac{E - U_C}{rC} - \frac{U_C}{R_1 C}}$$

Или

$$\frac{dU_C}{dt} = U_C \left[-\frac{1}{rC} - \frac{1}{R_1 C} \right] + \frac{E}{rC}$$

Матрицы X и X':

$$X = [U_C]; X' = \left[\frac{dU_C}{dt} \right]$$

Коэффициенты матрицы A:

$$A_{11} = -\frac{R_1 + r}{CR_1 r}, A_{11} = -125$$

Данное собственное число совпадают с корнем характеристического уравнения (см. операторный метод).

Матрица В примет вид: $B = \begin{bmatrix} 1/rC \end{bmatrix}$

Матрица U: $U = [E]$.

3. Составляем уравнения для выходных переменных. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, вытекающими из уравнений Кирхгофа:

$$U_1 = i_1 r = E - U_C; U_2 = i_2 R_1 = U_C; i_1 = \frac{E - U_C}{r}; i_2 = \frac{U_C}{R_1};$$

$$i_3 = \frac{E - U_C}{r} - \frac{U_C}{R_1}$$

Столбцовая матрица выходных переменных (искомых величин):

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}; \text{ матрица } C \text{ будет иметь следующий вид: } C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{41} \\ C_{51} \end{bmatrix},$$

Где $C_{11} = -1$; $C_{21} = 1$; $C_{31} = -\frac{1}{r}$; $C_{41} = \frac{1}{R_1}$; $C_{51} = -\frac{R_1+r}{R_1 r}$.

Матрица D: $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \\ 0 \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix}$

Составим уравнения состояния топологическим методом.

В данной схеме неправильные размещения отсутствуют.

1. Составляем ориентированный граф схемы. Включаем C- и E- ветви в дерево, а R- ветви - в число ветвей связи. Направленность ветвей связи и ветвей дерева выбрана в соответствии с ранее выбранным направлением токов в исходной схеме. Прямыми изображены ветви дерева, дугами – ветви связи. Каждый элемент при формировании графа представляет собой отдельную ветвь (см. рис. 27).

2. Нумеруем ветви графа: 11-емкость, 22 – малый резистор r, 33 – резистор R_1 .

3. Составляем таблицу связи: первая строка – ветви дерева, первый столбец – ветви связи.

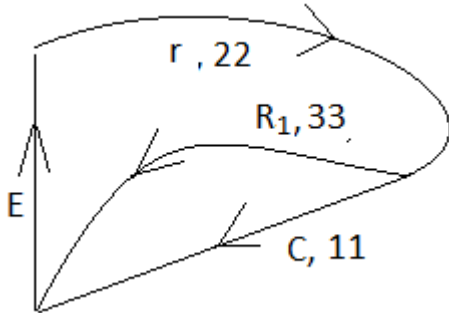


Рис. 27

	11	E
22	1	1
33	-1	0

Запишем уравнения Кирхгофа для данной таблицы связи:

$$i_{11} = i_{22} - i_{33}, \text{ т.е.}$$

$$i_C = i_1 - i_2,$$

$$U_{22} = -U_{11} + E, \text{ или } U_1 = -U_C + E, U_{33} = U_{11}, \text{ или } U_2 = U_C.$$

Видно, что уравнения совпали с ранее составленными непосредственно по законам Кирхгофа, поэтому вывод уравнений состояния не приводится (он выполнен выше).

Составим уравнения состояния методом наложения.

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (U_C).

2. Запишем выражения для напряжения и тока:

$i_C = C \frac{dU_C}{dt}$. Заменим емкость источником ЭДС (см. рис. 28). Оставляя в схеме один источник (неучитываемые источники ЭДС закорачиваются, а неучитываемые источники тока размыкаются), сформируем две частные схемы (см. рис.29 и 30). Схема рис. 29: $i_1' = i_3' = \frac{E}{r}$; $i_2' = 0$

Схема рис. 30: $i_3'' = i_1'' - i_2''$; $i_1''r = -i_2''R_1$; $i_2''R_1 = U_C$.

Таким образом, $i_C = i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{E}{r} - \frac{U_C}{r} - \frac{U_C}{R_1}$, и вновь получили уравнение состояния:

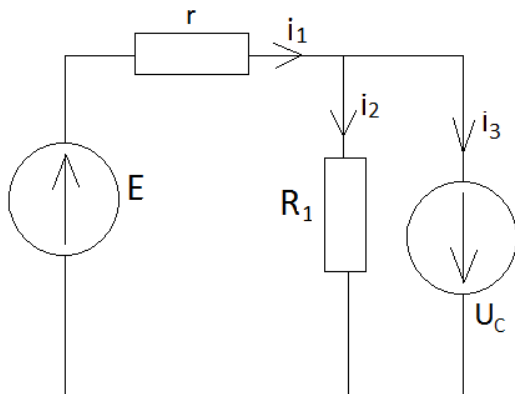


Рис. 28

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{E - U_C}{rC} - \frac{U_C}{R_1C}$$

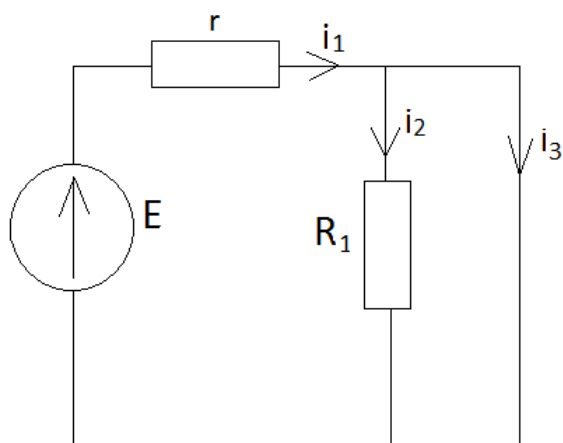


Рис. 29

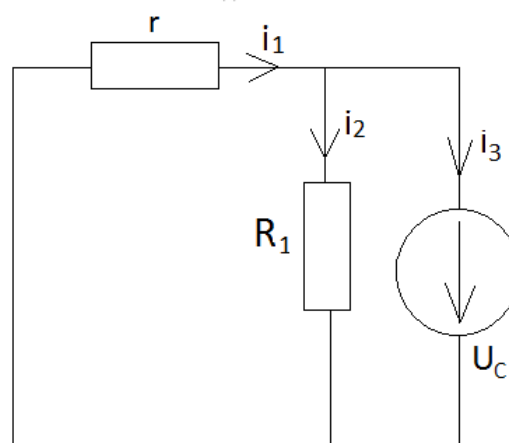


Рис. 30

Уравнения для выходных переменных получены выше.

Пример 2.

Составить уравнения состояния и уравнения выходных переменных для схемы на рис. 31 после замыкания ключа.

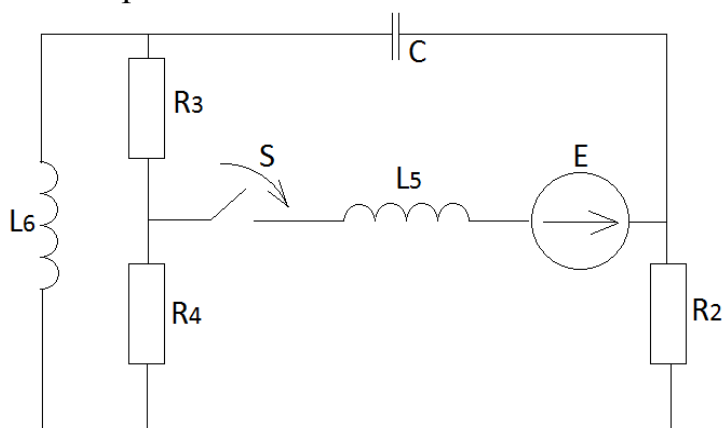


Рис. 31

Дано: $L_6 = 0,8$ Гн, $L_5 = 0,4$ Гн, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 110$ Ом, $C = 80$ мкФ.

Выходные переменные: $U_2, U_3, U_4, i_2, i_3, i_4$

Решение.

Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

В соответствии с порядком расчета:

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (i_{L_5}, i_{L_6}, U_C)

2. Составляем уравнения Кирхгофа. Для этого обозначим направления токов в схеме и их номера (см. рис. 32). В данной схеме четыре узла, значит, по первому закону Кирхгофа составим три уравнения:

$$i_{L_6} + i_C + i_3 = 0;$$

$$i_4 - i_3 - i_{L_5} = 0;$$

$$i_2 + i_{L_5} - i_C = 0.$$

По второму закону Кирхгофа составим еще три уравнения:

$$U_4 + U_3 - U_C - U_2 = 0;$$

$$U_{L_5} + U_C - U_3 = E;$$

$$U_{L_6} - U_C - U_2 = 0.$$

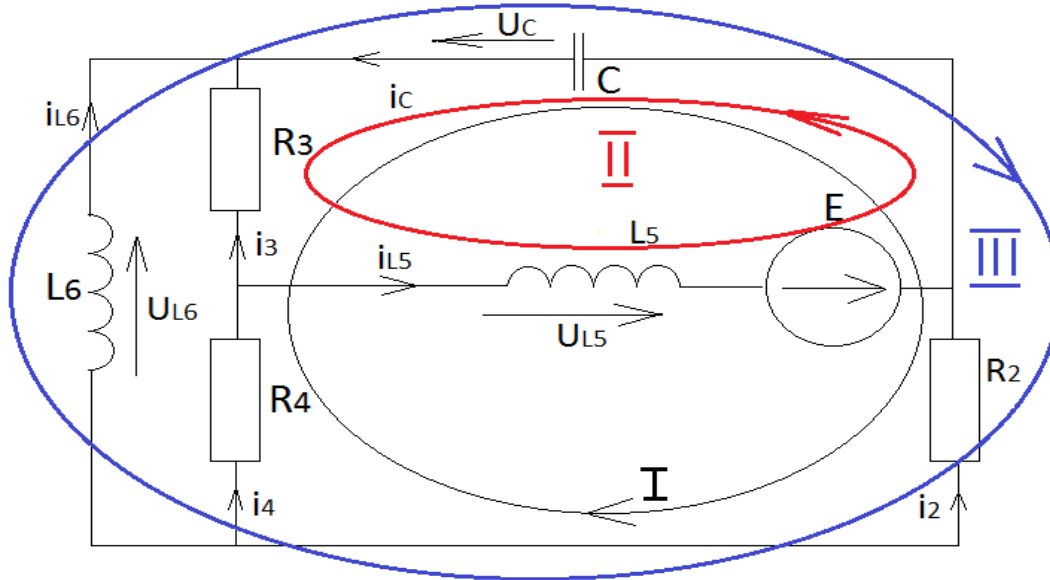


Рис. 32

Разрешая их относительно производных i_{L_5} , i_{L_6} , U_C , сформируем систему уравнений состояния. Вначале выразим i_C , U_{L_5} , U_{L_6} , а затем приведем уравнения к нормальной форме, воспользовавшись равенствами: $\frac{dU_C}{dt} =$

$$\frac{i_C}{C}, \frac{di_{L_5}}{dt} = \frac{U_{L_5}}{L_5}, \frac{di_{L_6}}{dt} = \frac{U_{L_6}}{L_6}.$$

Найдем i_C . Для этого используем уравнение:

$$U_C = U_{L_6} - U_2 = U_{L_6} - i_2 R_2 = U_{L_6} - R_2(i_C - i_{L_5})$$

$$i_C = \frac{1}{R_2}(-U_C + R_2 i_{L_5} + U_{L_6}) = \frac{1}{R_2}(-U_C + R_2 i_{L_5} + U_4 + U_3)$$

$$i_C = \frac{1}{R_2}(-U_C + R_2 i_{L_5} + R_4 i_4 + R_3 i_3) = \frac{1}{R_2}(-U_C + R_2 i_{L_5} + R_4(i_{L_5} - i_{L_6} - i_C + R_3 - i_{L_6} - i_C)).$$

Раскрываем скобки, упрощаем и выражаем i_C :

$$i_C = \frac{-U_C + (R_2 + R_4)i_{L_5} - (R_3 + R_4)i_{L_6}}{R_2 + R_3 + R_4}$$

Теперь получим выражение для U_{L_5} :

$$U_{L_5} = -U_C + U_3 + E = -U_C + R_3 i_3 + E = -U_C + R_3(-i_{L_6} - i_C) + E,$$

После подстановки в это выражение i_C получим:

$$U_{L_5} = -U_C + E - R_3 i_{L_6} - R_3 \left[\frac{-U_C + (R_2 + R_4)i_{L_5} - (R_3 + R_4)i_{L_6}}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

Упрощаем выражение:

$$U_{L_5} = U_C \left[-1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - i_{L_5} \left[\frac{R_3(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_6} \left[-R_3 + \frac{R_3(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + E$$

Выражение для U_{L_6} вытекает из равенства:

$$U_{L_6} = U_C + U_2 = U_C + R_2 i_2 = U_C + R_2(i_C - i_{L_5}).$$

После подстановки в это выражение i_C получим:

$$U_{L_6} = U_C - R_2 i_{L_5} + R_2 \left[\frac{-U_C + (R_2 + R_4)i_{L_5} - (R_3 + R_4)i_{L_6}}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

Упрощаем выражение:

$$U_{L_6} = U_C \left[1 - \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_5} \left[\frac{R_2(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2 \right] - i_{L_6} \left[\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

Приведем уравнения к нормальной форме:

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{U_C}{C(R_2 + R_3 + R_4)} + \frac{(R_2 + R_4)i_{L_5}}{C(R_2 + R_3 + R_4)} - \frac{(R_3 + R_4)i_{L_6}}{C(R_2 + R_3 + R_4)}}$$

$$\frac{di_{L_5}}{dt} = \frac{U_{L_5}}{L_5} = \frac{U_C}{L_5} \left[-1 + \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - \frac{i_{L_5}}{L_5} \left[\frac{R_3(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + \frac{i_{L_6}}{L_5} \left[-R_3 + \frac{R_3(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + \frac{E}{L_5}$$

$$\frac{di_{L_6}}{dt} = \frac{U_{L_6}}{L_6} = \frac{U_C}{L_6} \left[1 - \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + \frac{i_{L_5}}{L_6} \left[\frac{R_2(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2 \right] - \frac{i_{L_6}}{L_6} \left[\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

Матрицы X и X' : $X = \begin{bmatrix} U_C \\ i_{L_5} \\ i_{L_6} \end{bmatrix}$; $X' = \begin{bmatrix} \frac{dU_C}{dt} \\ \frac{di_{L_5}}{dt} \\ \frac{di_{L_6}}{dt} \end{bmatrix}$

Коэффициенты матрицы А (после упрощения):

$$A_{11} = -\frac{1}{C(R_2+R_3+R_4)}, \quad A_{12} = \frac{(R_2+R_4)}{C(R_2+R_3+R_4)}, \quad A_{13} = -\frac{(R_3+R_4)}{C(R_2+R_3+R_4)},$$

$$A_{21} = -\frac{1}{L_5} \left[\frac{R_2+R_4}{R_2+R_3+R_4} \right], \quad A_{22} = -\frac{1}{L_5} \left[\frac{R_3(R_2+R_4)}{R_2+R_3+R_4} \right], \quad A_{23} = -\frac{1}{L_5} \left[\frac{R_2R_3}{R_2+R_3+R_4} \right],$$

$$A_{31} = \frac{1}{L_6} \left[\frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4} \right], \quad A_{32} = -\frac{1}{L_6} \left[\frac{R_2R_3}{R_2+R_3+R_4} \right], \quad A_{33} = -\frac{1}{L_6} \left[\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4} \right].$$

Таким образом, подставив численные значения, можем записать матрицу А (матрицу Якоби) для данной задачи:

$$A = \begin{bmatrix} -65.7 & 11184.2 & -8552.6 \\ -2.24 & -44.7 & -15.8 \\ 0.86 & -7.9 & -51.3 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы А: $\lambda_1 = -51.27 + 179.4j$,
 $\lambda_2 = -51.27 - 179.4j$, $\lambda_3 = -59.16$

Матрица В примет вид: $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Матрица U: $U = [E]$

3. Составляем уравнения для выходных переменных. Для этого воспользуемся следующими соотношениями, вытекающими из уравнений Кирхгофа:

$$U_2 = U_{L_6} - U_C; \quad i_2 = U_2/R_2; \quad U_3 = U_{L_5} + U_C - E; \quad i_3 = U_3/R_3; \quad U_4 = U_{L_6} - U_3;$$

$$i_4 = U_4/R_4.$$

Тогда система уравнений для выходных переменных будет выглядеть так:

$$U_2 = U_C \left[-\frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_5} \left[\frac{R_2(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2 \right] - i_{L_6} \left[\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

$$i_2 = U_C \left[-\frac{1}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_5} \left[\frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} - 1 \right] - i_{L_6} \left[\frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

$$U_3 = U_C \left[\frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - i_{L_5} \left[\frac{R_3(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_6} \left[-R_3 + \frac{R_3(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

$$i_3 = U_C \left[\frac{1}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - i_{L_5} \left[\frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_6} \left[-1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

$$U_4 = U_C \left[\frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + i_{L_5} \left[\frac{(R_2 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2 \right] - i_{L_6} \left[-R_3 + \frac{(R_2 + R_3)(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

$$i_4 = U_C \left[\frac{1}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + \frac{i_{L_5}}{R_4} \left[\frac{(R_2 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2 \right] - \frac{i_{L_6}}{R_4} \left[-R_3 + \frac{(R_2 + R_3)(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]$$

Столбцовая матрица выходных переменных (искомых величин):

$$Y = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}; \text{ матрица } C \text{ будет иметь следующий вид: } C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} \end{bmatrix}, \text{ где}$$

коэффициенты: $C_{11} = -\frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4},$

$$C_{12} = \frac{R_2(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2; \quad C_{13} = -\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{21} = \frac{R_3}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{22} = -\frac{R_3(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4};$$

$$C_{23} = -R_3 + \frac{R_3(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{31} = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{32} = \frac{(R_2 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2;$$

$$C_{33} = R_3 - \frac{(R_2 + R_3)(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{41} = -\frac{1}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{42} = \frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} - 1;$$

$$C_{43} = -\frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{51} = \frac{1}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{52} = -\frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{53} = -1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4};$$

$$C_{61} = \frac{1}{R_2 + R_3 + R_4}; \quad C_{62} = \frac{(R_2 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} - R_2; \quad C_{63} = R_3 - \frac{(R_2 + R_3)(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Наконец, матрица D размером 6×1 будет нулевой, т.к. источник E не входит в состав ни одного уравнения выходной переменной.

