

Министерство образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский государственный университет  
низкотемпературных и пищевых технологий



В.Л. Лазарев

## **РОБАСТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

Учебное пособие

Рекомендовано УМО по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 550200 – «Автоматизация и управление» подготовки бакалавров и магистров

Санкт-Петербург 2003

ББК 32.965

Л 17

УДК 637.52(075.8)

**Лазарев В.Л.**

**Робастные системы управления в пищевой промышленности:** Учеб. пособие. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2003. – 150 с.  
Л 17

ISBN 5-89565-067-8

Рассмотрены режимы работы систем управления. Основное внимание уделено анализу стационарных режимов при наличии случайных воздействий как наиболее реальных в производственных условиях. Для проведения такого анализа выбраны методики и соответствующий математический аппарат, применение которых проиллюстрировано на конкретных примерах различных объектов и технологических процессов пищевой промышленности. Также рассмотрены вопросы постановки и решения задач синтеза систем управления при наличии случайных воздействий. Уделено внимание вопросам синтеза систем управления при наличии априорной неопределенности о случайных воздействиях – робастным системам. Предложены различные подходы к решению задач анализа и синтеза систем управления, основанные на использовании вероятностных и энтропийных оценок координат.

Разработано в соответствии с требованиями ГОСа высшего профессио-нального образования по курсу «Теория автоматического управления».

Пособие предназначено для студентов и магистрантов, обучающихся по направлению «Автоматизация и управление», а также может использоваться студентами, аспирантами и инженерно-техническими работниками, занимающимися анализом, синтезом и эксплуатацией систем управления.

Рецензенты

Кафедра автоматизации химико-технологических процессов Санкт-Петербургского государственного университета растительных полимеров (зав. кафедрой доктор техн. наук, проф. Г.А. Кондрашкова)

Профессор кафедры компьютерных интеллектуальных технологий в проектировании Санкт-Петербургского государственного политехнического университета А.В. Самочадин

Одобрено к изданию редакционным советом университета

ISBN 5-89565-067-8

© Санкт-Петербургский  
государственный университет

## **ВВЕДЕНИЕ**

Эволюция систем управления различными объектами и технологическими процессами идет по пути учета случайных воздействий, поступающих по различным каналам, а также увеличения числа контролируемых и регулируемых параметров, совершенствования технических средств автоматизации. Интеграция вероятностных моделей и схем в детерминированную систему управления предусматривает получение информации об этих воздействиях, что также связано с приобретением соответствующих технических средств измерения и обработки информации и практической реализации этих схем для организации управления. В результате такое "расширение" систем управления обуславливает появление дополнительных затрат на ее комплектацию, монтаж и эксплуатацию, что в конечном счете ведет к удорожанию продукции. Таким образом, увеличение затрат на совершенствование систем управления может привести к парадоксу снижения эффективности производства от их функционирования. Особенно остро такая проблема стоит для многих производств пищевой промышленности. Это объясняется тем, что кроме необходимости контроля так называемых общетехнических параметров (температуры, давления, расходов, уровней и др.), необходимо также контролировать химический состав, структуру и свойства сырья, полуфабрикатов и готовой продукции. Проведение таких измерений в ряде случаев возможно либо с использованием методов сенсорного анализа (на основании статистической обработки результатов анализов комиссии специалистов-дегустаторов), либо с использованием сложного лабораторного оборудования и аппаратуры. Эти измерения являются, как правило, дорогостоящими и недостаточно оперативными, что также приводит к неэффективности процесса управления. Поэтому представляется важным определить не только рациональный перечень контролируемых параметров, но и выработать алгоритмы и схемы,

позволяющие минимизировать затраты на информационное обеспечение, организацию и функционирование систем управления.

Очевидно, что такие системы будут функционировать в условиях априорной неопределенности, обусловленной отсутствием полной информации по некоторым технологическим параметрам, используемым для управления, а также изменением их статистических характеристик. Системы, основанные на подобных принципах функционирования, относятся к классу робастных систем. Это название происходит от английского слова *robust*, что означает сильный, крепкий, здоровый и характеризует вышеуказанные способности систем. Организация робастного управления может быть основана на использовании различных подходов и математических методов. В данной работе рассматривается подход, основанный на анализе вероятностных и энтропийных характеристик координат и являющийся весьма продуктивным. Использование такого подхода позволяет не только оценить влияние различных воздействий (помех, возмущений) на состояние объекта управления и выдать рекомендации по модернизации системы управления или оборудования, но и осуществить синтез системы управления даже при наличии ограниченной информации об этих воздействиях, обеспечивающей "хорошее" качество управления.

Это обстоятельство является актуальным при проектировании и модернизации систем управления на производствах, где схема ведения технологического процесса не является строго детерминированной, допускаются вариации при выборе каналов внесения управляющих воздействий и требуется обеспечить лишь свойства выпускаемой продукции. Такая организация производства распространена на многих предприятиях пищевой промышленности, а также ряда других отраслей. Однако в случаях, когда схема ведения технологического процесса жестко задана разноуровневыми стандартами или так называемой технологической картой, что имеет место на предприятиях прецизионного машиностроения, приборостроения и других, методики оценки влияния тех или иных возмущений и воздействий на конечный продукт производства или какую-либо координату объекта окажутся необходимыми на стадии проектирования или модернизации существующих производств. Изложенный подход к решению подобных задач также может использоваться при проектировании и синтезе систем управления.

# 1. РЕЖИМЫ РАБОТЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. Основные положения Классификация режимов работы

Организация управления объектом предусматривает проведение анализа режимов работы системы управления, определение критериев качества ее работы в типовых режимах в соответствии с назначением объекта, целями и задачами управления. Последующий синтез системы управления направлен на определение структуры системы и функций отдельных ее элементов, обеспечивающих надлежащее качество работы системы, особенно в режимах, приоритетных по целям управления.

Система управления объектом, оборудованием может находиться в одном из режимов работы, классификация которых приведена на рис. 1.1 [1].

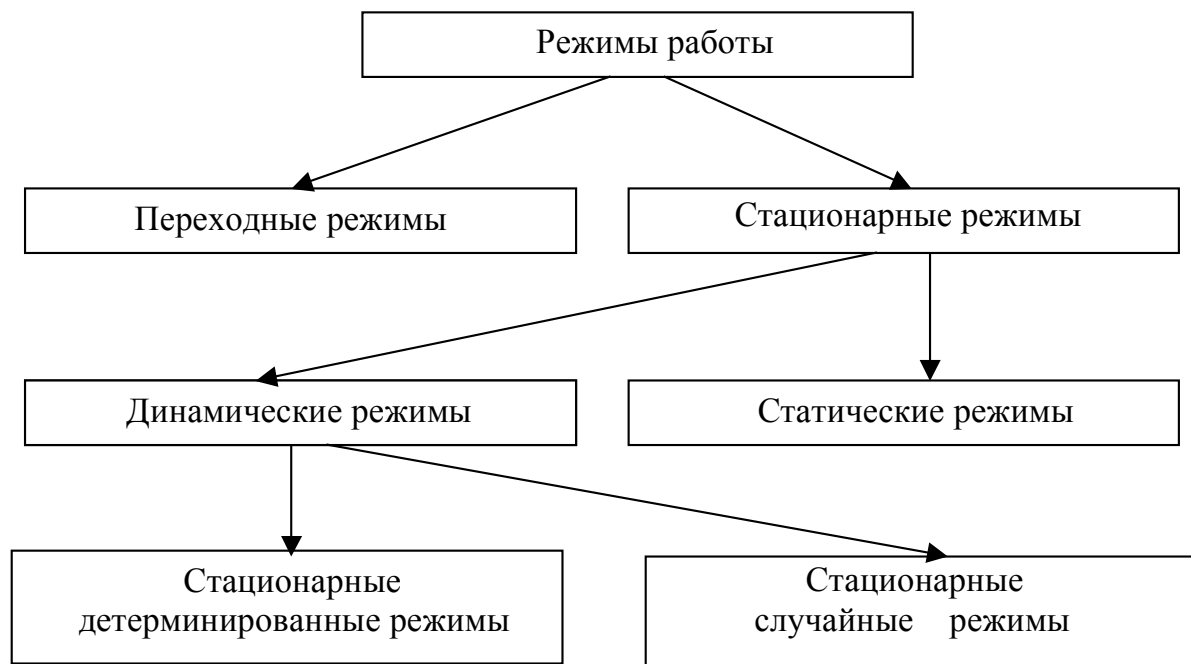


Рис. 1.1. Классификация режимов работы систем управления

Приведенная на рис. 1.1 классификация не является подробной, так как отдельные ее элементы допускают дальнейшую детализацию. Например, стационарные динамические детерминированные режимы работы систем в свою очередь могут

быть подразделены на режимы, в которых внешние воздействия изменяются с постоянной производной воздействия (скоростью, ускорением и т. д.), и режимы, где внешние воздействия изменяются по детерминированному закону (например, гармоническому). Однако для анализа задач управления и методов их решения приведенная классификация представляется достаточно подробной. Ниже приводится анализ основных режимов работы систем управления применительно к задаче синтеза и с учетом специфических особенностей объектов пищевой промышленности.

## **1.2. Работа систем управления в переходных режимах**

В промышленных условиях работа систем управления объектами в переходных режимах имеет место в основном в следующих случаях:

- при выводе объектов на рабочий режим перед началом работы;
- при смене режимов работы, например, при переходе на переработку новой партии сырья или при переходе на выпуск новой продукции;
- при выключении оборудования после завершения работы;
- при возникновении различных нештатных ситуаций.

В качестве примера, иллюстрирующего данные режимы, можно рассмотреть работу различных пароварочных камер, которые широко используются для термообработки колбас, копчения рыбопродуктов, выпечки хлебобулочных изделий. Перед началом работы такие объекты выводятся на соответствующий режим или, как говорят производственники, «прогреваются до нужной кондиции». С этой целью в локальные регуляторы, которые осуществляют поддержание необходимых температурно-влажностных режимов в различных зонах камер, вводят значения соответствующих уставок и начинают подачу энергоносителей (пара, электроэнергии, горячей воды). В результате последующей работы таких контуров регулирования осуществляют вывод объектов на требуемый режим, после чего начинают подачу сырья и осуществляют его обработку. Аналогично осуществляют переход на другие режимы обработки. Например, при термообработке колбасных изделий переход на выпуск других видов колбас, отличающихся диаметром батона, видом колбасной оболочки, химическим составом колбасного фарша и другими параметрами,

должен предусматривать соответствующее изменение режимных параметров на этапах термообработки (подсушка, обжарка, варка) и последующего охлаждения. Время выхода подобных объектов на рабочие режимы зависит от конструктивных особенностей и, в первую очередь, определяется такими характеристиками, как время запаздывания и постоянные времени по каждому из каналов управления. В промышленных установках это время может достигать десятки и даже сотни минут. Следует также отметить, что при отсутствии систем локального регулирования на объекте его вывод на рабочий режим или перестройка режима работы осуществляется оператором в ручном режиме.

Задача управления объектом в переходном режиме, как правило, состоит в минимизации времени переходного процесса. Это объясняется тем, что во время выхода оборудования на новый режим продукция не выпускается и, следовательно, имеют место непроизводительные простои, снижающие в конечном счете его производительность. В настоящее время задача синтеза оптимальной по быстродействию системы управления при наличии ограничений по величинам управляющих воздействий (т. е. для реальных производственных условий) решается с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина. Практическая реализация принципа максимума применительно к оптимальной по быстродействию системы автоматического управления (САУ) более известна в технике как теорема об  $n$ -интервалах, доказанная А.А. Фельдбаумом. Смысл этой теоремы заключается в том, что оптимальное по быстродействию управление объектом состоит из  $n$ -интервалов. В каждом интервале управляющее воздействие должно принимать свое предельное значение в соответствии с существующими ограничениями. Конец каждого интервала наступает в момент достижения управляемой величиной установленного значения. В начале следующего интервала происходит изменение знака управляющего воздействия. И так далее, пока выходная величина объекта не достигнет установленного режимного значения. На последнем интервале управляющее воздействие устанавливается на величине, соответствующей заданному статическому режимному значению выходной величины. Здесь следует отметить, что число интервалов может быть меньше  $n$  в случае ненулевых начальных условий. Если объект является многозвенным и имеют место ограничения не только на величину

входного управляющего воздействия, но также на соответствующие промежуточные переменные, число интервалов управления возрастает. Однако общим во всех случаях является то, что оптимальный по быстродействию вывод объекта на режим реализуется релейным управлением. Отсюда следует вывод о том, что в этом случае цель управления достигается в результате реализации строгого алгоритма. Задачи системы управления сводятся в основном к фиксации достижений управляемыми величинами требуемых значений на каждом интервале управления и организации позиционных переключений исполнительных устройств, а также к выполнению функций защиты и блокировок при возникновении различных нештатных или аварийных ситуаций.

Описанный алгоритм оптимального управления переходным процессом по быстродействию справедлив и в случаях, когда осуществляется возврат объекта к исходному состоянию, отклонение от которого произошло в результате действия различных возмущений. Доказано [2], что для линейных объектов (динамика которых описывается линейными дифференциальными уравнениями) закон оптимального по быстродействию управления не зависит от вида возмущений и начальных условий, т. е. инвариантен относительно этих факторов. Это обстоятельство существенно упрощает синтез системы управления переходными режимами таких объектов. Здесь следует отметить, что подавляющее большинство объектов пищевой промышленности с точки зрения математического описания являются линейными. К этому классу объектов относятся различные пароварочные камеры для термообработки колбасных изделий, выпечки хлебобулочной продукции, различные типы установок для горячего и холодного копчения мясо- и рыбопродуктов, аппараты для тепловой обработки молочных продуктов, автоклавы для стерилизации консервов, сушильные установки, ректификационные колонны, а также разнородное оборудование для замораживания и дефростации сырья, полуфабрикатов и различных пищевых продуктов. В случае невысокой степени автоматизации некоторых из перечисленных объектов их вывод на рабочий режим осуществляется обслуживающим персоналом опытно-интуитивным путем, который на практике в зависимости от квалификации операторов в большей или меньшей степени приближается к оптимальному релейному управлению.



Необходимо также иметь в виду, что в довольно редких случаях, когда критерием оптимизации переходного режима является не быстроедействие, а какой-либо другой критерий (например, минимизация энергозатрат), использование релейного управления, предусматривающего форсирование режимов, может оказаться не оптимальным.

Для описания переходных режимов работы объектов и систем управления в технике используются специальные функции – переходные характеристики. Эти функции описывают реакцию системы на типовые, стандартные испытательные воздействия – единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$  и единичный импульс  $\delta(t)$ . Математическое описание этих воздействий имеет следующий вид:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0; \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется переходной функцией и обозначается  $h(t)$ . Реакция системы на единичный импульс называется функцией веса и обозначается  $w(t)$ . Очевидно, что воздействия  $1(t)$  и  $\delta(t)$  имеют конкретную физическую подоплеку на реальных объектах. Поэтому характеристики  $h(t)$  и  $w(t)$  могут быть получены экспериментальным путем, а также аналитически путем решения соответствующего дифференциального уравнения для условий, соответствующих конкретному воздействию. Из определения типовых воздействий следует, что между ними существует взаимосвязь

$$\delta(t) = [1(t)]^{(1)}.$$

Из этого равенства видно, что и между переходными характеристиками также существует аналогичная зависимость

$$w(t) = h^{(1)}(t).$$

Из переходных характеристик определяются основные параметры переходного режима: длительность, величина перерегулирования и др.

Основным режимом работы большинства промышленных объектов является стационарный, в котором осуществляется производство продукции. Поэтому синтез системы управления должен осуществляться исходя из условий достаточно надежного управления стационарного режима. Проблема минимизации затрат на оснащение объектов управления техническими средствами контроля и управления при синтезе систем автоматизации промышленных объектов является актуальной, особенно в условиях рыночной экономики. Рассмотрению этой проблемы и будет посвящен изложенный ниже материал.

Необходимо отметить, что стационарные режимы работы объектов и соответственно систем управления подразделяются на статические и динамические (см. рис.1.1).

### 1.3. Статические режимы систем управления

Под статическим режимом системы понимается такой режим, при котором все координаты, определяющие ее состояние (имеется в виду как возмущающее, так и управляющее воздействие), являются постоянными. Отсюда следует, что в статическом режиме производные по времени по всем координатам равны нулю, т. е.

$$\frac{df_i}{dt} = 0, \quad i \in I; \quad (1.1)$$

$$\frac{dx_j}{dt} = 0, \quad j \in J; \quad (1.2)$$

где  $f_i$  –  $i$ -е возмущающее воздействие;  $x_j$  –  $j$ -е управляющее воздействие.

Таким образом, уравнение статического режима получается из соответствующего дифференциального уравнения при приравнивании к нулю всех производных. Или, переходя к передаточным функциям  $W(p)$ , уравнение статического режима получается при приравнивании оператора дифференцирования  $p = d/dt$  нулю. Описания статической зависимости выходной координаты  $y$  от

возмущающего воздействия  $f$  или управляющего воздействия  $x$  примут вид

$$y_f = W_f(p)|_{p=0} f; \quad (1.3)$$

$$y_x = W_x(p)|_{p=0} x, \quad (1.4)$$

где  $W_f(p)$  – передаточная функция по каналу «возмущение – выходная величина»;  $W_x(p)$  – передаточная функция объекта по каналу «управляющее воздействие – выходная величина».

В случае, если на объекте имеется система регулирования выходной координаты, действие возмущения приведет к появлению статического отклонения  $y_{ст}$

$$y_{ст} = \Phi(p)|_{p=0} f = \frac{W_f(p)f}{1 + W_x(p)W_{о.с}(p)} \Big|_{p=0}, \quad (1.5)$$

где  $\Phi(p)$  – передаточная функция замкнутой системы регулирования координаты  $y$ ;  $W_{о.с}(p)$  – передаточная функция цепи обратной связи.

Следует также отметить, что произведение

$$W_x(p)W_{о.с}(p) = W_p(p) \quad (1.6)$$

называется передаточной функцией разомкнутой системы.

Если на объект одновременно действует несколько возмущений, то результирующее статическое отклонение  $y_{ст\Sigma}$  согласно принципу суперпозиции, справедливому для линейных систем, будет равно алгебраической сумме отклонений, обусловленных действием каждого возмущения,

$$y_{ст\Sigma} = \sum_{(i)} y_{ст(i)}. \quad (1.7)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что вышеупомянутые промышленные объекты достаточно адекватно описываются как линейные инерционные звенья различных порядков или соединения таких звеньев и, следовательно, относятся к классу линейных систем (другими словами, описываются набором линейных дифференциальных уравнений).

Основной задачей управления объектом в статическом режиме является уменьшение или устранение статического отклонения –  $y_{ст}$ , которое фактически создает погрешность в управлении.

В настоящее время этот вопрос достаточно полно проработан и освещен в технической литературе. Поэтому представляется целесообразным констатировать существующие решения, которые используются при синтезе систем управления.

Известны три способа уменьшения или устранения статического отклонения.

1. Увеличение коэффициента передачи разомкнутой системы, т. е. речь идет об увеличении коэффициента  $K_p = W_p(p) \Big|_{p=0}$ . Как следует из выражения (1.6), величина  $K_p$  является произведением статических коэффициентов передачи объекта  $K_x$  и цепи обратной связи  $K_{o.c}$

$$K_p = K_x K_{o.c}. \quad (1.8)$$

Действительно, увеличение коэффициента  $K_p$  приводит к увеличению знаменателя в выражении (1.5) и, следовательно, к уменьшению величины статического отклонения. На практике при управлении промышленными объектами увеличение  $K_p$  осуществляется за счет увеличения коэффициента передачи цепи обратной связи, так как изменение коэффициента передачи объекта возможно, в основном, за счет изменения его конструкции, что является достаточно трудоемкой и дорогостоящей операцией. Изменение же значения  $K_{o.c}$  осуществляется с помощью специальной настройки, которая имеется во всех промышленных блоках формирования закона регулирования, используемых в цепи обратной связи контура регулирования (регулятора)  $y_l$ -й выходной координаты.

Необходимо отметить, что рассмотренный способ позволяет лишь уменьшить величину статического отклонения в соответствии с выражением (1.6), но не устранить его полностью. При этом следует иметь в виду, что увеличение  $K_{o.c}$  часто ограничивается верхним критическим значением  $K_{o.c (кр)}$ , достижение которого чревато выходом системы регулирования на границу устойчивости. То есть для обеспечения устойчивости системы необходимо при ее настройке соблюдать условие

$$K_{o.c} < K_{o.c(кр)}. \quad (1.9)$$

2. Введение интегратора в цепь обратной связи – переход к астатической системе управления.

Известно, что введение интегрирующего звена вне участка «воздействие – выходная величина» позволяет полностью устранить статическую ошибку. На практике это достигается путем введения в контур регулирования так называемой «И»-составляющей с передаточной функцией

$$W_{\text{и}}(p) = \frac{1}{T_{\text{и}} p}, \quad (1.10)$$

где  $T_{\text{и}}$  является настройкой регулятора.

Такая система, как известно, называется астатической. Количество интегрирующих звеньев определяет порядок астатизма.

Забегая вперед, следует также отметить, что в динамическом режиме, когда воздействие  $f$  изменяется с постоянной  $m$ -й производной, т. е.

$$p^m f = \frac{d^m f}{dt^m} = \text{const}, \quad (1.11)$$

и в самом объекте управления отсутствуют интегрирующие звенья, применение астатической системы управления с порядком астатизма  $q$  при условии

$$q > m, \quad (1.12)$$

полностью устраняет статическое отклонение, т. е. при выполнении условия (1.12)

$$y_{\text{ст}} = 0. \quad (1.13)$$

Если же в объекте управления изначально имеется  $r$  интегрирующих звеньев, то для получения результата (1.13) необходимо повысить порядок астатизма системы на величину  $r$ . Другими словами, необходимо довести порядок астатизма системы до величины

$$Q = q + r. \quad (1.14)$$

3. Компенсация возмущений. Суть способа состоит в расширении функций системы управления, в результате чего на

основании информации о величине действующего возмущения вырабатывается дополнительное управляющее воздействие, которое компенсирует влияние данного возмущения. Таким образом, практическая реализация этого метода предусматривает организацию измерения конкретного возмущения, а также введение в систему управления дополнительного блока, реализующего выработку соответствующей компенсирующей составляющей управляющего воздействия.

В отличие от обоих рассмотренных выше способов такой способ устранения статического отклонения не является универсальным, так как позволяет скомпенсировать действие только какого-либо конкретного возмущения. Действия же других возмущений, которые не включены в контур данной системы управления, приведут к отклонению выходной величины.

По результатам проведенного анализа способов управления статическими режимами можно сделать следующий вывод.

Повышение точности управления обеспечивается за счет выбора того или иного варианта управления, т. е. за счет организационной адаптации систем управления к условиям работы. Причем существующие варианты решения такой задачи теоретически позволяют удовлетворить любые требования по ограничению величины статической ошибки.

## 1.4. Динамические режимы систем управления

Формирование свойств продукции, производимой на многих промышленных объектах, происходит в основном в стационарных динамических режимах. Поэтому эти режимы работы объектов, а следовательно, и систем управления зачастую являются наиболее значимыми не только с точки зрения энергетических и материальных затрат, но также и их продолжительности во всем производственном цикле.

В реальном технологическом процессе всегда имеет место наложение детерминированных и случайных составляющих на его координаты или параметры. Так, например, происходят изменения, разброс характеристик сырья во время обработки, изменяется тепловой фон окружающей среды, обусловленный суточными или сезонными изменениями температуры, а также рядом производственных факторов, происходят изменения напряжения питания в сети, давления пара в магистрали при подключениях и отключениях различных потребителей этих видов энергии и т. д. Некоторые из этих составляющих могут быть описаны аналитически, другие носят случайный характер. Таким образом, становится очевидным, что понятие «идеальный статический режим» (т. е. выполнение условий (1.1) и (1.2)) для реального промышленного объекта является продуктом математической абстракции. Поэтому основное внимание при синтезе систем управления следует уделять их работе именно в динамических режимах. Исходя из специфических особенностей проявлений динамических режимов конкретного оборудования или технологического процесса необходимо определять перечень факторов (координат процесса), информация о которых должна быть использована для организации управления, а также для формирования требований к структуре системы управления и функциям отдельных ее элементов. Так как формирование свойств продукции происходит в основном в стационарных режимах, то основным критерием работы системы управления в большинстве случаев является величина ошибки поддержания конкретного режимного параметра (координаты).

Исходя из вышесказанного, проанализируем особенности работы объектов и систем управления в динамических режимах в соответствии с приведенной на рис. 1.1 классификацией.

Как следует из названия, стационарный динамический детерминированный режим имеет место, когда приложенное к системе воздействие  $f$  описывается аналитической зависимостью, т. е.  $f = f(t)$ .

В инженерной практике для конкретизации постановки и решения задач анализа и синтеза систем управления рассматривают два основных варианта детерминированных воздействий.

1. Воздействие, изменяющееся по гармоническому закону, т. е. вида

$$f(t) = f_0 \sin \omega t, \quad (1.15)$$

2. Воздействие, изменяющееся с постоянной производной  $m$ -го порядка  $p^m f = f^{(m)} = \text{const}$ , которое можно представить в виде

$$f(t) = \frac{f^{(m)}}{m!} t^m. \quad (1.16)$$

При  $m = 1$  имеем

$$f(t) = f^{(1)} t, \quad (1.17)$$

и говорят, что воздействие изменяется с постоянной скоростью  $V$

$$V = f^{(1)}.$$

При  $m = 2$ , когда  $f^{(2)} = \text{const}$ ,

$$f(t) = \frac{f^{(2)}}{2!} t^2 \quad (1.18)$$

воздействие изменяется с постоянным ускорением  $a$

$$a = f^{(2)}.$$

Аналогично при  $m = 3$  говорят, что воздействие изменяется с постоянной скоростью ускорения, и т. д. При этом все реальные детерминированные воздействия по возможности «округляют» до одного из этих вариантов.

Наличие детерминированных воздействий в динамическом режиме приведет к отклонению выходной величины объекта, т. е.



к появлению ошибки. Устранение этой ошибки, как отмечалось в подразд. 1.3, может быть достигнуто за счет применения астатической системы управления с соответствующим порядком астатизма, определенным условиями (1.12) и (1.13).

В качестве альтернативы можно также применить систему управления с компенсацией воздействия. В отличие от статического режима внесение компенсирующего воздействия в данном случае должно осуществляться с учетом динамики проявления этого воздействия.

При варианте представления воздействия в виде гармонической функции (1.15) отклонение выходной величины можно рассматривать как реакцию объекта на установившиеся гармонические колебания (сигналы). В теории управления поведение объекта под воздействием гармонических сигналов описывается с помощью частотных характеристик. Эти характеристики играют важную роль при анализе объектов и синтезе систем управления. Известно, что между передаточной функцией и частотными характеристиками существует взаимно-однозначное соответствие: частотные характеристики могут быть получены из передаточной функции и наоборот. (Строго говоря, это утверждение относится к минимально-фазовым звеньям, т. е. к звеньям, у которых корни полиномов числителя и знаменателя передаточной функции имеют отрицательные или нулевые вещественные части. Следует также отметить, что практически все реальные природные и промышленные объекты и звенья обладают такими свойствами, т. е. являются минимально-фазовыми.) Кроме того, частотные характеристики можно определить экспериментальным путем.

Ввиду важности этих характеристик для изложения дальнейшего материала и преемственности обозначений введем основные термины, понятия и обозначения:

- амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) –  $A(\omega)$ ;
- фазовая частотная характеристика (ФЧХ) –  $\varphi(\omega)$ .

Физический смысл этих характеристик можно пояснить на примере прохождения гармонического сигнала через исследуемый объект. Пусть на вход объекта подается гармоническое воздействие вида

$$f(t) = f_0 \sin \omega t.$$

Тогда на выходе объекта также должен установиться гармонический сигнал с той же частотой, но сдвинутый в общем случае по фазе на величину  $\varphi$  относительно входного сигнала, т. е.

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.19)$$

Здесь принято, что  $f_0, y_0$  – амплитуды входного и выходного сигналов соответственно;  $\omega$  – частота гармонического сигнала.

Отношение  $f_0$  к  $y_0$  в общем случае зависит от частоты  $\omega$  и характеризует интенсивность ослабления (усиления) гармонического сигнала данной частоты при его прохождении через анализируемый объект и называется АЧХ, т. е.

$$A(\omega) = \frac{y_0}{f_0}. \quad (1.20)$$

Величина фазового сдвига  $\varphi$  в общем случае также зависит от частоты и называется ФЧХ, т. е.

$$\varphi = \varphi(\omega). \quad (1.21)$$

Характеристики АЧХ и ФЧХ для наглядности удобно представлять в виде графиков, где по оси абсцисс откладывается величина  $\omega$ , а по оси ординат – соответствующие этой частоте значения  $A$  и  $\varphi$ . Экспериментальное определение  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  проще всего осуществить на маломощных объектах “электрической природы”. В этом случае в качестве источника входного воздействия используется генератор гармонических сигналов с перестраиваемой частотой; для измерения величин  $f(t), y(t)$  и  $\varphi$  – двухлучевой осциллограф или в случае более точных измерений – амплитудный вольтметр и фазометр.

Для механических объектов подобные экспериментальные исследования требуют гораздо больших вложений и трудозатрат. Здесь в качестве источника входного воздействия, изменяющегося по гармоническому закону, обычно используются различные вибраторы (чаще всего маховики со смещенным относительно оси вращения центром массы, имеющие привод с перестраиваемой угловой скоростью вращения). Для измерения величин  $y(t), f(t)$  и  $\varphi$

могут использоваться шлейфовые осциллографы. Такие исследования иногда проводятся с целью изучения динамических свойств различных подвесок, строительных конструкций, сооружений. Еще более сложными, а иногда и физически невозможными такие экспериментальные исследования являются для различных тепловых, гидравлических, энергетических и других объектов. Так, например, трудно даже представить саму возможность внесения гармонического воздействия по каналу подачи энергоносителя (пара или горячей воды) или сырья в промышленной установке крекинга нефти и нефтепродуктов, да еще с изменяющейся частотой. В таких случаях соответствующие частотные характеристики выводятся из математического описания этих объектов – передаточных функций – аналитическим путем с помощью известной и широко используемой на практике процедуры. Суть процедуры состоит в следующем. В выражении передаточной функции  $W(p)$  делается замена оператора дифференцирования  $p$  на комплексную переменную  $j\omega$ . В результате получают функцию комплексной переменной  $W(p)|_{p \Rightarrow j\omega} \Rightarrow W(j\omega)$ . Модуль этой функции есть АЧХ, т. е.  $|W(j\omega)| = A(\omega)$ , а аргумент есть ФЧХ –  $\varphi(\omega)$ . В показательной форме записи исходная функция  $W(j\omega)$  может быть представлена в виде  $W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ .

Такая «потребность» в частотных характеристиках объясняется тем, что целый ряд задач анализа объектов и особенно синтеза систем управления значительно удобнее решать именно в области этих характеристик.

Для большей наглядности представления информации наряду с рассмотренными АЧХ и ФЧХ используют производные от них характеристики, рассмотренные ниже.