Составим уравнения состояния топологическим методом.

В данной схеме имеются неправильные размещения: узлы, к которым стягиваются резистивные ветви R_3 и R_4 , ветви R_2 и R_3 . Поэтому вывод уравнений состояния потребует решения алгебраических уравнений.

1. Составляем ориентированный граф схемы, включая C- и E- ветви в дерево, а R- и L- ветви - по возможности в число ветвей связи. Направленность ветвей связи и ветвей дерева выбрана в соответствии с ранее выбранным направлением токов в исходной схеме. Прямыми изображены ветви дерева, дугами - ветви связи. Каждый элемент при формировании графа должен представлять собой отдельную ветвь (см. рис.33).

2. Пронумеруем ветви графа: ветвь 11 - емкость, ветви 22 и 33 - резисторы дерева, также в число ветвей дерева входит ветвь E. Таким образом, дерево

охватывает все узлы. Далее нумеруем ветви связи: 44 – резистивная ветвь, 55 и 66 – ветви с индуктивностями.

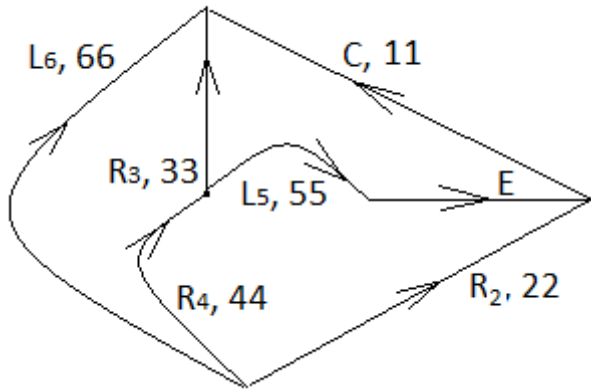


Рис. 33

3. Составляем таблицу связи: первая строка – ветви дерева 11, 22, 33, E, первый столбец – ветви связи 44, 55, 66. Таблица заполняется следующим образом. Например, ветвь связи 44 образует контур из ветвей 44, 33, 11, 22 (все остальные ветви образуемого этой ветвью контура должны быть ветвями дерева). Обход контура осуществляется по направлению ветви связи 44, т.е.

против часовой стрелки. Направление ветви 33 совпадает с выбранным направлением обхода, поэтому на пересечении строки 44 и столбца 33 будет стоять +1, направление же ветвей 11 и 22 не совпадает с направлением обхода, поэтому на пересечении строки 44 и соответствующих столбцов будут стоять -1. Следующий контур образовывает ветвь 55, и в него будут входить также ветви 11 (+1), 33 (-1) и E(+1).

	11	22	33	E
44	-1	-1	+1	0
55	+1	0	-1	+1
66	-1	-1	0	0

4. Полученная таблица связи позволяет записать уравнения Кирхгофа для данной схемы. Уравнения по первому закону получаются при расписывании таблицы по столбцам, по второму закону – при расписывании таблицы по строкам (при этом напряжения на пассивных элементах берут с обратным знаком). Запишем полученные по таблице уравнения:

$$i_{11} = -i_{44} + i_{55} - i_{66}, \text{ т.е. } i_C = -i_4 + i_{L5} - i_{L6},$$

$$i_{22} = -i_{44} - i_{66}, \text{ т.е. } i_2 = -i_4 - i_{L6},$$

$$i_{33} = i_{44} - i_{55}, \text{ т.е. } i_3 = i_4 - i_{L5},$$

$$U_{44} = U_{11} + U_{22} - U_{33}, \text{ или } U_4 = U_C + U_2 - U_3,$$

$$U_{55} = -U_{11} + U_{33} + E, \text{ или } U_{L5} = -U_C + U_3 + E,$$

$$U_{66} = U_{11} + U_{22}, \text{ или } U_{L6} = U_C + U_2.$$

Если сравнить полученные уравнения с ранее записанными уравнениями по Кирхгофу, то обнаружится совпадение или возможность получения выше записанных уравнений с помощью подстановок. Вывод уравнений состояния и уравнений выходных переменных уже выполнен выше (см. «Составление уравнений состояния с помощью уравнений Кирхгофа»)

Составим уравнения состояния методом наложения.

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (i_{L_5} , i_{L_6} , U_C).

2. Запишем выражения для напряжения и тока:

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}; U_{L_5} = L_5 \frac{di_{L_5}}{dt}, U_{L_6} = L_6 \frac{di_{L_6}}{dt}.$$

3. Заменяем индуктивности источниками тока, а емкости – источниками ЭДС (см. рис. 34). Оставляя в схеме один источник (неучитываемые источники ЭДС закорачиваются, а неучитываемые источники тока размыкаются), сформируем четыре частные схемы (см. рис. 35).

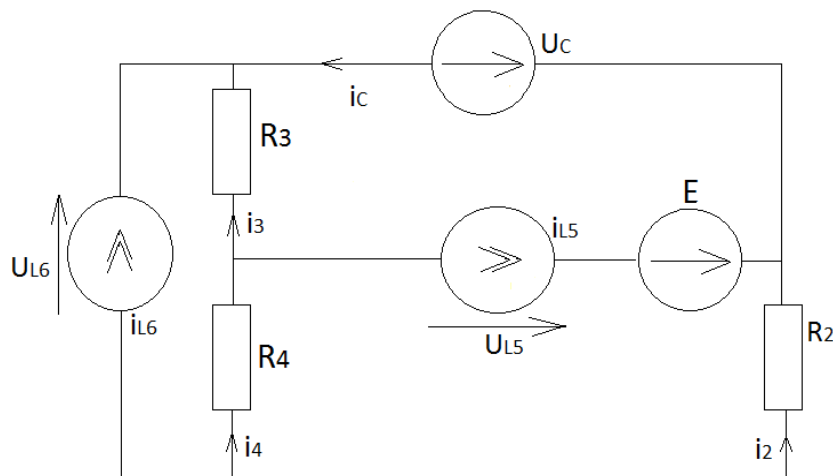


Рис. 34

Рассматривая эти схемы, запишем для каждой выражения, определяющие i_C , U_{L_5} , U_{L_6} .

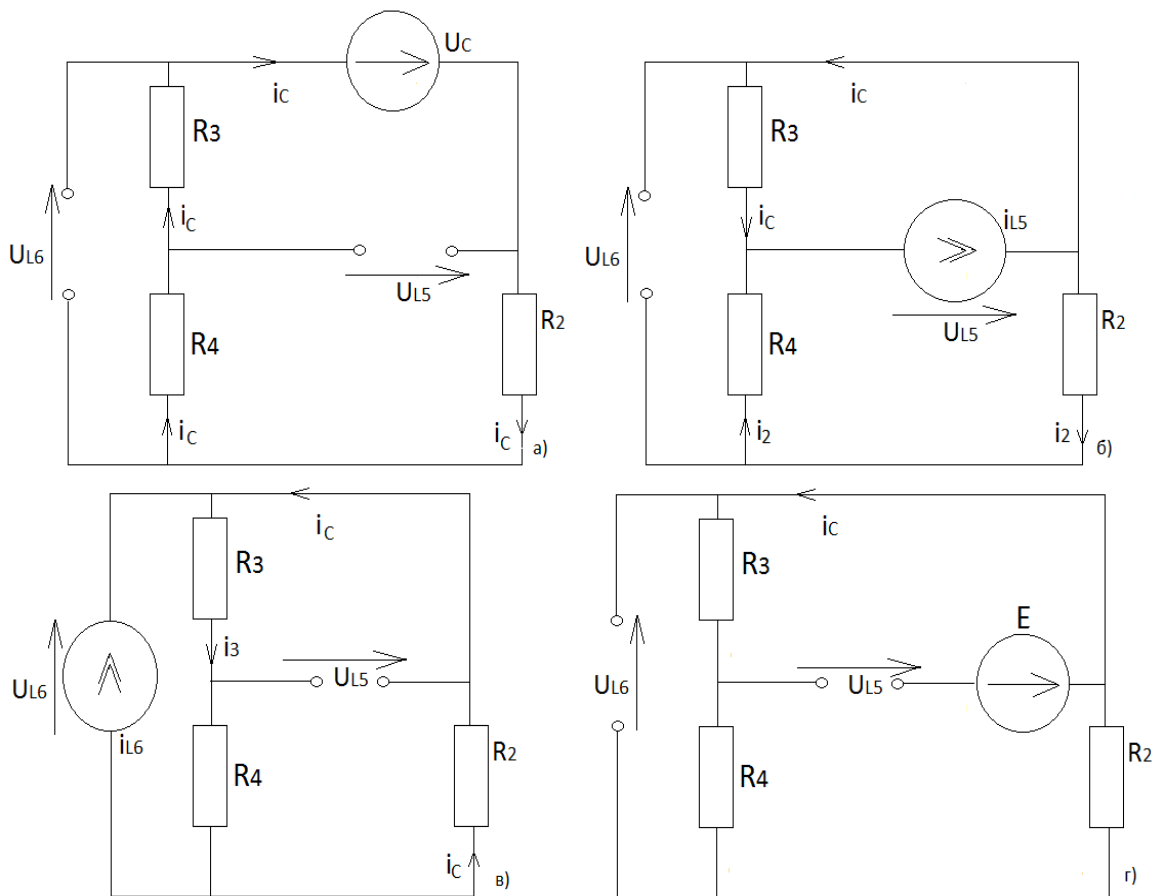


Рис. 35

Схема а). В схеме действует источник U_C , ток i_C' можно записать так:

$$i_C' = \frac{U_C}{R_2 + R_3 + R_4}, \quad \text{тогда} \quad U_{L_5}' = -i_C'(R_2 + R_4) = -\frac{(R_2 + R_4)U_C}{R_2 + R_3 + R_4}, \quad U_{L_6}' = i_C'(R_3 + R_4) = \frac{(R_3 + R_4)U_C}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Схема б). В схеме действует источник тока i_{L_5} , ток которого делится на i_C'' и i_2'' . Напряжение параллельных ветвей можно записать так: $i_C''R_3 = i_2''(R_2 + R_4)$, откуда $i_2'' = \frac{i_C''R_3}{R_2 + R_4}$. После подстановки в уравнение $i_{L_5} = i_C'' + i_2''$ ток $i_C'' = \frac{i_{L_5}}{1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4}}$. Напряжение $U_{L_5}'' = -i_C''R_3 = -\frac{R_3 i_{L_5}}{1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4}}$,

напряжение U_{L_6}'' найдем из выражения $U_{L_6}'' + i_C''R_3 - i_2''R_4 = 0$, подставив в него найденные ранее значения токов i_C'' и i_2'' : $U_{L_6}'' = \frac{i_C''R_3R_4}{R_2 + R_4} - i_C''R_3 = i_C''R_3 \left[\frac{R_4}{R_2 + R_4} - 1 \right] = \frac{i_{L_5}R_3}{1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4}} \left[\frac{R_4}{R_2 + R_4} - 1 \right]$.

Схема в). В схеме действует источник i_{L_6} , и уравнение по первому закону Кирхгофа запишем так: $i_3''' = i_{L_6} + i_C'''$. Напряжение параллельных ветвей можно записать следующим образом: $i_C'''R_2 = -i_3'''(R_3 + R_4)$, откуда

$i_3''' = -\frac{i_C''' R_2}{R_3 + R_4}$. После подстановки в уравнение $i_3''' = i_{L_6} + i_C'''$ ток

$i_C''' = -\frac{i_{L_6}(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$. Напряжение $U_{L_5}''' = -i_3''' R_3 = -\frac{R_3 i_{L_6}}{1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2}}$, напряжение

U_{L_6}''' найдем из выражения $U_{L_6}''' = i_C''' R_2 = -i_3'''(R_3 + R_4)$, подставив в него найденные ранее значения токов i_C''' или i_3''' : $U_{L_6}''' = -\frac{i_{L_6}(R_3 + R_4)}{1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2}}$.

Схема г). В схеме присутствует источник E , однако ветвь с источником разомкнута. Поэтому $i_C'''' = 0$, $U_{L_5}'''' = -i_C'''' R_3 + E = E$, $U_{L_6}'''' = -i_C''''(R_3 + R_4) = 0$.

Суммируя частные решения с учетом выбранных направлений токов и напряжений, получим:

$$i_C = -i_C' + i_C'' + i_C''' + i_C'''' = -\frac{U_C}{R_2 + R_3 + R_4} + \frac{i_{L_5}}{1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4}} - \frac{i_{L_6}(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4},$$

$$U_{L_5} = U_{L_5}' + U_{L_5}'' + U_{L_5}''' + U_{L_5}'''' = -\frac{(R_2 + R_4)U_C}{R_2 + R_3 + R_4} - \frac{R_3 i_{L_5}}{1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4}} - \frac{R_3 i_{L_6}}{1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2}} + E,$$

$$U_{L_6} = U_{L_6}' + U_{L_6}'' + U_{L_6}''' + U_{L_6}'''' = \frac{(R_3 + R_4)U_C}{R_2 + R_3 + R_4} + \frac{i_{L_5} R_3}{1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4}} \left[\frac{R_4}{R_2 + R_4} - 1 \right] - \frac{i_{L_6}(R_3 + R_4)}{1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2}}.$$

Найдем переменные состояния с помощью равенств $\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C}$, $\frac{di_{L_5}}{dt} = \frac{U_{L_5}}{L_5}$,

$$\frac{di_{L_6}}{L_6} = \frac{U_{L_6}}{L_6}.$$

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{U_C}{C(R_2 + R_3 + R_4)} + \frac{(R_2 + R_4)i_{L_5}}{C(R_2 + R_3 + R_4)} - \frac{(R_3 + R_4)i_{L_6}}{C(R_2 + R_3 + R_4)}}$$

$$\boxed{\frac{di_{L_5}}{dt} = \frac{U_{L_5}}{L_5} = -\frac{U_C}{L_5} \left[\frac{R_2 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - \frac{i_{L_5}}{L_5} \left[\frac{R_3(R_2 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - \frac{i_{L_6}}{L_5} \left[\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \right] + \frac{E}{L_5}}$$

$$\boxed{\frac{di_{L_6}}{dt} = \frac{U_{L_6}}{L_6} = \frac{U_C}{L_6} \left[\frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - \frac{i_{L_5}}{L_6} \left[\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} \right] - \frac{i_{L_6}}{L_6} \left[\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} \right]}$$

Коэффициенты матрицы A совпали с теми, что были получены при решении задачи с помощью уравнений Кирхгофа.

4. Уравнения для выходных переменных уже были выведены выше (см. п. «Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа»).

Пример 3.

Составить уравнения состояния и уравнения выходных переменных для схемы второго порядка на рис. 36 после замыкания ключа. Дано: $L = 5$ мГн, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $C = 4$ мкФ, $J = 30$ А.

Выходные переменные: напряжения на резисторах R_1 и R_2 - U_1, U_2

Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S.

Решение.

Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

В соответствии с порядком расчета:

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (i_L, U_C)

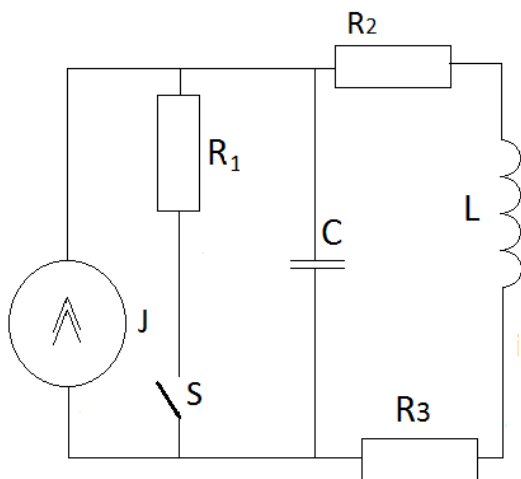


Рис. 36

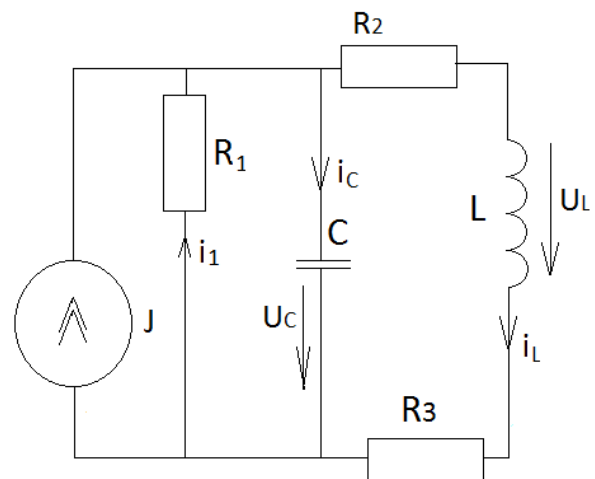


Рис. 37

2. Составляем уравнения Кирхгофа. Для этого обозначим направления токов в схеме и их номера (см. рис. 37). В данной схеме два узла, значит, по первому закону Кирхгофа составим одно уравнение:

$$J + i_1 - i_c - i_L = 0$$

По второму закону Кирхгофа составим еще два уравнения:

$$i_L(R_2 + R_3) + U_L + i_1 R_1 = 0$$

$$U_C = -i_1 R_1$$

Из трех данных уравнений непосредственно можно получить уравнения для i_c и U_L :

$$i_c = J - i_L - \frac{U_C}{R_1}, \quad U_L = -i_L(R_2 + R_3) + U_C, \quad \text{из которых}$$

вытекают уравнения состояния:

$$\boxed{\frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{CR_1} - \frac{i_L}{C} - \frac{J}{C}, \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{U_C}{L} - i_L \frac{R_2 + R_3}{L}}$$

Матрицы X и X': $X = \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix}; \quad X' = \begin{bmatrix} \frac{dU_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}$

Коэффициенты матрицы А :

$$A_{11} = -\frac{1}{CR_1}, \quad A_{12} = -\frac{1}{C},$$

$$A_{21} = \frac{1}{L}, \quad A_{22} = -\frac{(R_2+R_3)}{L}.$$

Матрица А численно: $A = \begin{bmatrix} -12500 & -250000 \\ 200 & -6000 \end{bmatrix}$, собственные числа:

$\lambda_1 = -9250 + 6279.93j$, $\lambda_2 = -9250 - 6279.93j$. Данные собственные числа совпадают с корнями характеристического уравнения (см. операторный метод).

Матрица В примет вид:

$$B = \begin{bmatrix} -1/C \\ 0 \end{bmatrix}$$

Матрица U: $U = [J]$.