3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика – АФЧХ. Эта характеристика объединяет в себе АЧХ и ФЧХ и строится в полярных координатах. Здесь каждому текущему значению частоты  $\omega_i$  соответствует радиус-вектор, имеющий угол поворота  $\varphi(\omega_i)$ , длина которого равна  $A(\omega_i)$ . При изменении  $\omega$  конец радиус-вектора описывает некоторую кривую, называемую кривой годографа АФЧХ. АФЧХ также может быть построена и на комплексной плоскости. Здесь каждая точка кривой годографа будет иметь вещественную составляющую  $U(\omega)$ , равную проекции радиус-вектора на вещественную ось, и мнимую составляющую  $V(j\omega)$ ,

равную проекции радиус-вектора на мнимую ось, т. е. будет иметь место зависимость

$$\begin{cases} U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), \\ V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{cases} \quad (1.22)$$

С другой стороны, из сделанного представления следует

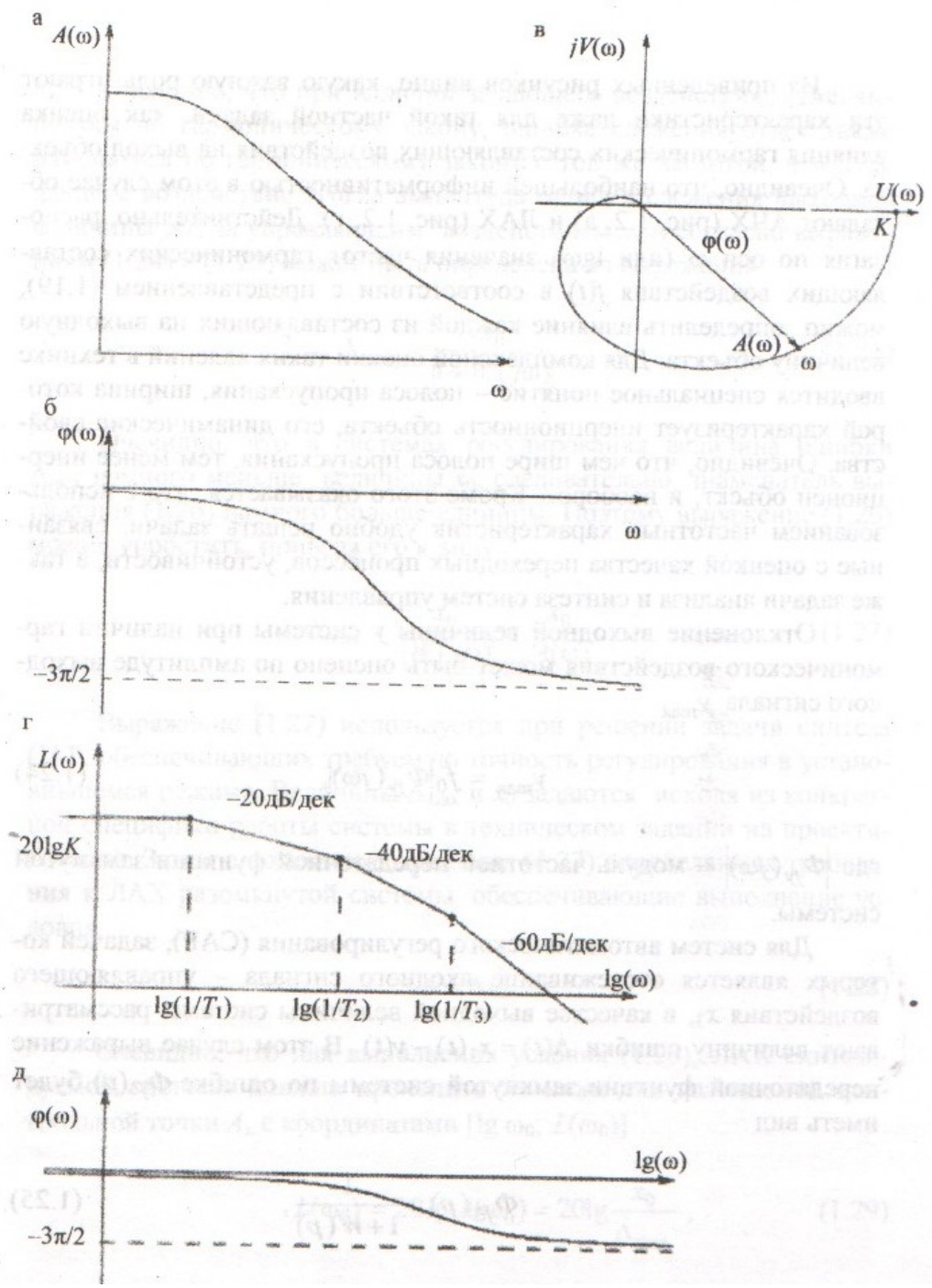
$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \end{cases} \quad (1.23)$$

4. Логарифмическая амплитудная характеристика – ЛАХ –  $L(\omega)$ . Логарифмическая фазовая характеристика – ЛФХ. ЛАХ строится в логарифмических координатах:  $\lg \omega$  – по оси абсцисс (единица измерения – декада),  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$  – по оси ординат (единица измерения – децибел). При построении ЛФХ используются: ось абсцисс –  $\lg \omega$ , ось ординат –  $\varphi(\omega)$ . Использование логарифмического масштаба позволяет строить асимптотическую ЛАХ в виде набора сопрягающихся отрезков прямых, имеющих наклоны, кратные 20 дБ/дек, что значительно упрощает процедуру построения и использования таких характеристик для решения различных задач.

Качественный вид рассмотренных выше характеристик для инерционного звена 3-го порядка, имеющего, например, передаточную функцию вида

$$W(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

приведен на рис. 1.2, а–д (для определенности полагаем  $T_1 > T_2 > T_3$ ).



с. 1.2. Качественный вид частотных характеристик инерционного звена 3-го порядка:

а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; г – ЛАХ; д – ЛФХ

Из приведенных рисунков видно, какую важную роль играют эти характеристики даже для такой частной задачи, как оценка влияния гармонических составляющих воздействия на выход объекта. Очевидно, что наибольшей информативностью в этом случае обладают АЧХ (рис. 1.2, а) и ЛАХ (рис. 1.2, г). Действительно, располагая по оси  $\omega$  (или  $\lg\omega$ ) значения частот гармонических составляющих воздействия  $f(t)$  в соответствии с представлением (1.19), можно определить влияние каждой из составляющих на выходную величину объекта. Для комплексной оценки таких явлений в технике вводится специальное понятие – полоса пропускания, ширина которой характеризует инерционность объекта, его динамические свойства. Очевидно, что чем шире полоса пропускания, тем менее инерционен объект, и наоборот. Кроме этого оказывается, что с использованием частотных характеристик удобно решать задачи, связанные с оценкой качества переходных процессов, устойчивости, а также задачи анализа и синтеза систем управления.

Отклонение выходной величины  $y$  системы при наличии гармонического воздействия может быть оценено по амплитуде выходного сигнала  $y_{\max}$

$$y_{\max} = f_0 |\Phi_{f_0}(j\omega)|, \quad (1.24)$$

где  $|\Phi_{f_0}(j\omega)|$  – модуль частотной передаточной функции замкнутой системы.

Для систем автоматического регулирования (САР), задачей которых является отслеживание входного сигнала – управляющего воздействия  $x_3$ , в качестве выходной величины системы рассматривают величину ошибки  $\Delta(t) = x_3(t) - y(t)$ . В этом случае выражение передаточной функции замкнутой системы по ошибке  $\Phi_{f\Delta}(p)$  будет иметь вид

$$\Phi_{f\Delta}(p) = \frac{1}{1+W(p)}, \quad (1.25)$$

где  $W(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы.

Очевидно, что при наличии задающего воздействия, изменяющегося по гармоническому закону, ошибка слежения будет также изменяться по гармоническому закону с той же частотой, что и задающее воздействие. Тогда амплитуда ошибки слежения

выходной величины  $y(t)$  за управляющим воздействием  $x_3(t)$  согласно выражениям (1.24) и (1.25) может быть определена из выражения

$$\Delta_{\max} = \frac{x_0}{|1+W(j\omega)|}. \quad (1.26)$$

Очевидно, что в системах регулирования величина ошибки  $\Delta_{\max}$  намного меньше величины  $x_0$ , следовательно, знаменатель выражения (1.26) намного больше единицы. Поэтому выражение (1.26) можно упростить, приведя его к виду

$$\Delta_{\max} \approx \frac{x_0}{|W(j\omega)|} = \frac{x_0}{A(\omega)}. \quad (1.27)$$

Выражение (1.27) используется при решении задачи синтеза САР, обеспечивающих требуемую точность регулирования в установившемся режиме. Величины  $\Delta_{\max}$  и  $x_0$  задаются исходя из конкретной специфики работы системы в техническом задании на проектирование. Затем с помощью выражения (1.27) определяются требования к ЛАХ разомкнутой системы, обеспечивающие выполнение условия

$$\Delta \leq \Delta_{\max}. \quad (1.28)$$

Очевидно, что для выполнения условия (1.28), ЛАХ синтезируемой системы должна проходить не ниже так называемой контрольной точки  $A_k$  с координатами  $[\lg \omega_0; L(\omega_0)]$

$$L(\omega_0) = 20 \lg A(\omega_0) = 20 \lg \frac{x_0}{\Delta_{\max}}, \quad (1.29)$$

где  $\omega_0$  – частота управляющего воздействия.

На рис. 1.3 приведены примеры ЛАХ, обеспечивающих строгое выполнение условия (1.28) (так как в обоих случаях ЛАХ проходит выше контрольной точки) для различных вариантов САР.

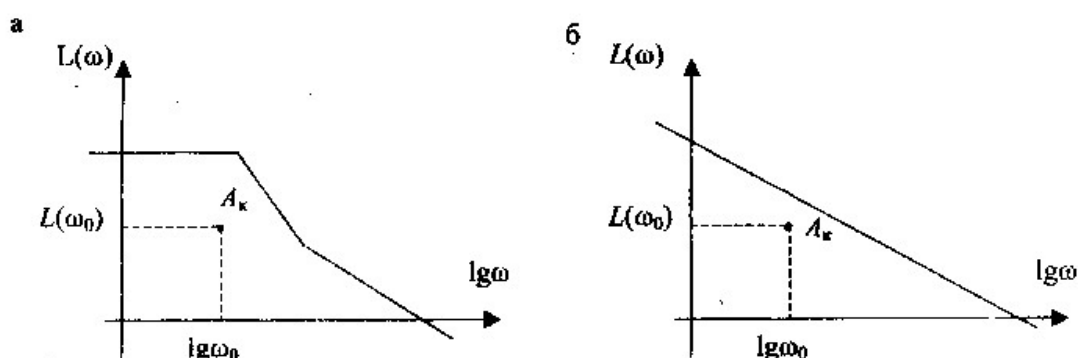


Рис. 1.3. Примеры ЛАХ разомкнутых САР, обеспечивающих выполнение требований по ограничению ошибки в установившемся режиме:  
а – статическая система; б – астатическая система

Из выражения (1.27) также следует, что если ЛАХ разомкнутой САР проходит ниже контрольной точки  $A_k$ , то величина ошибки слежения будет превышать заданное допустимое значение, т. е. условие (1.28) не будет выполняться.

Применительно к задаче синтеза систем управления при работе в детерминированных динамических режимах необходимо отметить следующее. В настоящее время разработаны и широко используются на практике методы синтеза систем управления с использованием частотных характеристик. Не вдаваясь в отдельные детали, необходимо отметить концептуальную направленность этих методик. В качестве отправной точки используется математическое описание объекта управления и не варьруемой части системы управления, если таковая имеется. Далее, исходя из конкретной ситуации, формируются требования к качеству процесса управления. Чаще всего ими являются: требования к запасу устойчивости системы, ограничения по длительности переходного процесса (быстродействию), требования к точности управления в статическом или динамическом режимах. В последнем случае возможны различные варианты описания воздействия (например, воздействия, изменяющиеся с постоянной скоростью, ускорением и др.). Кроме того, в этот перечень могут быть включены требования к типу переходного процесса (апериодический или колебательный). При допустимости колебательного переходного процесса могут накладываться ограничения на величину перерегулирования или динамический заброс. Возможны и другие требования. На основании всех этих требований по известным методикам строится ЛАХ желаемой системы. Там же строится ЛАХ неварьруемой части системы. На основании этой информации определяется ЛАХ и соответствующее ей математическое описание варьруемой части системы, которая обычно реализуется в виде того или иного типа регулятора с соответствующими настройками либо в виде конкретной корректирующей цепи. Далее делается проверка правильности полученного решения путем построения переходного процесса в системе одним из известных методов. При необходимости дополнительной корректировки системы управления



методика может быть повторена. Для удобства реализации отдельных компонентов таких методик в настоящее время разработаны специальные номограммы и компьютерные программы.

В качестве неварьируемой части системы обычно рассматриваются объект управления и первичные преобразователи и (или) исполнительные устройства, штатно установленные на нем. Если же они относятся к варьируемой части системы и имеются варианты их выбора, то это обстоятельство расширяет возможности синтеза системы управления.

На основании вышеизложенного можно сделать следующий обобщающий вывод. При наличии детерминированных воздействий изменение координат объекта или системы управления, динамика которых описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений, может быть однозначно определено. При необходимости осуществления автоматического управления требуемое качество процесса управления для основных типов воздействий может быть достигнуто за счет синтеза устройства управления, структура и параметры которого могут быть определены и рассчитаны с помощью инженерных методик.

Наиболее полным и практически реальным вариантом стационарного динамического режима является случайный режим. Стационарный детерминированный режим можно рассматривать как частный вариант случайного режима, когда случайные функции, описывающие воздействия, вырождаются в детерминированные функции. Физической подоплекой этого обстоятельства является то, что реальные воздействия, сигналы в любой системе имеют случайную составляющую. Если влияние этих составляющих не велико, то ими можно пренебречь и ограничиться рассмотрением детерминированного режима. Приведенные в начале этого подраздела примеры иллюстрируют данный тезис. Объективная оценка влияния отдельных случайных составляющих воздействий является необходимой предпосылкой для определения перечня контролируемых воздействий при синтезе системы управления. Дальнейшее повышение эффективности управления как естественный этап эволюции систем управления должно основываться на учете случайных составляющих воздействий, являющихся естественными аномалиями детерминированных режимов.

Синтез системы управления при наличии случайных воздействий является наиболее сложной задачей относительно рассмотренных выше вариантов. Зачастую, особенно при наличии ограниченной информации о воздействиях, точное аналитическое решение такой задачи не представляется возможным. Поэтому возникает задача синтеза робастных систем, обеспечивающих «хорошее» качество управления (естественно в разумных пределах) даже в условиях относительного «информационного вакуума». Рассмотрению методов синтеза таких систем для наиболее характерных случаев и ситуаций с исходными данными посвящен излагаемый далее материал. В любом случае, для решения подобных задач необходимо математическое описание случайных воздействий. Математический аппарат для таких исследований разработан в теории вероятностей. В следующем разделе приводятся основные положения этой теории, необходимые для решения задач анализа и синтеза систем управления, с конкретными иллюстрациями и пояснениями.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 2.1. Основные положения

Как отмечалось в разд. 1, практически любой реальный режим работы объекта или протекания технологического процесса происходит при наличии случайных воздействий. Подоплека этого обстоятельства отражена в известном тезисе о том, что случайность закономерна. В ряде случаев, когда доля случайных составляющих воздействий относительно невелика, для упрощения решаемых задач анализа работы объекта управления, синтеза технологий и управления этим обстоятельством пренебрегают. Наличие случайных воздействий на входе приводит к появлению случайной составляющей в выходных координатах. А это, в свою очередь, приводит к вариации фазовых траекторий технологических режимов, что в конечном счете отразится на изменении свойств выпускаемой продукции. На рис. 2.1 вышеизложенное иллюстрируется на примере работы термоагрегата для термообработки вареных колбас. На рис. 2.1, а приведена характеристика семейства кривых изменений температуры энергоносителя (паровоздушной смеси) в агрегате при обработке колбас одного типа во времени. Разброс кривых изменения температуры во времени обработки обусловлен проявлением таких случайных воздействий, как изменение давления пара, подаваемого в паровой калорифер, а также изменением температуры воздуха как снаружи термоагрегата, так и подаваемого в калорифер, и др. Горизонтальные участки кривых соответствуют основным стадиям технологической обработки: подсушке, обжарке, варке и охлаждению. Штриховой линией обозначен «идеальный» температурный режим, который должен иметь место при отсутствии случайных воздействий. На рис. 2.1, б приведен характерный вид семейства кривых изменения температуры в центре колбасного батона в процессе термообработки  $t_{\text{б}}$  – одного из важнейших показателей качества продукции, характеризующего уровень стерилизации продукта. Ввиду особой важности этого показателя в действующих стандартах введено специальное ограничение по величине максимального значения температуры в центре батона в процессе термообработки  $t_{\text{б max}}$ , т. е.  $t_{\text{б max}} \geq t_{\text{б. кр}}$ . Значение  $t_{\text{б. кр}}$  задается специальной технологической инструкцией, обычно принимают  $t_{\text{б. кр}} = 72 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Разброс кривых на рис. 2.1, в обусловлен наличием рассмотренных выше случайных воздействий, искажающих

температурный режим, а также проявлением других случайных воздействий, например, изменением теплофизических характеристик колбасного фарша вследствие некоторой нестабильности его химического состава, особенно по таким параметрам, как содержание жира, белка, влаги и др.

Как результат влияния различных возмущающих воздействий на выходную координату процесса тепловой обработки  $t_{б\ max}$  на рис. 2.1, в приведен характерный вид кривой плотности распределения этого показателя  $p(t_{б\ max})$  для кондиционной продукции. Положительная асимметрия ( $S_k > 0$ ) приведенного закона распределения объясняется специфическими особенностями организации управления процессом термообработки. С одной стороны, требуется обеспечить выполнение необходимого условия производства кондиционной продукции:  $t_{б\ max} \geq t_{б\ кр}$ . С другой стороны, значительное превышение величины  $t_{б\ кр}$  приводит или к перерасходу энергии, или к снижению производительности агрегата (за счет увеличения длительности термообработки), что в конечном итоге ведет к увеличению себестоимости продукции. Для недопущения этого в современных термоагрегатах имеются специальные системы блокировки подачи энергоносителя и оповещения обслуживающего персонала о необходимости прерывания процесса термообработки в случае, когда значение разности  $t_{б\ max} - t_{б\ кр}$  превысит некоторое установленное значение  $\Delta_{кр}$ . Этим и объясняется невысокая вероятность появления больших величин  $\Delta$  в производственных условиях.

И, наконец, для полноты описания рассматриваемого явления на рис. 2.1, г приведен характерный вид интегрального закона распределения этого же показателя  $F(t_{б\ max})$ .

Приведенный пример наглядно иллюстрирует необходимость наличия математического описания случайных воздействий и методов анализа влияния этих воздействий на состояние объектов. Ниже будут рассмотрены методы анализа воздействий и выбран перечень параметров для их характеристики.

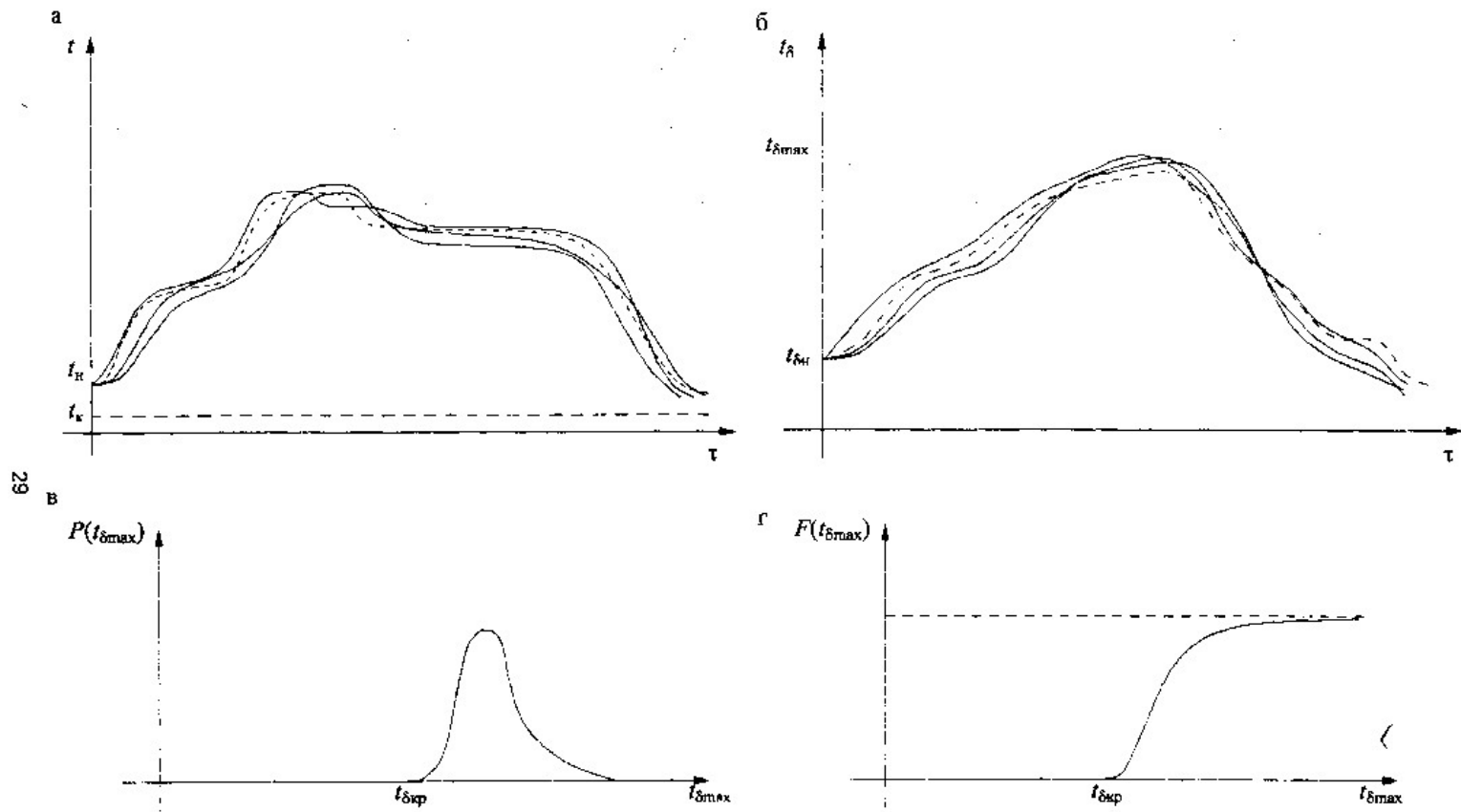


Рис. 2.1. Характеристики работы термоагрегата при наличии случайных воздействий:  
 а – графики изменения температуры энергоносителя; б – графики изменения температуры в центре колбасного батона во время термообработки; в – характерный вид плотности распределения  $p(t_{\delta \max})$ ; г – характерный вид интегрального закона распределения  $F(t_{\delta \max})$

## 2.2. Случайные величины и случайные функции

Случайное воздействие в зависимости от характера его проявления с математической точки зрения может быть представлено либо случайной величиной, либо случайной функцией. Понятие случайной функции является более общим, чем случайная величина, так как в нем учитывается фактор времени. Образно говоря, случайная величина характеризует как бы «статистику» случайного явления, а случайная функция – динамику. Или другими словами, случайная функция есть случайная величина, проявляющаяся во времени. Изучением случайных величин и функций занимается специальная математическая дисциплина – теория вероятностей. Ниже излагаются некоторые ее положения, необходимые для понимания последующего материала.

## 2.3. Случайная величина и ее характеристики

Случайная величина – это величина, значение которой является непредсказуемым в ограниченном диапазоне исходных факторов рассматриваемого явления. Наиболее полной характеристикой случайной величины  $x$  является ее закон распределения – интегральный  $F(x)$  и дифференциальный  $p(x)$ .

Интегральным законом распределения случайной величины  $x$  называется функция  $F(x)$ , описывающая вероятность  $P$  появления случайной величины  $X$ , меньшей некоторого текущего значения переменной  $x$ , т. е.

$$F(x) = P (X \leq x).$$

Из определения  $F(x)$  следует, что она является неубывающей функцией  $x$  для  $-\infty < x < \infty$ . Причем  $F(-\infty) = 0$  и  $F(\infty) = 1$ . Пример вида функции  $F(x)$  приведен на рис. 2.1, г.

Дифференциальным законом распределения или плотностью вероятности  $p(x)$  называется функция

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx},$$

при этом подразумевается, что функция  $F(x)$  непрерывна и дифференцируема.

Из определения функции  $p(x)$  следует, что:

$$1) p(x) \geq 0;$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1;$$

$$3) P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Для дискретной случайной величины плотность вероятности вырождается в распределение вероятностей  $P(X_i)$ , которое задается конечным рядом. В этом случае очевидно, что интегральный закон распределения случайной величины  $F(x)$  может быть выражен через распределение вероятностей  $P(X_i)$  следующим образом:

$$F(x) = \sum_{(i)} P(X_i); \quad X_i < x.$$

Если случайное событие характеризуется несколькими координатами, т. е. может быть представлено как случайный вектор, то это событие рассматривается как многомерная случайная величина. Понятия интегрального и дифференциального законов распределения по аналогии вводятся и для многомерных случайных величин. В этом случае соответствующие функции будут многомерными и в отличие от одномерных случайных величин будут представляться не кривыми, а некоторыми гиперповерхностями в соответствующей системе координат.

Для удобства решения практических задач реальные законы распределения случайных величин «округляют» с той или иной степенью точности до известных типовых законов, свойства и параметры которых изучены и определены.

В инженерной практике, исходя из удобства использования, наибольшее распространение для характеристики случайных величин получил дифференциальный закон распределения. Один из примеров вида дифференциального закона распределения приведен на рис. 2.1, в. Однако для решения ряда практических задач нахождение закона распределения и его дальнейшее использование требуют значительных трудозатрат и большого объема вычислительной работы. Иногда оказывается удобнее воспользоваться набором числовых параметров, характеризующих различные свойства случайной величины. Этот набор важнейших параметров состоит из ограниченного ряда начальных и центральных моментов [3].

Начальные моменты  $k$ -го порядка случайной величины  $X$  определяются из выражений:

– для дискретной случайной величины

$$\alpha_k(X) = \sum_{(i)} x_i^k P_i, \quad (2.1)$$

где  $P_i$  – вероятность появления случайной величины  $x_i$ ;

– для непрерывной случайной величины

$$\alpha_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx. \quad (2.2)$$

Для решения практических задач наиболее важным является первый начальный момент  $\alpha_1(X) = m_x = M(X)$ , получивший специальное название – математическое ожидание случайной величины. Математическое ожидание является своеобразным «центром тяжести», вокруг которого происходит «рассеяние» случайной величины.

Центральные моменты  $k$ -го порядка случайной величины  $x$  определяются из выражений:

– для дискретной случайной величины

$$\mu_k(X) = \sum_{(i)} (x_i - m_x)^k P_i; \quad (2.3)$$

– для непрерывной случайной величины

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k p(x) dx. \quad (2.4)$$

Для практических целей наиболее важными являются второй, третий и четвертый центральные моменты.

Второй центральный момент  $\mu_2(X) = D_x$  получил специальное название – дисперсия. Дисперсия характеризует степень «рассеяния» случайной величины относительно математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс случайной величины, и наоборот. Для детерминированной величины  $c$  дисперсия равна нулю, т. е.  $D_c = 0$ . Для большей наглядности степени разброса случайной величины используют специальный параметр  $\sigma_x$

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)}, \quad (2.5)$$



называемый средним квадратическим отклонением случайной величины. Величина  $\sigma_x$  имеет размерность случайной величины и характеризует ее «средний радиус» рассеяния.

Третий центральный момент  $\mu_3$  характеризует асимметрию или скошенность плотности распределения. Для количественной характеристики асимметрии используют безразмерную величину, называемую коэффициентом асимметрии  $S_k$ ,

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что для симметричной (относительно  $m_x$ ) кривой плотности распределения случайной величины  $S_k = 0$ . Пример положительной асимметрии ( $S_k > 0$ ) плотности распределения приведен на рис. 2.1, в.

Четвертый центральный момент  $\mu_4$  характеризует степень «островершинности» распределения. Для количественной характеристики этого свойства используют специальную безразмерную величину, называемую эксцессом  $E_x$ ,

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (2.7)$$

В качестве «отправной точки» для оценки «островершинности» распределения используется нормальный закон распределения, для которого  $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$ . Отсюда значение  $E_x$  для нормального закона распределения согласно выражению (2.7) равно нулю. Таким образом, более «островершинные» кривые по сравнению с нормальным распределением имеют положительный эксцесс и наоборот.

Рассмотренный набор числовых параметров  $m_x$ ,  $\sigma_x$ ,  $S_k$ ,  $E_x$  довольно полно, но не исчерпывающе, характеризует свойства случайной величины. При необходимости могут быть использованы и другие параметры, например мода, медиана. Однако они получили меньшее распространение.

## 2.4. Случайная функция и ее характеристики

Случайные процессы, протекающие в различных объектах, описываются с помощью математического аппарата случайных функций. Для получения адекватного математического описания случайного процесса его предварительно необходимо классифицировать. Достаточно полная классификация случайных процессов приведена в работах [4, 5]. Однако сначала необходимо определить их основные характеристики. Как следует из определения случайной функции, ее закон распределения в общем случае зависит от времени. Поэтому и ее характеристики также должны являться функциями времени. По аналогии со случайными величинами для характеристики случайных функций используется ограниченный набор неслучайных функций времени, которые достаточно объективно их определяют. Для решения практических задач наибольшее распространение получили следующие функции.

1. Математическое ожидание случайной функции  $x(t) - m_x(t)$ . Если  $t$  придать фиксированное значение  $t_i$ , то получим «сечение» случайной функции по времени. Совокупность математических ожиданий  $m_x(t_i)$  случайных величин  $x(t_i)$  для всех значений  $t$  определяет математическое ожидание случайной функции  $m_x(t)$ .

2. Дисперсия случайной функции  $x(t) - D_x(t)$ . По аналогии с предыдущим определением,  $D_x(t)$  называется функция времени, которая при каждом конкретном значении  $t = t_i$  равна дисперсии случайной величины, получающейся в результате соответствующего «сечения» рассматриваемой случайной функции  $x(t)$ . Среднеквадратическое отклонение случайной функции  $\sigma_x(t)$  определяется по аналогии со случайными величинами как  $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$ .

3. Корреляционная функция. Корреляционная функция характеризует интенсивность изменения случайной функции во времени или, образно говоря, степень ее турбулентности. Для строгого описания такого свойства рассматриваются пары временных «сечений», соответствующих моментам времени  $t_1$  и  $t_2$ . Степень связанности случайных значений функций  $x(t_1)$  и  $x(t_2)$  характеризуется корреляционной функцией  $K_{xx}(t_1, t_2)$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = M\{[x(t_1)][x(t_2)]\}. \quad (2.8)$$

Для наглядности и удобства представление часто используют случайную функцию  $\overset{0}{x}(t) = x(t) - m_x(t)$ , соответственно выражение (2.8) примет вид

$$K_{xx}(t, t_1) = M[\overset{0}{x}(t_1) \overset{0}{x}(t_2)]. \quad (2.9)$$

Как следует из выражения (2.9), при  $t_1 = t_2$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = D_x(t). \quad (2.10)$$

Другими словами, дисперсия случайной функции есть частный случай ее корреляционной функции.

Для удобства на практике часто используют нормированную корреляционную функцию, которая определяется из выражения

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \frac{K_{xx}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}}. \quad (2.11)$$

Очевидно, что при  $t_1 = t_2$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \frac{K_{xx}(t, t)}{\sqrt{D_x(t) D_x(t)}} = \frac{D_x(t)}{D_x(t)} = 1.$$

4. Спектральная плотность  $S_x(\omega)$ . Спектральная плотность описывает распределение дисперсий случайной функции  $x(t)$  по частотному спектру. Ее также можно трактовать как распределение средних значений квадратов амплитуд отдельных гармонических составляющих исходной функции  $x(t)$ . Так как квадрат амплитуды гармонического сигнала пропорционален его мощности, то спектральная плотность фактически характеризует распределение мощностей отдельных гармонических составляющих в частотном диапазоне.

Приведенный выше набор неслучайных функций используется для характеристики случайных процессов. Для решения поставленных в данной работе задач необходимо определить типы случайных процессов, которые доминируют в практике управления рассматриваемыми технологическими объектами. В основе классификации все случайные процессы делятся на стационарные и нестационарные.

Стационарным случайным процессом называется процесс, у которого все вероятностные характеристики не зависят от времени. Исходя из вышесказанного, стационарный процесс можно исследовать на любом временном интервале, при этом его характеристики остаются неизменными.

Нестационарным случайным процессом называется процесс, который имеет тенденцию изменения во времени: его вероятностные характеристики являются функциями времени. Вообще говоря, любой случайный процесс в реальном объекте является нестационарным хотя бы потому, что имеет нестационарные стадии, обусловленные переходными режимами. Примером нестационарного процесса является процесс, изображенный на рис. 2.1, а.

Нестационарными стадиями процесса являются стадии выхода на режимы подсушки, обжарки, варки и охлаждения. После окончания каждой из этих стадий объект переходит в соответствующий установившийся режим, в каждом из которых процесс изменения температуры во времени с некоторым приближением может считаться стационарным. То же самое можно сказать и о случайном процессе, изображенном на рис. 2.1, б. Здесь относительно небольшим стационарным участком является участок варки колбасных батонов на заключительной стадии термообработки перед началом охлаждения. В подавляющем большинстве случаев, и это подтверждается приведенными примерами, целенаправленная обработка сырья, формирование тех или иных свойств продукции осуществляются на конкретных этапах технологической обработки в установившихся технологических операциях, где проявление различных случайных воздействий обуславливает наличие стационарного (или псевдостационарного) случайного процесса в режимных параметрах. Поэтому синтез системы управления и выбор соответствующих технических средств должны осуществляться исходя именно из этой предпосылки. Что касается выбора стратегии управления в переходных режимах, то, как отмечалось выше (разд. 1), она в большинстве случаев направлена на форсирование (повышение быстродействия) этих режимов и решается с использованием принципов релейного управления. Наложение нестационарных случайных воздействий на технологические параметры в переходных режимах, возможно приводящие в отдельные моменты времени к недопустимым

пиковым значениям, могут быть устранены с помощью соответствующих блокировок.

Таким образом, становится очевидным, что для решения задач синтеза систем контроля и управления производственными технологическими процессами целесообразно ограничиться рассмотрением стационарных случайных воздействий на всех стадиях производства.

Предположение о стационарности случайных воздействий на основных стадиях производства позволяет конкретизировать свойства вышерассмотренных характеристик в следующем виде:

$$1. m_x(t) = m_x = \text{const}; \quad (2.12)$$

$$2. D_x(t) = D_x = \text{const}; \quad (2.13)$$

$$3. K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = K_x(\tau). \quad (2.14)$$

Условия (2.12) и (2.13) вытекают из определения стационарности. Условие (2.14) также является следствием стационарности, так как очевидно, что значение  $K_{xx}(t_1, t_2)$  не зависит от времени  $t$ , а зависит только от временного интервала  $\tau = t_1 - t_2$ .

$$4. K_x(\tau) = K_x(-\tau). \quad (2.15)$$

Это условие следует из определения функции  $K_{xx}(t_1, t_2)$ , согласно которому  $K_{xx}(t_1, t_2) = K_{xx}(t_2, t_1)$ . Отсюда для стационарного случайного воздействия при  $t_2 - t_1 = \tau$  получаем условие (2.15).

$$5. K_x(0) = M[x^2]. \quad (2.16)$$

Для центрированного случайного воздействия условие (2.16) трансформируется к виду

$$K_x(0) = M\{[x(t)]^2\} = D_x. \quad (2.17)$$

$$6. K_x(\infty) = m_x^2. \quad (2.18)$$

Условие (2.18) следует из того, что при  $\tau = \infty$  сечения случайной функции  $x(t)$  являются независимыми, и корреляционная функция отличается от нуля только за счет наличия неслучайной составляющей  $m_x$ . Очевидно, что для центрированной случайной функции  $\overset{\circ}{x}(t)$  будет иметь место условие (2.19)

$$7. K_x(\infty) = 0. \quad (2.19)$$

8. Согласно теореме Винера–Хинчина для стационарной случайной функции  $x(t)$  существует взаимосвязь между корреляционной функцией  $K_x(\tau)$  и ее спектральной плотностью  $S(\omega)$  в следующем виде:

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} e^{j\omega\tau} S(\omega) d(\omega); \quad (2.20)$$

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} K_x(\tau) d\tau, \quad (2.21)$$

или в тригонометрической форме

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (2.22)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (2.23)$$

Качественная зависимость между этими характеристиками такова: чем шире график корреляционной функции, тем уже график функции спектральной плотности, и наоборот.

Для удобства экспериментального определения характеристик случайных воздействий используют гипотезу об их эргодичности. Математическая формулировка свойства эргодичности случайных функций состоит в том, что среднее по множеству наблюдений равно среднему по времени (для достаточно протяженного интервала наблюдений). Из приведенной формулировки видно, что указанное свойство характерно для стационарного процесса. Так как характеристики стационарного воздействия не изменяются во времени, то множество наблюдений воздействия может быть заменено длительным наблюдением за одной из его реализаций. Например, математическое ожидание такого воздействия  $m_x$  при длительном наблюдении за ним в течение интервала времени  $T$  ( $T \rightarrow \infty$ ) может быть определено следующим образом:

$$m_x = M[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (2.24)$$

Аналогично могут быть вычислены дисперсия

$$D_x = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt \quad (2.25)$$

и корреляционная функция

$$K_x(\tau) \approx \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt \quad (2.26)$$

Для стационарных эргодических дискретных случайных функций вычисление рассмотренных характеристик производится аналогично, только в выражениях (2.24) – (2.26) процедура интегрирования будет заменена суммированием по всем реализациям. Так, например, для  $n$ -мерной случайной выборки  $x(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) выражение (2.24) трансформируется к виду

$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i) \quad (2.27)$$

и так далее.

Приведенные характеристики широко используются в инженерной практике для описания случайных воздействий. С их помощью оценивается влияние разнообразных воздействий на состояние объектов и систем. Рассмотрению этого вопроса посвящен следующий раздел.

## **3. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ОБЪЕКТЫ И СИСТЕМЫ**

### **3.1. Основные положения**

Для анализа работы объекта при наличии случайных воздействий необходим математический аппарат, описывающий взаимосвязь между этими воздействиями и их проявлениями (откликами) на выходе. Исходя из рассмотренных выше особенностей характера воздействий и математического описания класса объектов и систем управления, математическая формулировка этой задачи может трактоваться как анализ прохождения стационарного случайного сигнала через линейную стационарную динамическую систему. Классический вариант решения такой задачи при наличии математического описания динамики объекта или системы позволяет установить зависимости между математическими ожиданиями, корреляционными функциями или функциями спектральных плотностей случайных воздействий и их откликов. В более сложных и реальных случаях, когда требуется увязать влияние случайных воздействий с величинами допусков на отклонение свойств продукции на выходе или при отсутствии полной информации по таким воздействиям, возникают неопределенности. Эти обстоятельства и являются предпосылкой для организации робастного управления. Ниже излагаются схемы и алгоритмы решения различных вариантов задач, обусловленных соответствующими производственными ситуациями.

### **3.2. Преобразование стационарного случайного воздействия динамической линейной системой**

В этом подразделе в качестве первоосновы рассматривается классический вариант задачи, упомянутый выше. В рамках этой задачи любой объект рассматривается как стационарная динамическая система, коэффициенты дифференциального уравнения которой или соответствующей передаточной функции  $W(p)$  являются постоянными. Технологический процесс, протекающий в этом объекте, преобразует входную координату  $x(t)$  (например, какую-либо характеристику сырья или параметр энергоносителя) в выходную координату  $y(t)$  (например, в какую-либо характеристику готовой продукции). Значения координат  $x(t)$  и



$y(t)$  являются элементами режима работы объекта, так как протекание технологического процесса может определяться и другими координатами. По каналу входной координаты  $x$  поступает стационарное случайное воздействие  $x(t)$ , которое можно представить в виде суммы двух составляющих

$$x(t) = m_x + \overset{0}{x}(t), \quad (3.1)$$

где  $m_x$  – среднее значение (математическое ожидание) стационарного случайного воздействия;  $\overset{0}{x}(t)$  – центрированная случайная составляющая воздействия, для которой  $M[\overset{0}{x}(t)] = 0$ .

Очевидно, что наличие воздействия  $x(t)$  приведет к появлению на выходе объекта по координате  $y$  стационарной случайной составляющей  $y(t)$ . Согласно принципу суперпозиции можно считать, что действие каждой составляющей входного воздействия  $x(t)$  приведет к появлению соответствующих откликов на выходе и поэтому случайная функция  $y(t)$  также может быть представлена в виде

$$y(t) = m_y + \overset{0}{y}(t), \quad (3.2)$$

где  $m_y$  – среднее значение случайного отклика в координате  $y$ ;  $\overset{0}{y}(t)$  – центрированная случайная составляющая отклика.

Так как величины  $m_x$  и  $m_y$  являются постоянными по значению, то значение  $m_y$  может быть однозначно определено через передаточную функцию по величине  $m_x$  согласно уравнению статики

$$m_y = m_x W(p)|_{p=0}. \quad (3.3)$$

Если на объекте имеется система регулирования по координате  $y$ , то величина  $m_y$  с учетом наличия контура регулирования также определяется из уравнения статики согласно выражению (1.5).

Зависимость основных характеристик входных воздействий и соответствующих откликов на выходе через функцию веса  $w(\tau)$  имеет следующий вид:

$$K_y(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau_1) w(\tau_2) K_x(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.4)$$

Дисперсия выходной координаты получается из выражения корреляционной функции при  $t = 0$

$$D_y = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w(\tau_1) w(\tau_2) K_x(\tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.5)$$

Спектральная плотность

$$S_y(\omega) = A^2(\omega) S_x(\omega), \quad (3.6)$$

где  $A(\omega)$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) объекта или системы.

Выражение (3.6) имеет очевидную физическую подоплеку, так как спектральная плотность сигнала характеризует распределение квадратов амплитуд отдельных составляющих гармоник.

Дисперсия выходной координаты помимо выражения (3.5) также может быть выражена через ее спектральную плотность. Действительно, для центрированной случайной величины согласно выражениям (2.17) и (2.20) имеем

$$D_y = K_y(\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (3.7)$$

Входящая в выражения (3.4) и (3.5) функция веса  $w(\tau)$  однозначно определяется через соответствующую передаточную функцию с помощью обратного преобразования Лапласа  $L^{-1}$

$$w(\tau) = L^{-1}[W(p)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.8)$$

На практике, как отмечалось в разд. 1, функция веса достаточно просто может быть получена экспериментально при подаче на вход объекта импульсного воздействия. Функция веса наряду с передаточной функцией может также использоваться для описания зависимости между входной и выходной координатами с помощью интеграла Дюамеля или интеграла свертки в виде

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad (3.9)$$

Входящая в выражение (3.6) функция  $A(\omega)$  также определяется из соответствующей передаточной функции  $W(p)$

$$A(\omega) = |W(j\omega)|. \quad (3.10)$$

Кроме того, как показано в разд. 1, эта функция может быть определена экспериментально.

Для случая, когда на объект одновременно поступает несколько случайных воздействий например, по двум различным каналам  $x_1$  и  $x_2$ , динамические свойства которых по рассматриваемой выходной координате  $y$  заданы соответствующими функциями веса  $w_1(\tau)$  и  $w_2(\tau)$ , реакция на выходе –  $y$  может быть определена на основании принципа суперпозиции в виде

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = \\ &= \int_0^{\infty} w_1(\tau_1) x_1(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} w_2(\tau_1) x_2(t - \tau_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для наиболее важного на практике случая, когда функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  взаимно независимы, корреляционная функция выходной величины  $y(t)$  будет описываться выражением

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_1(\tau_1) w_1(\tau_2) K_{x_1}(\tau - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w_2(\tau_1) w_2(\tau_2) K_{x_2}(\tau - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Выражение для спектральной плотности выходной величины будет иметь вид

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= A_1^2(\omega) S_{x_1}(\omega) + A_2^2(\omega) S_{x_2}(\omega); \\ A_1(\omega) &= |W_1(p)|_{p \Rightarrow j\omega} \quad A_2(\omega) = |W_2(p)|_{p \Rightarrow j\omega} \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  – передаточные функции объекта по каналам  $x_1 \rightarrow y$  и  $x_2 \rightarrow y$  соответственно.

В случае, если функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  взаимозависимы, то в выражениях (3.12) и (3.13) появятся дополнительные слагаемые, определяемые выражениями взаимных корреляционных функций

$K_{x_1x_2}$  и  $K_{x_2x_1}$  и взаимных спектральных плотностей  $S_{x_1x_2}$  и  $S_{x_2x_1}$ . Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [4].

Приведенные в данном подразделе сведения позволяют оценить реакцию объекта на то или иное случайное воздействие с помощью набора объективных неслучайных характеристик. Все приведенные выше формулы будут справедливы и для проведения такого же анализа систем управления, только в этом случае необходимо уже рассматривать динамические свойства (в виде передаточной функции, функции веса и др.) не объекта, а всей системы, состоящей из объекта и контура управления. При этом формулировка задачи для проведения подобных исследований может быть представлена в следующем виде. На вход объекта (или системы) поступает стационарное случайное воздействие  $x(t)$ , характеризующееся математическим ожиданием  $m_x$  и корреляционной функцией  $K_x(t)$ . Динамические свойства объекта по каналу поступления воздействия – выходная величина  $y$  – заданы (либо в виде передаточной функции  $W(p)$ , либо в виде функции веса  $w(t)$  или переходной характеристики  $h(t)$ ). Требуется оценить отклик объекта  $y(t)$  на это воздействие, который является случайной функцией, в виде математического ожидания  $m_y$  и корреляционной функции  $K_y(\tau)$ . В ряде практических задач интерес представляет дисперсия  $D_y$ , а не корреляционная функция.

### **3.3. Пример исследования влияния случайных воздействий на управление процессом термообработки**

Термообработка в пищевой промышленности применяется как один из основных этапов обработки сырья и полуфабрикатов в различных производствах.

Энергоноситель, например горячий воздух или пародымовоздушная смесь подается в термоагрегат от специального аппарата – теплогенератора. Существует множество типов теплогенераторов, основанных на использовании различных видов энергии (электрической, энергии пара, энергии, получаемой при сгорании органического топлива, и др.) Фрагмент схемы, иллюстрирующей идею организации контура управления температурой в термоагрегате, приведен на рис. 3.1.

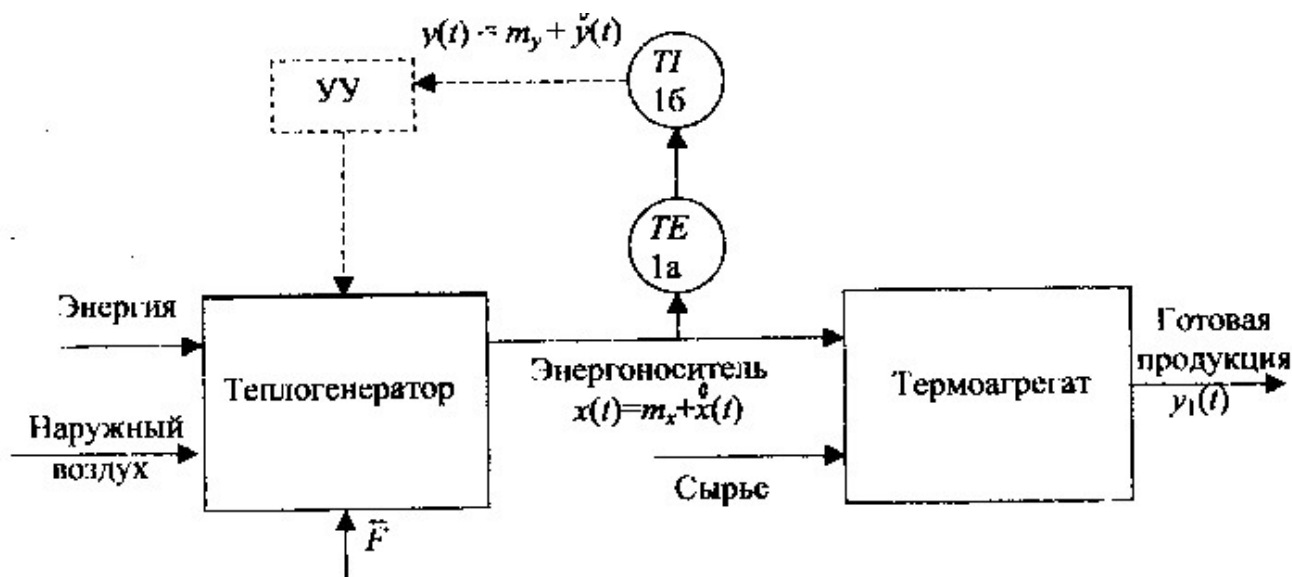


Рис. 3.1. Схема организации контура управления температурой в термоагрегате

В данном примере энергоноситель получается в результате нагрева наружного воздуха (или регенерированной паровоздушной смеси). Также могут использоваться и другие схемы подготовки энергоносителя, например, основанные на смешении потоков горячего и холодного воздуха, и др. Температура энергоносителя, подаваемого в термоагрегат, контролируется с помощью измерительной цепи, состоящей из первичного преобразователя  $TE$  (поз. 1а) и вторичного показывающего прибора  $TI$  (поз. 1б). Информация от измерительного прибора в виде параметра  $y(t)$  поступает в устройство управления  $УУ$ , которое и вносит соответствующее управляющее воздействие в теплогенератор. Зачастую в промышленных условиях в качестве устройства управления выступает оператор, осуществляющий ручное управление теплогенератором (поэтому этот участок контура управления обозначен пунктиром). В силу множества причин (возмущений, которые на схеме обозначены вектором  $\vec{F}$ ) температура энергоносителя на выходе из теплогенератора является стационарной случайной функцией времени  $x(t)$ , которая характеризуется математическим ожиданием  $m_x$  и корреляционной функцией  $K_x(\tau)$ . Достаточно адекватным представлением функции  $K_x(\tau)$  для подобных ситуаций является

$$K_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad (3.14)$$

где  $\alpha$  – положительный коэффициент, характеризующий интенсивность изменений функции  $x(t)$ ;  $D_x$  – дисперсия воздействия  $x(t)$ .

В качестве первичного преобразователя  $TE$  (см. рис. 3.1, поз. 1а) обычно используют термоэлектрические термометры или термометры сопротивления, для которых вторичными приборами могут являться милливольтметры и потенциометры или логометры и измерительные мосты соответственно. В качестве вторичных приборов помимо аналоговых также могут использоваться и цифровые приборы. В любом случае динамические свойства измерительной цепи практически однозначно определяются динамическими свойствами первичных преобразователей, постоянные времени которых превышают постоянные времени соответствующих вторичных приборов. Так, например, для серийно выпускаемых термоэлектрических термометров с защитным чехлом постоянные времени  $T$  находятся в пределах 1,5÷8 мин, время запаздывания  $\tau_3 = 9÷30$  с [6, 7], постоянные же времени вторичных приборов не превышают нескольких секунд, что и позволяет ими пренебречь и рассматривать эти приборы как статические безынерционные звенья. Исходя из этого, передаточную функцию всей измерительной цепи можно представить в виде

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1} e^{-\tau_3 p}; \quad (3.15)$$

$$k = k_1 k_2, \quad (3.16)$$

где  $k$  – коэффициент передачи всей цепи;  $k_1$  – коэффициент передачи первичного преобразователя;  $k_2$  – коэффициент передачи вторичного прибора.

Теперь на основании имеющейся информации о параметрах воздействия и динамических характеристиках измерительной цепи, можно оценить влияние стационарного динамического возмущения на различные координаты ( $y$  и  $y_1$ ) процесса термообработки. Решение задачи целесообразно разбить на ряд этапов.

1. Случайный сигнал  $y(t)$  в соответствии с выражением (3.2) представим в виде двух составляющих:  $y(t) = m_y + y^0(t)$ . Неслучайную

величину  $m_y$  в соответствии с уравнением (3.3) определяем по уравнению статики измерительной системы

$$m_y = m_x \frac{k}{Tp+1} e^{-\tau_3 p} \Big|_{p=0} = m_x k. \quad (3.17)$$

2. Определим спектральную плотность случайного воздействия  $x(t)$  в соответствии с выражением (2.21)

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} K_x(\tau) d\tau = \frac{D_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \right] = \frac{D_x}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha-j\omega} + \frac{1}{\alpha+j\omega} \right] = \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3. Определим квадрат модуля частотной характеристики измерительной системы (это необходимо для нахождения  $S_y(\omega)$  в соответствии с выражением (3.6))

$$A^2(\omega) = |W(j\omega)|^2 = \frac{k^2}{T^2 \omega^2 + 1}. \quad (3.19)$$

4. Определим спектральную плотность сигнала на выходе измерительной системы  $S_y(\omega)$  в соответствии с выражением (3.6)

$$S_y(\omega) = A^2(\omega) S_x(\omega) = \left( \frac{k^2}{T^2 \omega^2 + 1} \right) \left( \frac{D_x \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \right) \quad (3.20)$$

5. Определим дисперсию сигнала на выходе измерительной системы  $D_y$  в соответствии с формулой (3.7)

$$\begin{aligned} D_y &= 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{2D_x \alpha k^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(T^2 \omega^2 + 1)} = \\ &= \frac{2D_x \alpha k^2}{\pi T^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2) \left( \frac{1}{T^2} + \omega^2 \right)}. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла разложим подынтегральное выражение на простые дроби вида

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)(\frac{1}{T^2} + \omega^2)} = \frac{A}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{B}{\frac{1}{T^2} + \omega^2}$$

и определим  $A$  и  $B$

$$A = \frac{1}{\frac{1}{T^2} - \alpha^2}, \quad B = \frac{1}{\alpha^2 - \frac{1}{T^2}}.$$

Исходный интеграл представляется двумя типовыми интегралами, которые легко вычислить. Здесь следует отметить, что если интеграл от спектральной плотности не удастся вычислить аналитически, то его можно вычислить графически или с использованием методов численного интегрирования [4]. В результате окончательно имеем

$$D_y = \frac{D_x k^2}{T\alpha + 1}. \quad (3.21)$$

#### 6. Проанализируем полученные результаты.

Так как рассмотренный пример является довольно характерным и типичным для реальных производственных условий, то сделанные ниже выводы – достаточно общие.

Как следует из выражения (3.21), дисперсия сигнала, используемого для управления теплогенератором, однозначно зависит от величины  $T$  (остальные величины, входящие в выражение (3.21), в рамках рассматриваемой задачи являются постоянными). Очевидно, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D_y \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Другими словами, при наличии достаточно инерционного первичного преобразователя устройство управления УУ не будет получать информацию о пульсациях температуры на входе в термоагрегат. Оно будет реагировать только на постоянную составляющую  $m_y$ , тем или иным способом компенсируя ее действие. На практике это означает следующее. Например, при операторном



управлении теплогенератором, работающем на сжигании органического топлива (газа, солярки, мазута и др.), оператор, получив информацию о смещении температуры на величину  $m_y$ , скомпенсирует ее путем изменения расхода подаваемого топлива. Пульсации же температуры, устранение которых зачастую требует проведения незначительных регламентных работ, замечены и устранены не будут (не будут устранены возможные составляющие вектора  $\bar{F}$ , например такие, как случайные засорения диффузионных решеток на воздуховодах подачи холодного и горячего воздуха, изменение вязкости (вследствие ряда причин) подаваемого в форсунки теплогенератора жидкого топлива, нарушение режимов работы форсунок и др.). При этом не будут срабатывать штатные аварийные защиты и блокировки, например защита от погасания факела, так как аварийной ситуации в этом случае нет. Наличие же пульсаций температуры энергоносителя в самом термоагрегате может стать одной из причин появления брака готовой продукции на его выходе. Так, например, на стадии интенсивной термообработки рыбы горячего копчения, производства вареных колбас и другой продукции значительные пульсации температуры могут привести к появлению так называемого «лопанца» – разрыва кожного покрова рыб или колбасных оболочек. В случае появления такого вида брака в рыбной продукции она направляется либо на корм скоту, либо на переработку в рыбный паштет и, естественно, не может использоваться для дальнейшего потребления или производства деликатесной продукции, например консервов типа «салака в масле» и др. Почти аналогичная ситуация с таким видом брака имеет место при производстве колбас, выпечки хлебо-булочной продукции и др. Очевидно, что даже при уценке продукции, как, например хлеба, или ее последующей утилизации предприятие несет экономические потери. Устранение причин пульсации температуры в этих ситуациях (т. е. составляющих вектора  $\bar{F}$ ) может начаться только после обнаружения их действия на выходе термоагрегата, т. е. с большим опозданием (порядка часа и более).

Определим условия, при которых изменения постоянной времени  $T$  будут мало влиять на величину дисперсии пульсации температуры  $D_y$ . Как следует из выражения (3.21), это будет иметь место при условии  $T\alpha < 1$  или

$$T \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Очевидно, что вышеприведенное условие целесообразно использовать для выбора соответствующих технических средств при синтезе информационного обеспечения для системы управления.

Следует также иметь в виду, что учет пульсирующей составляющей не всегда является необходимым условием эффективного управления технологическим процессом. В этом случае наличие сглаживающего инерционного фильтра с передаточной функцией типа (3.15) с большой постоянной времени позволяет избавиться от избыточной информации и защитить технические средства системы управления от излишних динамических нагрузок.

Таким образом, представляется возможным оценить влияние случайных воздействий и принять решение о целесообразности их учета. Например, если оценивать влияние центрированной составляющей рассмотренного воздействия  $x(t)$  (пульсаций температуры) на такую выходную координату процесса термообработки, как температура в толще крупного колбасного батона  $y_1(t)$ , динамические свойства которого по каналу  $x(t)-y_1(t)$  достаточно точно описываются как апериодическое звено первого порядка с постоянной времени  $T_1$  порядка десятка и более минут и при реальных диапазонах значений  $k_1 = (0,7 \div 0,8)$ ;  $D_x = (10 \div 30) \text{ } ^\circ\text{C}^2$  и  $\alpha \approx (1 \div 3) \text{ мин}^{-1}$ , то можно сделать вывод о незначительном влиянии этой составляющей воздействия. Действительно, согласно выражению (3.21) имеем

$$D_{y_1 \max} = \frac{D_{x \max} k_1^2}{T_{1 \min} \alpha_{\min} + 1} = \frac{30 \cdot 0,64}{10 \cdot 1 + 1} = 1,75 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Отсюда величина максимального среднего радиуса рассеяния (разброса) температуры  $y_1(t)$  относительно среднего значения  $m_{y_1}$  равна величине среднеквадратического отклонения

$$\sigma_{y_1 \max} = \sqrt{D_{y_1 \max}} \approx 1,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Очевидно также, что реальная величина  $\sigma_{y_1}$  будет еще меньше.

Величина  $y_1$  после термообработки не должна быть ниже  $72\text{ }^\circ\text{C}$ . Обычно на производстве при ведении технологического процесса ее завышают на  $2\text{--}3\text{ }^\circ\text{C}$ , создавая своего рода запас – «защитный барьер» – от подобных случайных откликов. Очевидно, что в данном примере возможности этого «барьера» позволяют нивелировать влияние случайных пульсаций температуры  $\overset{0}{x}(t)$ .

Следует иметь в виду, что при необходимости проведения более тщательного анализа исследованию также может быть подвергнута и корреляционная функция  $K_y(\tau)$ , которая находится из выражения (2.20) на основании определенного в п. 4 выражения (3.20) для функции спектральной плотности  $S_y(\omega)$ .

Для дополнительной иллюстрации изложенного в данном подразделе материала на рис. 3.2 приведен качественный вид графиков функций  $K_x(\tau)$  (рис. 3.2, а) и  $S_x(\omega)$  (рис. 3.2, б), характеризующих входное воздействие  $x(t)$ .

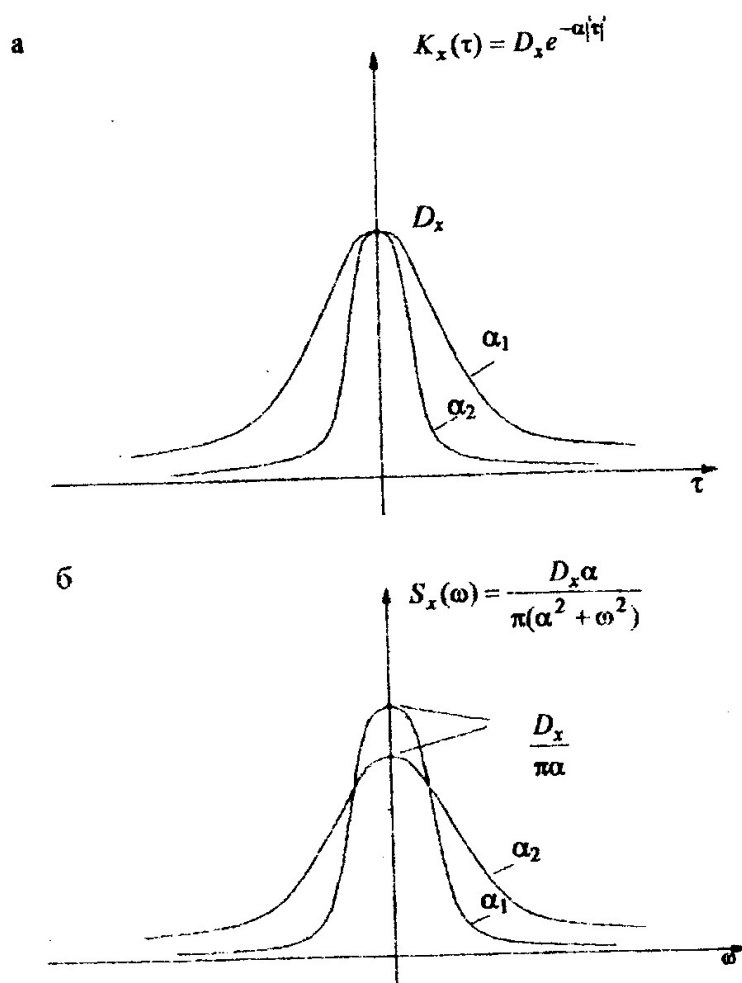


Рис. 3.2. Характеристики случайного воздействия  $x(t)$ ;  $\alpha_2 < \alpha_1$ :  
а – корреляционная функция; б – функции спектральной плотности

Как видно из рис. 3.2, в данном случае величина  $\alpha$  характеризует как бы степень «турбулентности» случайного воздействия  $x(t)$ . Чем больше величина  $\alpha$ , тем более интенсивно происходят пульсации температуры и соответственно расширяется спектральный состав воздействия: доля низкочастотных составляющих уменьшается и увеличивается доля высокочастотных составляющих. При уменьшении  $\alpha$  имеет место обратная тенденция.