3. Составляем уравнения для выходных переменных:

$$U_1 = -U_C, \quad U_2 = i_L R_2, \quad \text{т.о.}$$

Столбцовая матрица выходных переменных (искомых величин):

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad \text{матрица C будет иметь следующий вид: } C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}. \quad \text{Матрица}$$

D размером 2×1 будет нулевой, т.к. источник J не входит в состав уравнений выходных переменных.

Составим уравнения состояния топологическим методом.

В данной схеме нет неправильных размещений. Поэтому уравнения состояния получатся непосредственно после расписывания матрицы связи по столбцам и строкам.

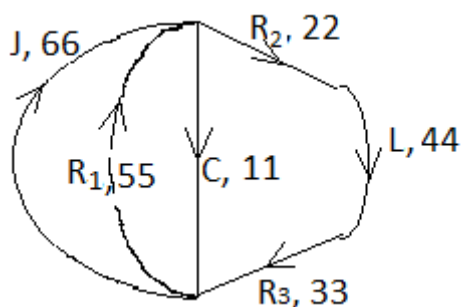


Рис. 38

ветвь (см. рис.38).

1. Составляем ориентированный граф схемы, включая С- ветвь в дерево, а L- и J-ветви - в число ветвей связи.

Направленность ветвей связи и ветвей дерева выбрана в соответствии с ранее выбранным направлением токов в исходной схеме. Прямыми изображены ветви дерева, дугами – ветви связи.

Каждый элемент при формировании графа должен представлять собой отдельную

2. Пронумеруем ветви графа: ветвь 11 – емкость, ветви 22 и 33 – резисторы дерева. Таким образом, дерево охватывает все узлы. Далее нумеруем ветви

связи: 44 – резистивная ветвь, 55 и 66 – ветви с индуктивностью и источником тока соответственно.

3. Составляем таблицу связи: первая строка – ветви дерева 11, 22, 33, первый столбец – ветви связи 44, 55, 66. Заполняем таблицу, обходя контура, образованные ветвью связи и ветвями дерева, по направлению ветви связи. Например, ветвь связи 44 образует контур из ветвей 44, 33, 11, 22. Обход контура осуществляется по направлению ветви связи 44, т.е. по часовой стрелке. Направление ветвей 22 и 33 совпадает с выбранным направлением обхода, поэтому на пересечении строки 44 и столбцов 22 и 33 будет стоять +1, направление же ветви 11 не совпадает с направлением обхода, поэтому на пересечении строки 44 и столбца 11 будет -1. Следующий контур образовывает ветвь 55, и в него будет входить только ветвь 11 (+1), и т.д. Получилась следующая таблица связи:

	11	22	33
44	-1	+1	+1
55	+1	0	0
66	+1	0	0

4. Данную таблицу распишем по столбцам (уравнения по первому закону Кирхгофа), и по строкам (по второму закону, напряжения на пассивных элементах берут со знаками, противоположными табличным):

$$i_c = -i_L + i_1 + J$$

$$i_2 = i_3 = i_L$$

$$U_L = U_C - U_2 - U_3$$

$$U_1 = -U_C$$

Из этих уравнений получаются уравнения для i_c и U_L :

$$i_c = -\frac{U_C}{R_1} - i_L + J$$

$$U_L = U_C - i_L(R_2 + R_3)$$

Откуда уравнения состояния:

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{CR_1} - \frac{i_L}{C} + \frac{J}{C}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{U_C}{L} - \frac{R_2 + R_3}{L} i_L$$

Составим уравнения состояния методом наложения.

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (i_L, U_C).

2. Запишем выражения для напряжения и тока:

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}, U_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

3. Заменяем индуктивность источником тока, а емкость – источником ЭДС (см. рис. 39). Оставляя в схеме один источник (неучитываемые источники ЭДС закорачиваются, а неучитываемые источники тока размыкаются), сформируем три частных схемы (см. рис. 40).

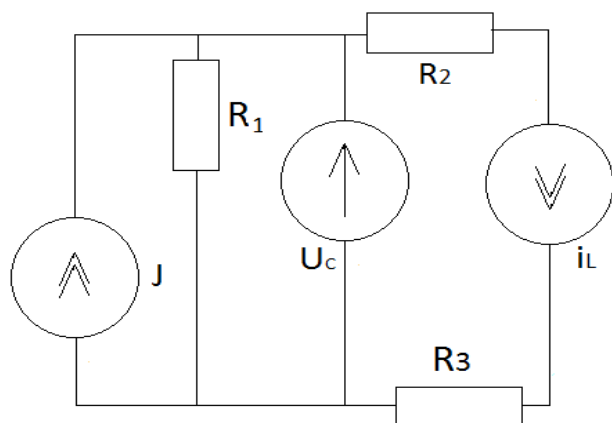


Рис. 39

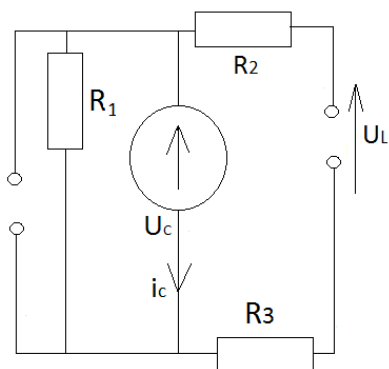


Рис. 40, а

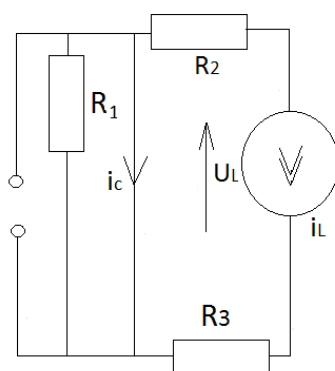


Рис. 40, б

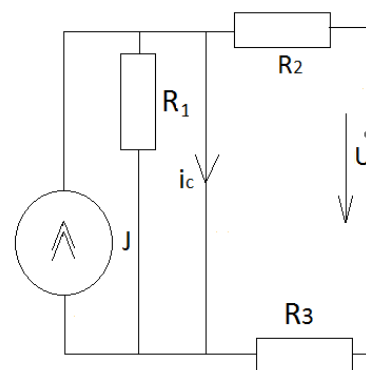


Рис. 40, в

Схема а). В схеме действует источник U_C , ток i_C' можно записать так:

$$i_C' = -\frac{U_C}{R_1}, \text{ тогда } U_L' = U_C.$$

Схема б). В схеме действует источник тока i_L , ток которого замыкается в контуре R_2 и R_3 . Ток через резистор R_1 равен нулю. Поэтому:

$$i_C'' = -i_L, U_L'' = -i_L(R_2 + R_3).$$

Схема в). В схеме действует источник J . Ток через резистор R_1 равен нулю. Можем записать: $i_C''' = J, U_L''' = 0$. Суммируя частные решения с учетом выбранных направлений токов и напряжений, получим:

$$i_C = i_C' + i_C'' + i_C''' = -\frac{U_C}{R_1} - i_L + J$$

$$U_L = U_L' + U_L'' - U_L''' = U_C - i_L(R_2 + R_3)$$

Откуда уравнения состояния:

$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{U_C}{CR_1} - \frac{i_L}{C} + \frac{J}{C}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{U_C}{L} - \frac{R_2 + R_3}{L} i_L$$

4. Уравнения для выходных переменных уже были выведены выше.

Пример 4.

Составить уравнения состояния и уравнения выходных переменных для схемы второго порядка на рис. 41 после размыкания ключа. Дано: $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 30 \text{ Ом}$, $R_3 = 35 \text{ Ом}$, $C = 5 \text{ мкФ}$, $E = 50 \text{ В}$.

Выходные переменные: напряжения на резисторах R_1 и R_2 - U_1 , U_2

Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S (ключ размыкается).

Решение.

Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

В соответствии с порядком расчета:

1. Выбираем переменные состояния – напряжения на емкостях (U_{C_1} , U_{C_2})

2. Составляем уравнения Кирхгофа. Для этого обозначим направления токов в схеме и их номера (см. рис. 42). В данной схеме два узла, значит, по первому закону Кирхгофа составим одно уравнение:

По второму закону составим два уравнения:

$$i_1 R_1 + U_{C_1} = E$$

$$i_{C_2} R_2 + U_{C_2} - U_{C_1} = 0$$

Из данных уравнений непосредственно можно получить уравнения для

$$i_{C_1} \text{ и } i_{C_2}: \quad i_{C_2} = \frac{U_{C_1}}{R_2} - \frac{U_{C_2}}{R_2}; \quad i_{C_1} = i_1 - i_{C_2} = \frac{E - U_{C_1}}{R_1} - \frac{U_{C_1}}{R_2} + \frac{U_{C_2}}{R_2},$$

Теперь можем записать уравнения состояния:

$$i_1 - i_{C_1} - i_{C_2} = 0$$

$$\frac{dU_{C_1}}{dt} = -\frac{U_{C_1}}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{U_{C_2}}{CR_2} + \frac{E}{CR_1}$$

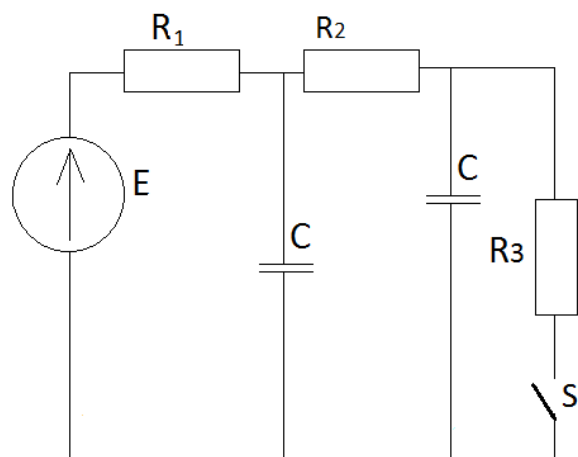


Рис. 41

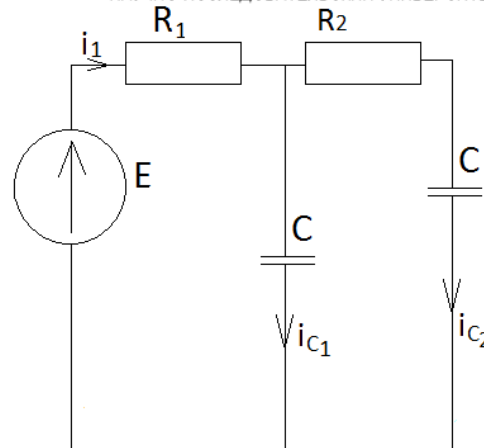


Рис. 42

$$\frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{U_{C_1}}{CR_2} - \frac{U_{C_2}}{CR_2}$$

Матрицы X и X': $X = \begin{bmatrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \end{bmatrix}$; $X' = \begin{bmatrix} \frac{dU_{C_1}}{dt} \\ \frac{dU_{C_2}}{dt} \end{bmatrix}$

Коэффициенты матрицы A :

$$A_{11} = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad A_{12} = \frac{1}{CR_2},$$

$$A_{21} = \frac{1}{CR_2}, \quad A_{22} = -\frac{1}{CR_2}.$$

Матрица A численно: $A = \begin{bmatrix} -16667 & 6667 \\ 6667 & -6667 \end{bmatrix}$, собственные числа: $\lambda_1 = -20000$, $\lambda_2 = -3333$. Данные собственные числа совпадают с корнями характеристического уравнения (см. операторный метод).

Матрица B примет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 1/CR_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Матрица U: $U = [E]$.

3. Составляем уравнения для выходных переменных:

$$U_1 = -U_{C_1} + E, \quad U_2 = U_{C_1} - U_{C_2}, \quad \text{т.о.}$$

Столбцовая матрица выходных переменных (искомых величин):

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad \text{матрица C будет иметь следующий вид: } C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{Матрица}$$

$$D \text{ размером } 2 \times 1: D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Составим уравнения состояния топологическим методом.

В данной схеме нет неправильных размещений. Поэтому уравнения состояния получатся непосредственно после расписывания матрицы связи по столбцам и строкам.

1. Составляем ориентированный граф схемы, включая С- и Е- ветви в дерево, а в число ветвей связи – только резистивные ветви. Направленность ветвей связи и ветвей дерева выбрана в соответствии с ранее выбранным направлением токов в исходной схеме. Прямыми изображены ветви дерева, дугами – ветви связи. Каждый элемент при формировании графа должен представлять собой отдельную ветвь (см. рис.43).

2. Пронумеруем ветви графа: ветви 11 и 22 – емкость, ветви 33, и 44 – резистивные ветви связи. Дерево охватывает все узлы.

3. Составляем таблицу связи: первая строка – ветви дерева 11, 22, Е, первый столбец – ветви связи 33, 44. Заполняем таблицу:

	11	22	Е
33	+1	0	+1
44	-1	+1	0

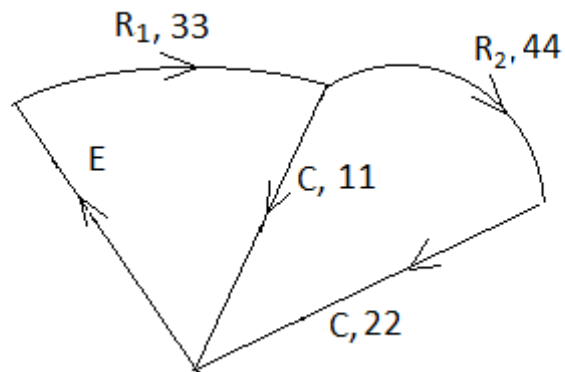


Рис. 43

4. Данную таблицу распишем по столбцам и по строкам (напряжения на пассивных элементах берут со знаками, противоположными табличным): $i_{C_1} = i_1 - i_{C_2}$; $U_1 = -U_{C_1} + E$; $U_2 = U_{C_1} - U_{C_2}$, с помощью подстановок получим уравнения токов i_{C_1} и i_{C_2} :

$i_{C_2} = i_2 = \frac{U_{C_1}}{R_2} - \frac{U_{C_2}}{R_2}$; $i_{C_1} = i_1 - i_{C_2} = \frac{E - U_{C_1}}{R_1} - \frac{U_{C_1}}{R_2} + \frac{U_{C_2}}{R_2}$, откуда уравнения состояния:

$$\frac{dU_{C_1}}{dt} = -\frac{U_{C_1}}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{U_{C_2}}{CR_2} + \frac{E}{CR_1}$$

$$\frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{U_{C_1}}{CR_2} - \frac{U_{C_2}}{CR_2}$$

Составим уравнения состояния методом наложения.

1. Выбираем переменные состояния – напряжения на емкостях (U_{C_1}, U_{C_2})

2. Запишем выражения для токов: $i_{C_1} = C \frac{dU_{C_1}}{dt}$, $i_{C_2} = C \frac{dU_{C_2}}{dt}$

3. Заменяем емкости источниками ЭДС (см. рис.44). Оставляя в схеме один источник (неучитываемые источники ЭДС закорачиваются), сформируем три частных схемы (см. рис. 45).

Схема а). В схеме действует источник E , ток i_{C_1}' можно записать так:

$$i_{C_1}' = \frac{E}{R_1}, \text{ ток } i_{C_2}' \text{ равен нулю.}$$

Схема б). В схеме действует источник U_{C_1} . Ток $i_2'' = i_{C_2}''$. Можно записать для параллельных ветвей:

$$i_1'' R_1 = -U_{C_1}'' = -i_{C_2}'' R_2; \quad i_1'' = -\frac{U_{C_1}''}{R_1}; \quad i_{C_2}'' = \frac{U_{C_1}''}{R_2}.$$

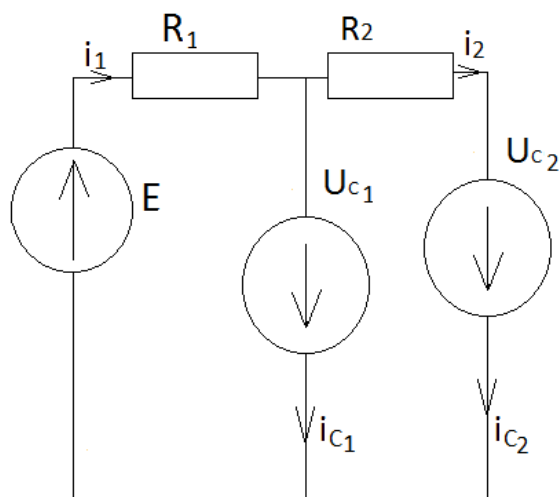


Рис. 44

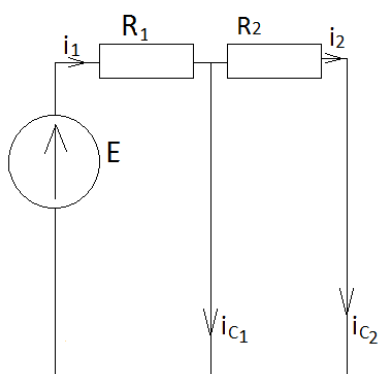


Рис. 45, а

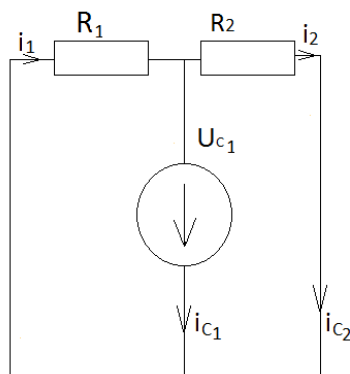


Рис. 45, б

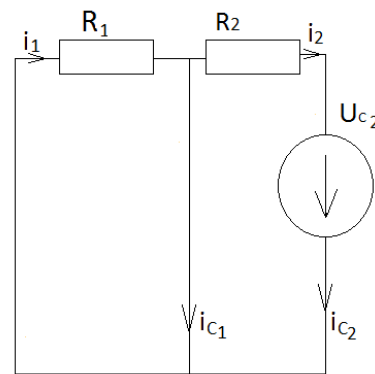


Рис. 45, в

По первому закону запишем: $i_{C_1}'' = i_1'' - i_{C_2}'' = -\frac{U_{C_1}}{R_1} - \frac{U_{C_1}}{R_2}$

Схема в). В схеме действует источник U_{C_2} . Ток через резистор R_1 равен нулю. Можем записать: $U_{C_2}''' = i_{C_1}''' R_2$; $i_{C_1}''' = U_{C_2} / R_2$;

По первому закону запишем: $i_{C_2}''' = -i_{C_1}''' = -\frac{U_{C_2}}{R_2}$

Суммируя частные решения с учетом выбранных направлений токов и напряжений, получим:

$$i_{C_1} = i'_{C_1} + i''_{C_1} + i'''_{C_1} = \frac{E}{R_1} - \frac{U_{C_1}}{R_1} - \frac{U_{C_1}}{R_2} + \frac{U_{C_2}}{R_2}$$

$$i_{C_2} = i'_{C_2} + i''_{C_2} + i'''_{C_2} = \frac{U_{C_1}}{R_2} - \frac{U_{C_2}}{R_2}$$

Откуда уравнения состояния:

$$\frac{dU_{C_1}}{dt} = -\frac{U_{C_1}}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{U_{C_2}}{CR_2} + \frac{E}{CR_1}$$

$$\frac{dU_{C_2}}{dt} = \frac{U_{C_1}}{CR_2} - \frac{U_{C_2}}{CR_2}$$

4. Уравнения для выходных переменных получены выше.