### **3.4. Преобразование стационарного случайного воздействия нелинейной системой**

Необходимость рассмотрения такого вопроса обусловлена наличием большого класса нелинейных систем на производствах пищевой и смежных отраслей промышленности. В подавляющем большинстве случаев нелинейность систем обусловлена использованием в контурах регулирования технологических параметров различных позиционных звеньев (регуляторов) в силу их простоты, надежности и невысокой стоимости. В первую очередь сюда относятся двух- и трехпозиционные датчики-реле температуры, давления, уровня, расхода, наличия потока и другие различных типов и модификаций, которые широко используются для автоматического регулирования. Помимо этого для подобных же целей промышленностью в большом количестве и ассортименте выпускаются разнообразные позиционные регуляторы и позиционные регулирующие приборные устройства (так называемые встроенные приборные регуляторы), а также исполнительные устройства. Общее для всех этих звеньев состоит в том, что они описываются однозначной нечетной статической характеристикой (например, двух- и трехпозиционные реле как идеальные, так и имеющие зоны нечувствительности, звенья с насыщением и с зоной нечувствительности и др.). Поэтому дальнейшее рассмотрение поставленного вопроса будет ориентировано именно на такой класс нелинейных систем.

Особенность нелинейных систем состоит в том, что к ним неприменим принцип суперпозиции, что усложняет решение поставленной задачи. Для анализа работы нелинейных систем при

наличии стационарного случайного воздействия используется метод статистической линеаризации.

Суть метода состоит в замене реального нелинейного звена эквивалентным по некоторым статистическим параметрам линейным звеном. В результате вся система может быть также представлена эквивалентной линейной системой, для анализа которой может быть применен математический аппарат исследования линейных систем, изложенный в подразд. 3.2.

В соответствии с вышесказанным структурную схему нелинейной системы автоматического регулирования представим в следующем виде (рис. 3.3). Она состоит из двух основных частей: линейной части, которая на рис. 3.3 представлена звеном с передаточной функцией  $W_0(p)$ , и безынерционного нелинейного звена (НЗ), заданного статической характеристикой  $y = F(x)$ . При этом необходимо понимать, что если, например, в системе используется какой-либо датчик-реле, то передаточная функция его измерительной части, являющейся инерционным линейным звеном (например, термобаллон манометрического термометра, термометра сопротивления и др.) представляется отдельным звеном с передаточной функцией  $W_1(p)$ , которая входит в состав линейной части, а сам релейный элемент, с помощью которого осуществляется тот или иной вариант позиционного регулирования, является указанным нелинейным безынерционным звеном (НЗ). Наличие случайного воздействия, например помехи  $f(t)$ , которая может действовать в различных точках контура управления, вызывает появление случайного воздействия  $x(t)$ , которое в соответствии с формулой (3.1) представляется в виде суммы двух составляющих  $x(t) = m_x + \overset{0}{x}(t)$ .

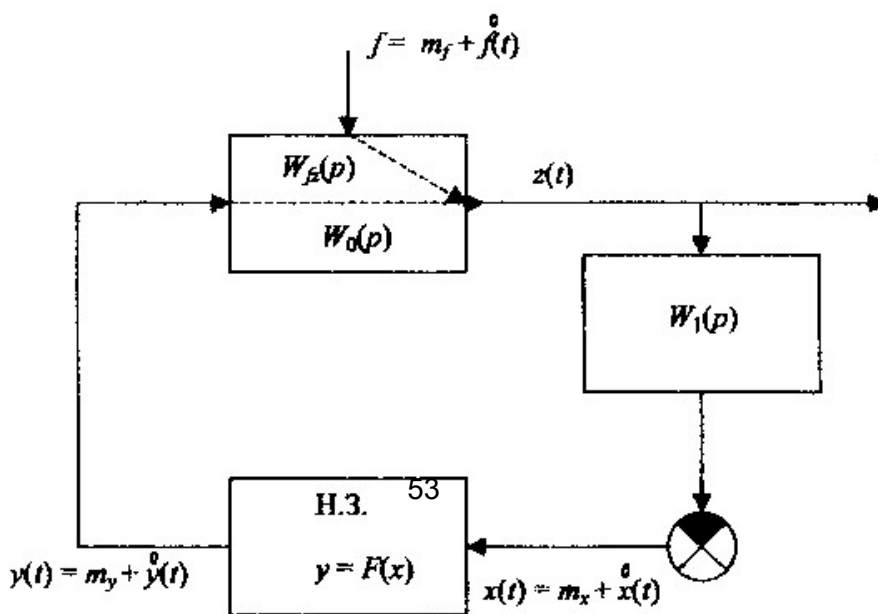


Рис. 3.3. Структурная схема нелинейной системы автоматического регулирования при наличии случайных воздействий

Соответствующий этому воздействию случайный сигнал на выходе нелинейного звена  $y(t)$  также представляется в виде суммы математического ожидания  $m_y$  и центрированной случайной величины  $\overset{0}{y}(t)$ , т. е.  $y(t) = m_y + \overset{0}{y}(t)$ .

Вполне понятно, что при прохождении случайного сигнала через нелинейное звено происходит искажение его закона распределения. Поэтому каждая из моментных характеристик сигнала  $y(t)$ , в частности  $m_y$  и  $D_y$ , зависит в комплексе от таких же характеристик входного воздействия  $x(t)$ . Это обстоятельство и объясняет неприменимость принципа суперпозиции в нелинейных системах в отличие от линейных систем.

Идея статистической линеаризации состоит в том, чтобы заменить реальное нелинейное звено безынерционным линейным звеном, обеспечивающим на выходе такие же значения математического ожидания  $m_y$  и дисперсии сигнала  $D_y$ , как и у реального звена при том же входном воздействии  $x(t)$ . Так как обе характеристики  $m_y$  и  $D_y$  не являются исчерпывающим описанием случайного сигнала, то очевидно, что такая замена является приближенной, а это обуславливает приближенность самого метода. Исходя из вышесказанного сигнал на выходе этого безынерционного линейного звена  $y'(t)$  будет отличаться от реального сигнала  $y(t)$ , но при этом будут выполняться условия

$$m_{y'} = m_y; \quad (3.23)$$

$$D_{y'} = D_y. \quad (3.24)$$

Очевидно, что выполнение этих условий возможно только в случае, если эквивалентное безынерционное звено представить в виде структуры, состоящей из двух параллельно работающих статических звеньев, имеющих разные коэффициенты передачи, одно из которых пропускает только среднее значение  $m_x$  с коэффициентом передачи  $k_{c0}$ , другое – только центрированную составляющую  $\overset{0}{x}(t)$  с коэффициентом передачи  $k_{c1}$ . Структурная схема такого эквивалентного звена приведена на рис. 3.4.

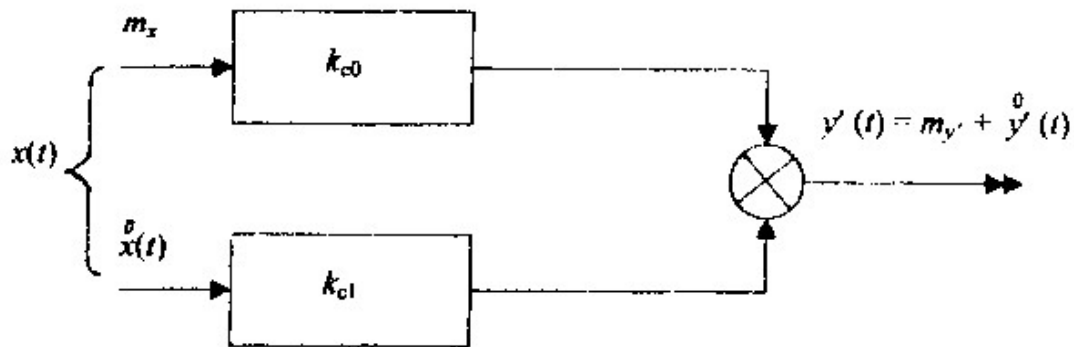


Рис. 3.4. Структурная схема эквивалентного линейного звена

Определим выражения для коэффициентов передачи  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ , исходя из сделанного представления. Из условия (3.23) следует

$$k_{c0} = \frac{m_y}{m_x}. \quad (3.25)$$

Выразим  $m_y$  через параметры звена и входного воздействия  $x(t)$

$$m_y = M[y(t)] = M[F\{x(t)\}] = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) p(x) dx. \quad (3.26)$$

Подставляя выражение (3.26) в формулу (3.25), окончательно получаем

$$k_{c0} = \frac{1}{m_x} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) p(x) dx. \quad (3.27)$$

Выражение для  $k_{c1}$  находим из условия, что это звено осуществляет преобразование центрированных составляющих входного и выходного сигналов, т. е.

$$\overset{0}{y}(t) = k_{c1} \overset{0}{x}(t). \quad (3.28)$$

Теперь, переходя к дисперсиям случайных функций, получаем

$$D_{y'} = k_{c1}^2 D_x, \quad (3.29)$$

или

$$k_{c1} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \quad (3.30)$$

Выразим  $\sigma_y$  через параметры звена и входного воздействия  $x(t)$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{D_y} = \sqrt{M[(y - m_y)^2]} = \sqrt{M[y^2 - 2m_y y + m_y^2]} = \\ &= \sqrt{M[y^2] - 2m_y M[y] + m_y^2} = \sqrt{M[y^2] - 2m_y^2 + m_y^2} = \\ &= \sqrt{M[y^2] - m_y^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) p(x) dx - m_y^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставляем полученный результат (3.31) в выражение (3.30) и окончательно получаем

$$k_{c1} = \frac{1}{\sigma_x} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) p(x) dx - m_y^2}. \quad (3.32)$$

Коэффициенты  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  называются коэффициентами статистической линеаризации. Как видно из выражений (3.27) и (3.32), значения коэффициентов определяются характеристиками нелинейного звена  $y = F(x)$  и законом распределения входного воздействия  $p(x)$ . Используя эти выражения можно рассчитать значения коэффициентов статистической линеаризации.

Статистическую линеаризацию нелинейного звена можно осуществить также исходя и из другого условия, отличного от (3.23) и (3.24). Это условие заключается в минимизации среднеквадратического отклонения функций  $y'(t)$  и  $y(t)$ . Другими словами, исходное нелинейное звено заменяется линейным, обеспечивающим минимум выражения,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [y'(t) - y(t)]^2 p(y) dy \rightarrow \min. \quad (3.33)$$



Известно, что это условие может быть выполнено, если структура эквивалентного линейного звена будет такой же, как и в первом случае (см. рис. 3.4). Причем значение первого коэффициента статистической линеаризации  $k_{c0}$  остается прежним в соответствии с выражением (3.27). Второй коэффициент статистической линеаризации  $k_{c1}'$  определяется из выражения

$$k_{c1}' = \frac{k_{yx}(0)}{D_x} = \frac{M[y(t)x(t)]}{D_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)xp(x)dx}{D_x} . \quad (3.34)$$

Как видно из этого выражения, значение  $k_{c1}'$  так же, как и в предыдущем случае, определяется характеристикой нелинейного звена  $F(x)$  и законом распределения входного воздействия.

Иногда для повышения точности расчетов в качестве этого коэффициента берется среднее арифметическое значение коэффициентов, полученных из выражений (3.32) и (3.34). Очевидно, что вычисление коэффициентов статистической линеаризации по исходным формулам (3.27), (3.32) и (3.34) в каждом конкретном случае решаемой задачи является довольно трудоемкой процедурой. К этому следует добавить трудозатраты, связанные с определением законов распределения случайных воздействий. Эти обстоятельства затрудняют практическую реализацию метода статистической линеаризации в исходном «классическом» виде. Поэтому для упрощения процедуры решения задач, связанных с анализом и синтезом нелинейных систем, значения коэффициентов  $k_{c0}$ ,  $k_{c1}$  и  $k_{c1}'$  определены в соответствии с вышеприведенными зависимостями для ряда типовых нелинейностей, которые встречаются на практике, и для нормального закона распределения воздействий. Эти результаты представлены в специальных справочных материалах, где априори принимается допущение, что дифференциальный закон распределения величины  $x$  или плотность вероятности этой величины описывается выражением

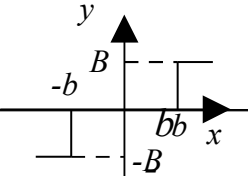
$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} .$$

Такое допущение основано на том, что нормальный закон распределения случайных воздействий имеет наибольшее распространение в природе и технике, что объясняется центральной предельной теоремой. В этом смысле нормальный закон является «предельным» законом, к которому стремятся другие законы распределения при равнозначности отдельных факторов, определяющих каждую из реализаций воздействия. В случае, если реальный закон распределения воздействий отличается от нормального, то это обстоятельство может стать причиной дополнительной погрешности. Однако при этом, как показывает опыт, величины коэффициентов  $k_{c0}$ ,  $k_{c1}$  и  $k_{c1}'$  варьируются незначительно. Значения коэффициентов статистической линеаризации для типовых нелинейностей, используемых для организации позиционного управления на практике, приведены в табл. 3.1. В случае, когда статическая характеристика нелинейного звена  $y = F(x)$  неоднозначна, т. е. для определения выходной величины  $y$  помимо значения входной величины  $x$  необходимо также задаться значением ее производной  $x^{(1)}$  (например, характеристика двухпозиционного реле с зоной нечувствительности – см. табл. 3.1, п. 4), формулы (3.27), (3.32) и (3.34) требуют уточнения с учетом значения величины  $x^{(1)}$ . В этих случаях определение коэффициентов статистической линеаризации осуществляется по известным уточненным формулам [8, 9, 10]. Для решения же практических задач обычно пользуются уже готовыми выражениями для этих коэффициентов, полученными из формул, как, например, в п. 4 табл. 3.1.

После определения коэффициентов статистической линеаризации  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  методика исследования влияния случайного воздействия на нелинейную систему будет состоять в следующем. Исходная нелинейная система описывается двумя передаточными функциями

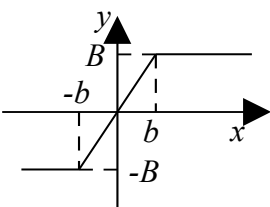
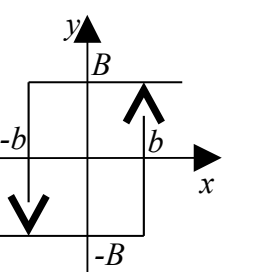
Таблица 3.1

## Коэффициенты статистической линейзации типовых нелинейных позиционных звеньев

№ пп	Наименование звена и его статическая характеристика	Уравнение звена $y = F(x)$	Выражения для вычисления коэффициентов статистической линейзации		
			$k_{c0}$	$k_{c1}$	$k_{c1}'$
1	Двухпозиционное реле $y$ 	$y = B \operatorname{sign} x$	$\frac{2B}{m_x} \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)$	$\frac{B}{\sigma_x} \left[1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)\right]^{1/2}$	$\frac{B}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2}$
2	Трехпозиционное реле $y$ 	$y = \begin{cases} B; & x > b \\ 0; &  x  \leq b \\ -B; & x < -b \end{cases}$ $m_1 = \frac{m_x}{b}; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$	$\frac{B}{m_x} \left[ \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right]$	$\frac{B}{\sigma_x} \left\{ 1 - \frac{k_{c0}^2 m_x^2}{B^2} - \left[ \Phi\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right) \right]^{1/2} \right\}$	$\frac{B}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-m_1}{\sigma_1}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+m_1}{\sigma_1}\right)^2} \right]$

Продолжение табл. 3.1

№ пп	Наименование звена и его статическая характеристика	Уравнение звена $y = F(x)$	Выражения для вычисления коэффициентов статистической линейзации		
			$k_{c0}$	$k_{c1}$	$k_{c1}'$

3	<p>Звено с насыщением</p> 	$y = \begin{cases} Kx; &  x  \leq b \\ B; & x > b \\ -B; & x < -b \end{cases}$ $K = \frac{B}{b}$	$\frac{B}{m_x} \left[ \left( 1 + m_1 \right) \Phi \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - \left( 1 - m_1 \right) \Phi \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right] \times \Phi \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right]$ $m_1 = \frac{m_x}{b}, \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$	$\frac{B}{\sigma_x} \left[ 1 - \frac{k_c^2}{B^2} \left( m_1 + \sigma_1^2 - 1 \right) \right] \times \left[ \Phi \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right] - \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}} (1 - m_1) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right)^2} + (1 + m_1) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2}$	$\frac{B}{b} \left[ \Phi \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right]$
4	<p>Двухпозиционное реле с зоной нечувствительности</p> 	$y = \begin{cases} B; & x > b \\ -B; & x < -b \end{cases} \quad x > 0$ $y = \begin{cases} B; & x > -b \\ -B; & x < -b \end{cases} \quad x < 0$	$\frac{B}{m_x} \left[ \Phi \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right) - \Phi \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right) \right]$ $m_1 = \frac{m_x}{b}, \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{b}$	$\frac{B}{\sigma_x} \left( 1 - \frac{k_{c0}^2 m_x^2}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{B}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 + m_1}{\sigma_1} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1 - m_1}{\sigma_1} \right)^2} \right]$

$$\Phi_0(p) = \frac{W_{fz}(p)}{1 + k_{c0}W(p)}; \quad (3.35)$$

$$\Phi_1(p) = \frac{W_{fz}(p)}{1 + k_{c1}W(p)}, \quad (3.36)$$

где  $\Phi_0(p)$  – передаточная функция замкнутой системы для неслучайной (детерминированной) составляющей воздействия;  $\Phi_1(p)$  – передаточная функция замкнутой системы для центрированной случайной составляющей воздействия;  $W_{fz}(p)$  – передаточная функция участка системы «воздействие  $f$  – выходная величина  $z$ »;  $W(p)$  – передаточная функция линейной части системы  $W(p) = W_0(p)W_1(p)$ .

Необходимо отметить, что проведенная таким образом линеаризация позволяет формально «спрятать» нелинейные свойства звена в выражения коэффициентов  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$ , которые нелинейно зависят от параметров воздействия  $m_x$  и  $\sigma_x$ , т. е.  $k_{c0} = k_{c0}(m_x, \sigma_x)$  и  $k_{c1} = k_{c1}(m_x, \sigma_x)$ . Это следует из выражений (3.27), (3.32) и (3.34) и наглядно про-иллюстрировано в табл. 3.1. (В табл. 3.1 использована функция  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , которая называется интегралом вероятностей;  $t = \frac{x}{\sigma_x} \cdot$ )

Теперь с учетом выражения (3.35) реакция системы на неслучайную составляющую воздействия  $m_f = \text{const}$  определяется из уравнения статического режима

$$m_z = m_f \Phi_0(p)|_{p=0} = m_f \frac{W_{fz}(0)}{1 + k_{c0}(m_x, \sigma_x)W(0)}. \quad (3.37)$$

Влияние же центрированной случайной составляющей воздействия  $f(t)$  на выходную координату  $z$  может быть оценено величиной дисперсии  $D_z = \sigma_z^2$  в соответствии с выражениями (3.36), (3.6) и (3.7)

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\Phi_1(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |A_1(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \left| \frac{W_{fz}(j\omega)}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x)W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) d\omega \quad (3.38)$$

Если в качестве выходной величины системы рассматривать сигнал  $x(t)$ , который поступает на вход нелинейного звена, то выражения (3.35) и (3.36) для передаточных функций замкнутой системы по параметрам  $m_f$  и  $f^0(t)$  примут вид

$$\Phi_0'(p) = \frac{W_{fz}W_1(p)}{1 + k_{c0}W(p)}; \quad (3.39)$$

$$\Phi_1'(p) = \frac{W_{fz}(p)W_1(p)}{1 + k_{c1}W(p)}. \quad (3.40)$$

С учетом этого выражение (3.37) примет вид

$$m_x = m_f \Phi_0'(p)|_{p=0} = m_f \frac{W_{fz}(0)W_1(0)}{1 + k_{c0}(m_x, \sigma_x)W(0)}, \quad (3.41)$$

а выражение (3.38) соответственно трансформируется к виду

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \left| \Phi_1'(j\omega) \right|^2 S_f(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \left| \frac{W_{fz}(j\omega)W_1(j\omega)}{1 + k_{c1}(m_x, \sigma_x)W(j\omega)} \right|^2 S_f(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Уравнения (3.41) и (3.42) в общем случае содержат две искомые переменные ( $m_x, \sigma_x$ ) и являются нелинейными. Поэтому они должны решаться совместно. Система уравнений такого типа решается либо графически, либо методом последовательных приближений. Блок-схема алгоритма нахождения решения таких уравнений методом последовательных приближений с краткими комментариями приведена на рис. 3.5.

Методика графического решения уравнений (3.41) и (3.42) в данной ситуации очевидна.

Полученные в результате решения значения коэффициентов статистической линеаризации  $k_{c0}$  и  $k_{c1}$  могут быть использованы для проведения дальнейших исследований нелинейной системы, например, для определения таких же статистических характеристик  $m$  и  $\sigma$  других координат на выходе отдельных звеньев, входящих в контур системы управления, как, например, для варианта, описываемого выражениями (3.37) и (3.38).

Для иллюстрации изложенного материала рассмотрим пример.

Имеется релейная система автоматического регулирования, структурная схема которой приведена на рис. 3.6. На вход системы поступает стационарное случайное воздействие  $f(t)$ , которое имеет следующие характеристики: математическое ожидание  $m_f = 0$ , корреляционную функцию  $K_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}$ , где  $\alpha = 0,1$ ,  $\sigma_f = 1$ . Система характеризуется следующими параметрами:  $k = 2$ ,  $B = 5$ . Требуется определить дисперсию сигнала на входе нелинейного элемента —  $\sigma_x^2$ .

Решение.

Выражение для спектральной плотности, соответствующее данной корреляционной функции, согласно выражениям (2.21) и (3.38), будет иметь вид

$$S_f(\omega) = \frac{\sigma_f^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (3.43)$$



Рис. 3.5. Блок-схема алгоритма решения уравнений методом последовательных приближений



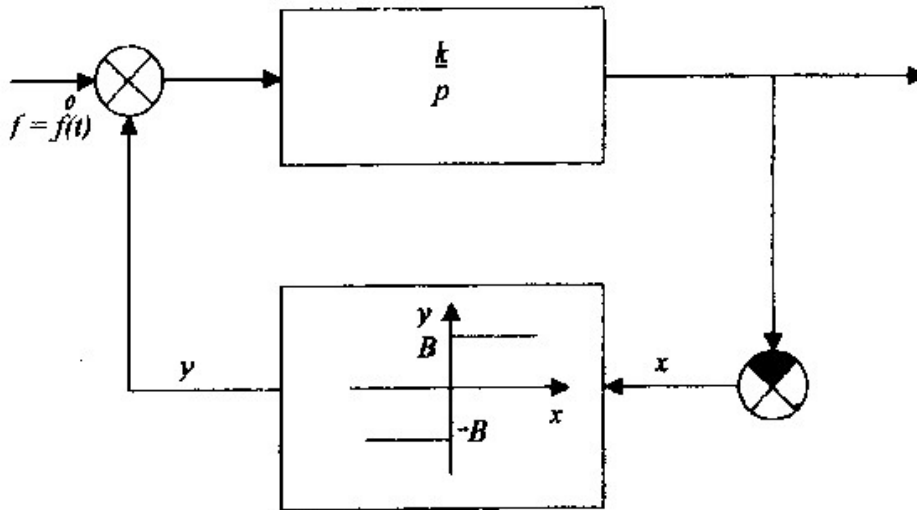


Рис. 3.6. Структурная схема релейной системы автоматического регулирования

Определим передаточную функцию системы для центрированной случайной составляющей  $f(t)$

$$\Phi_{fx}(p) = \frac{\frac{k}{p}}{1 + k_{c1} \frac{k}{p}} = \frac{k}{p + k_{c1}k}, \quad (3.44)$$

где  $k_{c1}$  – коэффициент статистической линеаризации.

Определим коэффициент  $k_{c1}$ , осуществив статистическую линеаризацию релейной характеристики. Для данного частного случая значение  $k_{c1}$  можно определить из выражения для  $k_{c1}'$  (см. табл. 3.1, п. 1)

$$k_{c1} = \frac{B}{\sigma_x} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (3.45)$$

Найдем выражение для спектральной плотности координаты  $x$  в соответствии с выражением (3.6)

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= A^2(\omega) S_f(\omega) = |\Phi_{fx}(j\omega)|^2 S_f(\omega) = \\ &= \left| \frac{k}{j\omega + k_{c1}k} \right|^2 \frac{\sigma_f^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{\sigma_f^2 \alpha k^2}{[\omega^2 + (k_{c1}k)^2](\alpha^2 + \omega^2)\pi}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Определим дисперсию координаты  $x$  в соответствии с выражением (3.7)

$$D_x = \sigma_x^2 = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_f^2 \alpha k^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{[\omega^2 + (k_{c1}k)^2](\alpha^2 + \omega^2)}. \quad (3.47)$$

Интеграл в правой части выражения (3.47) вычисляется аналогично примеру, рассмотренному в п. 5 подразд. 3.3, методом разложения на простые дроби. В результате решения после вычисления интеграла и подстановки исходных данных с использованием выражения (3.45) для коэффициента  $k_{c1}$  окончательно имеем

$$\sigma_x^2 \approx 1.$$

В заключение данного подраздела необходимо отметить, что реализация метода статистической линеаризации основана на предположении, что система устойчива и в ней отсутствуют автоколебания. В противном случае наложение автоколебательного процесса на случайный сигнал может исказить параметры сигналов в разных точках системы и, в частности, их дисперсии. (В вышерассмотренном примере для упрощения задачи влияние автоколебательного процесса не учитывалось.) Для исследования режимов автоколебаний в нелинейных системах разработан и применяется специальный метод гармонической линеаризации, который подробно рассмотрен в работах [11, 12].

Сведения, изложенные в разд. 3, позволяют оценить влияние случайных воздействий на объект или систему. При этом априори подразумевается наличие математического описания объекта в той или иной форме и характеристик случайного воздействия. На практике отсутствие таких сведений зачастую является «камнем преткновения» для проведения исследований. Поэтому два следующих раздела посвящены методам получения математического описания объектов и систем и методам получения информации о входных воздействиях с учетом специфических особенностей процессов и производств пищевой промышленности.

## **4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

### **4.1. Основные положения**

При рассмотрении методов анализа работы систем управления в различных режимах подразумевалось наличие математического описания как систем, так и отдельных их элементов (звеньев) в виде передаточных функций или соответствующих им переходных и частотных характеристик. Очевидно, что наличие математического описания отдельных звеньев необходимо и для решения задачи синтеза систем при различных вариантах требований, предъявляемых к системе. Данный раздел посвящен рассмотрению методов получения математического описания элементов и систем управления.

Получение математического описания системы, как правило, начинается с определения математического описания отдельных звеньев, входящих в эту систему. Далее, исходя из структуры системы и используя правила преобразования структурных схем, составляется математическое описание всей системы. Общее правило таково: чем более подробно сделана детализация структурной схемы, тем более простыми оказываются составляющие звенья и тем более удобно и просто разрабатывать их математическое описание. При детализации структурной схемы необходимо ограничиваться такими звеньями, которые обладают свойствами однонаправленности и независимости. Эти требования означают, что звено передает воздействие только в одном направлении (от входа к выходу), и состояние такого звена не оказывает влияния на состояние звена, подключенного к его входу. При таком подходе представляется возможным осуществить анализ системы без учета конкретики физической природы сигналов и особенностей реализации звеньев на аппаратном уровне. Получение математического описания звеньев можно осуществить одним из двух способов: аналитическим или экспериментальным.

## 4.2. Аналитический метод получения математического описания

Аналитический метод основан на математическом анализе явлений, которые лежат в основе работы конкретного звена или объекта. В зависимости от физической природы звена на основании законов, описывающих эти физические явления, аналитическим путем устанавливается зависимость между соответствующими входными  $\bar{X}$  и выходными  $\bar{Y}$  координатами и их производными

$$F(\bar{X}, \bar{Y}) = 0. \quad (4.1)$$

При этом в качестве входных координат могут рассматриваться и возмущающие воздействия. Зависимость (4.1) в общем случае может быть представлена системой нелинейных дифференциальных уравнений. Для одномерных объектов зависимость (4.1) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению вида

$$F(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots) = 0. \quad (4.2)$$

Если рассматриваются теплотехнические объекты, то их математическое описание получают на основании законов сохранения тепла, энергии, используя математическое описание явлений теплопереноса, теплопередачи, теплопроводности и др. Аналогично для объектов «электрической» природы математическое описание создается с использованием законов Ома, Кирхгофа; математическое описание «механических» объектов – на основании соответствующих законов механики: законов Ньютона, закона сохранения механической энергии, закона сохранения импульса и т. д.

Полученное таким образом исходное нелинейное уравнение вида (4.2) подвергается процедуре линеаризации. Линеаризация исходной функции осуществляется разложением в ряд Тейлора в окрестности точки номинального рабочего режима  $(x_0, y_0)$  с последующим оставлением только линейных членов ряда. В результате исходное нелинейное дифференциальное уравнение вида (4.2) приводится к линейному уравнению в приращениях  $x$  и  $y$ , которое в операторной форме имеет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x, \quad (4.3)$$

или

$$y = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} x = W(p)x, \quad (4.4)$$

где  $a_i; i \in I$  и  $b_j; j \in J$  – коэффициенты дифференциального уравнения (4.3);  $x$  – приращение входной координаты,  $x = X - X_0$ ;  $y$  – приращение выходной координаты,  $y = Y - Y_0$ ;  $p$  – оператор дифференцирования,  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $W(p)$  – передаточная функция,

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Известно, что представление функции ограниченным числом членов ряда Тейлора в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  тем точнее, чем меньше величины рассматриваемых приращений. Для систем автоматического регулирования, которые призваны поддерживать технологические параметры на заданных уровнях, такое представление является приемлемым в подавляющем большинстве случаев.

Осуществив прямое преобразование Лапласа над уравнением (4.3), получим

$$\begin{aligned} (a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_n) Y(S) = \\ = (b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \dots + b_m) X(S) + K_n(S), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $S$  – комплексная переменная вида  $S = C + j\omega$ ;  $Y(S)$  – изображение по Лапласу  $L$  функции  $y(t)$ , здесь

$$Y(S) = L[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-St} dt, \quad (4.6)$$

$X(S)$  – изображение по Лапласу функции  $x(t)$ ,  $X(S) = L[x(t)]$  по аналогии с (4.6);  $K_n(S)$  – многочлен, определяемый начальными условиями. Если начальные условия нулевые, т. е. имеет место  $y(0) = 0$ ;  $y^{(k)}(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , то  $K_n(S) = 0$ .