Пример 5.

Составить уравнения состояния и уравнения выходных переменных для схемы второго порядка на рис. 46 после замыкания ключа. Дано: $R_1 = 12 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $L_1 = L_2 = 8 \text{ мГн}$, $J = 6 \text{ А}$.

Выходные переменные: напряжения на резисторах R_1, R_2 и R_3 - U_1, U_2, U_3
Переходный процесс в цепи вызван перераспределением энергии между реактивными элементами после коммутации ключа S.

Решение.

Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

В соответствии с порядком расчета:

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях (i_{L_1}, i_{L_2}).
2. Составляем уравнения Кирхгофа. Для этого обозначим направления токов в схеме и их номера (см. рис. 47). В данной схеме четыре узла,

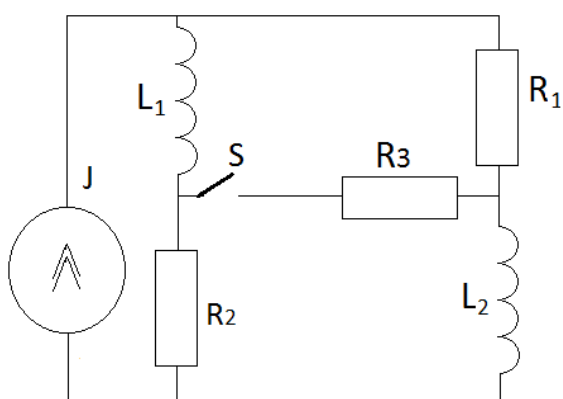


Рис. 46

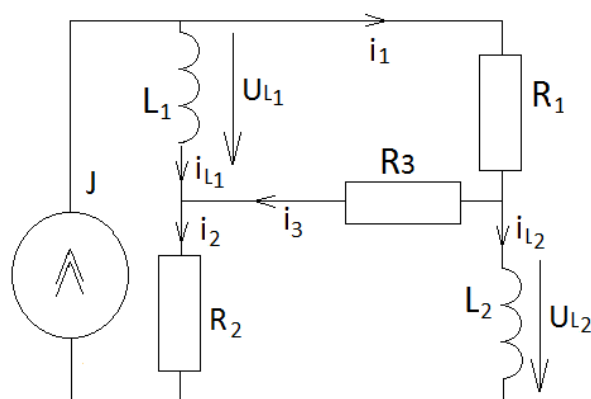


Рис. 47

значит, по первому закону Кирхгофа составим три уравнения:

$$J - i_{L_1} - i_1 = 0$$

$$i_{L_1} - i_2 + i_3 = 0$$

$$i_1 - i_3 - i_{L_2} = 0$$

По второму закону составим еще два уравнения:

$$U_{L_1} - U_3 - U_1 = 0$$

$$U_{L_2} - U_2 - U_3 = 0$$

Тогда:

$$U_{L_1} = U_1 + U_3 = R_1 i_1 + R_3 i_3 = R_1 (J - i_{L_1}) + R_3 (J - i_{L_1} - i_{L_2})$$

$$U_{L_2} = U_2 + U_3 = R_2 i_2 + R_3 i_3 = R_2 (J - i_{L_2}) + R_3 (J - i_{L_1} - i_{L_2})$$

Таким образом:

$$U_{L_1} = -i_{L_1} (R_1 + R_3) - R_3 i_{L_2} + J (R_1 + R_3)$$

$$U_{L_2} = -R_3 i_{L_1} - i_{L_2} (R_2 + R_3) + J (R_2 + R_3)$$

Уравнения состояния:

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{U_{L_1}}{L_1} = -\frac{i_{L_1}}{L_1} (R_1 + R_3) - \frac{i_{L_2} R_3}{L_1} + \frac{J}{L_1} (R_1 + R_3)$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{U_{L_2}}{L_2} = -\frac{i_{L_1} R_3}{L_2} - \frac{i_{L_2}}{L_2} (R_2 + R_3) + \frac{J}{L_2} (R_2 + R_3)$$

Матрицы X и X': $X = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$; $X' = \begin{bmatrix} \frac{di_{L_1}}{dt} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} \end{bmatrix}$

Коэффициенты матрицы A :

$$A_{11} = -\frac{(R_1 + R_3)}{L_1}, A_{12} = -\frac{R_3}{L_1},$$

$$A_{21} = -\frac{R_3}{L_2}, A_{22} = -\frac{(R_2+R_3)}{L_2}.$$

Матрица А численно: $A = \begin{bmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{bmatrix}$, собственные числа: $\lambda_1 = -2030.3$, $\lambda_2 = -969.7$. Данные собственные числа совпадают с корнями характеристического уравнения (см. операторный метод).

Матрица В примет вид:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}(R_1 + R_3) \\ \frac{1}{L_2}(R_2 + R_3) \end{bmatrix}$$

Матрица U: $U = [J]$.

3. Составляем уравнения для выходных переменных:

$$U_1 = R_1 i_1 = R_1(J - i_{L_1}), U_2 = R_2 i_2 = R_2(J - i_{L_2}), U_3 = R_3 i_3 = R_3(J - i_{L_1} - i_{L_2}), \text{ т.о.}$$

Столбцовая матрица выходных переменных (искомых величин):

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}; \text{ матрица } C \text{ будет иметь следующий вид: } C = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \\ -R_3 & -R_3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Матрица } D \text{ размером } 3 \times 1: D = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}.$$

Составим уравнения состояния топологическим методом.

В данной схеме нет неправильных размещений. Поэтому уравнения состояния получатся непосредственно после расписывания матрицы связи по столбцам и строкам.

1. Составляем ориентированный граф схемы, включая в дерево все резистивные ветви, а в число ветвей связи – ветви с источником тока и индуктивностями. Направленность ветвей связи и ветвей дерева выбрана в соответствии с ранее выбранным направлением токов в исходной схеме. Прямыми изображены ветви дерева, дугами – ветви связи. Каждый элемент при формировании графа должен представлять собой отдельную ветвь (см. рис. 48).

2. Пронумеруем ветви графа: ветви 11, 22 и 33 – резистивные ветви дерева, ветви связи 44 и 55 – индуктивности. Дерево охватывает все узлы.

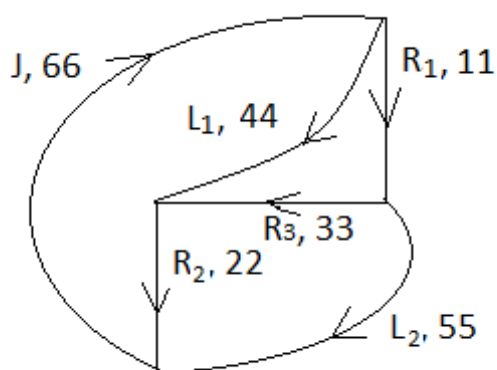


Рис. 48

Составляем таблицу связи: первая строка – ветви дерева 11, 22, 33, первый столбец – ветви связи 44, 55, J. Заполняем таблицу:

	11	22	33
44	-1	0	-1
55	0	-1	-1
J	1	1	1

Распишем таблицу по столбцам и строкам:

$$i_1 = -i_{L_1} + J$$

$$i_2 = -i_{L_2} + J$$

$$i_3 = -i_{L_1} - i_{L_2} + J$$

$$U_{L_1} = U_1 + U_3$$

$$U_{L_2} = U_2 + U_3$$

Уравнения полностью совпадают с составленными по Кирхгофу, поэтому вывод уравнений состояния не приведен (см. стр. 63).

Составим уравнения состояния методом наложения.

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях (i_{L_1}, i_{L_2}).

2. Запишем выражения для напряжений: $U_{L_1} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}$, $U_{L_2} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}$.

3. Заменим индуктивности источниками тока (рис. 49). Оставляя в схеме один источник (неучитываемые источники тока разрываются), сформируем три частные схемы (см. рис. 50).

Схема а). Ток источника J протекает через резисторы R_1, R_2, R_3 . Для напряжений U_{L_1}, U_{L_2} можем записать:

$$U_{L_1}' = (R_1 + R_3)J$$

$$U_{L_2}' = (R_2 + R_3)J$$

Схема б). Ток i_{L_1} замыкается в контуре R_1, R_3 .

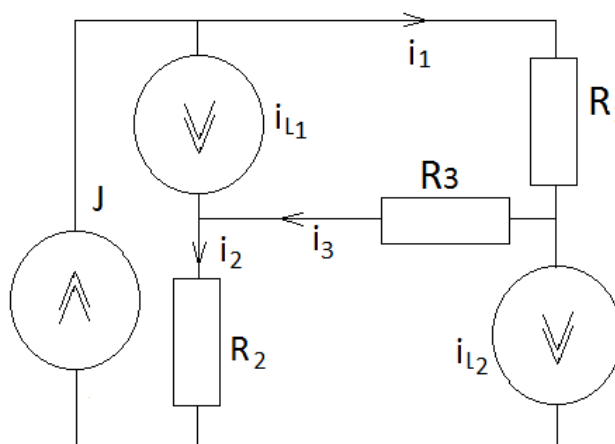


Рис. 49

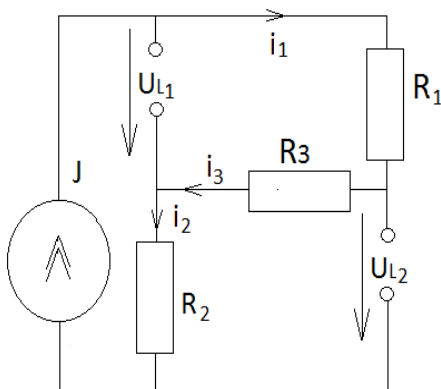


Рис. 50, а

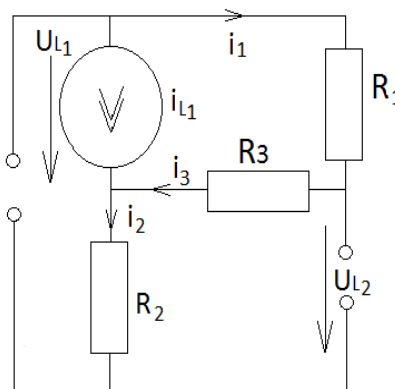


Рис. 50, б

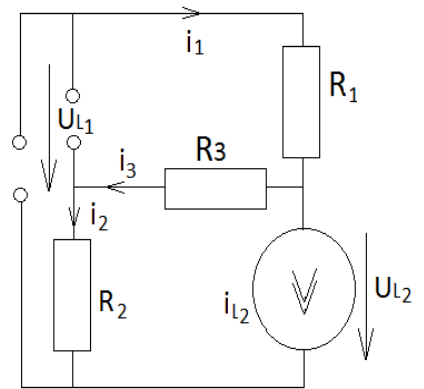


Рис. 50, в

Ток через резистор R_2 равен нулю. $U_{L_1}'' = -(R_1 + R_3)i_{L_1}$, $U_{L_2}'' = U_3'' = -i_{L_1}R_3$.

Схема в). Ток i_{L_2} замыкается в контуре R_2, R_3 . Через резистор R_1 ток не протекает. $U_{L_1}''' = -R_3i_{L_2}$, $U_{L_2}''' = -(R_2 + R_3)i_{L_2}$.

Суммируя частные решения с учетом выбранных направлений токов и напряжений, получим:

$$U_{L_1} = U_{L_1}' + U_{L_1}'' + U_{L_1}''' = -i_{L_1}(R_1 + R_3) - R_3i_{L_2} + J(R_1 + R_3)$$

$$U_{L_2} = U_{L_2}' + U_{L_2}'' + U_{L_2}''' = -R_3i_{L_1} - i_{L_2}(R_2 + R_3) + J(R_2 + R_3)$$

С учетом последних выражений уравнения состояния цепи:

$$\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{U_{L_1}}{L_1} = -\frac{i_{L_1}}{L_1}(R_1 + R_3) - \frac{i_{L_2}R_3}{L_1} + \frac{J}{L_1}(R_1 + R_3)$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{U_{L_2}}{L_2} = -\frac{i_{L_1}R_3}{L_2} - \frac{i_{L_2}}{L_2}(R_2 + R_3) + \frac{J}{L_2}(R_2 + R_3)$$

4. Уравнения для выходных переменных получены выше.

Пример 6.

Составить уравнения состояния и уравнения выходных переменных для схемы второго порядка с двумя источниками на рис. 51. Дано: $R_1 = R_4 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = 3 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ Ф}$, $L = 0,3 \text{ Гн}$.

Выходные переменные: напряжения на резисторах R_1, R_2, R_3 и R_4 - U_1, U_2, U_3, U_4

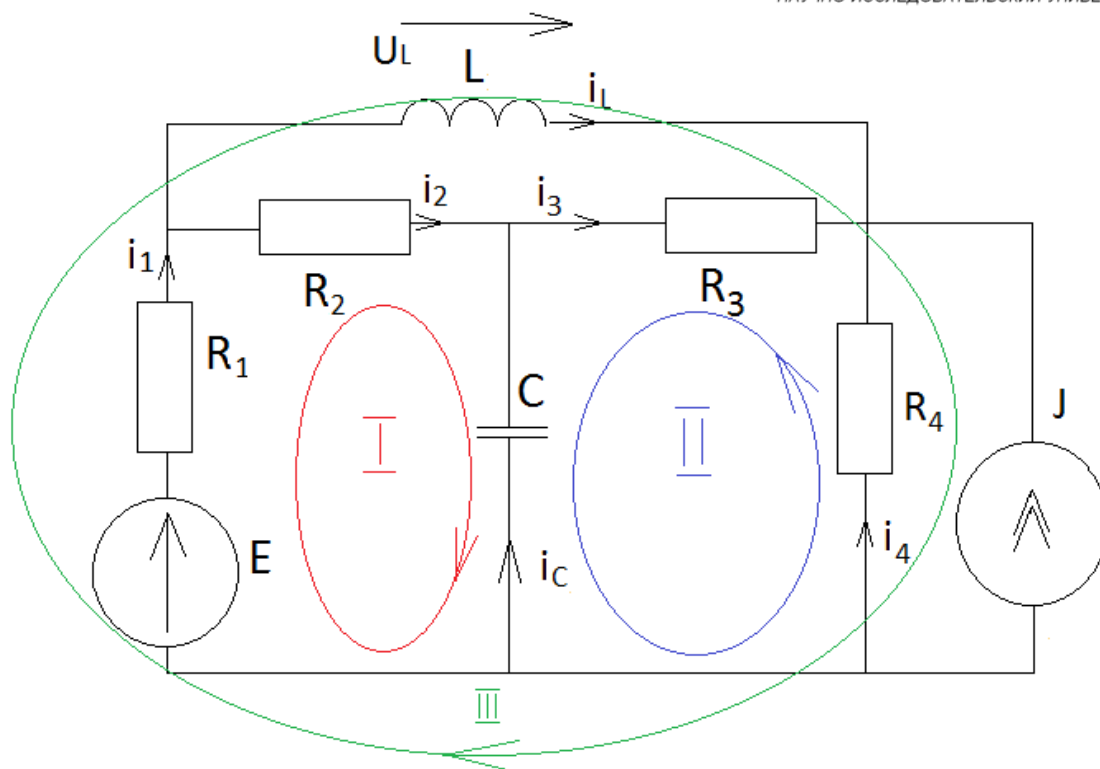


Рис. 51

Решение.

Составим уравнения состояния с помощью уравнений Кирхгофа.

В соответствии с порядком расчета:

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (i_L, U_C)

2. Составляем уравнения Кирхгофа. Для этого обозначим направления токов в схеме и их номера (см. рис. 23). В данной схеме четыре узла, значит, по первому закону Кирхгофа составим три уравнения:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_L &= 0 \\ i_2 + i_C - i_3 &= 0 \\ i_L + i_3 + J + i_4 &= 0 \end{aligned}$$

По второму закону Кирхгофа составим еще три уравнения:

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 - U_C &= E \\ U_4 - U_3 - U_C &= 0 \\ U_L - U_4 + U_1 &= E \end{aligned}$$

Вначале выразим i_C, U_L , а затем приведем уравнения к нормальной форме, воспользовавшись равенствами: $\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C}, \frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L}$.

$i_C = i_3 - i_2 = i_3 - (-i_L + i_1) = -J - i_4 - i_1$, откуда $i_1 = -i_C - J - i_4$.

$$\begin{aligned} U_L &= E + U_4 - U_1 = E + i_4 R_4 - i_1 R_1 = E + i_4 R_4 - R_1(-i_C - J - i_4) \\ &= E + i_4(R_1 + R_4) + R_1 i_C + R_1 J \end{aligned}$$

$U_C = U_1 + U_2 - E = R_1(-i_C - J - i_4) + R_2(-i_L + i_1) - E = R_1(-i_C - J - i_4) + R_2(-i_L + i_1) - E$, откуда

$$U_C = -i_C(R_1 + R_2) - J(R_1 + R_2) - i_4(R_1 + R_2) - R_2 i_L - E.$$

Теперь необходимо выразить i_4 :

$$i_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{U_C + U_3}{R_4} = \frac{U_C}{R_4} + \frac{i_3 R_3}{R_4} = \frac{U_C}{R_4} + \frac{R_3}{R_4} (-J - i_4 - i_L)$$

Раскрывая скобки и упрощая, получим i_4 :

$$i_4 = \frac{U_C - R_3 J - R_3 i_L}{R_3 + R_4}$$

Подставляя это выражение в (), и воспользовавшись равенством $R_1 = R_4$, $R_2 = R_3$, имеем:

$$U_C = -i_C (R_1 + R_2) - J (R_1 + R_2) - R_2 i_L - E - \frac{(R_1 + R_2)(U_C - R_2 J - R_2 i_L)}{(R_1 + R_2)}$$

откуда

$$i_C = -\frac{E}{(R_1 + R_2)} - \frac{2U_C}{(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} J$$

В ранее полученное выражение для U_L подставим ток i_4 и полученный выше ток i_C :

$$\begin{aligned} U_L &= E + i_4 (R_1 + R_4) + R_1 i_C + R_1 J \\ &= E + \frac{(R_1 + R_4)}{(R_4 + R_3)} (U_C - R_3 J - R_3 i_L) \\ &\quad + R_1 \left[-\frac{E}{(R_1 + R_2)} - \frac{2U_C}{(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} J \right] \end{aligned}$$

После упрощения и замен $R_1 = R_4$, $R_2 = R_3$ получаем:

$$U_L = \frac{ER_2}{(R_1 + R_2)} - 2i_L \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - J \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Уравнения состояния:

$$\boxed{\frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L} = -2i_L \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} + \frac{ER_2}{L(R_1 + R_2)} - J \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}}$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{2U_C}{C(R_1 + R_2)} - \frac{E}{C(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} J$$

Матрицы X и X': $X = \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix}$; $X' = \begin{bmatrix} \frac{dU_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}$

Коэффициенты матрицы A :

$$A_{11} = -\frac{2}{C(R_1 + R_2)}, A_{12} = 0,$$

$$A_{21} = 0, A_{22} = -2 \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Матрица A численно: $A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, собственные числа матрицы: $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -5$. Данные собственные числа совпадают с корнями характеристического уравнения (см. операторный метод).