Таким образом, при нулевых начальных условиях имеем

$$Y(S) = W(S)X(S), \quad (4.7)$$

где  $W(S) = W(p)|_{p \Rightarrow S}$ .

Нахождение оригинала  $y(t)$  может быть осуществлено с помощью обратного преобразования Лапласа  $L^{-1}$  над соответствующим изображением  $Y(S)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(S)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(S) e^{St} dS. \quad (4.8)$$

Прямое и обратное преобразование Лапласа используется для нахождения решения дифференциального уравнения, например, вида (4.3). Причем для нахождения изображений и оригиналов пользуются в основном не формулами (4.6) и (4.8), а готовыми таблицами преобразования Лапласа.

Для многомерного объекта и при нулевых начальных условиях его математическое описание может быть представлено в матричной форме в следующем виде:

$$\bar{Y}(S) = \bar{X}(S) \bar{W}(S), \quad (4.9)$$

где  $\bar{Y}(S)$  – матрица–столбец изображений выходных координат  $Y_1(S) \dots Y_k(S)$ ;  $\bar{X}(S)$  – матрица–столбец изображений входных координат  $X_1(S) \dots X_k(S)$ ;  $\bar{W}(S)$  – матрица–столбец передаточных функций.

При разработке математического описания необходимо также учитывать возможную нестационарность объекта. Обычно данное явление проявляется в том, что некоторые параметры объекта, которые определяют величины коэффициентов передаточной функции, варьируют во времени. Это приводит к тому, что в выражении (4.4) некоторые из коэффициентов  $a_i$  и  $b_j$  также будут изменяться во времени, т. е.  $a_i = a_i(t)$  и  $b_j = b_j(t)$ . Так, например, при тепловой обработке молока в теплообменных аппаратах (пластинчатых, трубчатых) происходит образование белковых отложений на внутренней поверхности теплообменных конструкций, что, в свою очередь, приводит к изменению условий теплопередачи от энергоносителя (пара, горячей воды) к продукту. Вследствие этого, например, изменяются постоянные времени такого объекта по каналу «температура энергоносителя – температура молока на выходе». При длительной эксплуатации данного объекта значительный прирост белковых отложений может нарушить тепловой режим его работы, что приведет к его перегреву и выходу из строя. Поэтому существующие регламенты на

эксплуатацию такого оборудования предусматривают его периодическую разборку и мойку. В процессах термообработки колбас, выпечки хлебо-булочных изделий в результате интенсивного тепло- и массообмена с окружающей средой – энергоносителем – происходят изменения теплофизических свойств обрабатываемых изделий – колбасных и тестовых заготовок, что, в свою очередь, является причиной изменения соответствующих параметров передаточных функций этих видов продуктов во время обработки, хотя в отдельных случаях такие изменения могут быть и незначительными.

Также причинами нестационарности могут являться износ технологического оборудования и многие другие факторы. Во всех рассмотренных случаях коэффициенты передаточной функции необходимо рассматривать как случайные величины, исчерпывающим описанием которых является закон распределения  $p(a_i)$  или  $p(b_j)$ . Для решения практических задач, как правило, оказывается достаточным знание двух основных характеристик этих коэффициентов: математического ожидания  $m_{a_i}, m_{b_j}$  и дисперсий  $\sigma_{a_i}^2, \sigma_{b_j}^2$ . Для решения задач анализа и синтеза систем с использованием соответствующих передаточных функций в качестве коэффициентов используются их математические ожидания. Влияние случайных вариаций отдельных коэффициентов на характеристики объекта или системы может быть оценено величинами среднеквадратических отклонений  $\sigma$  этих характеристик по формуле

$$\sigma = \sqrt{\sum_{(i)} \left( \frac{\partial L}{\partial a_i} \right)^2 \sigma_{a_i}^2 + \sum_{(j)} \left( \frac{\partial L}{\partial b_j} \right)^2 \sigma_{b_j}^2}, \quad (4.10)$$

где  $L$  – характеристика или обобщенный критерий какого-либо свойства объекта или системы. В общем случае

$$L = L(a_i, b_j); \quad i \in I; \quad j \in J. \quad (4.11)$$

Частные производные  $\frac{\partial L}{\partial a_i}$  и  $\frac{\partial L}{\partial b_j}$  называются коэффициентами влияния и характеризуют чувствительность рассматриваемой характеристики  $L$  к изменению отдельных коэффициентов  $a_i$  и  $b_j$ . Формула (4.10) справедлива для наиболее часто встречающегося на

практике случая, когда коэффициенты  $a_i$  и  $b_j$  не коррелированы между собой.

Отклонение критерия от номинального значения, обусловленное отклонениями коэффициентов  $a_i$  и  $b_j$ , может быть определено из выражения (4.11) путем разложения его в ряд Тейлора с последующим оставлением первых линейных членов разложения

$$\Delta L \approx \sum_{(i)} \frac{\partial L}{\partial a_i} \Delta a_i + \sum_{(j)} \frac{\partial L}{\partial b_j} \Delta b_j. \quad (4.12)$$

Следует отметить, что точность представления величины  $\Delta L$  будет тем выше, чем меньше величины отклонений соответствующих коэффициентов  $\Delta a_i$  и  $\Delta b_j$ . Если известны только максимально возможные отклонения величин коэффициентов передаточной функции  $\Delta a_{i\max}$  и  $\Delta b_{j\max}$ , то мажорантная оценка может быть получена из выражения

$$\Delta L_{\max} = \sqrt{\sum_{(i)} \left( \frac{\partial L}{\partial a_i} \right)^2 \Delta a_{i\max}^2 + \sum_{(j)} \left( \frac{\partial L}{\partial b_j} \right)^2 \Delta b_{j\max}^2}. \quad (4.13)$$

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим пример.

Имеется звено – амортизатор, состоящий из пружины и демпфера, схема которого приведена на рис. 4.1.

Входная координата звена  $x$  – усилие, прилагаемое к амортизатору, выходная координата  $y$  – перемещение платформы амортизатора. Даны:  $m$  – масса подвижной части;  $c_1$  – коэффициент жесткости пружины;  $c_2$  – коэффициент демпфирования. Требуется получить математическое описание зависимости между координатами  $y$  и  $x$ .

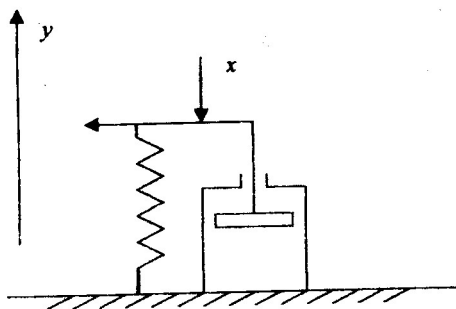




Рис. 4.1. Схема амортизатора

Так как перемещение происходит только в направлении оси  $y$ , то соответствующее математическое описание может быть получено на основании уравнения равновесия сил, действующих вдоль этой оси. При этом полагаем, что вес подвижной части изначально скомпенсирован деформацией пружины.

В результате имеем дифференциальное уравнение

$$x = c_1 y + c_2 y^{(1)} + m y^{(2)},$$

или в операторной форме

$$x = y(c_1 + c_2 p + m p^2).$$

Здесь первое слагаемое в правой части уравнения описывает усилие, создаваемое пружиной, второе – демпфером, третье описывает силу инерции.

После преобразований получаем

$$y = x W(p), \quad W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где  $k = \frac{1}{c_1}$ ,  $T_1 = \frac{c_2}{c_1}$ ,  $T_2^2 = \frac{m}{c_1}$ .

Имея математическое описание, можно осуществить анализ свойств звена и выдать рекомендации по его последующему синтезу с целью получения требуемых свойств. Так, например, вид переходного процесса выходной координаты  $y(t)$  (апериодический или колебательный) определяется решением исходного дифференциального уравнения для единичного ступенчатого воздействия на входе  $x = 1(t)$  и зависит от знака дискриминанта характеристического полинома  $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = T_2^2 \lambda^2 + T_1 \lambda + 1.$$

Дискриминант этого полинома  $D$  равен

$$D = T_1^2 - 4T_2^2 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 - 4\frac{m}{c_1}.$$

Если  $D < 0$ , то соответствующее характеристическое уравнение  $P(\lambda) = 0$  имеет пару сопряженных мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ , что обуславливает наличие колебательной переходной характеристики  $h(t)$

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right],$$

где  $\alpha = -\frac{T_1}{2T_2^2}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{4T_2^2 - T_1^2}}{2T_2^2}$ ,  $\varphi = \text{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ .

Если  $D > 0$ , то характеристическое уравнение  $P(\lambda) = 0$  имеет пару отрицательных вещественных корней  $\lambda_1 = \alpha_1$ ;  $\lambda_2 = \alpha_2$ , что обуславливает наличие аperiodической переходной характеристики

$$h(t) = k \left[ 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_2 t} \right],$$

где  $\alpha_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}$ .

Отсюда видно, что варьируя параметрами элементов звена  $c_1$ ,  $c_2$  и  $m$ , можно добиваться требуемого вида переходного процесса. Например, если требуется обеспечить аperiodический переходной процесс, то необходимо подобрать пружину и демпфер с параметрами, обеспечивающими выполнение условия  $D > 0$ , т. е.

$$\left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 - 4 \frac{m}{c_1} > 0, \text{ или } c_2 > 2\sqrt{mc_1}.$$

Также, варьируя отдельными параметрами элементов звена, можно осуществлять целенаправленный его синтез и по другим характеристикам, например по длительности переходного процесса.

Если масса подвижной части невелика и ею можно пренебречь ( $m = 0$ ), то передаточная функция такого звена примет более простой вид

$$W(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}.$$

Имея математическое описание в виде передаточной функции звена, несложно получить и другие его характеристики: переходные в виде переходной функции  $h(t)$  и функции веса  $w(t)$ ; частотные, например, АЧХ –  $A(\omega)$ , ФЧХ –  $\varphi(\omega)$ , АФЧХ и др.

Используя приведенный пример можно также проиллюстрировать влияние нестационарности, например коэффициента  $T_1$ , на такую характеристику звена, как длительность переходного процесса. При рассмотрении последнего варианта передаточной функции, когда  $m = 0$ , для заданного 5 %-го допуска на отклонение выходной величины от установившегося значения, длительность переходного процесса будет равна

$$L = 3T_1.$$

Если в процессе эксплуатации такого амортизатора происходят изменения коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  (например, вследствие изменений свойств материала пружины и рабочей жидкости демпфера под действием температуры или их износа), то эти обстоятельства будут являться причиной нестационарности рассматриваемого коэффициента  $T_1$ . В этом случае оценка отклонения длительности переходного процесса от номинального значения может быть осуществлена в соответствии с выражением (4.12)

$$\Delta L \approx \frac{\partial(3T_1)}{\partial T_1} \Delta T_1 = 3\Delta T_1.$$

Величина среднеквадратического отклонения этого же параметра при известной дисперсии  $\sigma_{T_1}^2$  в соответствии с выражением (4.10) будет равна

$$\sigma_L = 3\sigma_{T_1},$$

а мажорантная оценка  $\Delta L_{\max}$  согласно выражению (4.13) будет равна

$$\Delta L_{\max} = 3\Delta T_{1\max}.$$

В ограниченных рамках данной работы не представляется возможным рассмотреть процедуры разработки математического

описания ряда других важных объектов, встречающихся на практике. Математическое описание некоторых процессов и аппаратов пищевых производств приведено в работе [13].

### **4.3. Экспериментальные методы получения математического описания**

Рассмотренный в предыдущем подразделе аналитический метод получения математического описания зачастую оказывается неэффективным. В первую очередь это связано с тем, что многие процессы в объектах характеризуются одновременным протеканием различных взаимосвязанных явлений, которые, в свою очередь, определяются распределением параметров во времени и в пространстве агрегата. Таковыми, например, являются процессы тепло- и массообмена, которые характеризуются изменением коэффициентов тепло- и массопереноса, диффузии и других как во время обработки, так и в объеме термоагрегата. Достаточно точное аналитическое описание столь сложных и многогранных явлений без серьезных допущений и упрощений, искажающих суть технологического процесса, зачастую не представляется возможным.

Другой причиной неэффективности аналитического подхода к разработке математического описания зачастую является отсутствие необходимых исходных данных о параметрах объекта или отдельных его элементов или необходимость внесения больших материальных и трудовых затрат для их определения. В силу этих обстоятельств экспериментальные методы идентификации получили широкое распространение, особенно в производственных условиях.

Экспериментальные методы идентификации основаны на рассмотрении объекта как “черного ящика”, изучение которого осуществляется на основании информации о входных и выходных координатах в различных состояниях, полученной экспериментальным путем. Для получения такой информации необходимо выбрать метод исследования, исходя из которого далее составить план проведения эксперимента. Выбор метода осуществляется в соответствии с особенностями функционирования объекта: производственный или лабораторный вариант, возможности внесения тех или иных испытательных воздействий, возможности проведения исследований в установившемся или переходном режимах и др. Так, например, наличие лабораторной

установки расширяет возможности экспериментальных исследований, позволяя шире использовать методы активного эксперимента. В производственных условиях, особенно при высокой производительности технологического оборудования, возможности проведения экспериментальных исследований сужаются, зачастую сводясь к “пассивной” регистрации интересующих координат в различных технологических режимах и производственных ситуациях.

Подробная классификация и анализ экспериментальных методов исследования объектов приведены в работах [13, 14]. Подготовка эксперимента предусматривает выбор вида и методики внесения испытательного воздействия, выбор методов и технических средств измерения и регистрации координат с учетом их динамических и метрологических характеристик, синхронизации измерений и многое другое. Варианты планов и схем проведения таких экспериментов для некоторых объектов пищевой промышленности приведены в работе [13].

Наибольшее распространение на практике получили методы идентификации объектов, основанные на использовании частотных и переходных характеристик. Определение и основные сведения об этих характеристиках приведены в разд. 1. Там же наглядно обоснована нецелесообразность, а для подавляющего большинства случаев, и невозможность получения частотных характеристик для инерционных объектов особенно «неэлектрической природы». Поэтому для идентификации объектов в пищевой промышленности в основном используются переходные характеристики. Математический аппарат, обосновывающий возможность идентификации по переходным характеристикам, основывается на использовании свойств преобразования Лапласа (выражения (4.6), (4.7) и (4.8)). Действительно, если подать на вход объекта единичный импульс  $\delta(t)$ , то реакция на выходе будет описываться функцией веса  $w(t)$ . Изображение по Лапласу единичного импульса равно  $L[\delta(t)] = 1$ . Тогда согласно выражению (4.7) имеем

$$L[w(t)] = W(s), \quad (4.14)$$

т. е. передаточная функция объекта есть изображение, по Лапласу, функции веса. Отсюда вытекает методика получения передаточной функции. На объект вносится единичное импульсное воздействие и

регистрируется соответствующая ему функция веса. Совершая над ней прямое преобразование Лапласа согласно выражению (4.6), получаем изображение передаточной функции  $W(S)$ , которое при нулевых начальных условиях по форме записи совпадает с выражением передаточной функции  $W(p)$ . Если подаваемый импульс не является единичным, а равен  $k\delta(t)$ , то для случая рассматриваемых линейных систем реакция на выходе объекта будет соответственно  $kw(t)$  и, используя свойство линейности оператора Лапласа, согласно выражению (4.14) будем иметь

$$L[kw(t)] = kW(S).$$

Передаточную функцию также можно получить из переходной функции. Если на вход объекта подать единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ , то реакция на выходе будет описываться переходной функцией  $h(t)$ . Изображение по Лапласу единичного ступенчатого воздействия  $L[1(t)] = \frac{1}{S}$ . Тогда согласно выражению (4.7) имеем

$$L[h(t)] = \frac{W(S)}{S}, \text{ или } W(S) = SL[h(t)]. \quad (4.15)$$

Следовательно, передаточная функция есть изображение, по Лапласу, переходной функции, умноженной на  $S$ . Если высота ступенчатого воздействия равна  $k1(t)$ , то изображение передаточной функции также увеличится в  $k$  раз.

Удобство и простоту получения передаточной функции с помощью переходных характеристик можно также проиллюстрировать на примере, рассмотренном в предыдущем подразделе. Если, например, неизвестны какие-либо параметры элементов амортизатора  $c_1$ ,  $c_2$  или  $m$ , то их определение экспериментальным путем для получения передаточной функции потребует значительных трудозатрат: разборки амортизатора, экспериментального определения величин  $c_1$  и  $c_2$  на стендах, взвешивания подвижных частей, сборки амортизатора. Определение этих величин расчетным путем также трудоемко и не всегда возможно без разборки изделия для определения геометрических параметров пружины, демпфера, платформы, определения физических свойств материала пружины, демпфирующей жидкости и др.

Получение переходных характеристик экспериментальным путем потребует минимальных трудозатрат. Для получения переходной функции осуществляется нагружение платформы некоторым грузом, вес которого равен  $k$ , и одновременно фиксируется изменение ее положения по оси  $y$  во времени, т. е. регистрируется перемещение платформы под действием груза во времени. Полученная запись функции  $y(t) = kh(t)$  является переходной характеристикой в масштабе, равном  $k$ . Для получения функции веса  $k$  платформе прикладывается импульс силы (удар) и также регистрируется изменение ее положения во времени. Искомые параметры передаточной функции ( $k$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ) определяют из полученных графиков функции  $h(t)$  или  $w(t)$ . Очевидно, что такие эксперименты можно провести в производственных условиях достаточно быстро и для их проведения не требуется сложных технических средств и дорогостоящей аппаратуры.

Для многих более сложных, с точки зрения протекания физических явлений, объектов пищевой промышленности переходные характеристики зачастую являются основным инструментом получения математического описания. В этом случае для подачи ступенчатого воздействия, например в теплообменные аппараты, осуществляют скачкообразное изменение расхода энергоносителя или хладоносителя, подаваемых в тот или иной аппарат (пароварочные камеры, печи, дефростационные и холодильные камеры и др.). Соответствующие переходные функции получают путем регистрации изменения температуры во времени в интересующей точке.

Использование выражений (4.14) и (4.15) для определения передаточной функции оказывается удобным, если соответствующие переходные характеристики заданы аналитически. Если же эти характеристики получены экспериментально и представлены в виде таблиц или графиков, то идентификация объекта может быть осуществлена приближенным графоаналитическим методом. Суть метода состоит в следующем. Если в выражении (4.14) перейти к преобразованию Фурье, заменив  $S \rightarrow j\omega$ , то получим описание взаимосвязи между функцией веса и частотной функцией  $W(j\omega)$

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4.16)$$

Зависимость (4.16) в комплексной плоскости представляется двумя составляющими

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(j\omega) = U(\omega) &= \int_0^{\infty} w(t) \cos \omega t dt ; \\ \operatorname{Im} W(j\omega) = V(\omega) &= -\int_0^{\infty} w(t) \sin \omega t dt . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Вычисление  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  по выражению (4.17) можно осуществить численными методами, представив функцию  $w(t)$  в виде суммы трапеций –  $w_i(t)$

$$w(t) = \sum_{(i)} w_i(t). \quad (4.18)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \sum_{(i)} U_i(\omega); \\ V(\omega) &= \sum_{(i)} V_i(\omega). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Далее определяем  $A(\omega)$ ,  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  в соответствии с выражениями

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad (4.20)$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega); \quad (4.21)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{Arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (4.22)$$

Затем строятся зависимости  $L(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  в логарифмическом масштабе по оси частот – ЛАХ и ЛФЧХ. ЛАХ аппроксимируется отрезками прямых, имеющих наклон, кратный  $\pm 20$  дБ/дек. Из этой асимптотической ЛАХ получают выражение для передаточной функции  $W(p)$  в виде набора последовательно включенных типовых динамических звеньев. Соответствующие постоянные времени  $T_i$  определяются по значениям сопрягающих частот  $\omega_i$

$$T_i = \frac{1}{\omega_i}; \quad i \in I. \quad (4.23)$$



По виду ЛФЧХ можно определить наличие неминимально-фазовых звеньев в структуре объекта и уточнить тип сомножителей в выражении  $W(p)$ .

В случае, если вид снятых экспериментальным путем переходных характеристик позволяет идентифицировать исследуемый объект каким-либо типовым динамическим звеном, то параметры соответствующей передаточной функции (коэффициент передачи, время запаздывания, постоянные времени) определяются по графикам этих характеристик с помощью известных методик [13].

## 5. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 5.1. Основные положения. Методы и технические средства определения характеристик случайных воздействий

В предыдущих разделах отмечалось, что достаточно объективно случайное воздействие может быть охарактеризовано корреляционной функцией или функцией спектральной плотности. Получение этих функций на основе экспериментальных исследований в производственных условиях представляет практический интерес, особенно с учетом специфики технологий и процессов пищевой промышленности.

Оценка корреляционной функции может быть осуществлена из выражения (2.26). В настоящее время для экспериментального определения корреляционных функций (в частности, дисперсий) воздействий промышленностью выпускается множество различных приборов-корреляторов. Корреляторы подразделяются на два основных класса: 1) аналоговые; 2) цифровые.

Аналоговые корреляторы реализуют вычисление по формуле (2.26) с помощью блоков временной задержки, умножения и интегрирования, осуществляющих соответствующие преобразования на основе аналоговых вычислительных схем. Эти схемы в последнее время чаще всего выпускаются в виде отдельных блоков – корреляционных модулей. Использование принципов унификации, типизации и агрегатирования при создании таких модулей позволяет также осуществлять их интеграцию в системы контроля и управления. Упрощенная блок-схема корреляционного модуля приведена на рис. 5.1.

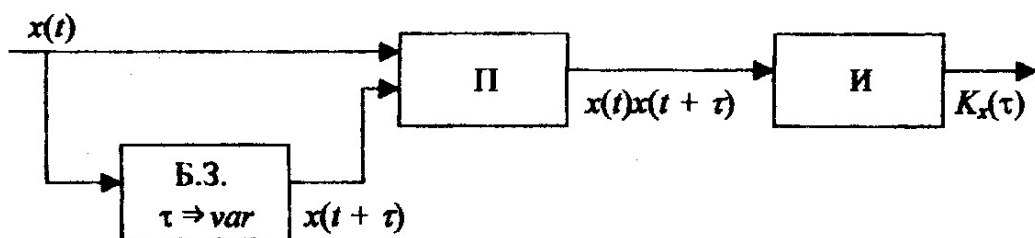


Рис. 5.1. Блок-схема корреляционного модуля

На схеме использованы следующие обозначения: Б.З. – блок временной задержки сигнала на величину  $\tau$ , которая может варьироваться; П – блок умножения сигналов; И – интегратор. При такой схеме обработки информации и при выбранном времени цикла исследования  $T$  удастся получить только одну точку функции  $K_x(\tau)$  для заданной величины  $\tau$ . Затем, повторяя заново такой цикл исследования для другой величины  $\tau$ , получают следующую точку и т. д. Для возможности варьирования величины  $\tau$  в состав Б.З. входит устройство записи реализаций функции  $x(t)$ , что позволяет многократно осуществлять циклы исследований функции  $K_x(\tau)$  для различных значений аргумента  $\tau$ . Так, например, если запись функции  $x(t)$  осуществляется на магнитную ленту, то величина  $\tau$  может быть варьирована изменением расстояния между считывающими головками для получения значений функции  $x(t)$  и  $x(t + \tau)$ , а также изменением скорости движения самой ленты.

В цифровых корреляторах осуществляется аналого-цифровое преобразование исходного сигнала  $x(t)$ . Дальнейшее преобразование цифровой информации в соответствии с выражением (2.26) осуществляется программным путем с помощью специального встроенного микропроцессорного блока. Современный уровень развития микропроцессорной техники и элементной базы позволяет изготавливать корреляторы с высокими показателями надежности, малыми габаритами и с широкими возможностями адаптации к различным требованиям при проведении таких исследований как путем замены отдельных агрегатных модулей, так и перепрограммирования базового микропроцессорного блока. При этом обеспечиваются различные сервисные функции по хранению, обработке и выдаче информации потребителю. Сюда, в первую очередь, следует отнести возможности аппроксимации результатов исследований типовыми моделями корреляционных функций, наглядное отображение информации на различных устройствах и носителях и др. В настоящее время разработано значительное число методов и алгоритмов экспериментального определения корреляционных функций, которые отражены в специальной литературе [15, 16].

Как отмечалось выше, существует взаимосвязь между функцией спектральной плотности и автокорреляционной функцией, которая для стационарного случайного воздействия описывается с помощью

выражений (2.20)–(2.23). Образно говоря, обе эти функции являются различными гранями одного явления случайного процесса – степени его «турбулентности». Поэтому при наличии корреляционной функции получение функции спектральной плотности может быть осуществлено аналитическим путем. В современных цифровых корреляторах зачастую имеются сервисные программные средства, позволяющие выполнять такие преобразования в процессе исследований. Следует отметить, что оценка функции спектральной плотности может быть также получена экспериментальным путем на основании реализаций случайного воздействия при отсутствии оценки корреляционной функции. Такая процедура может быть осуществлена с помощью набора узкополосных фильтров, каждый из которых позволяет выделить спектральную составляющую воздействия в пределах своей узкой полосы пропускания  $\omega \div \omega + \Delta\omega$ . Исходя из того, что спектральная плотность воздействия является функцией частоты для средних значений квадратов амплитуд гармоник, можно записать

$$S_x\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right) = \frac{1}{T\Delta\omega} \int_0^T x^2(t, \omega, \Delta\omega) dt, \quad (5.1)$$

где  $x(t, \omega, \Delta\omega)$  – сигнал на выходе узкополосного фильтра с полосой пропускания  $\omega \div \omega + \Delta\omega$ ;  $\Delta\omega$  – ширина полосы пропускания фильтра;  $T$  – интервал времени, в течение которого осуществляется исследование случайного воздействия.

Вопросы оценки точности получаемых экспериментальным путем автокорреляционной функции и функции спектральной плотности рассмотрены в работах [17, 18]. Там же приводятся выражения, описывающие зависимость погрешности таких оценок от величин  $T$  и  $\Delta\omega$ . Для инженерных расчетов достаточно высокая точность оценок будет иметь место при выполнении условия  $T\Delta\omega \geq 100$ .

## **5.2. Особенности экспериментальных исследований случайных воздействий в пищевой промышленности**

Экспериментальное определение характеристик случайных воздействий, как это было показано выше, требует проведения

большого количества измерений для получения достаточно объективных оценок. Эта проблема не является первостепенной в случаях, когда для проведения исследований имеется быстродействующая малоинерционная аппаратура на всех участках информационно-измерительного комплекса: первичные преобразователи, линии связи, согласующие блоки, фильтры для подавления помех, аналого-цифровые преобразователи, устройства переработки информации и др. Как правило, эта ситуация имеет место: 1) в случаях воздействий электрической природы; 2) в случаях, когда возможно преобразование такого воздействия в электрический сигнал без существенных задержек, искажений и затрат. В качестве примеров первой группы можно привести случайные воздействия – помехи, которые дестабилизируют работу различной аппаратуры и оборудования, обусловленные нестабильностью питающего напряжения в электрической цепи, наводки, от электромагнитного «смога», паразитных напряжений в неэкранированных проводах линий передачи сигналов измерительных комплексов и др. В качестве примеров второй группы случайных воздействий можно привести пульсации давлений энергоносителей (пара, горячего воздуха, воды) в технологических трубопроводах, которые первоначально измеряются с помощью различных деформационных чувствительных элементов (трубчатых пружин, мембран, сильфонов), а затем преобразуются в электрические сигналы. Для преобразования перемещений таких чувствительных элементов в электрические сигналы существует множество преобразователей в различных модификациях: индуктивные, пьезоэлектрические, емкостные, дифференциально-трансформаторные, тензорезисторные и др. Аналогично можно привести примеры случайных воздействий в виде суточных или сезонных изменений температуры окружающей среды (воздуха, воды) снаружи корпусов различных теплообменных аппаратов, для получения и преобразования информации о которых также существует множество типов и конструкций чувствительных элементов и соответствующих преобразователей. Перечень подобных примеров может быть пополнен и другими случайными воздействиями, поступающими по каналам изменения уровня, расхода, концентрации и прочих, при управлении различными технологическими процессами. Наличие соответствующих

преобразователей позволяет получить необходимый для проведения корреляционного и спектрального анализа сигнал  $x(t)$ , который в соответствии с рис. 5.1 поступает на вход анализатора (корреляционного модуля). Серьезные аппаратные разработки для исследования таких случайных величин, как изменение углов крена и угловых скоростей при движении летательных аппаратов в воздушной среде или качке судов при волнении позволяют оперативно получать объективную информацию об этих явлениях для выработки рекомендаций по управлению указанными объектами. Для этих целей, например, разработаны и широко используются двух- и трехстепенные гироскопы различных типов (лазерные, скоростные, гировертикали и др.).

Специфической особенностью процессов и производств пищевой промышленности является то обстоятельство, что значительное число случайных воздействий может поступать как по каналам внесения управляющих воздействий, так и по каналам поступления сырья и различных компонентов. Природа таких воздействий довольно часто обусловлена случайными изменениями состава и свойств обрабатываемого сырья, полуфабрикатов и применяемых реагентов и добавок. Для оперативного измерения многих параметров, характеризующих пищевую ценность сырья и готовой продукции, зачастую не существует аппаратной базы или она недостаточно развита в отличие от вышерассмотренных примеров информационного обеспечения систем управления машино-, авиа- и судостроения и др. В ряде случаев для определения содержания тех или иных составляющих в сырье или готовой продукции применяются сложные и дорогостоящие лабораторные методы анализа, которые проводятся в течение длительного времени (порядка нескольких часов и более), что является серьезным препятствием для реализации методов корреляционного и спектрального анализа. При этом в силу сложности химического состава и структуры таких объектов зачастую вообще оказывается невозможным непосредственно осуществить объективный аппаратный контроль их свойств. В указанных случаях соответствующие оценки свойств сырья и продуктов производят органолептическими методами, которые являются не оперативными и достаточно дорогостоящими. При этом следует учитывать, что достаточно объективные оценки могут быть получены только на основании статистической обработки результатов анализов

представительной комиссии специалистов-дегустаторов. Кроме того, специалист, проводящий такие анализы, должен обладать особыми профессиональными навыками и подготовкой.

Рассмотрению подходов к использованию методов инструментальной оценки качества сырья, состава и свойств пищевых продуктов посвящена работа [19]. Кроме того, достаточно полный обзор методов и приборов для технологического контроля в пищевой промышленности приведен в литературе [20].

Не вдаваясь в отдельные детали, необходимо отметить основные тенденции и особенности синтеза информационного обеспечения систем управления в пищевой промышленности. Основной особенностью является то, что для управления технологическими процессами помимо контроля так называемых общетехнических параметров (температуры, давления, расхода, уровня и др.) необходимо также контролировать свойства обрабатываемого сырья, полуфабрикатов и готового продукта, что зачастую невозможно осуществить с помощью общетехнических средств измерений. Причем имеющиеся методы инструментального контроля некоторых показателей требуют использования дорогостоящего оборудования. В первую очередь к ним относятся показатели, характеризующие физико-химические, санитарно-гигиенические и микробиологические свойства, а также показатели состава сырья и продуктов. Схема, иллюстрирующая классификацию основных параметров технологических процессов современных пищевых производств, используемых при управлении, приведена на рис. 5.2.

Вполне понятно, что каждый из приведенных на рис. 5.2 блоков параметров предусматривает дальнейшую многоступенчатую детализацию. Однако для уяснения проблем, указанных в заголовке данного подраздела, достаточно ограничиться рассмотрением отдельных характерных параметров, методов их контроля, которые могут быть использованы при проведении экспериментальных исследований в производственных условиях. Более подробную детализацию особенностей технологических процессов пищевых производств с учетом специфики информационного и метрологического обеспечения можно найти в литературе [21].

Параметры контроля и управления

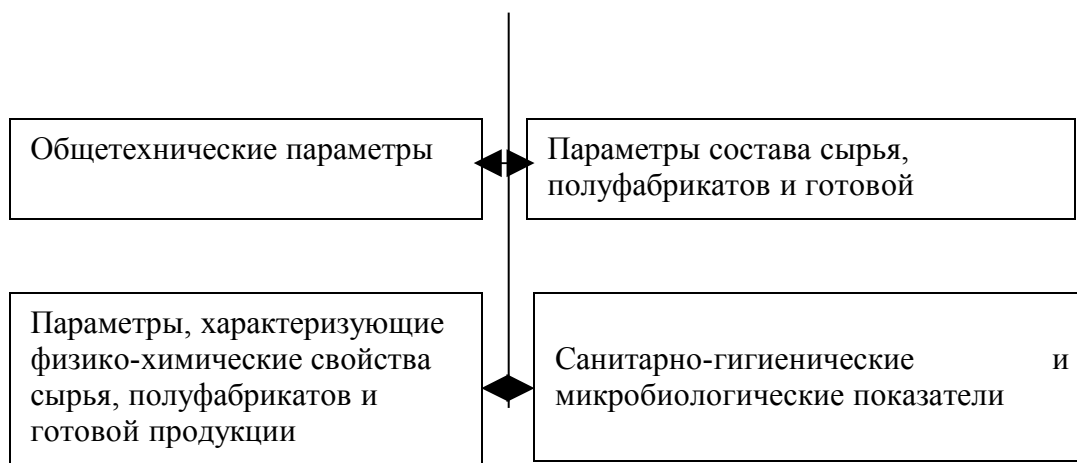


Рис. 5.2. Классификация основных параметров технологических процессов пищевых производств, используемых при управлении

Так, одним из распространенных показателей, характеризующих комплекс физических свойств многих пищевых продуктов, является консистенция. В соответствии с действующими стандартами этот показатель используется для оценки качества отдельных видов рыбной продукции, мяса, мясного фарша, колбас, тестовых заготовок и хлебо-булочных изделий, сметаны, масла и маргаринов, сыра, творога, различных пищевых паст и кремов и др. Часто в тех же стандартах контроль консистенции предполагается осуществлять органолептически на основании методов сенсорного анализа. Такой подход к оценке качества объектов, основанный на опытно-интуитивном восприятии ситуации, зависит от квалификации соответствующих специалистов и зачастую оказывается недостаточно оперативным, дорогостоящим, что, в конечном счете, приводит к неэффективности процесса управления. Поэтому наметилась тенденция к разработке и внедрению в производство приборов и технических средств, предназначенных для инструментальной, объективной оценки свойств таких объектов. Применительно к показателю консистенции можно утверждать, что он зависит от внутренней структуры объекта, определяющей целый ряд его физических свойств, которые, в свою очередь, могут быть измерены инструментальными методами. Это обстоятельство создает предпосылки для разработки аппаратных методов оценки качества объектов. Известно, что свойства внутренней структуры объекта достаточно объективно описываются набором структурно-



механических характеристик, которые подразделяются на три основные группы: 1) сдвиговые; 2) компрессионные; 3) поверхностные. Изучение свойств реальных объектов по этим характеристикам является одной из задач инженерной реологии.

Сдвиговые свойства объекта проявляются при воздействии на него касательных напряжений. Для описания этих свойств используются следующие основные характеристики [22]:

- предельное напряжение сдвига;
- пластическая вязкость;
- эффективная вязкость;
- период релаксации.

Компрессионные свойства проявляются при сжатии объекта в замкнутом объеме. Для описания этих свойств используются следующие основные характеристики:

- плотность;
- модуль упругости;
- коэффициент Пуассона;
- коэффициент бокового давления.

Поверхностные свойства проявляются на границе раздела объекта с твердым материалом при воздействии нормальных или касательных напряжений. Соответственно они и описываются как адгезия и внешнее трение.

Выбор какой-либо характеристики для описания свойств объекта является прерогативой исследователя. Зачастую такой выбор осуществляется на основании экспериментальных исследований с привлечением методов дисперсного и факторного анализов, возможно также использование методов парной, ранговой корреляции и др.

Измерение реологических характеристик в основном осуществляется косвенно: соответствующая характеристика определяется на основании результатов прямых измерений при помощи данного прибора с последующим пересчетом по известной зависимости. В связи с этим все «реологические» приборы подразделяются по виду непосредственно измеряемых величин на 4 основные группы: 1) динамические (сила, момент, напряжение); 2) кинематические (время, скорость); 3) геометрические (длина, площадь, объем); 4) энергетические (мощность) [22].

Для измерения вышеупомянутых реологических характеристик как у нас в стране, так и за рубежом выпускаются специальные

измерительные приборы различных типов: пластометры, пенетрометры, консистометры, вязкозиметры, адгезиометры, трибометры и др. Описание принципа действия, конструкции таких приборов приведено в работах [19, 20, 22]. Анализ литературных источников, опыт эксплуатации подобных приборов на производстве подтверждает приведенное в начале подраздела утверждение о проблемах, связанных с неоперативностью и высокими затратами при проведении подобных измерений и исследований. Так, например, продолжительность цикла измерения реологических характеристик различных приборов может варьироваться в пределах от нескольких минут до десятков минут. Здесь также необходимо отметить, что цикл измерения может состоять из нескольких операций: подготовки и загрузки образца или пробы, приведения прибора в рабочее положение, проведения собственно измерения, выгрузки образца и др.

Сформулированный тезис можно проиллюстрировать на примерах проведения измерений параметров состава сырья, полуфабрикатов и готовой продукции в пищевой промышленности. Так, например, для управления технологическими процессами в молочной промышленности необходимо осуществлять контроль состава поступающего на обработку молока, а также молочных продуктов. При этом наиболее распространенным параметром контроля состава является массовое содержание жира, белка, сухих веществ, лактозы и др. Для измерения этого параметра могут использоваться различные методы: ультразвуковой, колориметрический, турбодиметрический, рефрактометрический и др. Приборы, осуществляющие эти измерения, имеют достаточно сложную конструкцию, сложны в обращении и являются дорогостоящими. Так, получившие широкое распространение в молочной промышленности различные приборы, основанные на использовании оптических методов измерений, например, типов «Милко-Тестер» или «Милко-Скан» фирмы Foss-Electric (Дания), «Мультиспек» фирмы Berwind Instrument (Англия), «Милко-Чекер» фирмы Anritsu-Electric (Япония), включают в себя сложный оптический блок (набор светофильтров, источники и приемники монохроматического излучения для различных длин волн, систему линз и зеркал и др.), блок подготовки и подачи проб, блок питания, микропроцессорный блок управления работой и автоматизации обработки измерительной информации и т. д. Несмотря на

использование в конструкциях таких приборов современной элементной базы (компактных приводных двигателей, малогабаритных насосов и др.), они в силу своей сложности имеют значительные габариты и массу от нескольких десятков до сотен килограммов и более. Для работы на таких приборах требуется специально подготовленный персонал.

Аналогичная ситуация с организацией и проведением контроля состава и свойств сырья и продуктов, а также ряда санитарно-гигиенических и микробиологических параметров имеет место и в других отраслях пищевой промышленности. Так, например, комплексная оценка свойств твердых продуктов может быть осуществлена на основании анализа отражающих свойств поверхности образца. В качестве характеристики спектральной отражающей способности поверхности продукта может быть использована величина оптической плотности  $D_\lambda$

$$D_\lambda = \lg \frac{I_{\lambda 0}}{I_\lambda}, \quad (5.2)$$

где  $I_{\lambda 0}$  – интенсивность падающего монохроматического потока с длиной волны  $\lambda$ ;  $I_\lambda$  – интенсивность отраженного потока.

В этом случае такое «измерение» сведется к снятию кривой оптической плотности для исследуемой поверхности в заданном диапазоне длин волн  $\lambda$ . Для большей объективности результатов обычно используется полный диапазон видимой части светового спектра  $\lambda = (400 \div 750)$  нм. Кривая оптической плотности может быть получена с помощью спектрофотометра. Следует отметить, что такие методы исследования начинают внедряться в пищевую промышленность для определения свойств продуктов. Особое значение они приобретают в тех случаях, когда исследуемая поверхность обладает избирательным поглощением, т. е. на кривой оптической плотности имеются характерные локальные минимумы и максимумы. Наличие диапазонов избирательного поглощения также позволяет произвести качественную оценку результатов протекания биохимических процессов в продукте, что в ряде случаев предоставляет возможность сделать важные выводы о его свежести, содержании в нем токсичных микроорганизмов. Такое избирательное поглощение света в органических веществах связано с особенностями химического строения молекул, содержания в них

определенных химических групп, например хромофоров. Для характеристики качества продуктов также можно использовать значения оптических плотностей для конкретных длин волн, соответствующих наличию избирательного поглощения. В этом случае проведение измерений можно осуществить на более простых приборах – монохроматорах с набором светофильтров, обеспечивающих получение необходимых потоков монохроматического излучения. На рис. 5.3 приведены характерные кривые оптической плотности, полученные для боковой поверхности рыбы горячего копчения, копченой и вареной колбас.

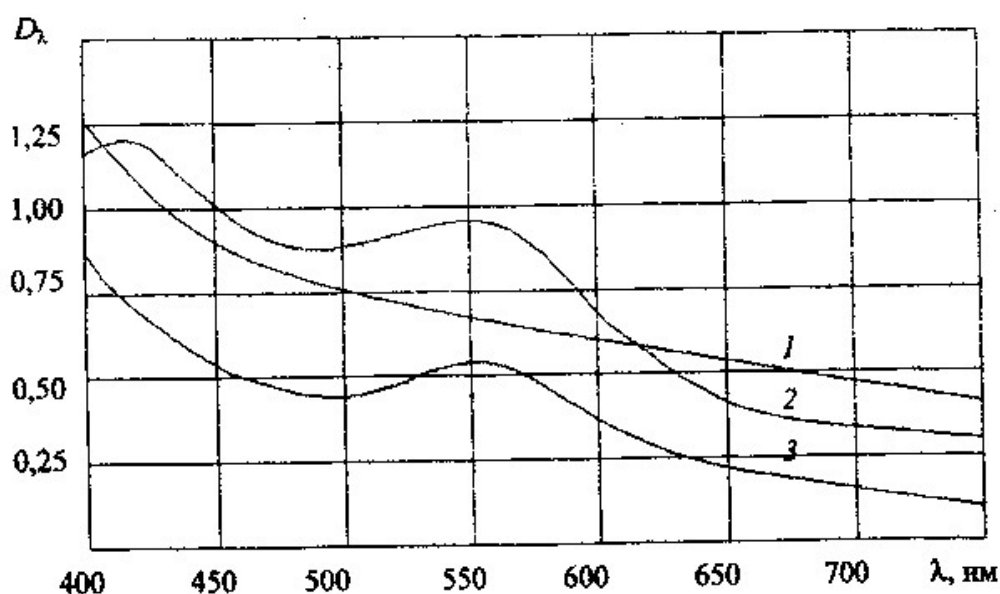


Рис. 5.3. Характерный вид спектральных кривых оптической плотности: 1 – салака горячего копчения; 2 – колбаса копченая; 3 – колбаса вареная

Как видно из приведенного рисунка, на представленных кривых отсутствуют участки с ярко выраженным избирательным поглощением. Похожая картина имеет место и для ряда других продуктов. В этих случаях для оценки удобно использовать значение величин оптической плотности в начале  $D_1$  и в конце  $D_2$  диапазона рассматриваемого спектра. Чаще всего в качестве такой оценки используется показатель  $\frac{D_1}{D_2}$ , выраженный через отношение этих плотностей. Такой подход формализует процесс исследования, но может привести к получению неоднозначных результатов, обусловленных неоднозначностью выбора характерных длин волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Во избежание этого обычно заранее выбирают рабочие значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . При отсутствии участков с ярко выраженным избирательным поглощением наиболее целесообразными считаются значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , лежащие вблизи границ видимой части спектра:  $\lambda_1 = 430$  нм,  $\lambda_2 = 720$  нм.

Такой метод оценки свойств продуктов получает все большее распространение. В настоящее время он весьма успешно зарекомендовал себя при оценке цвета поверхностей многих копченых продуктов (рыбы, колбасных изделий и др.). Также успешно данный метод используется для оценки «свежести» мясного сырья, степени бактериальной обсемененности и др. Однако широкому внедрению такого метода непосредственно в производственную практику препятствует то обстоятельство, что для его реализации требуется сложное измерительное оборудование, выполненное на основе спектрофотометра. Применение встроенных ЭВМ позволяет повысить оперативность обработки измерительной информации, расчета различных характеристик, автоматизировать процесс измерения. Однако и в этом случае длительность одного цикла измерения, включая подготовку и загрузку образца, снятие кривой оптической плотности в заданном диапазоне длин волн, обработку результатов, выгрузку образца, составляет от нескольких минут до десятков и более минут. Примеров, подобных вышеизложенным, можно привести множество.

Следует также отметить, что использование дорогостоящих приборов контроля состава и свойств пищевого сырья и продуктов, санитарно-гигиенических показателей для мелких и средних предприятий зачастую оказывается экономически нецелесообразным. Поэтому в этих случаях для проведения соответствующих измерений

используют классические лабораторные методы анализа. Для проведения таких анализов применяют более доступное оборудование: комплекты химической посуды, различные химические реактивы, центрифуги, аналитические весы, микроскопы, сушильные шкафы, термостаты и др. При этом следует учитывать, что реализация таких методов анализа требует гораздо больших затрат времени, чем при использовании упомянутых выше автоматизированных анализаторов, и может достигать нескольких часов.

В связи с изложенным выше основной вывод по данному подразделу можно сформулировать следующим образом.

Проведение экспериментальных исследований случайных воздействий для технологических процессов пищевой промышленности в большинстве случаев связано со значительными материальными затратами и требует существенных затрат труда и времени. Поэтому являются весьма актуальными разработка и внедрение методик получения оценок характеристик таких воздействий на основании ограниченной измерительной информации, т. е. в условиях априорной неопределенности. Это обстоятельство обуславливает актуальность и экономическую целесообразность внедрения робастных систем управления в пищевой промышленности.

### **5.3. Типовые математические модели характеристик случайных воздействий**

Как известно, основными характеристиками случайного воздействия являются корреляционная функция и функция спектральной плотности. Поэтому ниже будут рассмотрены математические модели, получившие наибольшее распространение в инженерной практике. Предварительно необходимо отметить, что аппроксимация этих функций по отдельным точкам, полученным экспериментальным путем, может быть осуществлена с любой точностью. Так, например, интерполяция зависимости для  $(n + 1)$  точки с помощью многочлена Лагранжа  $n$ -й степени позволит получить функцию, график которой проходит через все эти точки. В настоящее время существует множество методов аппроксимации зависимостей, заданных различными способами: табличным, аналитическим, графическим. Эти методы достаточно подробно

описаны в специальной литературе [4, 5, 23]. Зачастую получаемые в результате такой аппроксимации выражения искомым функций оказываются громоздкими и сложными для проведения дальнейших исследований и расчетов. Поэтому возникает необходимость их разумного упрощения или «округления». При этом необходимо сохранить основные имеющиеся тенденции в поведении этих функций. Задача выбора математических моделей для характеристик случайных воздействий является одной из ответственных и не подлежащей формализации в практике экспериментального анализа случайных воздействий. Во многом эффективность решения такой задачи зависит от опыта, интуиции и квалификации исследователя. Наиболее типовые и употребительные варианты математических моделей корреляционных функций и соответствующих им спектральных плотностей приведены в табл. 5.1. Указанный набор вариантов моделей является достаточно полным для характеристики случайных воздействий, встречающихся в практике анализа и синтеза систем управления в пищевой промышленности и позволяет отразить основные тенденции в поведении этих функций (интенсивность «затухания» функций, их характер: аperiodический или колебательный и др.).

Таблица 5.1

**Математические модели характеристик случайных воздействий**

№ п п	Математическая модель корреляционной функции $K_x(\tau)$	Математическая модель спектральной плотности $S_x(\omega)$
1	$D_x e^{-\alpha \tau }$	$\frac{2\alpha D_x}{\alpha^2 + \omega^2}$
2	$D_x e^{-\alpha \tau } (1 + \alpha \tau )$	$\frac{4\alpha^3 D_x}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$
3	$D_x e^{-\alpha \tau } \cos \beta \tau $	$D_x \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} \right]$
4	$D_x e^{-\alpha \tau } \left( \cos \beta \tau  + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau  \right)$	$D_x \frac{\alpha}{\beta} \left[ \frac{2\beta - \omega}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} + \frac{2\beta + \omega}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} \right]$

Следует также отметить, что приведенный в табл. 5.1 набор моделей является далеко не исчерпывающим. В отдельных случаях возникает необходимость в более сложных моделях и методах

описания характеристик случайных воздействий. Необходимые сведения можно найти в специальной литературе [18, 24].

#### **5.4. Методы моделирования и расчета характеристик случайных воздействий**

Получение математических моделей характеристик случайных воздействий на основании теоретических исследований особенно актуально в случаях ограниченной измерительной информации об этих воздействиях, что, например, характерно для многих производств пищевой промышленности. Такие методы оказываются эффективными, когда случайная помеха, воздействующая на рассматриваемый технологический процесс, сформировалась в результате прохождения известного ранее случайного воздействия через линейное динамическое или нелинейное безынерционное звено, которое, например, может являться элементом вспомогательного оборудования для этого процесса. Соответствующий математический аппарат и различные примеры его применения рассмотрены в разд. 3.

В качестве другого примера эффективности разработки математических моделей характеристик случайных воздействий аналитическими методами является ситуация, когда ширина полосы пропускания анализируемого объекта, системы является значительно более узкой, чем ширина спектра воздействия, и в этих пределах амплитуды гармоник постоянны. В таком случае достаточно адекватной моделью является модель «белого шума», которая описывается следующими характеристиками

$$K_f(\tau) = a\delta(t), \quad (5.3)$$

где  $a = \text{const}$ ;  $\delta(t)$  – дельта-функция.

Функция спектральной плотности имеет вид

$$S_f(\omega) = a. \quad (5.4)$$

Характерным для пищевой промышленности является воздействие, которое скачкообразно изменяет свое значение в случайные моменты времени. Эта ситуация достаточно адекватно описывает случай, когда на обработку поступают различные виды сырья, обладающие разными характеристиками. Так, например, при изготовлении фарша для заданного сорта колбас довольно часто



вследствие производственной необходимости используют разнородные партии мясного сырья (свинины, говядины и др.) и немясных добавок (соя, крахмал и др.), поступивших от различных поставщиков и производителей. Естественно, что содержание отдельных компонентов (влаги, жира, белка, углеводов и др.) в общем потоке обрабатываемого сырья будет изменяться скачкообразно при поступлении каждой новой партии. Характерность такого типа воздействий для пищевой промышленности отмечена в работе [21]. Качественный вид изменения рассмотренного типа воздействия во времени приведен на рис. 5.4.

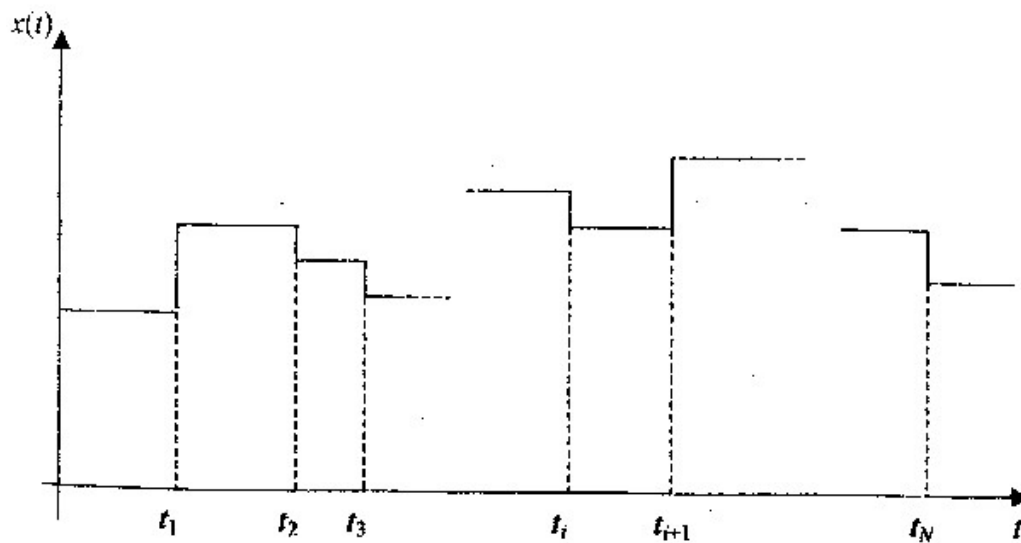


Рис. 5.4. Качественный вид случайного воздействия, характеризующегося скачкообразным изменением параметра в случайные моменты времени

Как показано в работе [11], спектральная плотность такого воздействия достаточно точно может быть описана выражением

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (5.5)$$

где  $D_x$  – дисперсия воздействия;  $T$  – средний интервал времени между скачками,  $T = \Delta t_{cp}$  (здесь  $\Delta t_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta t_i}{N}$ , где  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  – общее количество скачков).

Очевидно, что выражение (5.5) может быть также использовано для описания спектральной плотности задающего воздействия, поступающего, например, по каналу изменения уставки при переходе на различные режимы работы объекта, технологического оборудования.

Представляет практический интерес определение корреляционной функции через разложение ее в ряд по дисперсиям производных воздействия. Пусть  $K_x(\tau)$  – искомая корреляционная функция воздействия, допускающая многократное дифференцирование. Тогда ее можно представить рядом Маклорена в виде

$$K_x(\tau) = K_x(0) + K_x^{(1)}(0)\tau + \frac{1}{2!}K_x^{(2)}(0)\tau^2 + \dots \quad (5.6)$$

Так как корреляционная функция является четной, то ее нечетные производные в выражении (5.6) равны нулю, что позволяет записать

$$K_x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} K_x^{(2i)} \tau^{2i}. \quad (5.7)$$

Исходя из свойств корреляционной функции производной [25], выражение (5.7) можно привести к виду

$$K_x(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i D_i}{(2i)!} \tau^{2i}, \quad (5.8)$$

где  $D_i$  – дисперсия  $i$ -й производной воздействия.

Выражение (5.8) позволяет получить аппроксимацию корреляционных функций конечным числом членов данного ряда. Однако при этом необходимо учитывать выполнение условий сходимости, которые рассмотрены в специальной литературе, например [17].

Не вдаваясь в отдельные детали, следует отметить, что условия сходимости ряда (5.8) выполняются с запасом для большинства случайных воздействий, описываемых типовыми математическими моделями.

Производные воздействия могут быть получены путем последовательного дифференцирования сигнала воздействия. Для этого существуют дифференцирующие устройства и специальная аппаратура, которые позволяют отфильтровать шумы и помехи. Дисперсия  $i$ -й производной воздействия  $D_i$  определяется на основании полученной  $i$ -й производной исходного сигнала в соответствии с выражением (2.17).

В заключение необходимо отметить, что если в силу различных ситуаций (производственных, технических, экономических и др.) получение рассмотренных выше характеристик случайных воздействий оказывается затруднительным, то решение задач анализа и синтеза систем управления может быть осуществлено на еще более «грубом» уровне, т. е. с использованием более «грубых» обобщенных характеристик воздействий – дисперсий или максимальных значений производных. Основные методы синтеза робастных систем управления будут рассмотрены в разд. 6.

## **6. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

### **6.1. Основные положения**

Задача синтеза подразумевает создание некоторой системы, обладающей заданным набором свойств и признаков на базе имеющихся модулей, объектов, элементов. Набор требований к свойствам создаваемых систем управления различными объектами, технологическими процессами не является строго детерминированным и зависит от ряда производственных, технических, экономических и других факторов. Аналогично набор элементов, являющихся исходными данными для решения такой задачи, также зависит от конкретной ситуации и может изменяться в значительных пределах. Чаще всего такими «неварьируемыми» частями создаваемой системы являются сам объект управления или технологический процесс, несколько реже – исполнительные устройства и первичные преобразователи, установленные на объекте, и другие элементы. Достижение поставленных требований к свойствам системы в производственной практике обычно осуществляется за счет выбора структуры устройства управления, функций отдельных ее элементов, значительно реже – модернизации, изменения свойств объекта, технологического оборудования. Как правило, достижение поставленной цели может быть осуществлено различными вариантами решения такой задачи. Поэтому задача синтеза систем управления является вариационной задачей с отысканием некоторого оптимального варианта [24]. Рассмотрим основные требования к свойствам систем и критерии оптимизации, используемые при решении задач синтеза в инженерной практике, с учетом специфики пищевой промышленности.

### **6.2. Постановка задачи синтеза систем управления**

Одним из наиболее общих требований, предъявляемых к системе управления при решении задачи синтеза и, в частности, синтеза систем регулирования, является обеспечение устойчивости и запаса устойчивости. Запас устойчивости определяется по двум параметрам: 1) запасу устойчивости по фазе –  $\Delta\varphi$ ; 2) запасу устойчивости по амплитуде –  $\Delta L$ .

Если требования к этим параметрам специально не оговариваются, то в инженерной практике обычно используются следующие условия:

$$\begin{cases} \Delta L \geq 6 \text{ дБ}; \\ \Delta \varphi \geq 30^\circ. \end{cases} \quad (6.1)$$

Кроме того, зачастую выдвигаются требования к динамическим свойствам системы. Эти требования в основном формулируются в виде ограничений, налагаемых на такие показатели качества переходного процесса, как время переходного процесса –  $t_{\text{п}}$  и величина перерегулирования, или динамический заброс, –  $\sigma$

$$\begin{cases} t_{\text{п}} \leq t_{\text{доп}}; \\ \sigma \leq \sigma_{\text{доп}}, \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $t_{\text{доп}}$ ,  $\sigma_{\text{доп}}$  – предельно допустимые значения показателей, которые задаются в каждом конкретном случае исходя из производственной ситуации и специфики работы системы.

Другими важными требованиями, предъявляемыми к синтезируемой системе, являются требования по обеспечению точности работы в различных режимах. Точностные требования к системе в статическом режиме обычно задаются в виде ограничений на величину статической ошибки  $\varepsilon$

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{доп}}. \quad (6.3)$$

Точностные требования к системе в стационарном случайном режиме могут задаваться в виде требований к видам и свойствам различных статистических характеристик реакции системы на случайные воздействия. При этом подразумевается наличие априорной информации об этих воздействиях. В качестве точностных характеристик здесь могут использоваться значения максимальных  $\Delta$  или среднеквадратических  $\sigma_y$  ошибок и их производных, а также различные комплексные показатели. Так, например, требования по ограничению максимальной и среднеквадратической ошибок будут иметь вид соответственно

$$|\Delta| \leq \Delta_{\text{max}}; \quad (6.4)$$

$$\sigma_y^2 \leq \sigma_{y_{\max}}^2 . \quad (6.5)$$

Кроме вышерассмотренных требований при синтезе систем управления могут выдвигаться и другие, которые в отдельных случаях являются первостепенными, например:

1. *Требования к показателям надежности системы.* В качестве таких показателей обычно используются: среднее время безотказной работы (наработка на отказ), интенсивность отказов и др.

2. *Требования к массе и габаритам системы.* Следует отметить, что эта группа требований не является первостепенной для большинства производств пищевой промышленности. Однако она очень важна для систем, устанавливаемых на летательных аппаратах, подводных судах и др.

3. *Требования к виду потребляемой энергии и мощности.* В какой-то мере эта группа требований по своей актуальности и в частности для пищевой промышленности аналогична предыдущей. Однако могут иметь место существенные исключения. Так, например, производства, связанные с хранением и переработкой зерна, муки и другого органического сырья, являются потенциально взрыво- и пожароопасными из-за наличия на них органической пыли, возникающей в большом количестве при транспортировании и перегрузке указанной продукции. Поэтому на элеваторах, мукомольных и комбикормовых заводах на таких потенциально опасных участках производств предпочтение отдается пневматическим системам управления. Из этих же соображений на ряде предприятий химической промышленности, например на пороховых и пиротехнических производствах, вообще запрещено использование электроавтоматики.

4. *Эксплуатационные требования.* К этой группе относятся требования: к условиям эксплуатации систем, например, по параметрам влажности, давления окружающей среды, уровням вибрации и др.; к условиям сложности проведения обслуживания, ремонта; к квалификации обслуживающего персонала и др.

Приведенный перечень требований, очевидно, не является исчерпывающим и может быть пополнен. Следует также при решении задачи синтеза системы учитывать, что отдельные требования могут противоречить друг другу, что обуславливает необходимость поиска компромисса.

Кроме требований или ограничений, предъявляемых к различным параметрам системы в виде, например, условий типа (6.1)–(6.5), для синтеза систем зачастую необходимо также задаться критерием оптимальности или целевой функцией. В общем случае критерий оптимальности  $L$  задается интегральным функционалом вида

$$L = \int_0^{t_p} \Phi(\bar{X}, \bar{Y}) dt, \quad (6.6)$$

где  $t_p$  – время функционирования или работы системы;  $\bar{X}$  – вектор входных координат системы;  $\bar{Y}$  – вектор выходных координат системы.

Выбор функции  $\Phi(\bar{X}, \bar{Y})$  осуществляется разработчиком в зависимости от конкретных условий и требований производства и обуславливает тип системы управления.

В частности, когда  $\Phi(\bar{X}, \bar{Y}) = 1$ , исходный функционал (6.6) принимает вид

$$L = \int_0^{t_p} dt = t_p. \quad (6.7)$$

Осуществляя минимизацию этого функционала, т. е. налагая условие

$$L = t_p \rightarrow \min, \quad (6.8)$$

получаем оптимальную по быстродействию систему, т. е. обеспечивающую минимальное время управления.

Если функция  $\Phi(\bar{X}, \bar{Y})$  содержит только выходную координату объекта, то критерий оптимальности может быть трансформирован в соответствующий интегральный критерий качества переходного процесса, используя который можно оптимизировать динамические свойства системы. Так, например, минимизируя интегральный критерий качества переходного процесса вида

$$L = \int_0^{t_p} \left[ \Delta_y^2(t) + c \left( \frac{d\Delta y(t)}{dt} \right)^2 \right] dt, \quad (6.9)$$

удается получить вариант системы с ограниченной длительностью и колебательностью или степенью «турбулентности» переходного

процесса. В выражении (6.9)  $\Delta y(t) = y(\infty) - y(t)$  – текущее отклонение выходной величины объекта от установившегося значения  $y(\infty)$ , а  $c$  – весовой коэффициент, характеризующий значимость, относительный «вес» степени «турбулентности» переходного процесса в общей оценке его качества. Варьируя величиной  $c$  в процессе решения задачи синтеза, можно получить систему с различными динамическими характеристиками.