Матрица B примет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ -\frac{C(R_1 + R_2)}{R_2} & -\frac{C(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \\ \frac{L(R_1 + R_2)}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{L(R_1 + R_2)}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

Матрица U : $U = \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}$.

3. Составляем уравнения для выходных переменных:

$$U_4 = R_4 i_4 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_C - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} J - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} i_L, \quad U_3 = U_4 - U_C = -\frac{R_3}{R_3 + R_4} U_C - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} J - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} i_L, \quad i_3 = \frac{U_3}{R_3} = -\frac{1}{R_3 + R_4} U_C - \frac{R_4}{R_3 + R_4} J - \frac{R_4}{R_3 + R_4} i_L, \quad i_2 = i_3 - i_C = \frac{1}{R_3 + R_4} U_C - \frac{R_4}{R_3 + R_4} i_L + \frac{E}{R_3 + R_4}, \quad U_2 = R_2 i_2 = \frac{R_2}{R_3 + R_4} U_C - \frac{R_2 R_4}{R_3 + R_4} i_L + \frac{E R_2}{R_3 + R_4}, \quad i_1 = i_L + i_2 = \frac{1}{R_3 + R_4} U_C + \frac{R_2}{R_3 + R_4} i_L + \frac{E}{R_3 + R_4}, \quad U_1 = i_1 R_1 = \frac{R_1}{R_3 + R_4} U_C + \frac{R_1 R_2}{R_3 + R_4} i_L + \frac{R_1 E}{R_3 + R_4}$$

т.о. после замены R_4 на R_1 , R_3 на R_2 получим:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{E R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_3 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} J - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L$$

$$U_4 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_C - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} J - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L,$$

Столбцовая матрица выходных переменных (искомых величин):

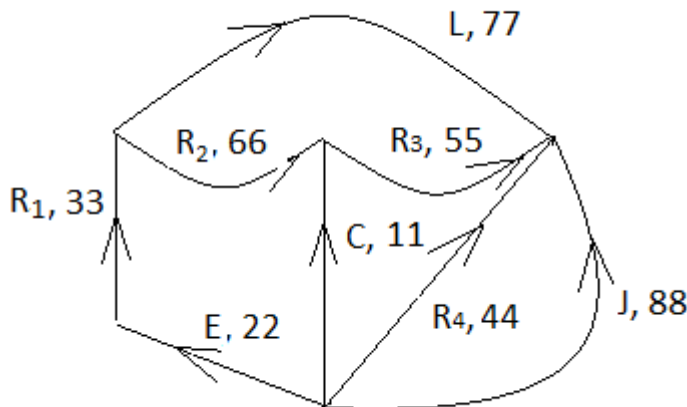
$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}; \text{ матрица } C \text{ будет иметь следующий вид: } C = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \\ \frac{R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1+R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \\ \frac{R_1}{R_1+R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Матрица } D \text{ размером } 4 \times 2: D = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & 0 \\ \frac{R_2}{R_1+R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \\ 0 & -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix}.$$

Составим уравнения состояния топологическим методом.

В данной схеме есть неправильные размещения. Поэтому вывод уравнений состояния потребует решения алгебраических уравнений.

1. Составляем ориентированный граф схемы, включая в дерево С-, Е- ветви и резистивные ветви так, чтобы дерево охватывало все узлы, а в число ветвей связи – ветви с источником тока, индуктивностью и остальные резисторы. Направленность ветвей связи и ветвей дерева выбрана в соответствии с ранее выбранным направлением токов в исходной схеме. Прямыми изображены ветви дерева, дугами – ветви связи. Каждый элемент при формировании графа должен представлять собой отдельную ветвь (рис.52).
2. Пронумеруем ветви графа. Ветви дерева: 11 - емкость, 22 - источник ЭДС, 33 и 44 – резистивные ветви, ветви связи: 55 и 66 – резистивные ветви, 77 – индуктивность, J(88) – источник тока. Дерево охватывает все узлы.
3. Составляем таблицу связи: первая строка – ветви дерева 11, 22, 33, 44; первый столбец – ветви связи 55, 66, 77, J. Заполняем таблицу:



	11	22	33	44
55	1	0	0	-1
66	-1	1	1	0
77	0	1	1	-1
J	0	0	0	-1

4. Распишем таблицу по столбцам и строкам:

$$\begin{aligned} i_C &= i_3 - i_2 \\ i_1 &= i_L + i_2 \\ i_4 &= -i_3 - i_L - J \\ U_3 &= -U_C + U_4 \end{aligned}$$

$$U_2 = U_C + E - U_1$$

$$U_L = E - U_1 + U_4$$

При расписывании таблицы очевидно, что в ветвях дерева E и $33(R_1)$ протекает один и тот же ток. Поэтому уравнение третьего столбца дублирует уравнение второго, и его не записывают. Уравнения полностью совпадают с составленными по Кирхгофу, поэтому вывод уравнений состояния не приведен (см. выше).

Составим уравнения состояния методом наложения.

1. Выбираем переменные состояния – токи в индуктивностях и напряжения на емкостях (i_L, U_C).

2. Запишем выражения для напряжения и тока:

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}, U_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

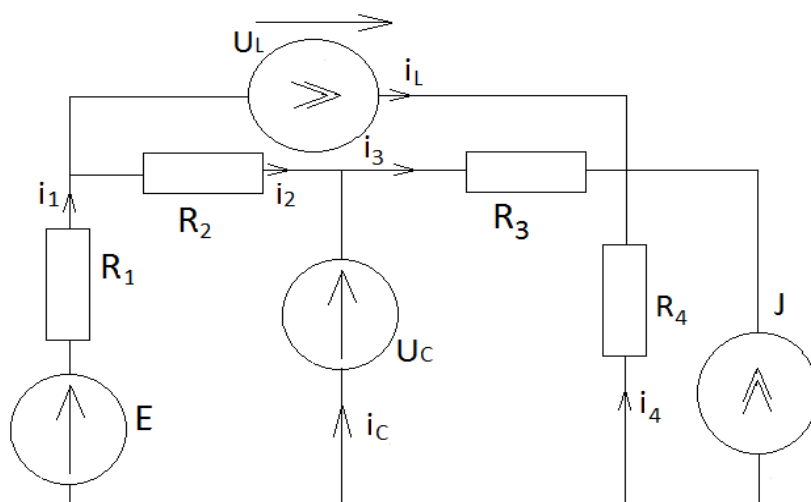


Рис. 53

3. Заменяем индуктивность источником тока, а емкость – источником ЭДС (см. рис.53). Оставляя в схеме один источник (неучитываемые источники ЭДС закорачиваются, а неучитываемые источники тока

размыкаются), сформируем четыре частные схемы (см. рис. 54).

Схема а). В схеме действует источник ЭДС, обусловленный им ток замыкается в контуре R_1, R_2 . Через резисторы R_3, R_4 ток не протекает вследствие наличия переключки (i_C) и разрыва. Для тока i_C' и напряжения U_L' можем записать:

$$i_C' = -\frac{E}{(R_1 + R_2)}$$

$$U_L' = -U_2' = \frac{ER_2}{(R_1 + R_2)}$$

Схема б). Теперь ток обусловлен наличием источника U_C и будет протекать в обоих контурах, включающих резисторы. На основании законов Ома и Кирхгофа можно записать:

$$i_1'' + i_C'' = i_3''$$

$$i_1''(R_1 + R_2) = U_C = -i_3''(R_3 + R_4)$$

$$i_1'' = \frac{U_C}{(R_1 + R_2)}$$

$$i_3'' = -\frac{U_C}{(R_3 + R_4)}$$

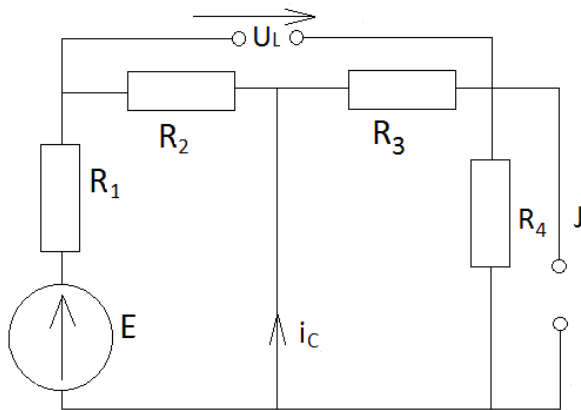


Рис. 54, а

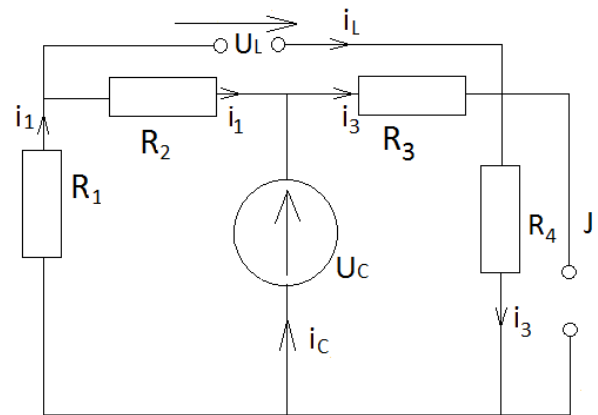


Рис. 54, б

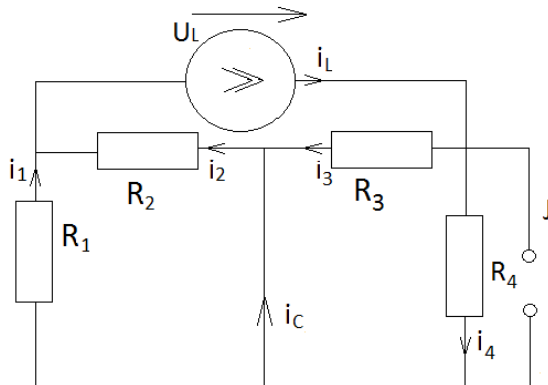


Рис. 54, в

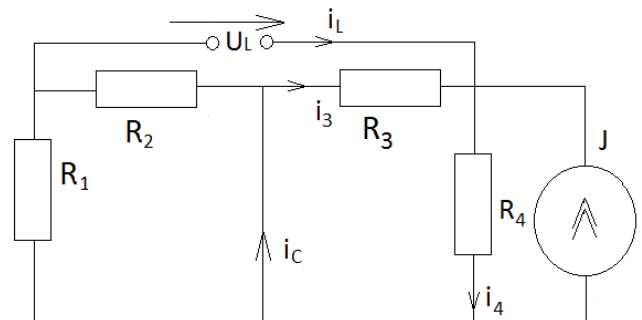


Рис. 54, г

$$i_c''' = i_3''' - i_1''' = -\frac{U_C}{(R_3 + R_4)} - \frac{U_C}{(R_1 + R_2)} = -\frac{2U_C}{(R_1 + R_2)}$$

$$U_L'' = U_2 + U_3 = 0$$

Схема в). Ток источника i_L протекает через параллельные соединения резисторов R_3, R_4 и R_1, R_2 , и т.о.:

$$U_L''' = -i_L \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - i_L \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = -2i_L \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_c''' = 0$$

Схема г). Ток источника J протекает через резисторы R_3, R_4 , которые оказываются соединенными параллельно, и т.о.:

$$U_L'''' = -J \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = -J \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_L'''' = i_C'''' R_3$$

$$i_C'''' = \frac{U_L''''}{R_3} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} J$$

Все сокращения проведены с учетом равенства номиналов резисторов. Учитывая, что во всех четырех схемах приняты одни и те же направления для тока i_C и напряжения U_L , можем записать:

$$U_L = U_L' + U_L'' + U_L''' + U_L'''' = \frac{ER_2}{(R_1 + R_2)} - 2i_L \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - J \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_C = i_C' + i_C'' + i_C''' + i_C'''' = -\frac{E}{(R_1 + R_2)} - \frac{2U_C}{(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} J$$

Уравнения состояния запишутся так:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L} = -2i_L \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} + \frac{ER_2}{L(R_1 + R_2)} - J \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{2U_C}{C(R_1 + R_2)} - \frac{E}{C(R_1 + R_2)} - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} J$$

Уравнения для выходных переменных получены выше.

Методы решения уравнений состояния цепи.

После того, как уравнения состояния получены, необходимо решить эти уравнения и найти переменные состояния, а затем и выходные



переменные. Основные способы решения уравнений состояния представлены на рис. 55. Они делятся на аналитические и численные.

Рис. 55

Аналитические методы решения уравнений состояния.

При *аналитическом способе* решение уравнений состояния записывают в виде суммы матриц свободной и принужденной составляющих: $x = x_{св} + x_{пр}$, где

$x_{св} = x(0)e^{At}$ - соответствует реакции цепи, обусловленной ненулевыми начальными условиями $x(0) \neq 0$ при отсутствии внешних воздействий $U=0$;

$x_{пр} = \int_0^t e^{A(t-\tau)}F(\tau)d\tau$ - соответствует реакции цепи от внешних воздействий $U(t) \neq 0$ при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$;

$x(0)$ - матрица (вектор) начальных значений переменных состояния, полученных при $t = 0$;

e^{At} –матричная экспоненциальная функция (матричная экспонента).

Если в цепи после коммутации нет источников энергии, т.е. $U(t) = 0$, то решение матричного уравнения имеет вид:

$$x = x(0)e^{At}$$

Если же в цепи после коммутации есть источники независимых воздействий, то матрица $U(t) \neq 0$, и интегрирование матричного дифференциального уравнения $X' = AX + BU$ приводит к решению в виде:

$$x = x(0)e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau,$$

которое состоит из суммы двух слагаемых – реакции цепи при ненулевых начальных условиях и реакции цепи при нулевых начальных условиях и наличии источников внешних воздействий $U(t)$.

Матрица выходных переменных:

$$Y = Ce^{At}x(0) + Ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau}BU(\tau)d\tau + DU$$

При нулевых начальных условиях $x(0) = 0$

$$x = (e^{At} - 1)A^{-1}BU$$

$$y = C(e^{At} - 1)A^{-1}BU + DU$$

Наиболее трудным здесь является вычисление матричной экспоненты e^{At} .

Можно использовать разложение ее в ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$, однако ряд медленно сходится и его суммирование трудоемко. Можно также получить матричную экспоненту в виде полинома на основании теоремы Кели-Гамильтона, по методу Сильвестра или вычислить операторным методом.

Метод Кели-Гамильтона.

Матричная экспонента представляется выражением $e^{At} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$, где $A^2 = A * A$ и т. д.

Число членов разложения равно порядку n матрицы A (то есть числу переменных состояния). В уравнении ... (номер ввести) коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ - некоторые функции $f(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, которые определяются из матричного уравнения (ввести номер), если нет кратных корней λ :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

В уравнении (номер) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ есть собственные значения матрицы A , совпадающие с корнями характеристического уравнения. Собственные числа матрицы можно определить из уравнения $(p\mathbf{1}-A)=0$, где $\mathbf{1}$ - единичная матрица порядка n .

Характеристическое уравнение получаем, приравняв к нулю определитель системы $\Delta(p) = \det(p\mathbf{1} - A) = 0$, собственные числа матрицы A определяются из уравнения $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{1} - A) = 0$. Если матрица A

имеет вид $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$

то $\Delta(\lambda) = \det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

Метод Сильвестра.

Матричная экспонента (в случае отсутствия кратных корней λ) представляется в виде

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k t} \Phi_k, \text{ где } \Phi_k = \frac{\prod_{l \neq k} (A - \lambda_l \mathbf{1})}{\prod_{l \neq k} (\lambda_k - \lambda_l)}, l=1,2,3,\dots,n.$$

Собственные значения λ матрицы A определяются из уравнения (номер).

Операторный метод.

Матричную экспоненту можно определить путем обращения матрицы $(p\mathbf{1}-A)$:

$$e^{At} = L^{-1}(p\mathbf{1} - A)^{-1}$$

Рассмотрим примеры отыскания матричной экспоненты.

Пример 1.

1. По методу Кели-Гамильтона

Так как корней два ($\lambda_1=0, \lambda_2=-125$), то в разложении e^{At} будут присутствовать два члена: $e^{At} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 A$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -125 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{0t} \\ e^{-125t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{125} \begin{bmatrix} -125 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} \\ e^{-125t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{0t} + 0 \\ \frac{1}{125} e^{0t} - \frac{1}{125} e^{-125t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = e^{0t}; \alpha_1 = \frac{1}{125} e^{0t} - \frac{1}{125} e^{-125t}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } e^{At} &= e^{0t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{125} e^{0t} - \frac{1}{125} e^{-125t} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e^{0t} + e^{-125t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-125t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. По методу Сильвестра:

Корни характеристического уравнения, совпадающие с собственными числами матрицы A_1 : $\lambda_1=0, \lambda_2=-125$. Тогда:

$$\Phi_1 = \frac{A - \lambda_2 1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -125 \end{bmatrix} + 125 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{0 - (-125)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \frac{A - \lambda_1 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -125 \end{bmatrix} - 0 * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-125} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Тогда } e^{At} = e^{0t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-125t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-125t} \end{bmatrix}$$

3. По Лапласу:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[p1 - A]^{-1} \\ p1 - A &= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p + 125 \end{bmatrix} \\ [p1 - A]^{-1} &= \frac{1}{p(p + 125)} \begin{bmatrix} p + 125 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p + 125} \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{-125t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Пример 2.

Вследствие сложности данного примера (схема с тремя реактивными элементами, матрица A размером 3×3 , комплексные корни характеристического уравнения) аналитическое решение в данном пособии не приводится. Программа для численного решения данного примера и графики представлены в приложении.

Пример 3.

Вследствие сложности данного примера (комплексные корни характеристического уравнения) аналитическое решение в данном пособии не приводится. Программа для численного решения данного примера и графики представлены в приложении.

Пример 4.

1. По методу Кели-Гамильтона

Корней характеристического уравнения два ($\lambda_1 = -20000$, $\lambda_2 = -3333$), в разложении e^{At} будут присутствовать два члена: $e^{At} = \alpha_0 1 + \alpha_1 A$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -20000 \\ 1 & -3333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-20000t} \\ e^{-3333t} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{-3333 + 20000} \begin{bmatrix} -3333 & -1 \\ 20000 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e^{-20000t} \\ e^{-3333t} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{16667} \begin{bmatrix} -3333 & 20000 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-20000t} \\ e^{-3333t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.2 & 1.2 \\ -1/16667 & 1/16667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-20000t} \\ e^{-3333t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.2e^{-20000t} + 1.2e^{-3333t} \\ -1/16667e^{-20000t} + 1/16667e^{-3333t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -0.2e^{-20000t} + 1.2e^{-3333t}; \alpha_1 \\ &= -1/16667e^{-20000t} + 1/16667e^{-3333t} \end{aligned}$$

Тогда: $e^{At} = (-0.2e^{-20000t} + 1.2e^{-3333t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(-1/16667e^{-20000t} + 1/16667e^{-3333t} \right) \begin{bmatrix} -3333 & -1 \\ 20000 & 1 \end{bmatrix}$

2. По методу Сильвестра:

Корни характеристического уравнения, совпадающие с собственными числами матрицы A: $\lambda_1 = -20000$, $\lambda_2 = -3333$. Тогда:

$$\Phi_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -16667 & 6667 \\ 6667 & -6667 \end{bmatrix} - (-3333) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-20000 - (-3333)} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -16667 & 6667 \\ 6667 & -6667 \end{bmatrix} - (-20000) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-3333 - (-20000)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$e^{At} = e^{-20000t} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix} + e^{-3333t} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t} & -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} \\ -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} & 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t} \end{bmatrix}$$

3. По Лапласу:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[pI - A]^{-1}$$

$$pI - A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -16667 & 6667 \\ 6667 & -6667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 16667 & 6667 \\ 6667 & p + 6667 \end{bmatrix}$$

$$[pI - A]^{-1} = \frac{1}{(p + 16667)(p + 6667) - 6667^2} \begin{bmatrix} p + 6667 & -6667 \\ -6667 & p + 16667 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{(p + 20000)(p + 3333)} \begin{bmatrix} p + 6667 & -6667 \\ -6667 & p + 16667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{p + 6667}{(p + 20000)(p + 3333)} & \frac{-6667}{(p + 20000)(p + 3333)} \\ \frac{-6667}{(p + 20000)(p + 3333)} & \frac{p + 16667}{(p + 20000)(p + 3333)} \end{bmatrix}$$

Найдем оригиналы для всех членов этой матрицы:

Используем теорему разложения.

Тогда оригинал для A_{11} : $A_{11} = \frac{p+6667}{(p+20000)(p+3333)}$ Корни: $p_1 = -20000$, $p_2 = -3333.3$

Числитель: $F_1 = p + 6667$

Знаменатель: $F_2 = (p + 20000)(p + 3333)$

Производная знаменателя: $F_2' = 2p + 23334$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины: $F_1(-20000) = 13334$, $F_2'(-20000) = -16667$, $F_1(-3333) = 3334$, $F_2'(-3333) = 16667$. Таким образом, $A_{11}(t) = 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t}$.

Оригиналы для A_{12} и A_{21} : $A_{21} = A_{12} = \frac{-6667}{(p+20000)(p+3333)}$ Корни знаменателя

те же.

Числитель: $F_1 = -6667$

Знаменатель: $F_2 = (p + 20000)(p + 3333)$

Производная знаменателя: $F_2' = 2p + 23334$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины: $F_1(-20000) = -6667, F_2'(-20000) = -16667, F_1(-3333) = -6667, F_2'(-3333) = 16667$. Таким образом, $A_{12}(t) = A_{21}(t) = -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t}$.

Оригинал для A_{22} : $A_{22} = \frac{p+16667}{(p+20000)(p+3333)}$ Корни знаменателя те же.

Числитель: $F_1 = p + 16667$

Знаменатель: $F_2 = (p + 20000)(p + 3333)$

Производная знаменателя: $F_2' = 2p + 23334$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины: $F_1(-20000) = -3334, F_2'(-20000) = -16667, F_1(-3333) = -13334, F_2'(-3333) = 16667$. Таким образом, $A_{22}(t) = 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t}$.

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t} & -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} \\ -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} & 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t} \end{bmatrix}$$

Пример 5.

1. По методу Кели-Гамильтона

Корней характеристического уравнения два ($\lambda_1 = -969.7, \lambda_2 = -2030.3$), в разложении e^{At} будут присутствовать два члена: $e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -969.7 \\ 1 & -2030.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-969.7t} \\ e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{-2030.3 + 969.7} \begin{bmatrix} -2030.3 & -1 \\ 969.7 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e^{-969.7t} \\ e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{-1060.6} \begin{bmatrix} -2030.3 & -969.7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-969.7t} \\ e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2030.3}{1060.6} & -\frac{969.7}{1060.6} \\ \frac{1}{1060.6} & -\frac{1}{1060.6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-969.7t} \\ e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2030.3}{1060.6} e^{-969.7t} - \frac{969.7}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{1}{1060.6} e^{-969.7t} - \frac{1}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \frac{2030.3}{1060.6} e^{-969.7t} - \frac{969.7}{1060.6} e^{-2030.3t};$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1060.6} e^{-969.7t} - \frac{1}{1060.6} e^{-2030.3t}$$

Тогда: $e^{At} = \left(\frac{2030.3}{1060.6} e^{-969.7t} - \frac{969.7}{1060.6} e^{-2030.3t} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{1060.6} e^{-969.7t} - \frac{1}{1060.6} e^{-2030.3t} \right) \begin{bmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{2030.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{-969.7}{1060.6} e^{-2030.3t} & 0 \\ 0 & \frac{2030.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{-969.7}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} \frac{-1875}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{1875}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-1125}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{1125}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} \frac{155.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{905.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{155.3}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix}$$

2. По методу Сильвестра:

Корни характеристического уравнения, совпадающие с собственными числами матрицы A: $\lambda_1 = -969.7$, $\lambda_2 = -2030.3$. Тогда:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{A - \lambda_2 1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{bmatrix} - (-2030.3) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-969.7 - (-2030.3)} \\ &= \frac{1}{1060.6} \begin{bmatrix} 155.3 & -375 \\ -375 & 905.3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{A - \lambda_1 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{bmatrix} - (-969.6) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-2030.3 - (-969.6)} \\ &= -\frac{1}{1060.6} \begin{bmatrix} 905.3 & 375 \\ 375 & 155.3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-969.6t} \frac{1}{1060.6} \begin{bmatrix} 155.3 & -375 \\ -375 & 905.3 \end{bmatrix} - e^{-2030.3t} \frac{1}{1060.6} \begin{bmatrix} 905.3 & 375 \\ 375 & 155.3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{155.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{905.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{155.3}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. По Лапласу:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[p1 - A]^{-1} \\ p1 - A &= \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 1875 & 375 \\ 375 & p + 1125 \end{bmatrix} \\ [p1 - A]^{-1} &= \frac{1}{(p + 1875)(p + 1125) - 375^2} \begin{bmatrix} p + 1125 & -375 \\ -375 & p + 1875 \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{(p + 969.7)(p + 2030.3)} \begin{bmatrix} p + 1125 & -375 \\ -375 & p + 1875 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{p + 1125}{(p + 969.7)(p + 2030.3)} & \frac{-375}{(p + 969.7)(p + 2030.3)} \\ \frac{-375}{(p + 969.7)(p + 2030.3)} & \frac{p + 1875}{(p + 969.7)(p + 2030.3)} \end{bmatrix}$$

Найдем оригиналы для всех членов этой матрицы:

Используем теорему разложения.

Тогда оригинал для A_{11} : $A_{11} = \frac{p+1125}{(p+969.7)(p+2030.3)}$ Корни: $p_1 = -969.7$, $p_2 = -2030.3$

Числитель: $F_1 = p + 1125$

Знаменатель: $F_2 = (p + 969.7)(p + 2030.3)$

Производная знаменателя: $F_2' = 2p + 3000$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины:

$$F_1(-969.7) = 155.3, F_2'(-969.7) = 1060.6, F_1(-2030.3) = -905.3,$$

$$F_2'(-2030.3) = -1060.6. \quad \text{Таким образом,} \quad A_{11}(t) = \frac{155.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6} e^{-2030.3t}.$$

Оригиналы для A_{12} и A_{21} : $A_{21} = A_{12} = \frac{-375}{(p+969.7)(p+2030.3)}$ Корни знаменателя те же.

Числитель: $F_1 = -375$

Знаменатель: $F_2 = (p + 969.7)(p + 2030.3)$

Производная знаменателя: $F_2' = 2p + 3000$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины:

$$F_1(-969.7) = 155.3, F_2'(-969.7) = 1060.6, F_1(-2030.3) = -905.3,$$

$$F_2'(-2030.3) = -1060.6. \quad \text{Таким образом,}$$

$$A_{12}(t) = A_{21}(t) = \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t}$$

Оригинал для A_{22} : $A_{22} = \frac{p+1875}{(p+969.7)(p+2030.3)}$ Корни знаменателя те же.

Числитель: $F_1 = p + 1875$

Знаменатель: $F_2 = (p + 20000)(p + 3333)$

Производная знаменателя: $F_2' = 2p + 3000$

Подставим значения корней в числитель и производную знаменателя и рассчитаем эти величины:

$$F_1(-969.7) = 905.3, F_2'(-969.7) = 1060.6, F_1(-2030.3) = -155.3,$$

$$F_2'(-2030.3) = -1060.6. \quad \text{Таким образом,} \quad A_{22}(t) = \frac{905.3}{1060.6} e^{-969.7t} +$$

$$\frac{155.3}{1060.6} e^{-2030.3t}.$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{155.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{905.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{155.3}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix}$$

Пример 6.

1. По методу Кели-Гамильтона

Так как корней два ($\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -5$), то в разложении e^{At} будут присутствовать два члена: $e^{At} = \alpha_0 1 + \alpha_1 A$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-0.5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{-5 + 0.5} \begin{bmatrix} -5 & 0.5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\frac{1}{9} e^{-0.5t} - \frac{1}{9} e^{-5t} \\ \frac{2}{9} e^{-0.5t} - \frac{2}{9} e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = 1\frac{1}{9} e^{-0.5t} - \frac{1}{9} e^{-5t}; \quad \alpha_1 = \frac{2}{9} e^{-0.5t} - \frac{2}{9} e^{-5t}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } e^{At} &= \left(1\frac{1}{9} e^{-0.5t} - \frac{1}{9} e^{-5t}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{2}{9} e^{-0.5t} - \frac{2}{9} e^{-5t}\right) \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1\frac{1}{9} e^{-0.5t} - \frac{1}{9} e^{-5t} & 0 \\ 0 & 1\frac{1}{9} e^{-0.5t} - \frac{1}{9} e^{-5t} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} e^{-0.5t} + \frac{1}{9} e^{-5t} & 0 \\ 0 & -\frac{10}{9} e^{-0.5t} + \frac{10}{9} e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. По методу Сильвестра:

Корни характеристического уравнения, совпадающие с собственными числами матрицы А: $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -5$. Тогда:

$$\Phi_1 = \frac{A - \lambda_2 1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-0.5 - (-5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \frac{A - \lambda_1 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} - (-5) * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{(-5) - (-0.5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Тогда } e^{At} = e^{-0.5t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-5t} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[p1 - A]^{-1}$$

$$p1 - A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + 0.5 & 0 \\ 0 & p + 5 \end{bmatrix}$$

$$[p1 - A]^{-1} = \frac{1}{(p + 0.5)(p + 5)} \begin{bmatrix} p + 5 & 0 \\ 0 & p + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p + 0.5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p + 5} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Отыскание решения уравнений состояния.

Пример 1.

Получить решение в этой задаче возможно, решив полученное уравнение состояния напрямую, так как обратной матрицы A^{-1} не существует ($\det [A]=0$).

Пример 2.

Программа для численного решения данной задачи и получившиеся графики представлены в приложении.

Пример 3.

Программа для численного решения данной задачи и получившиеся графики представлены в приложении.

Пример 4.

Искать решение будем в виде:

$$x = x(0)e^{At} + (e^{At} - 1)A^{-1}BU$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t} & -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} \\ -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} & 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -16667 & 6667 \\ 6667 & -6667 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ CR_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U = E = [50] \quad X = \begin{bmatrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} U_{C_1}(0) \\ U_{C_2}(0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 38.2 \\ 20.6 \end{bmatrix}$$

Найдем A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{16667 * 6667 - 6667^2} \begin{bmatrix} -6667 & -6667 \\ -6667 & -16667 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{10^4} & -\frac{1}{10^4} \\ 1 & 2.5 \\ -\frac{1}{10^4} & -\frac{1}{10^4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t} & -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} \\ -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} & 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38.2 \\ 20.6 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t} & -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} \\ -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} & 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t} \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10^4} & -\frac{1}{10^4} \\ \frac{1}{10^4} & \frac{2.5}{10^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^4 \\ 0 \end{bmatrix} [50] \\
 X &= \begin{bmatrix} 22.3e^{-20000t} + 15.8e^{-3333t} \\ -11.1e^{-20000t} + 31.7e^{-3333t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4e^{-20000t} - 0.6e^{-3333t} + 1 \\ 0.2e^{-20000t} - 1.2e^{-3333t} + 1 \end{bmatrix} [50] \\
 &= \begin{bmatrix} 50 + 2.3e^{-20000t} - 14.1e^{-3333t} \\ 50 - 1.1e^{-20000t} - 28.2e^{-3333t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рассчитанное решение полностью совпадает с найденным операторным методом.

Теперь найдем выходные переменные:

$$y = Ce^{At}x(0) + C(e^{At} - 1)A^{-1}BU + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8e^{-20000t} + 0.2e^{-3333t} & -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} \\ -0.4e^{-20000t} + 0.4e^{-3333t} & 0.2e^{-20000t} + 0.8e^{-3333t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38.2 \\ 20.6 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4e^{-20000t} - 0.6e^{-3333t} + 1 \\ 0.2e^{-20000t} - 1.2e^{-3333t} + 1 \end{bmatrix} [50] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [50] \\
 &= \begin{bmatrix} -22.4e^{-20000t} - 15.6e^{-3333t} \\ 33.6e^{-20000t} - 15.6e^{-3333t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20e^{-20000t} + 30e^{-3333t} - 50 \\ -30e^{-20000t} + 30e^{-3333t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2.4e^{-20000t} + 14.4e^{-3333t} \\ 3.6e^{-20000t} - 14.4e^{-3333t} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2.4e^{-20000t} + 14.4e^{-3333t} \\ 3.6e^{-20000t} - 14.4e^{-3333t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Пример 5.

Искать решение будем аналогично примеру 4 в виде:

$$x = x(0)e^{At} + (e^{At} - 1)A^{-1}BU$$

$$\begin{aligned}
 &e^{At} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{155.3}{1060.6}e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6}e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6}e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6}e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6}e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6}e^{-2030.3t} & \frac{905.3}{1060.6}e^{-969.7t} + \frac{155.3}{1060.6}e^{-2030.3t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_3}{L_1} \\ \frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15 \cdot 10^3}{8} \\ \frac{9 \cdot 10^3}{8} \end{bmatrix}; \quad U = J = [6]; \quad X = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}; \quad X(0) = \begin{bmatrix} i_{L_1}(0) \\ i_{L_2}(0) \end{bmatrix} =$$

[4]
[2].

Найдем A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{1875 \cdot 1125 - 375^2} \begin{bmatrix} -1125 & 375 \\ 375 & -1875 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{155.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{905.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{155.3}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{155.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{905.3}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} \\ \frac{-375}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{375}{1060.6} e^{-2030.3t} & \frac{905.3}{1060.6} e^{-969.7t} + \frac{155.3}{1060.6} e^{-2030.3t} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.7 \cdot 10^{-4} & 1.9 \cdot 10^{-4} \\ 1.9 \cdot 10^{-4} & -9.52 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \cdot 10^3 \\ 8 \\ 9 \cdot 10^3 \\ 8 \end{bmatrix} [6]$$

$$X = \begin{bmatrix} -0.121e^{-969.7t} + 4.119e^{-2030.3t} \\ 0.292e^{-969.7t} + 1.7e^{-2030.3t} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.766e^{-969.7t} - 5.89e^{-2030.3t} + 5.13 \\ -1.845e^{-969.7t} - 2.43e^{-2030.3t} + 4.28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5.13 + 0.645e^{-969.7t} - 1.77e^{-2030.3t} \\ 4.28 - 1.55e^{-969.7t} - 0.73e^{-2030.3t} \end{bmatrix}$$

Найденное решение полностью совпадает с найденным операторным методом:

$$\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.13 + 0.645e^{-969.7t} - 1.77e^{-2030.3t} \\ 4.28 - 1.55e^{-969.7t} - 0.73e^{-2030.3t} \end{bmatrix}$$

Теперь найдем выходные переменные:

$$y = Ce^{At}x(0) + C(e^{At} - 1)A^{-1}BU + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \\ -R_3 & -R_3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.121e^{-969.7t} + 4.119e^{-2030.3t} \\ 0.292e^{-969.7t} + 1.7e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.766e^{-969.7t} - 5.89e^{-2030.3t} + 5.13 \\ -1.845e^{-969.7t} - 2.43e^{-2030.3t} + 4.28 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} [6] \\
 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1.45e^{-969.7t} - 49.44e^{-2030.3t} \\ -1.75e^{-969.7t} - 10.2e^{-2030.3t} \\ -0.51e^{-969.7t} - 17.46e^{-2030.3t} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} -9.2e^{-969.7t} + 70.7e^{-2030.3t} - 61.6 \\ 11e^{-969.7t} + 14.6e^{-2030.3t} - 25.7 \\ 3.2e^{-969.7t} + 25e^{-2030.3t} - 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 72 \\ 36 \\ 18 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10.4 - 7.75e^{-969.7t} + 21.3e^{-2030.3t} \\ 10.3 + 9.25e^{-969.7t} + 4.4e^{-2030.3t} \\ -10 + 2.7e^{-969.7t} + 7.54e^{-2030.3t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Полученное решение можно сравнить с результатами операторного метода: умножить токи, полученные выше операторным методом на сопротивления соответствующих ветвей. Нетрудно увидеть, что результаты идентичны.