Кроме того, варьируя выражением  $\Phi(\bar{X}, \bar{Y})$  и размерностью переменных  $x$  и  $y$ , можно получить критерий оптимизации, позволяющий синтезировать варианты систем управления, оптимизирующих качество продукции, минимизирующих энергопотребление и др. Наиболее общим вариантом критерия оптимальности, позволяющим учитывать многообразие различных требований к свойствам синтезируемой системы, является аддитивный интегральный функционал от квадратичных форм по рассматриваемым координатам и параметрам систем, например, вида

$$L = \int_0^{t_p} \left[ \sum_{(i)} c_i \{x_{i0} - x_i(t)\}^2 + \sum_{(j)} c_j \{y_{j0} - y_j(t)\}^2 \right] dt, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad (6.10)$$

где  $c_i, c_j$  – весовые коэффициенты, характеризующие значимость, относительный «вес»  $i$ -й координаты или  $j$ -го параметра синтезируемой системы.

Достоинством такого варианта критерия оптимальности является то, что с его использованием возможно отыскание компромисса при наличии противоречивых требований к синтезируемой системе. Варьируя величинами  $c_i$  и  $c_j$  можно описать приоритет каждого требования, а с помощью набора реперных значений параметров  $x_{i0}$  и  $y_{j0}$  ( $i \in I, j \in J$ ) задать некий «идеал», к которому необходимо приблизиться в процессе синтеза. Очевидно, что при такой постановке вопроса процедура оптимизации сведется к отысканию минимального значения функционала  $L$ . Существуют и другие варианты критерия оптимальности.

Для оптимизации процесса управления при наличии случайных воздействий могут использоваться так называемые вероятностные критерии оптимальности. В этом случае осуществляется синтез системы управления, обеспечивающей, например, минимум вероятности наступления каких-либо нежелательных событий или



ситуаций. В качестве таких событий могут рассматриваться различные промахи при управлении летательными аппаратами или недопустимые отклонения от цели, потери сигналов и др. Применительно к пищевой промышленности вероятностные критерии оптимальности используются для управления материальными транспортными потоками, работой складов, экспедиций. В этих случаях, например, управление потоками продукции, поступающей на склад или отгружаемой со склада, осуществляется таким образом, чтобы минимизировать вероятность попадания заявки на загрузку или выгрузку партии продукции в очередь или минимизировать вероятность среднего времени ожидания в очереди такой заявки на обслуживание, тем самым уменьшить потери от простоя транспортных средств. Однако для организации управления технологическими процессами и объектами пищевой промышленности такие критерии широкого распространения не получили.

В реальных условиях многообразие требований, предъявляемых к системе управления с учетом их специфики и разнообразия, зачастую не позволяет осуществить строгую математическую формулировку критерия оптимальности для синтезируемой системы. Вследствие этого не представляется возможным аналитическое решение задачи синтеза классическими математическими методами. Поэтому на практике для решения таких задач используют итеративную процедуру, где на каждом цикле итерации осуществляется частичный синтез системы, направленный на выполнение отдельных исходных требований, начиная при этом с важнейших, первостепенных. Если существует набор таких первостепенных требований, то, реализуя итеративную процедуру синтеза, начиная с каждого требования отдельно, можно получить несколько вариантов системы. После этого в результате сравнительного анализа выбирают наиболее приемлемый вариант.

Применительно к рассматриваемому классу систем, работающих при наличии стационарных случайных воздействий, первостепенным является обеспечение требуемой точности, например, в виде условий (6.4) и (6.5). Следует отметить, что условие (6.5) является более удобным для описания точностных характеристик при наличии неполной априорной информации о свойствах системы, так как позволяет оценить доверительный интервал отклонения (ошибки) по заданной доверительной

вероятности или для заданной величины отклонения оценить вероятность появления такого события. Более точная оценка величин доверительного интервала или доверительной вероятности может быть получена при наличии информации о виде закона распределения выходной величины. Однако даже при отсутствии такой информации, исходя из предположения, что закон распределения выходной величины является нормальным, получим мажорантные, завышенные в энтропийном смысле значения оценок этих величин. Таким образом, на практике основным требованием при синтезе систем, работающих при наличии случайных воздействий, является ограничение дисперсии выходной величины.

### 6.3. Синтез систем управления при наличии случайных воздействий

В общем случае считаем, что система управления находится под действием случайного воздействия (помехи, возмущения)  $f$  и задающего воздействия  $x_3$  (рис. 6.1).

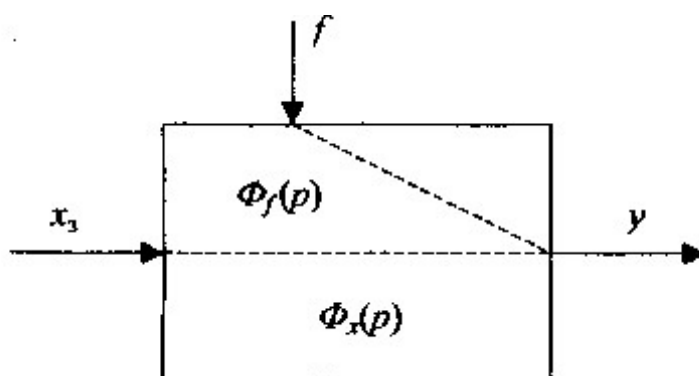


Рис. 6.1. Схема системы управления при наличии случайных воздействий

На приведенном рисунке  $\Phi_f(p)$  – передаточная функция замкнутой системы для случайного воздействия;  $\Phi_x(p)$  – передаточная функция замкнутой системы для задающего воздействия. Также считаем, что характеристики воздействий – корреляционные функции или спектральные плотности – известны. Как правило, эти характеристики определяются одним из методов, рассмотренных в разд. 5, на предварительных этапах. Тогда, используя выражение (3.13), можно получить выражение для

спектральной плотности центрированной выходной величины  $y$  для случая взаимно независимых воздействий в виде

$$S_y(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + |\Phi_x(j\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (6.11)$$

Для достаточно редкого на практике случая, когда воздействия  $x$  и  $f$  коррелированы, выражение для спектральной плотности  $S_y(\omega)$  будет иметь вид [4]

$$S_y(\omega) = |\Phi_f(j\omega)|^2 S_f(\omega) + |\Phi_x(j\omega)|^2 S_x(\omega) + \\ + \Phi_f(j\omega)\Phi_x(-j\omega)S_{xf}(\omega) + \Phi_x(j\omega)\Phi_f(-j\omega)S_{fx}(\omega), \quad (6.12)$$

где  $S_{xf}(\omega)$ ,  $S_{fx}(\omega)$  – взаимные спектральные плотности задающего воздействия и помехи.

Используя выражение для спектральной плотности выходной величины, определяем дисперсию выходной величины системы согласно (3.7) для каждого из конкретных вариантов

$$D_y = \sigma_y^2 = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (6.13)$$

Задача синтеза системы в данном случае сводится к коррекции свойств системы, при которой выполняется условие

$$D_y \leq D_{y \text{ доп}}, \quad (6.14)$$

где  $D_{y \text{ доп}}$  – предельно допустимое значение дисперсии.

Коррекция свойств системы в конечном счете может быть достигнута как путем изменения структуры системы управления или введения в контур системы дополнительных или корректирующих звеньев, так и путем изменения параметров, настроек отдельных звеньев исходной системы. Очевидно, что в результате любого вида коррекции будет осуществлено целенаправленное изменение частотной характеристики или связанной с ней передаточной функции системы. Теперь можно сформулировать следующие варианты постановки задачи синтеза системы управления.

Одним частным, но довольно часто встречающимся вариантом является задача синтеза системы управления с жестко заданной структурой, однако имеется возможность варьирования параметрами

отдельных элементов, звеньев. На производстве в качестве таких звеньев обычно используются регуляторы, с помощью которых решаются задачи регулирования конкретных технологических параметров. С учетом этого обстоятельства данная частная задача синтеза сводится к определению настроек регулятора, обеспечивающих выполнение условия (6.14) при наличии стационарных случайных воздействий. Количество таких настроек зависит от типа закона регулирования. Так, например, при использовании пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) закона регулирования соответствующая передаточная функция регулятора будет иметь вид

$$W(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad (6.15)$$

где  $k_p$  – коэффициент передачи;  $T_i$  – постоянная интегрирования;  $T_d$  – время предварения.

Указанные три параметра являются настройками регулятора. В более общем случае варьируемые параметры могут быть и в других звеньях системы. Так, например, при установке датчика температуры на объекте в защитной гильзе в зависимости от вида ее наполнителя (минеральное масло, различные металлические опилки и др.) будет изменяться соответствующая постоянная времени или существуют возможности проведения штатной или несложной нештатной модернизации, переналадки объекта или другого технологического оборудования, позволяющие изменять их параметры. Для аналитического решения такой частной задачи синтеза системы на основании информации о характеристиках случайных воздействий и структуры системы с использованием выражений (6.11)–(6.13) устанавливается зависимость дисперсии выходной величины от варьируемых настроечных параметров системы  $A_i$ , например, в виде

$$D_y = F(A_i), \quad i \in I. \quad (6.16)$$

Тогда значения варьируемых параметров  $A_i$ , минимизирующих дисперсию выходной величины, находятся из условия равенства нулю частных производных (условия нахождения экстремума функции  $F$ )

$$\frac{\partial F(A_i)}{\partial A_i} = 0, i \in I. \quad (6.17)$$

Решая систему уравнений (6.17), определяют искомые значения параметров  $A_i$ . Если зависимость (6.16) не удастся получить в явном виде, или, например, она в силу громоздкости и сложности системы аппроксимируется набором различных зависимостей для отдельных диапазонов измерения переменных, то для нахождения минимума дисперсии  $D_y$  используются различные итеративные методы поиска экстремума функций. Среди множества таких методов можно выделить следующие, получившие широкое распространение в инженерной практике: метод градиента, метод наискорейшего спуска, метод Гаусса–Зейделя, метод случайного поиска и др. Для эффективного использования этих методов на практике разработаны пакеты прикладных программ для ЭВМ, которые получили широкое распространение и являются доступными широкому кругу пользователей. И, наконец, в лабораторных или производственных условиях при наличии пилотной установки или при возможности проведения экспериментов на работающей системе, отыскание оптимальных значений варьируемых параметров системы управления в реально-возможных ограниченных диапазонах варьирования может быть осуществлено методами пассивного и особенно активного экспериментов. При проведении пассивного эксперимента оптимальные значения настроечных варьируемых параметров  $A_i$  синтезируемой системы определяются в результате длительного наблюдения за поведением работающей системы при различных вариантах настройки этих параметров. Затем на основании полученной информации создается математическая модель зависимости вида (6.16) для получения экстремального решения или в простейшем случае – из имеющихся вариантов выбирается лучший, обеспечивающий минимальное значение величины  $D_y$ . Очевидно, что точность получаемого решения, степень его приближения к искомой точке экстремума будет зависеть от количества апробированных вариантов настроек и, в конечном счете, от длительности эксперимента. Наоборот, при проведении активного эксперимента поиск оптимального решения – значений настроечных параметров – осуществляется в результате пошагового,

целенаправленного изменения этих параметров с последующим анализом результатов изменения величины  $D_y$ , после чего разрабатывается последующая стратегия изменения параметров и так далее, пока не будет найдено решение. Для проведения активного эксперимента предварительно разрабатывается его план, в котором с учетом специфики задачи описываются порядок выполнения шагов, степень дробления параметров и др. Использование методов активного эксперимента позволяет быстрее и эффективнее решать поставленную задачу. Однако в условиях массового производства при использовании высокопроизводительного оборудования такая активная переналадка параметров системы управления, особенно на начальной стадии эксперимента, чревата появлением больших партий брака, ограничивающих применение этого метода на производстве. Подробно методики планирования эксперимента рассмотрены в специальной литературе [26].

Другой вариант формулировки задачи синтеза системы управления обусловлен ситуацией, когда возможности конструирования позволяют варьировать не только параметрами настройки отдельных блоков, но и изменять структуру системы, в частности, за счет введения в контур системы специальных корректирующих звеньев. В этом варианте решение задачи осуществляется через отыскание оптимальной передаточной функции системы, минимизирующей величину дисперсии  $D_y$  с последующим определением ее структуры и вариантов реализации отдельных блоков и звеньев коррекции. Общий план решения такой задачи с использованием частотных характеристик состоит из следующих основных этапов [14]:

1) определяются структура и состав неизменяемой или неварьируемой части системы исходя из конкретных условий (технических, производственных и др.);

2) определяется частотная характеристика этой неварьируемой части системы;

3) по известным характеристикам воздействий с помощью выражений (6.11)–(6.13) определяется значение дисперсии выходной величины системы  $D_y$ ;

4) определяются частотная характеристика варьируемой части системы, обеспечивающая выполнение условия (6.14), и соответствующая ей передаточная функция;

5) выбирается вариант структуры и набора технических средств для практической реализации, определенной в п. 4 передаточной функции.

Здесь следует отметить, что одна и та же передаточная функция может быть получена на аппаратном уровне различными вариантами реализации варьируемой части системы. Так, например, желаемая коррекция свойств системы может быть достигнута как путем последовательного включения в контур системы специальных корректирующих звеньев, так и за счет введения локальных корректирующих обратных связей для отдельных элементов системы или за счет использования параллельных корректирующих звеньев. Причем в зависимости от конкретной ситуации каждый из таких вариантов может иметь свои преимущества. Возможность эквивалентности различных вариантов структур коррекции можно проиллюстрировать на примере сравнения параллельной коррекции и коррекции с помощью отрицательной обратной связи, схемы которых приведены на рис. 6.2. На рисунке приняты следующие обозначения:  $W_0(p)$  – передаточная функция корректируемого объекта;  $W_{к.п}(p)$  – передаточная функция параллельного корректирующего звена;  $W_{к.о.с}(p)$  – передаточная функция корректирующего звена в цепи обратной связи.

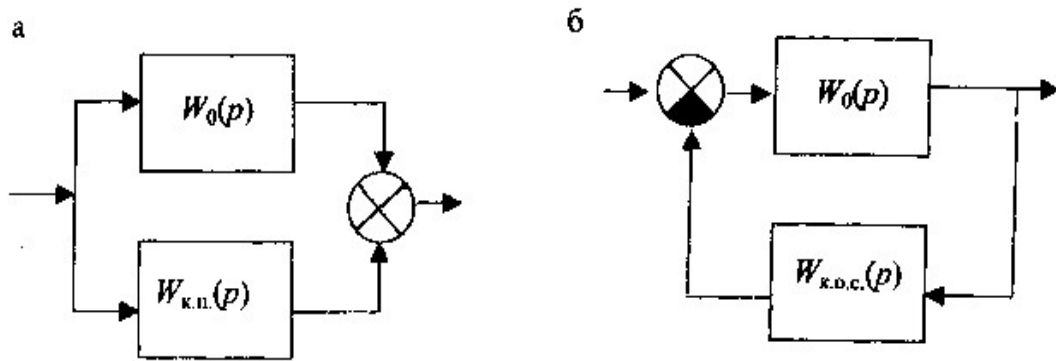


Рис. 6.2. Схемы различных вариантов коррекции:  
 а – параллельное включение корректирующего звена; б – коррекция с помощью отрицательной обратной связи

Для установления условий эквивалентности обоих вариантов коррекции приравняем соответствующие передаточные функции скорректированных систем

$$W_0(p) + W_{к.п.}(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_{к.о.с.}(p)}, \quad (6.18)$$

Последовательно решая уравнение (6.18) относительно  $W_{к.п.}(p)$  и  $W_{к.о.с.}(p)$ , получаем условия эквивалентности обоих вариантов коррекции относительно друг друга

$$W_{к.п.}(p) = -\frac{W_0^2(p)W_{к.о.с.}(p)}{1 + W_0(p)W_{к.о.с.}(p)}, \quad (6.19)$$

$$W_{к.о.с.}(p) = -\frac{W_{к.п.}(p)}{W_0^2(p) + W_0(p)W_{к.п.}(p)}. \quad (6.20)$$

Выражения (6.19) и (6.20) позволяют выразить передаточную функцию корректирующих звеньев каждого варианта коррекции (см. рис. 6.2, а или б) через другой, обеспечивающих при этом эквивалентность динамических свойств системы. Аналогично можно вывести условия эквивалентности и для других вариантов коррекции.

Анализируя этапы решения задачи синтеза системы с варьируемой структурой, приходим к выводу, что определение частотной характеристики и соответствующей ей передаточной



функции варьируемой части системы может быть осуществлено различными вариантами. При этом отправным моментом такого решения является понятие оптимальной передаточной функции системы, обеспечивающей минимум дисперсии выходной величины  $D_y$ . Проиллюстрируем состоятельность такого понятия. Используя правила структурных преобразований, возмущение  $f$  (см. рис. 6.1) перенесем на вход системы, т. е. в точку приложения задающего воздействия  $x_3$ . Тогда с учетом некоррелированности воздействий  $x$  и  $f$  можем считать

$$D_y = D_{y(x)} + D_{y(f)}, \quad (6.21)$$

где  $D_{y(x)}$ ,  $D_{y(f)}$  – дисперсии выходной величины, обусловленные наличием соответствующих воздействий.

Очевидно, что величины  $D_{y(x)}$  и  $D_{y(f)}$  зависят от вида частотной характеристики системы, а более точно – от ширины полосы пропускания –  $\omega_p$ . Величина  $D_x$  уменьшается с увеличением  $\omega_p$ , так как при этом уменьшается искажение сигнала  $x_3$  при его прохождении через систему, т. е. уменьшается динамическая ошибка. Величина  $D_f$ , наоборот, возрастает с увеличением  $\omega_p$ , так как при этом ослабляется подавление этого возмущения или улучшаются условия его прохождения через систему. Качественный вид зависимостей  $D_{y(x)}$  и  $D_{y(f)}$  от ширины полосы пропускания  $\omega_p$  приведен на рис. 6.3. Там же приведен качественный вид зависимости  $D_y$  от  $\omega_p$  в соответствии с выражением (6.21).

Как видно из графиков на рис. 6.3, существует некоторое оптимальное значение ширины полосы пропускания системы  $\omega_{p\text{opt}}$ , обеспечивающее минимум дисперсии выходной величины  $D_y$ . Из приведенных рассуждений и иллюстраций также следует вывод о том, что если случайные воздействия, действующие на систему, являются односторонними (помехи или задающие воздействия), то путем целенаправленной коррекции частотной характеристики или передаточной функции системы можно обеспечить любое сколь угодно малое значение величины  $D_y$ . Приведенные рассуждения, иллюстрации

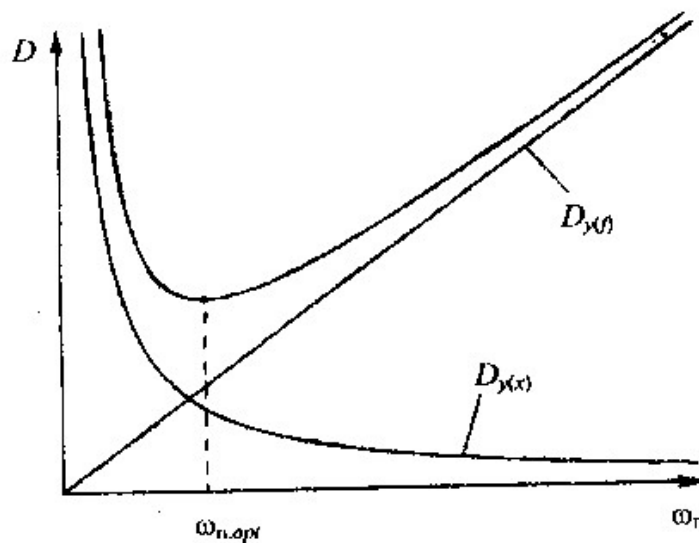


Рис. 6.3. Качественный вид зависимостей дисперсий  $D_{y(x)}$ ,  $D_{y(f)}$  и  $D_y$  от ширины полосы пропускания системы

и выводы вытекают из выражений (6.11)–(6.13) и могут быть доказаны математически строго даже при наличии взаимной корреляции между воздействиями  $f$  и  $x_3$ . Из приведенных рассуждений также следует, что задача отыскания оптимальной передаточной функции системы  $\Phi(p)_{opt}$  является вариационной задачей. Решение этой задачи в классическом варианте было предложено Н. Винером, который доказал, что искомое решение должно удовлетворять так называемому уравнению Винера–Хопфа. В результате этого решения было определено выражение для оптимальной комплексной передаточной функции системы, обеспечивающей минимум дисперсии, в виде

$$\Phi_{opt}(j\omega) = \frac{1}{2\pi\psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_0^{\infty} \frac{S_{x(x_3+f)}(\omega)}{\psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.22)$$

где  $\psi(j\omega)$  определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \psi(j\omega)\psi(-j\omega) &= |\psi(j\omega)|^2 = S_{(x_3+f)}(\omega) = S_{x_3}(\omega) + S_f(\omega) + S_{x_3f}(\omega) + S_{fx_3}(\omega); \\ S_{x(x_3+f)}(\omega) &= S_{xx_3}(\omega) + S_{xf}(\omega). \end{aligned}$$

Вывод выражения (6.22) приведен, например, в работах [5, 11, 14]. В технической литературе выражение для оптимальной передаточной функции  $\Phi(p)_{opt}$  называется оптимальным фильтром Винера, а исходная задача синтеза системы в рассмотренном варианте называется задачей винеровской фильтрации.

Полученное решение (6.22) может быть пролонгировано и для многомерной задачи, когда в качестве возмущений и задающих воздействий рассматриваются векторы  $\vec{f}$  и  $\vec{x}_3$  соответствующей размерности.

Упрощение выражения (6.22) возможно для различных частных случаев. Например, в случае следящей системы, когда  $y = x_3$  (слежение за входным воздействием) имеем

$$S_{x(x_3+f)}(\omega) = S_x(\omega) + S_{xf}(\omega). \quad (6.23)$$

В случае отсутствия корреляции между  $x$  и  $f$ , т. е.  $S_{xf}(\omega) = 0$ , выражение (6.23) еще более упрощается до вида

$$S_{x(x+f)}(\omega) = S_x(\omega). \quad (6.24)$$

В заключение данного подраздела необходимо отметить, что полученные теоретические решения по оптимизации передаточной функции системы не всегда реализуются на практике. Во-первых, их реализация зачастую ограничивается экономическими или техническими факторами, обусловленными сложностью изготовления отдельных корректирующих звеньев. Во-вторых, при решении задачи синтеза системы разработчикам приходится учитывать и другие требования к ее свойствам, которые частично изложены в подразд. 6.2. Необходимость удовлетворения всем этим требованиям может значительно «деформировать» «идеальный» винеровский фильтр вследствие его адаптации ко множеству исходных требований, зачастую противоречивых. Поэтому на практике целесообразнее использовать понятие квазиоптимальной системы как результат творческого компромисса разработчика, конструктора систем между всем множеством требований, предъявляемых к системам управления в современных производственных условиях.

#### 6.4. Синтез робастных систем управления при наличии ограниченной информации о случайных воздействиях

Рассмотренные в предыдущем подразделе методы синтеза оптимальных систем основаны на предположении о наличии характеристик случайных воздействий – спектральных плотностей или корреляционных функций. Однако в реальной ситуации получение такой информации для конструктора-разработчика может оказаться весьма проблематично. Особенно, как это было показано в подразд. 5.2, такая ситуация характерна для многих производств пищевой промышленности. Поэтому зачастую синтез систем приходится осуществлять при наличии ограниченной информации о воздействиях, что приводит к получению более «грубых» результатов. При этом информация о воздействиях может быть получена в виде более простых и доступных характеристик – дисперсий воздействия и некоторых его производных. Конечной задачей синтеза, как и в предыдущих случаях, является обеспечение требуемой точности работы системы обычно в виде условия (6.14).

Очевидно, что в идеальном случае, когда имеется вся необходимая информация о случайных воздействиях, задача синтеза системы в области частотных характеристик сводится к определению оптимальной полосы пропускания системы  $\omega_{п\ opt}$  (см. рис. 6.3), обеспечивающей минимум величины  $D_y$ . При наличии же ограниченной информации происходит естественное «огрубление» решения, вследствие чего точка  $\omega_{п\ opt}$  как бы «размывается» в некоторый допустимый диапазон  $\omega_{п\ min} \div \omega_{п\ max}$ . Причем нижняя граница этого диапазона  $\omega_{п\ min}$  определяется требованиями по ограничению величины дисперсии погрешности изменения выходной величины  $D_{y(x)}$  в соответствии с изменением задания  $x_z$ , а верхняя граница диапазона  $\omega_{п\ max}$  определяется требованиями по ограничению дисперсии погрешности изменения выходной величины  $D_{y(f)}$  под действием возмущения  $f$ . В случае, когда нескорректированная система имеет относительно «узкую» полосу пропускания, величина  $D_{y(x)}$  будет превалировать в общей дисперсии выходной величины  $D_y$ , что наглядно проиллюстрировано на рис. 6.3. Поэтому при синтезе таких систем основное внимание следует уделять ограничению величины  $D_{y(x)}$ . Данная ситуация особенно характерна для систем управления различными инерционными

объектами как, например, в пищевой, химической и других отраслях промышленности. Действительно, многие из упомянутых в разд. 1 объектов, например различные печи, пароварочные камеры, камеры для замораживания и дефростации различного пищевого сырья и продуктов, пастеризационно-охладительные установки, автоклавы, ректификационные колонны и многие другие объекты характеризуются весьма значительными величинами постоянных времени, достигающих десятков и более минут, что и обуславливает существенное ограничение полосы пропускания системы.

В настоящее время в инженерной практике наибольшее распространение получили методы синтеза систем по частотным характеристикам разомкнутой системы – ЛАХ. Поэтому из практических соображений формулирование требований к свойствам создаваемой или желаемой системы управления удобнее осуществлять в виде набора ограничений к этой характеристике и, в частности в виде задания запретных областей. В свете такой терминологии требование на ограничение величины  $D_{y(x)}$  сведется к заданию запретной области очевидно в диапазоне низких частот, в которую не должна попадать ЛАХ желаемой системы. Соответственно, требование на ограничение  $D_{y(x)}$  сведется к заданию другой запретной области, расположенной в диапазоне более высоких частот. Помимо упомянутых запретных областей при синтезе системы могут задаваться и другие запретные области, соответствующие различным режимам работы и требованиям к свойствам системы. Окончательно запретная область для ЛАХ в этих случаях может быть получена либо в результате отыскания компромисса между отдельными требованиями к свойствам системы, либо в результате наложения отдельных областей, если это позволяет удовлетворить все исходные требования задачи.

Рассмотрим методики построения запретных областей для ЛАХ исходя из требований ограничения величины  $D_{y(x)}$  для различных вариантов наличия ограниченной информации о динамике изменений задающего воздействия  $x_3$ .

В замкнутой системе автоматического регулирования (САР), задачей которой является отслеживание величины  $x_3(t)$ , ошибка слежения  $\Delta(t) = x_3(t) - y(t)$ , используя метрологическую терминологию, является динамической ошибкой системы. При этом такая динамическая ошибка определяется из выражения

$$\Delta(t) = \frac{1}{1+W(p)} x_3(t), \quad (6.25)$$

где  $W(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы.  
Выражение

$$\frac{1}{1+W(p)} = W_{\Delta}(p) \quad (6.26)$$

также называют передаточной функцией по ошибке.

С учетом этих обозначений выражение для дисперсии динамической ошибки примет вид

$$D_{\Delta} = \int_0^{\infty} |W_{\Delta}(j\omega)|^2 S_{x_3}(\omega) d\omega \quad (6.27)$$

Для получения мажорантной оценки величины  $D_{\Delta}$  осуществим аппроксимацию выражения  $|W_{\Delta}(j\omega)|^2$  полиномом  $N$ -й степени вида

$$C_{N(\omega)} = C_0 + C_1\omega^2 + \dots + C_N\omega^{2N} \quad (6.28)$$

и удовлетворяющего требованию

$$C_{N(\omega)} \geq |W_{\Delta}(j\omega)|^2, \quad 0 \leq \omega < \infty \quad (6.29)$$

Выполнение условия (6.29) возможно всегда обеспечить путем подбора коэффициентов полинома  $C_N(\omega)$ , так как из определения функции  $W_{\Delta}(p)$  следует, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_{\Delta}(j\omega)|^2 = 1. \quad (6.30)$$

Очевидно, что коэффициенты  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) должны быть вещественными числами и, кроме того, исходя из свойств модуля передаточной функции ( $|W(j\omega)| \geq 0$ ) в отношении коэффициента  $C_0$  должно выполняться условие  $C_0 \geq 0$ . Здесь следует отметить, что вопросы аппроксимации функций вещественной переменной различными полиномами достаточно хорошо проработаны в математике и имеются различные методы определения коэффициентов  $C_i$  ( $i \in I$ ) [4]. Используя аппроксимирующий полином (6.28) для выражения (6.27) и с учетом (6.29) можно записать

$$D_{\Delta} = \int_0^{\infty} |W_{\Delta}(j\omega)|^2 S_{x_3}(\omega) d\omega \leq \int_0^{\infty} (C_0 + C_1\omega^2 + \dots + C_N\omega^{2N}) S_{x_3}(\omega) d\omega = \\ = C_0 D_0 + C_1 D_1 + \dots + C_N D_N, \quad (6.31)$$

где  $D_0, D_1, \dots, D_N$  – дисперсии задающего воздействия и его производных.

Теперь при наличии информации о дисперсиях воздействия и его производных и предельной величине дисперсии динамической ошибки  $D_{\Delta\max}$  можно определить тип передаточных функций путем задания запретных областей для ЛАХ, обеспечивающих выполнение условия (6.31). Рассмотрим методику решения такой задачи. Умножим числитель и знаменатель левой части выражения (6.26) на  $W(p)$  и в результате получим

$$W_{\Delta}(p) = \frac{W(p)}{[1+W(p)]W(p)} = \frac{\Phi(p)}{W(p)}, \quad (6.32)$$

где  $\Phi(p)$  – передаточная функция замкнутой системы по выходной величине,  $\Phi(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}$ .

Из условий (6.27), (6.29) и (6.31) можно сформулировать требования к передаточной функции замкнутой системы по ошибке, обеспечивающие выполнение условий по ограничению величины  $D_{\Delta}$ , которые в общем виде в комплексном выражении можно записать как

$$|W_{\Delta}(j\omega)| \leq |W_{\Delta}(j\omega\bar{C}, \bar{D})|, \quad (6.33)$$

где  $\bar{C}$  – вектор коэффициентов полинома (6.28);  $\bar{D}$  – вектор известных величин дисперсий задающего воздействия и его производных.