Пример 6.

В этом примере для отыскания аналитического решения приняты значения для номиналов источников питания: $E=1\text{В}$, $J=0\text{ А}$. Численное решение найдено для трех случаев: а) $E=1\text{В}$, $J=0\text{ А}$, б) $E=1\text{В}$, $J=1\text{ А}$, в) $E=5\text{В}$, $J=3\text{ А}$. Если $E=1\text{В}$, $J=0\text{ А}$, тогда начальные условия - нулевые, искать решение будем в виде:

$$\begin{aligned}
 x &= (e^{At} - 1)A^{-1}BU \\
 e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 2.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix}; \quad X(0) = \begin{bmatrix} U_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{(-0.5)(-5)} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_C \\ i_L \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-0.5t} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 2.5 & -2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5e^{-0.5t} - 0.5 \\ 0.5 - 0.5e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Таким образом, $U_C = 0.5e^{-0.5t} - 0.5$; $i_L = 0.5 - 0.5e^{-5t}$, что совпадает с решением, полученным операторным методом, если учесть, что направление тока i_C принято различным.

Теперь найдем выходные переменные:

$$y = C(e^{At} - 1)A^{-1}BU + DU$$

$$Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ \frac{R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ \frac{R_1}{R_1+R_2} & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1+R_2} & 0 \\ \frac{R_2}{R_1+R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ 0 & -\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 Y = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5e^{-0.5t} - 0.5 \\ 0.5 - 0.5e^{-5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(0.5e^{-0.5t} - 0.5) + \frac{3}{4}(0.5 - 0.5e^{-5t}) \\ \frac{3}{4}(0.5e^{-0.5t} - 0.5) - \frac{3}{4}(0.5 - 0.5e^{-5t}) \\ -\frac{3}{4}(0.5e^{-0.5t} - 0.5) - \frac{3}{4}(0.5 - 0.5e^{-5t}) \\ \frac{1}{4}(0.5e^{-0.5t} - 0.5) - \frac{3}{4}(0.5 - 0.5e^{-5t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 + 0.125e^{-0.5t} - 0.375e^{-5t} \\ -0.375e^{-0.5t} + 0.375e^{-5t} \\ -0.375e^{-0.5t} + 0.375e^{-5t} \\ -0.5 + 0.125e^{-0.5t} + 0.375e^{-5t} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Численные методы решения уравнений состояния.

При *численном способе* решения уравнений состояния используют различные *программы численного интегрирования* на ЭВМ: метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, метод трапеций и др.

В пакете MathCad программа интегрирования уравнений по методу Рунге-Кутты носит имя rkfixed. Обращение к ней производится через операцию присваивания какой-либо переменной (здесь z) имени программы:

$$z = \text{rkfixed}(x, 0, tk, N, D),$$

где x - вектор переменных состояния. Длина этого вектора - n задается предварительным описанием вектора начальных значений и соответствует числу уравнений состояния; 0 и tk - начало и конец временного интервала интегрирования; N - число точек на интервале интегрирования; z - матрица (массив), имеющая размер (N+1, n+1), где первый столбец (он же нулевой) соответствует дискретным значениям времени ti: zi0 = i.

Остальные столбцы - совокупность значений переменных состояния: zi1, zi2, ..., zin, где индекс i изменяется от 1 до N; D - функция дифференцирования левой части системы уравнений, которая описывает

правую часть уравнений, разрешенных относительно первых производных. Для линейных цепей эта функция имеет вид линейного матричного преобразования $D(t, x) := A \cdot x + F$, где A - квадратная матрица коэффициентов, которые определяются структурой цепи и параметрами элементов; F - вектор независимых переменных, параметры которого определяются входными воздействиями, т.е. независимыми источниками питания цепи, которые могут изменяться во времени.

Элементы матриц A и F должны быть определены перед обращением к программе `rkfixed`. Для контроля правильности задания исходных данных можно (но не обязательно) обратиться к программе определения собственных чисел матрицы A : `eigenvals(A)`. Эта программа выводит информацию о собственных числах, которые совпадают с корнями характеристического уравнения цепи. Необходимым (но недостаточным) условием правильности ввода данных является набор отрицательных собственных чисел, или комплексно-сопряженных с отрицательной вещественной частью. Решение уравнений состояния для примеров 1-6 представлено в приложении.

Приложение.

Пример 1.

Программа для расчета на MATCAD

```

A := -125
F := 100
Tk := 0.05
N := 500

x := 90

R(t,x) := A·x + F

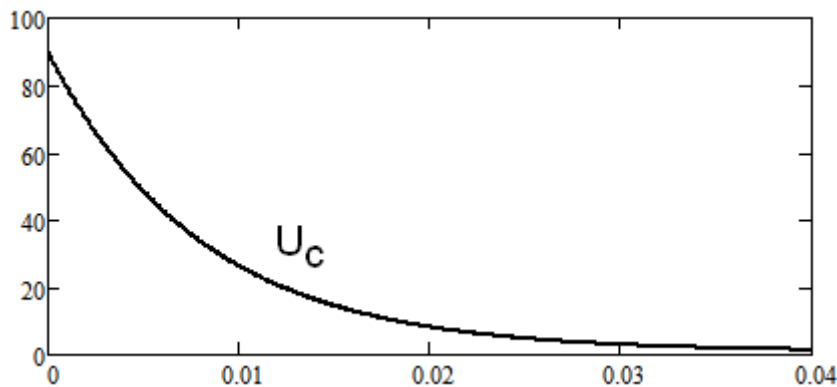
z := rkfixed(x, 0, Tk, N, R)

i := 0..rows(z) - 1

C :=  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.1 \\ 0.025 \\ -0.125 \end{pmatrix}$ 
D :=  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ 
U := 100

```

График напряжения на емкости.

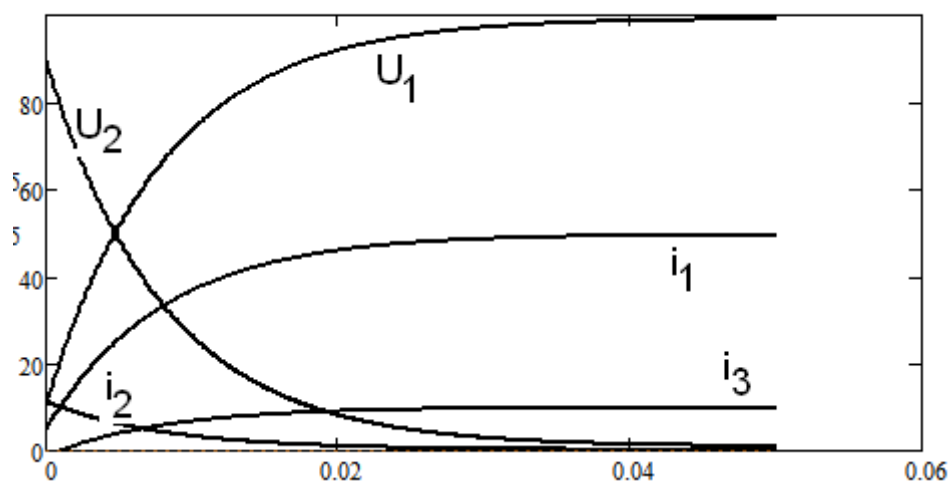


Продолжение программы: вычисление выходных переменных. Здесь $y_{i,1}$ – напряжение U_1 , $y_{i,2}$ – U_2 , $y_{i,3}$ – i_1 , $y_{i,4}$ – i_2 , $y_{i,5}$ – i_3 .

$$\begin{aligned}
 y_{i,1} &:= C_0 \cdot z_{i,1} + D_0 \cdot U & y_{i,4} &:= C_3 \cdot z_{i,1} + D_3 \cdot U \\
 y_{i,2} &:= C_1 \cdot z_{i,1} + D_1 \cdot U & y_{i,5} &:= C_4 \cdot z_{i,1} + D_4 \cdot U \\
 y_{i,3} &:= C_2 \cdot z_{i,1} + D_2 \cdot U
 \end{aligned}$$

Графики выходных переменных (величины токов нормированы):

1



Пример 2.

Программа для вычисления переменных состояния на MATCAD

$$A := \begin{pmatrix} -65.7 & 11184.2 & -8552.6 \\ -2.24 & -44.7 & -15.8 \\ 0.86 & -7.9 & -51.3 \end{pmatrix} \quad U := (2)$$

$$F := \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} -0.316 & -6.32 & -41 \\ 0.105 & -17.89 & -6.32 \\ 0.579 & 51.579 & -34.737 \\ -0.0053 & -0.105 & -0.684 \\ 0.0053 & -0.895 & -0.316 \\ 0.0053 & 51.579 & 0.579 \end{pmatrix}$$

Tk := 0.08

N := 500

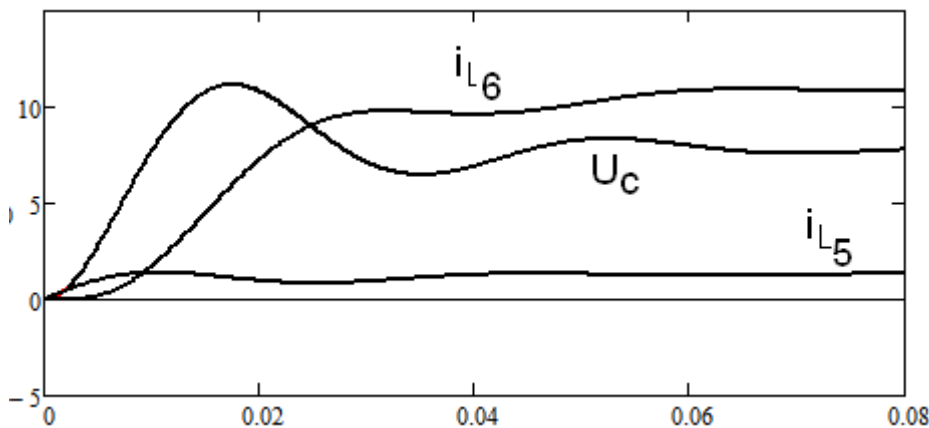
$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(t,x) := A \cdot x + F$$

z := rfixed(x,0,Tk,N,R)

i := 0..rows(z) - 1

Графики переменных состояния:



Продолжение программы: вычисление выходных переменных. Здесь $y_{i,1}$ – напряжение U_2 , $y_{i,2}$ – U_3 , $y_{i,3}$ – U_4 , $y_{i,4}$ – i_2 , $y_{i,5}$ – i_3 , $y_{i,6}$ – i_4 .

$$y_{i,1} := C_{0,0} \cdot z_{i,1} + C_{0,1} \cdot z_{i,2} + C_{0,2} \cdot z_{i,3}$$

$$y_{i,2} := C_{1,0} \cdot z_{i,1} + C_{1,1} \cdot z_{i,2} + C_{1,2} \cdot z_{i,3}$$

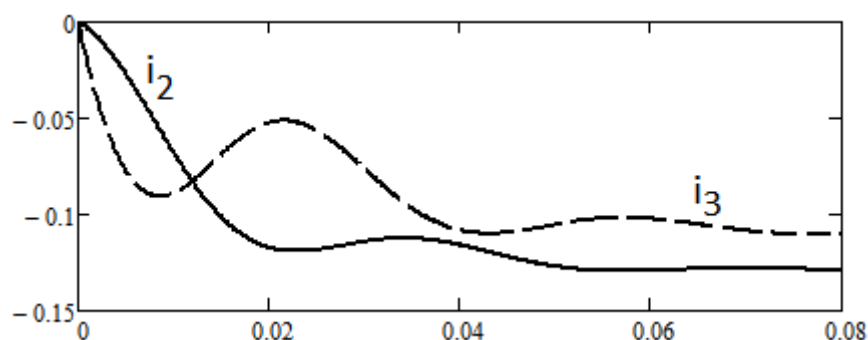
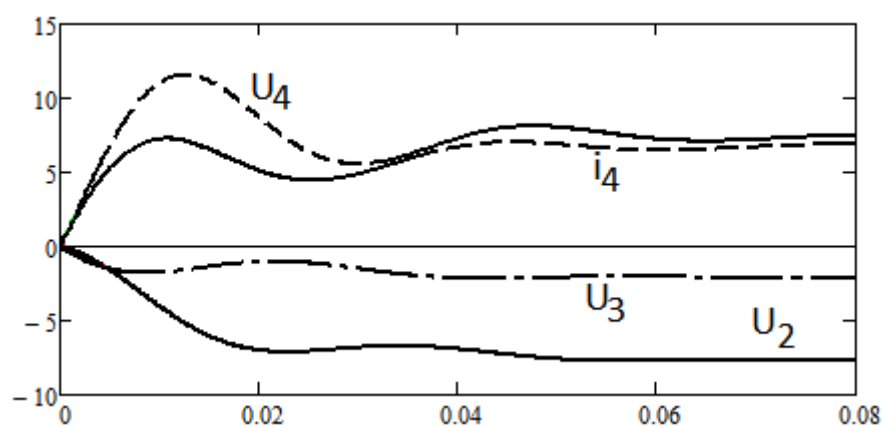
$$y_{i,3} := C_{2,0} \cdot z_{i,1} + C_{2,1} \cdot z_{i,2} + C_{2,2} \cdot z_{i,3}$$

$$y_{i,4} := C_{3,0} \cdot z_{i,1} + C_{3,1} \cdot z_{i,2} + C_{3,2} \cdot z_{i,3}$$

$$y_{i,5} := C_{4,0} \cdot z_{i,1} + C_{4,1} \cdot z_{i,2} + C_{4,2} \cdot z_{i,3}$$

$$y_{i,6} := C_{5,0} \cdot z_{i,1} + C_{5,1} \cdot z_{i,2} + C_{5,2} \cdot z_{i,3}$$

Получившиеся графики:



Пример 3.

Программа для расчета переменных состояния на MATCAD

```

A := (-12500 -250000)
      ( 200 -6000)
B := (-250000)
      ( 0)

F := (-7.5·107)
      ( 0)
U := (30)
C := (-1 0)
      ( 0 10)

Tk := 7·10-4
D := (0)
      (0)

N := 500

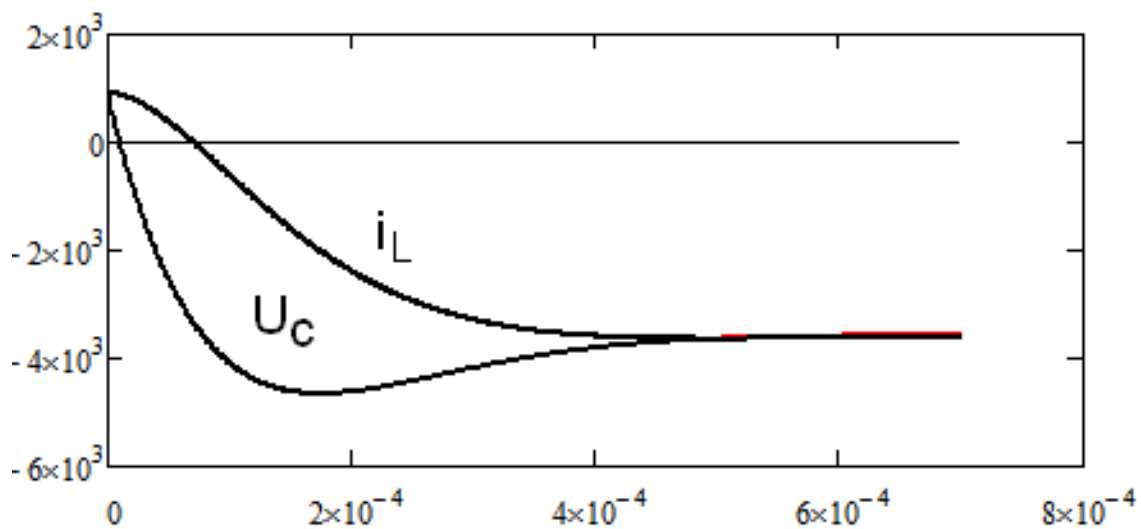
x := (900)
      (30)

R(t,x) := A·x + F

z := rkfixed(x,0,Tk,N,R)

i := 0..rows(z) - 1
    
```

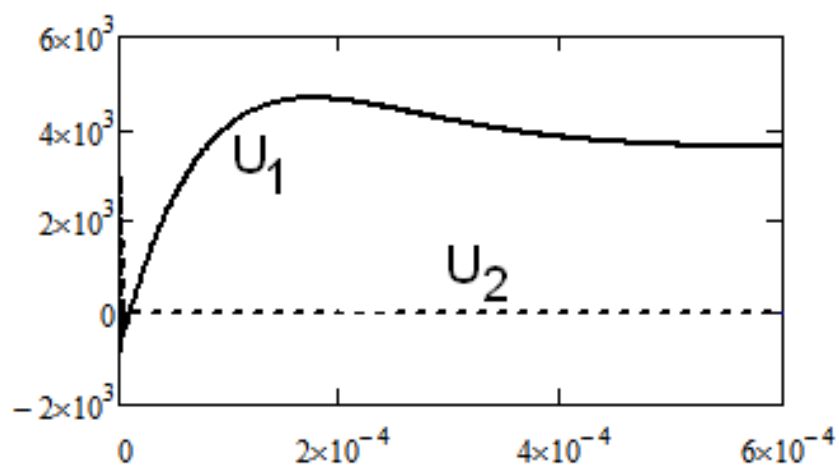
Графики переменных состояния:



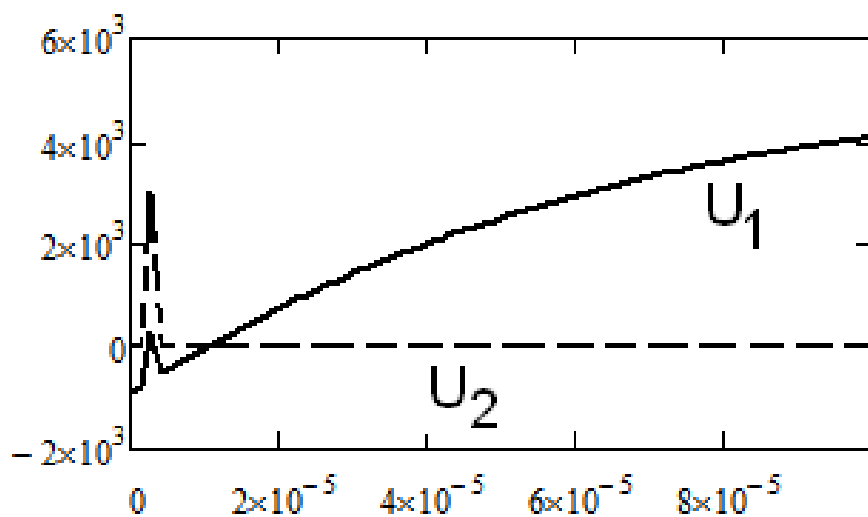
Продолжение программы: вычисление выходных переменных. Здесь $y_{i,1}$ – напряжение U_1 , $y_{i,2}$ – U_2 .

$$y_{i,1} = C_{0,0} \cdot z_{i,1} + C_{0,1} \cdot z_{i,2}$$

$$y_{2,i} = C_{1,0} \cdot z_{i,1} + C_{1,1} \cdot z_{i,2}$$



То же, увеличен масштаб по оси времени.



Пример 4.

Программа для вычисления переменных состояния на MATCAD

$$A := \begin{pmatrix} -16667 & 6667 \\ 6667 & -6667 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_k := 1.5 \cdot 10^{-3}$$

$$N := 500$$

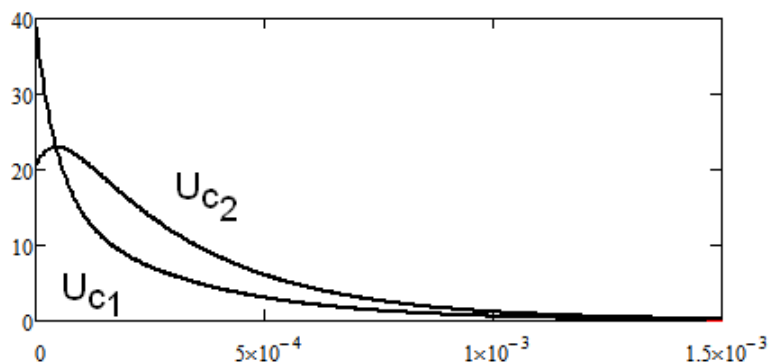
$$x := \begin{pmatrix} 39 \\ 20.6 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + F$$

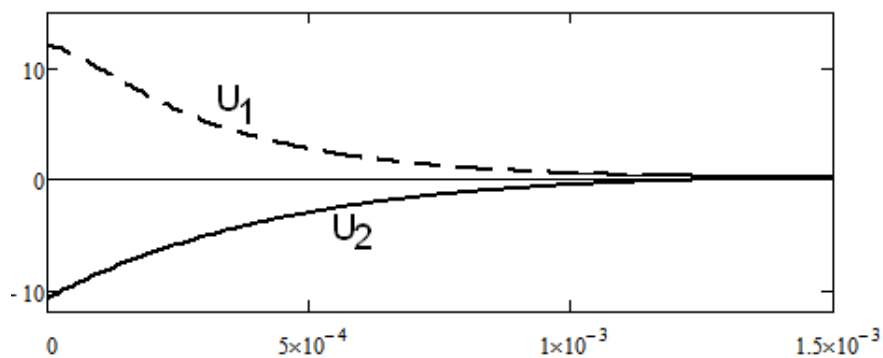
$$z := \text{rkfixed}(x, 0, T_k, N, D)$$

$$i := 0.. \text{rows}(z) - 1$$

Графики переменных состояния:



Графики выходных переменных:



Пример 5.

Программа для вычисления переменных состояния на MATCAD:

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} -1875 & -375 \\ -375 & -1125 \end{pmatrix}$$

$$\underline{F} := \begin{pmatrix} 1.125 \cdot 10^4 \\ 6.75 \cdot 10^3 \end{pmatrix}$$

$$T_k := 0.006$$

$$N := 500$$

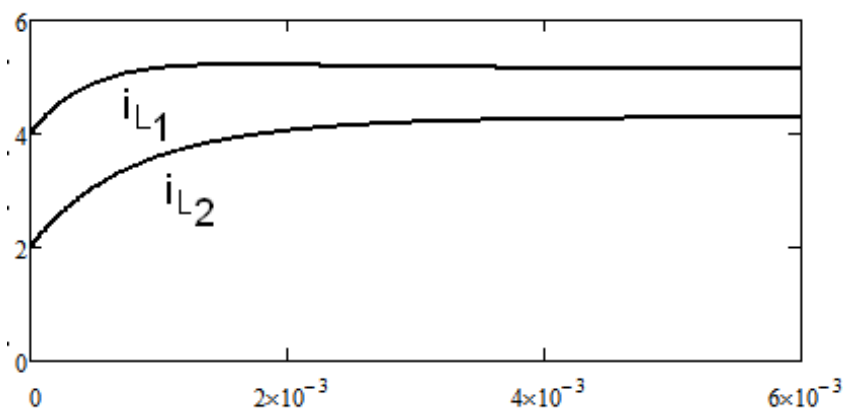
$$x := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + F$$

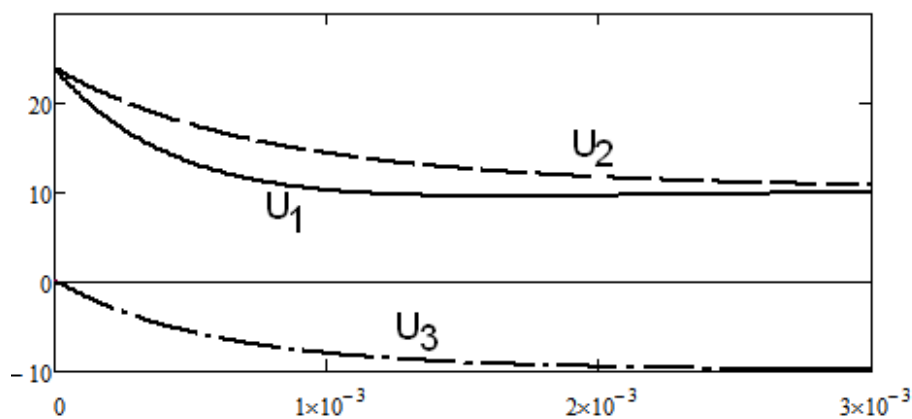
$$z := \text{rkfixed}(x, 0, T_k, N, D)$$

$$i := 0 \dots \text{rows}(z) - 1$$

Графики переменных состояния:



Графики выходных переменных:



Пример 6.1 ($E=1, J=0$).

Программа для расчета переменных состояния на MATCAD

$$A := \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} -0.25 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$T_k := 6$$

$$N := 500$$

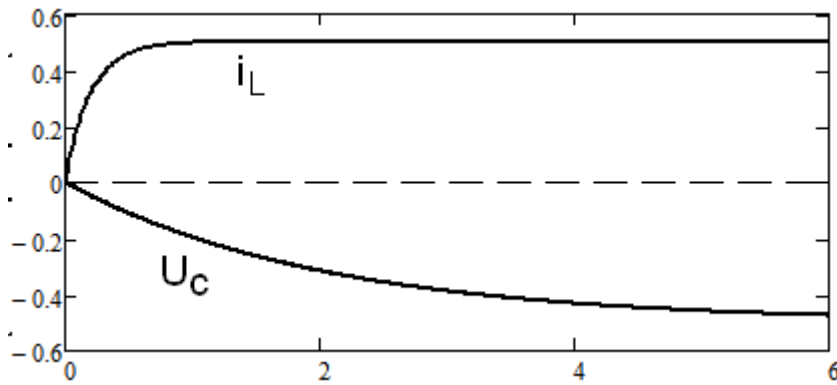
$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + F$$

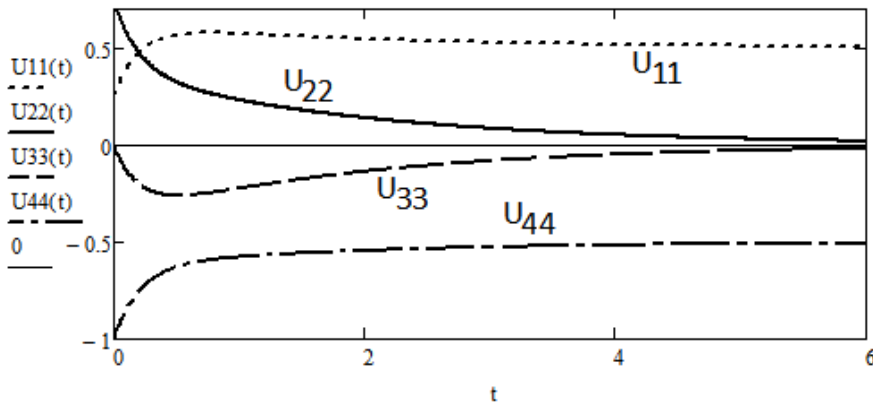
$$z := \text{rkfixed}(x, 0, T_k, N, D)$$

$$i := 0.. \text{rows}(z) - 1$$

Графики переменных состояния:



Графики выходных переменных:



Пример 6.2 (E=1, J=1).

Программа для расчета переменных состояния на MATCAD

$$A := \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_k := 10$$

$$N := 500$$

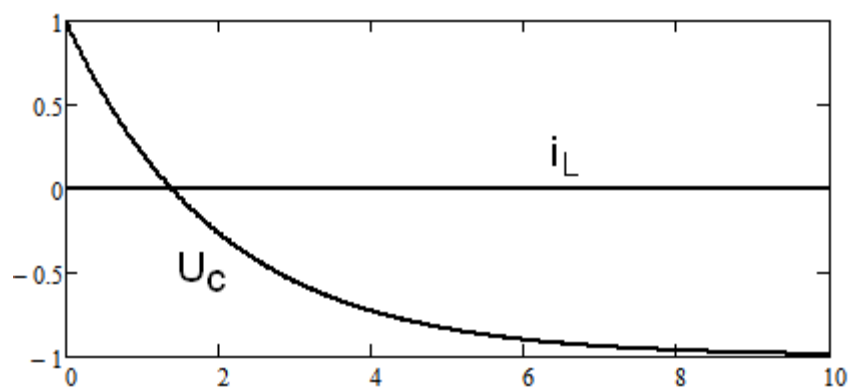
$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t,x) := A \cdot x + F$$

$$z := \text{rkfixed}(x, 0, T_k, N, D)$$

$$i := 0.. \text{rows}(z) - 1$$

Графики переменных состояния:



Пример 6.3 (E=5, J=3).

Программа для расчета переменных состояния на MATCAD

$$A := \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F := \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T_k := 10$$

$$N := 500$$

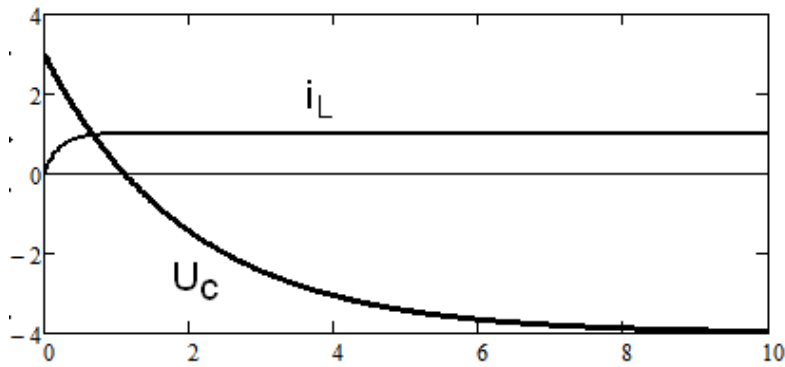
$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(t,x) := A \cdot x + F$$

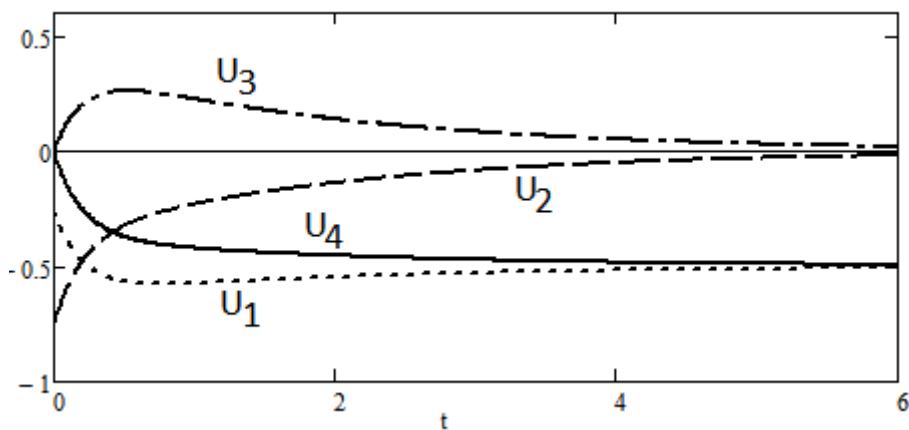
$$z := \text{rkfixed}(x, 0, T_k, N, D)$$

$$i := 0.. \text{rows}(z) - 1$$

Графики переменных состояния:



Графики выходных переменных:





В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ И ПРЕЦИЗИОННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ИНСТИТУТЕ ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Ю.А. Климов, В.С. Томасов

В 1930 году техникум точной механики и оптики был реорганизован в учебный комбинат, состоящий из института, техникума и ФЗУ в системе Всесоюзного объединения оптико-механической промышленности.

В те годы электротехническую подготовку в нашем институте проводили кафедры «Электротехники» и «Электроизмерительных приборов». Кафедрой «Электротехники» руководил проф. Салтыков Л.Н., а кафедрой «Электроизмерительных приборов» проф. Шишелов Л.П.

С сентября 1933 года исполнять обязанности заведующего кафедрой «Электротехники» нашего института начинает Рукавишников Н. Н., а с ноября 1937 года, на заведование кафедрой назначается Солодовников А. А., известный специалист в области электротехники, электроизмерительных приборов и оборудования.

Во время войны при эвакуации ЛИТМО в г. Черепаново кафедрой руководил доц., к.т.н. Березниковский С. Ф.; штатное расписание кафедры в те годы насчитывало всего 4 человека.

После возвращения ЛИТМО из эвакуации в 1944 году кафедрой заведует Березниковский С.Ф., которого 25 января 1945 года освобождают от обязанностей заведующего кафедрой «Общей и специальной электротехники» и назначают заведующим этой кафедрой профессора Зилитенкевича С.И.

В послевоенные годы в целом по стране и в Ленинграде ощущался дефицит опытных преподавателей высшей школы и руководство институтом пригласило в качестве заведующего кафедрой «Общей и специальной электротехники» известного ученого, педагога и методиста Пиотровского Л. М. Большинство учебников по электрическим машинам в ту пору было написано либо лично Пиотровским Л.М., либо в соавторстве с другими видными учеными.

В 1948 году на базе кафедры «Общей и специальной электротехники» образуются кафедры: «Общей электротехники и электрических машин» зав.каф. доц. Березниковский С.Ф., «Теоретических основ электротехники» зав. каф. проф. Слепян Л.Б. и «Электроизмерительных приборов» исполняющий обязанности зав. каф. проф. Слепян Л.Б.

В 1951 году кафедры «Электротехники» и «ТОЭ» объединяют в единую кафедру «Электротехники и ТОЭ» под руководством доц. Березниковского С.Ф. в составе Радиотехнического факультета,

В 1956 году на Радиотехническом факультете вновь образуются две кафедры – «ТОЭ» зав. каф. доц. Сочнев А.Я. и «Электрических машин» зав. каф. доц. Березниковский С.Ф.

В июле 1958 года доц Сочнева А.Я. освобождают от обязанностей зав. каф. «ТОЭ», а доц. Фунтова Н.М. назначают в.и.о. зав. каф. и избирают по конкурсу на должность заведующего в 1960 году.

В 1961 году в ЛИТМО на должность заведующего кафедрой «Электрических машин» приглашают профессора Сахарова А.П.

В 1965 году на должность заведующего кафедрой «Электрических машин» избирается доц., к.т.н. Глазенко Т.А.

В 1968 году кафедры «ТОЭ» и «Электрических машин» объединяются в единую кафедру «Электротехники» под руководством Т.А. Глазенко.

Татьяна Анатольевна Глазенко в 1948 году с отличием закончила энергетический факультет Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта. В 1953 году она защитила кандидатскую диссертацию и в 1966 году докторскую диссертацию. Заслуженный деятель науки и техники Российской Федерации, почетный член Электротехнической академии России проф. Глазенко Т.А. двадцать пять лет возглавляла кафедру. Она являлась видным, творчески активным ученым, автором более 200 опубликованных научных работ.

В 1990 году на должность заведующего кафедрой избирается проф., д.т.н. Герман - Галкин С.Г.

В 1996 году кафедра «Электротехники» была переименована в кафедру «Электротехники и прецизионных электромеханических систем».

С 1991 года кафедрой руководит доцент кандидат технических наук Томасов Валентин Сергеевич.

Сегодня в составе кафедры: проф., д.т.н. Дроздов В. Н., доц., к.т.н. Толмачев В.А., доц., к.т.н. Осипов Ю.М., доц., к.т.н. Петров Е.А., доц., к.т.н. Усольцев А.А., доц., к.т.н. Никитина М.В., доц., к.т.н. Борисов П.А., доц., к.т.н. Денисова А.В., доц., к.т.н. Лукичев Д.В., доц., к.т.н. Ильина А.Г., ст. преп., к.т.н. Махин И.Е., ст.преп. Гурьянов В.А., ст.преп. Денисов К.М., асс. Демидова Г.Л., асс. Жданов И.Н., асс. Цветкова М.Х., асс. Серебряков С.А., асс. Сергеева М.Е., асс. Шеф А.Н.

Литература.

1. Усольцев А.А. Общая электротехника/Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО – de.ifmo.ru
2. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах: Практическое пособие – СПб.: КОРОНА принт, 2001. – 336 с., ил.
3. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1; т. 2.— Л.: Энергоиздат, 1981. — 536 с.; 416 с.
4. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1986. — 544 с.
5. Новгородцев А.Б. 30 лекций по теории электрических цепей. — СПб. "Политехника", 1995. — 520 с.
6. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. М.: Гардарики. Вып.10. 1999.

Денисова Анна Валерьевна

**Применение операторного метода и метода
уравнений состояния для расчета переходных
процессов**

Учебное пособие

В авторской редакции

Дизайн

А.В. Денисова

Верстка

А.В. Денисова

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе.

Редакционно-издательский отдел

Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики
и оптики

197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