С учетом выражений (6.32) и (6.33) требования к передаточной функции разомкнутой системы, обеспечивающей требуемое ограничение дисперсии динамической ошибки в комплексном выражении, можно записать в виде неравенства

$$|W(j\omega)| \geq \frac{|\Phi(j\omega)|}{|W_{\Delta}(j\omega\bar{C}, \bar{D})|}. \quad (6.34)$$

При синтезе систем по частотным характеристикам весь частотный диапазон разбивают на три области: 1) низкочастотную; 2) среднечастотную; 3) высокочастотную. Известно, что точностные характеристики системы определяются поведением ЛАХ разомкнутой системы в области низких и частично средних частот, т. е. в диапазоне частот, лежащих левее частоты среза (напомним, что  $L(\omega_{cp})=0$ ). «Поведение» ЛАХ в области высоких частот (правее частоты среза) на точность работы системы влияния не оказывает. В данном случае это утверждение можно проиллюстрировать с помощью выражения (6.34). Действительно, при  $\omega \rightarrow \infty |W(j\omega)| \rightarrow 0$ , что справедливо для любой инерционной системы и, следовательно,  $|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| \approx |W(j\omega)|$ . Поэтому с учетом выражения (6.33) неравенство (6.34) выполняется всегда в области высоких частот и, естественно, не зависит от вида ЛАХ разомкнутой системы в этой области.

В области низких частот ( $\omega \leq \omega_{cp}$ )  $|\Phi(j\omega)| \approx 1$ , и неравенство (6.34) аппроксимируется к виду

$$|W(j\omega)| \geq \frac{1}{|W_{\Delta}(j\omega, \bar{C}, \bar{D})|}. \quad (6.35)$$

Основная неопределенность аппроксимации неравенства (6.34) может иметь место в области средних частот, т. е. в окрестности  $\omega_{cp}$ . Это обусловлено тем, что в этой области возможен так называемый «всплеск» АЧХ замкнутой системы, вызванный наличием резонансных свойств системы. Поэтому наибольшая погрешность асимптотической аппроксимации ЛАХ имеет место именно в области средних частот. Если резонансная частота системы  $\omega_p$  известна, то исходное требование (6.34) к передаточной функции разомкнутой системы в области средних частот, очевидно, трансформируется к виду

$$|W(j\omega_p)| \geq \frac{M}{|W_{\Delta}(j\omega_p, \bar{C}, \bar{D})|}, \quad (6.36)$$



где  $M$  – показатель колебательности системы,  $M = \frac{A(\omega_p)}{A(0)}$ ; (здесь  $A(\omega) = |\Phi(j\omega)|$ ,  $A(0) = |\Phi(j0)|$  – значения соответствующих амплитуд).

Величина  $M$  может задаваться в качестве одной из исходных данных при синтезе системы. Однако даже при наличии «колебательности» в процессе синтеза системы это явление в большинстве случаев стараются предельно нивелировать (если не удается исключить его полностью), стремясь по возможности к получению апериодического переходного процесса, так как увеличение колебательности приближает систему к границе устойчивости. Кроме того, существует множество объектов управления, особенно в пищевой промышленности, где из технологических требований, условий получения требуемого качества продукции, «колебательность» является недопустимой. Поэтому для проведения инженерных расчетов неравенство (6.35) достаточно объективно описывает требования к передаточной функции разомкнутой системы, обеспечивающей ограничение дисперсии динамической ошибки. Условие (6.35) можно проиллюстрировать в виде запретной области для ЛАХ разомкнутой системы. Граница этой области очевидно задается линией

$$L = 20 \lg \frac{1}{|W_{\Delta}(j\omega \bar{C}, \bar{D})|} = -20 \lg |W(j\omega \bar{C}, \bar{D})|. \quad (6.37)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Известна только дисперсия задающего воздействия  $D_0$ . Тогда для заданной величины  $D_{\Delta \max}$  согласно выражению (6.31) можно записать  $D_{\Delta \max} = C_0 D_0$  и, следовательно,  $C_0 = \frac{D_{\Delta \max}}{D_0}$  является единственным коэффициентом полинома (6.28). Согласно (6.29) имеем

$$|W_{\Delta}(j\omega)|^2 \leq C_0 \quad \text{или} \quad |W_{\Delta}(j\omega)| \leq \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_0}}. \quad (6.38)$$

Теперь согласно выражению (6.37) определим границу запретной области для ЛАХ

$$L = -20 \lg \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_0}} = 10 \lg \frac{D_0}{D_{\Delta \max}}. \quad (6.39)$$

Следовательно, в данном случае ЛАХ разомкнутой системы должна располагаться выше линии  $10 \lg \frac{D_0}{D_{\Delta \max}}$  во всем диапазоне частот, соответствующих спектральному составу задающего воздействия. Запретная область изображена штриховой линией на рис. 6.4, а.

2. Известна только дисперсия первой производной задающего воздействия  $D_1$ . В этом случае можно записать  $D_{\Delta \max} = C_1 D_1$  и, следовательно,  $C_1 = \frac{D_{\Delta \max}}{D_1}$  является единственным коэффициентом полинома (6.28).

Согласно выражению (6.29) имеем

$$|W_{\Delta}(j\omega)|^2 \leq C_1 \omega^2 \quad \text{или} \quad |W_{\Delta}(j\omega)| \leq \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_1}} \omega \quad (6.40)$$

Теперь согласно формуле (6.37) определяем границу запретной области ЛАХ

$$L = -20 \lg \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_1}} \omega = 10 \lg \frac{D_1}{D_{\Delta \max}} - 20 \lg \omega \quad (6.41)$$

Как видно из выражения (6.41), граница запретной области для ЛАХ представляет собой прямую, в логарифмическом масштабе имеющую наклон  $-20$  дБ/дек и пересекающую ось  $L$  (при  $\omega = 1$   $\lg \omega = 0$ ) в точке  $10 \lg \frac{D_1}{D_{\Delta \max}}$ . При  $\omega = \sqrt{\frac{D_1}{D_{\Delta \max}}}$  прямая пересекает ось  $\lg \omega$  ( $L = 0$ ). Запретная область изображена штриховой линией на рис. 6.4, б).

3. Известна только дисперсия второй производной задающего воздействия  $-D_2$ . Рассуждая аналогично изложенному в предыдущем примере, можем записать  $D_{\Delta \max} = C_2 D_2$  и, следовательно,  $C_2 = \frac{D_{\Delta \max}}{D_2}$ . Далее имеем

$$|W_{\Delta}(j\omega)|^2 \leq C_2 \omega^4 \quad \text{или} \quad |W_{\Delta}(j\omega)| \leq \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_2}} \omega^2. \quad (6.42)$$

Уравнение границы запретной области будет иметь вид

$$L = -20 \lg \sqrt{\frac{D_{\Delta \max}}{D_2}} \omega^2 = 10 \lg \frac{D_2}{D_{\Delta \max}} - 40 \lg \omega \quad (6.43)$$

Очевидно, что граница запретной области представляет собой прямую, имеющую наклон  $-40$  дБ/дек и пересекающую ось  $L$  в точке  $10 \lg \frac{D_2}{D_{\Delta \max}}$ . При  $\omega = \sqrt[4]{\frac{D_2}{D_{\Delta \max}}}$  прямая пересекает ось  $\lg \omega$  ( $L = 0$ ). Соответствующая запретная область изображена штриховой линией на рис. 6.4, в.

Рассуждая аналогично нетрудно показать, что наличие только одной дисперсии  $n$ -й производной задающего воздействия  $D_n$  позволяет определить границу запретной области для ЛАХ как прямую, имеющую наклон  $-n20$  дБ/дек и пересекающую ось  $\lg \omega$  в точке  $\omega = \sqrt[2n]{\frac{D_n}{D_{\Delta \max}}}$ . Очевидно также, что такие запретные области задают порядок астатизма синтезируемой системы  $r$  условием  $r \geq n$ .

4. Известны дисперсия воздействия  $D_0$  и его первая производная  $D_1$ . В этом случае можем записать

$$\begin{aligned} D_{\Delta \max} &= C_0 D_0 + C_1 D_1; \\ |W_{\Delta}(j\omega)|^2 &\leq C_0 + C_1 \omega^2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Проанализируем правую часть неравенства (6.44). Очевидно, что при малых значениях  $\omega$  ( $\omega \leq \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}$ ) второе слагаемое будет меньше первого и им можно пренебречь. В этом случае условие (6.44) сведется к условию (6.38), т. е. к ситуации, рассмотренной в примере 1. Для этого диапазона частот ( $0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}$ ) уравнение границы запретной зоны для ЛАХ будет определяться выражением (6.39). Для остального диапазона частот ( $\infty \geq \omega \geq \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}$ ) второе слагаемое будет больше первого, что позволяет пренебречь первым слагаемым, и условие (6.44) сведется к условию (6.40) (см. пример 2), которое определит границу запретной области для ЛАХ в виде выражения

(6.41). Очевидно, что искомая граница запретной области будет аппроксимирована двумя этими асимптотами, сопрягающимися в точке  $\omega_c = \sqrt{\frac{C_0}{C_1}} = \sqrt{\frac{D_1}{D_0}}$ . Максимальная погрешность аппроксимации имеет место в точке сопряжения и будет убывать по мере удаления от нее в обе стороны. Запретная область для ЛАХ изображена штриховой линией на рис. 6.4, г.

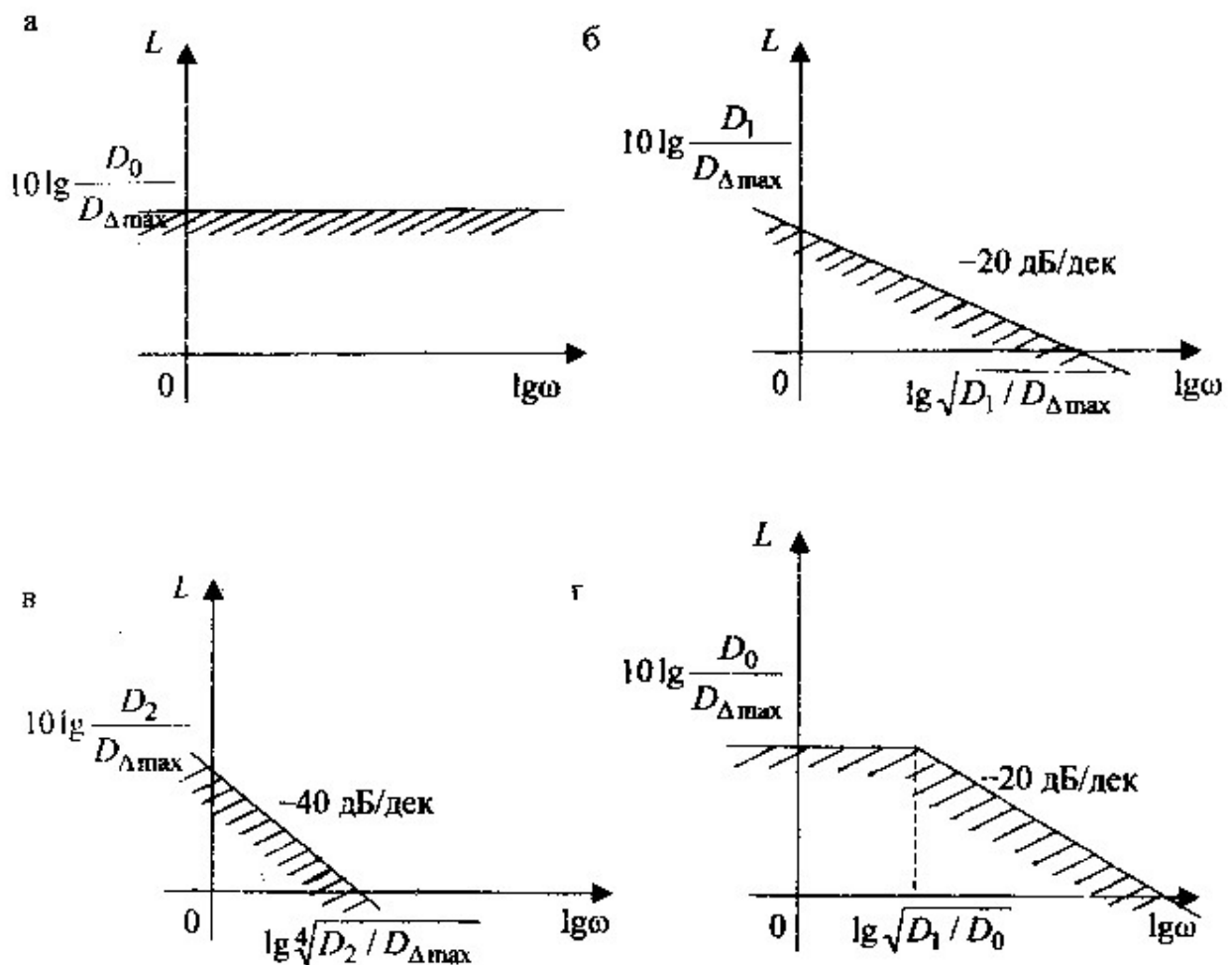


Рис. 6.4. Запретные области для ЛАХ разомкнутой системы:  
а – при известной величине  $D_0$ ; б – при известной величине  $D_1$ ; в – при известной величине  $D_2$ ; г – при известных величинах  $D_0$  и  $D_1$

Рассуждая аналогично, можно определить запретные области и для других возможных сочетаний известных величин дисперсий. Очевидно, что с увеличением числа известных величин дисперсий увеличивается и число членов аппроксимирующего полинома (6.28), что, в свою очередь, приведет к появлению дополнительных точек сопряжения и сопрягающих частот. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работах [25, 27].

Если на систему действует возмущающее воздействие, то согласно выражению (6.21) общая дисперсия выходной величины возрастает на величину дисперсии, обусловленной действием этого возмущения  $D_{y(f)}$ . Ограничение величины  $D_{y(f)}$  можно также задать соответствующей запретной областью для ЛАХ в диапазоне высоких частот. Однако аналитическое решение такой задачи сопряжено с большим объемом вычислительных работ. Поэтому в инженерной практике для учета действия различного рода возмущений (помех) обычно пользуются понятием эквивалентной полосы пропускания системы  $\omega_3$ , которая определяется из выражения

$$\omega_3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega}{\Phi^2(0)}. \quad (6.45)$$

Из выражения (6.45) видно, что понятие величины  $\omega_3$  определяется из прямоугольника, стороны которого равны  $\omega_3$  и  $\Phi^2(0)$ , а его площадь равна площади, ограниченной кривой  $|\Phi(j\omega)|^2$ . Как отмечалось выше, в большинстве практических случаев (особенно при наличии инерционных объектов управления) спектральный состав возмущений превышает полосу пропускания системы. Поэтому можно допустить, что в пределах полосы пропускания системы величина  $S_f(\omega)$  изменяется незначительно и с достаточной точностью считать ее постоянной и равной значению при  $\omega = 0$ , т. е.  $S(0)$ . Другими словами, возмущения представляются в виде так называемого "белого шума". В этом случае оказывается достаточно просто определить величину дисперсии  $D_{y(f)}$

$$D_{y(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega \approx \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S(0) d\omega =$$

$$= S(0) \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega = S(0) \omega_3. \quad (6.46)$$

Для определенности считаем, что  $\Phi(0) = 1$ . Для удобства определения величины  $D_{y(f)}$  по выражению (6.46) на практике пользуются готовыми зависимостями для  $\omega_3$  от параметров передаточных функций. Эти зависимости выведены для различных типов звеньев и вариантов систем и приведены в справочной литературе. Однако при необходимости такие зависимости могут быть получены из выражения (6.45).

Рассмотрим примеры.

1. Требуется определить эквивалентную полосу пропускания апериодического звена первого порядка с известными параметрами  $k$  и  $T$ . Передаточная функция такого звена имеет вид:  $W(p) = \frac{k}{Tp + 1}$  и  $W(0) = k$ .

Согласно выражению (6.45) имеем

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega}{W^2(0)} = \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 d\omega}{|T(j\omega) + 1|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|1 + j\omega T|^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\pi}{T}. \end{aligned}$$

2. Определить эквивалентную полосу пропускания замкнутой системы, состоящей из апериодического звена первого порядка, охваченного отрицательной единичной обратной связью при известных параметрах звена  $k$  и  $T$ .

Передаточная функция такой системы имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{k}{Tp + k + 1} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{T}{k+1} p + 1} = \frac{k_0}{T_0 p + 1},$$

где  $k_0 = \frac{k}{k+1}$ ,  $T_0 = \frac{T}{k+1}$  – коэффициент передачи и постоянная времени замкнутой системы, соответственно.

Очевидно, что такая система в динамическом отношении также является апериодическим звеном первого порядка только с другими

параметрами  $k_0$  и  $T_0$ . Поэтому для определения  $\omega_3$  можно воспользоваться результатами предыдущего примера, минуя промежуточные расчеты. Окончательно имеем

$$\omega_3 = \frac{\pi}{T_0} = \frac{(k+1)\pi}{T}.$$

Из рассмотренных примеров в частности следует вывод о том, что охват статического инерционного звена отрицательной обратной связью через статическое звено (в данном примере с единичным коэффициентом передачи) приводит к увеличению его полосы пропускания и повышению быстродействия.

Задаваясь предельными значениями величины  $D_{y(f)}$  и зная характеристику возмущения в виде  $S(0)$ , нетрудно рассчитать значение величины  $\omega_3$  для замкнутой системы из выражения

$$\omega_3 = \frac{D_{y(f)}}{S(0)}. \quad (6.47)$$

Теперь, используя известные зависимости величины  $\omega_3$  от параметров системы, и зная ее структуру или передаточную функцию разомкнутой системы представляется возможным получить оценку верхней границы разрешенной области для ЛАХ разомкнутой системы.

Если же в силу специфических особенностей конкретного возмущения его спектральную плотность  $S_f(\omega)$  нельзя считать постоянной в пределах полосы пропускания системы, то синтез системы можно осуществить методом последовательных приближений. В этом случае на каждом промежуточном шаге определяют вариант системы в виде соответствующей ЛАХ, которая строится с использованием запретных областей, обеспечивающих ограничение динамической ошибки, затем определяется величина  $D_{y(f)}$  и проверяется выполнение исходного требования по обеспечению точностных характеристик в виде условия (6.14). После соответствующих уточнений, обычно в виде оценки верхней границы разрешенной области для ЛАХ разомкнутой системы, приступают к следующему шагу итерации и т. д.

При наличии разрешенной области для ЛАХ разомкнутой системы дальнейший синтез сводится к построению ЛАХ желаемой

системы  $L_{ж}$ , обеспечивающей оптимизацию выбранного критерия. Если, например, в качестве критерия оптимизации выбран функционал вида (6.10), то очевидно, что задача оптимизации заключается в нахождении его минимума. Далее на этом же графике строится ЛАХ располагаемой системы  $L_p$ . Чаще всего в качестве располагаемой системы рассматривается неварьируемая часть системы, не содержащая корректирующих звеньев (объект управления, первичные преобразователи, исполнительные устройства и др.). После чего определяется ЛАХ последовательно корректирующего звена  $L_{п.к}$  в виде

$$L_{п.к} = L_{ж} - L_p. \quad (6.48)$$

Выражение (6.48) вытекает из того, что при последовательной коррекции корректирующее звено с передаточной функцией  $W_{п.к}(p)$  включается последовательно в контур располагаемой системы с передаточной функцией  $W_p(p)$ , в результате чего система приобретает требуемый набор желаемых свойств, соответствующих передаточной функции  $W_{ж}(p)$ , т. е.

$$W_{ж}(p) = W_p(p) W_{п.к}(p). \quad (6.49)$$

Затем по полученной  $L_{п.к}$  определяется искомая передаточная функция последовательного корректирующего устройства  $W_{п.к}(p)$ . Выражение для  $W_{п.к}(p)$  может быть также получено из выражения (6.49), если определена передаточная функция желаемой системы по виду графика  $L_{ж}$

$$W_{п.к}(p) = \frac{W_{ж}(p)}{W_p(p)}. \quad (6.50)$$

И, наконец, решается вопрос о технической реализации конкретного варианта корректирующего звена. Для этого, исходя из специфики работы системы, определяется наиболее предпочтительный вариант коррекции (последовательная, параллельная, обратная связь). После чего осуществляется определение соответствующей передаточной функции выбранного типа корректирующего звена из условия эквивалентности последовательному корректирующему звену с ранее определенной



передаточной функцией  $W_{п.к}(p)$ . Пример, иллюстрирующий возможность такого пересчета, приведен в подразд. 6.3.

## 7. ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНТРОПИЙНЫХ ОЦЕНОК КООРДИНАТ

### 7.1. Основные положения

Наличие случайных воздействий в различных точках объекта или системы управления приводит к дестабилизации технологического процесса и, как следствие, к появлению случайной составляющей в его выходных координатах  $y_i(t)$ ,  $i \in I$ , т. е. к нестабильности характеристик выпускаемой продукции. Ранее для оценки нестабильности координаты  $y(t)$  использовалась величина дисперсии  $D_y$ . Качество управления в динамических режимах также оценивалось по величине  $D_y$ : чем меньше величина  $D_y$ , тем совершеннее система управления, и наоборот. Однако, если рассматривать случайную функцию времени  $y(t)$  как некий "информационный след" протекающего технологического процесса, то количественной характеристикой его нестабильности, меры неопределенности является энтропия значений функции  $y(t) - H(t)$ . Энтропия непрерывного сигнала (функции) определяется из выражения

$$H(y) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \log_a p(y) dy. \quad (7.1)$$

Если рассматривается технологический процесс с дискретным выходом, то функция  $y(t)$  также будет дискретной, и ее энтропия определяется из выражения

$$H(y) = - \sum_{(i)} P_i \log_a P_i. \quad (7.2)$$

Основание логарифмов  $a$  в выражениях (7.1) и (7.2) может быть любым. Величина  $a$  выбирается исходя из конкретики решаемой задачи и определяет численное значение единицы энтропии. Для проведения аналитических исследований удобнее использовать натуральные логарифмы ( $a = e$ ). В этом случае энтропия сигнала  $y(t)$  получается в так называемых натуральных единицах, которые имеют обозначение – нит. Для анализа объектов, сигналы которых представлены в двоичных кодах, удобнее использовать двоичные логарифмы ( $a = 2$ ), и соответственно

энтропия будет выражаться в двоичных единицах, обозначаемых – бит. Для анализа объектов, сигналы которых представляются в десятичном или двоично-десятичном кодах, удобнее использовать десятичные логарифмы ( $a = 10$ ), и энтропия будет выражаться в десятичных единицах, обозначаемых – дит. Соотношение между этими единицами вытекает из определения соответствующих логарифмов и имеет вид: 1 нит = 1,45 бит = 0,43 дит; 1 бит = 0,69 нит = 0,3 дит; 1 дит = 2,3 нит = 3,3 бит.

Из определения энтропии (выражения (7.1) и (7.2)) следует вывод о том, что энтропия детерминированной функции равна нулю. Действительно, если функция  $y(t)$  однозначно определена, то вероятность достижения ею конкретного значения в каждый момент времени равна единице и, следовательно, значения  $\log_a p(y) = \log_a 1 = 0$  всегда для обоих вариантов выражений (7.1) и (7.2), из чего и следует, что  $H(y) = 0$ . В других случаях, когда имеет место хоть какая-то неопределенность функции  $y(t)$ , ее энтропия будет положительной величиной, т. е. будет иметь место  $H(y) > 0$ .

Следует отметить, что понятие энтропии играет важную роль в теории информации, в которой количество информации  $I$ , полученной в результате поступления какого-либо сигнала, сообщения или измерения сигнала, определяется как разность энтропий до получения сигнала –  $H(y)$  (априорная энтропия) и после получения сигнала о состоянии объекта  $y_0$  –  $H(y/y_0)$  (так называемая условная или апостериорная энтропия), т. е.

$$I = H(y) - H(y/y_0). \quad (7.3)$$

Другими словами, количество информации оценивается по величине уменьшения степени неопределенности состояния объекта после прихода сообщения, например, в виде сигнала  $y_0$ . Как следует из определения (7.3), количество информации измеряется в тех же единицах, что и энтропия. Очевидно также, что

$$I \geq 0. \quad (7.4)$$

Знак равенства в выражении (7.4) имеет место только тогда, когда сигнал или сообщение  $y_0$  не несет в себе новой информации о состоянии объекта, т. е.  $H(y/y_0) = H(y)$ .

Математический аппарат для исследований свойств объектов в мерах и метриках энтропийно-информационного пространства разработан в разделе эргодической теории и носит название энтропийной теории динамических систем [28, 29].

Следует отметить, что различные варианты информационных технологий получают все большее распространение в теории и практике управления. Информация по перспективным направлениям использования таких технологий в пищевой промышленности приведена, например, в работе [30].

## 7.2. Исследование эффективности работы системы управления с использованием энтропийных оценок координат

Энтропийный подход к оценке состояния объектов по соответствующим координатам позволяет оценить эффективность работы системы управления. Рассмотрим методику проведения таких исследований на конкретном примере. Пусть имеется разомкнутая система управления, схема которой приведена на рис. 7.1. Устройство управления (УУ) выдает дискретные управляющие воздействия  $X_i$  по соответствующему каналу управления  $x$  на объект управления  $O$ , состояние которого оценивается по выходной координате  $y$ .

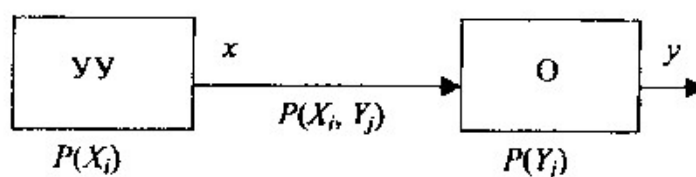


Рис. 7.1. Структурная схема системы управления

Устройство управления выдает управляющие воздействия, например, на основании изменения каких-либо свойств окружающей среды (температуры, давления и др.) либо по временной программе. В любом случае в рамках рассматриваемой структуры каждое

управляющее воздействие  $X_i$  является случайной величиной, вероятность появления которой известна и равна  $P(X_i)$ . Аналогично отклик объекта  $Y_j$  на такие воздействия является случайной величиной, вероятность ее появления известна и равна  $P(Y_j)$ . Несовпадение индексов величин воздействий и откликов ( $i$  и  $j$ ) объясняется тем, что система работает при наличии случайных помех (возмущений), а это может, например, привести к "ложному" срабатыванию исполнительного устройства на объекте вследствие "всплеска" напряжения в линии связи, которое может быть обусловлено различными причинами (наводки от электромагнитных помех и др.). Кроме того, может иметь место непрохождение управляющего воздействия  $x$  на объект в силу различных возмущений (кратковременное замыкание или разрыв линии связи, пробой, разовое несрабатывание исполнительного устройства и др.). Считаем также, что известна вероятность совместного проявления величин  $X_i$  и  $Y_j$  —  $P(X_i, Y_j)$ . Требуется оценить степень неопределенности реакции объекта управления по координате  $y$  при известном управляющем воздействии  $x$ , т. е. оценить эффективность управления.

Первоначально необходимо оценить неопределенности состояний устройства управления и объекта, энтропии которых определяются согласно выражению (7.2)

$$H(x) = -\sum_{(i)} P(X_i) \ln P(X_i); \quad (7.5)$$

$$H(y) = -\sum_{(i)} P(Y_i) \ln P(Y_i). \quad (7.6)$$

Далее необходимо оценить неопределенность состояния всей системы, энтропия которой определяется из выражения

$$H(x, y) = -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i, Y_j). \quad (7.7)$$

В частном случае, когда состояние объекта не зависит от воздействий устройства управления (потеряна управляемость объекта, например, вследствие разрушения канала управления: обрыв линии связи, выход из строя исполнительного устройства и др.), величины  $X_i$  и  $Y_j$  оказываются взаимно независимыми и вероятность совместного проявления этих величин равна произведению вероятностей их появления, т. е.

$$P(X_i, Y_j) = P(X_i) P(Y_j). \quad (7.7)$$

Тогда для этого частного случая выражение (7.7) с учетом (7.8) примет вид

$$\begin{aligned} H(x, y) &= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i) P(Y_j) \ln [P(X_i) P(Y_j)] = \\ &= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i) P(Y_j) [\ln P(X_i) + \ln P(Y_j)] = -\sum_{(i)} P(X_i) \ln P(X_i) \sum_{(j)} P(Y_j) - \\ &\quad - \sum_{(j)} P(Y_j) \ln P(Y_j) \sum_{(i)} P(X_i) = H(x) + H(y). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Выражение (7.9) позволяет сделать вывод о том, что в данном случае энтропия всей системы равна сумме энтропий объекта и устройства управления. Очевидно также, что если величины  $X_i$  и  $Y_j$  хоть как-то взаимосвязаны (т. е. имеет место частичная управляемость объекта), выражение (7.8) будет неверно и, следовательно, вместо равенства (7.9) будет иметь место следующее неравенство

$$H(x, y) < H(x) + H(y). \quad (7.10)$$

Из изложенного выше можно сделать вывод, что разность между правой и левой частями неравенства (7.10) является информационной оценкой, мерой эффективности управления объектом, которая будет равна

$$I = H(x) + H(y) - H(x, y). \quad (7.11)$$

Другими словами, эффективность управления объектом может быть оценена количеством информации, появляющейся в результате уменьшения энтропии системы с полностью потерянными управлением до энтропии, соответствующей установленному уровню управляемости.

Для получения оценки энтропии системы при наличии связи между величинами  $X_i$  и  $Y_j$  необходимо выразить вероятность  $P(X_i, Y_j)$  через условные вероятности в виде

$$P(X_i, Y_j) = P(X_i) P(Y_j/X_i) \quad (7.12)$$

$$P(X_i, Y_j) = P(Y_j) P(X_i/Y_j), \quad (7.13)$$

где  $P(Y_j/X_i)$  и  $P(X_i/Y_j)$  – условные вероятности появления величин  $Y_j$  и  $X_i$  при условии появления величин  $X_i$  и  $Y_j$ , соответственно.

Теперь условная энтропия объекта управления по координате  $y$  при наличии управляющего воздействия может быть определена из выражения

$$H(Y/X_i) = -\sum_{(j)} P(Y_j/X_i) \ln P(Y_j/X_i). \quad (7.14)$$

Обобщенная оценка степени неопределенности состояния объекта при наличии возможных вариантов управляющих воздействий  $X_i, i \in I$  может быть представлена как математическое ожидание соответствующих вариантов величин  $H(y/X_i)$ , определяемых из выражения (7.14), т. е. обобщенно условной энтропией

$$H(y/x) = \sum_{(i)} P(X_i) H(y/X_i) = -\sum_{(i)} P(X_i) \sum_{(j)} P(Y_j/X_i) \ln P(Y_j/X_i). \quad (7.15)$$

Из выражения (7.12) следует, что

$$P(Y_j / X_i) = \frac{P(X_i, Y_j)}{P(X_i)} \quad (7.16)$$

и, подставляя выражение (7.16) в формулу (7.15), получаем

$$\begin{aligned} H(y/x) &= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i, Y_j) + \sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i) = \\ &= -\sum_{(i)} \sum_{(j)} P(X_i, Y_j) \ln P(X_i, Y_j) + \sum_{(i)} P(X_i) \ln P(X_i) = \\ &= H(x, y) - H(x). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Преобразовав выражение (7.17) относительно  $H(x, y)$  окончательно имеем

$$H(x, y) = H(x) + H(y/x). \quad (7.18)$$

Полученный результат (7.18) можно трактовать следующим образом. Неопределенность в работе системы управления (в смысле энтропийной оценки) определяется суммой энтропий устройства управления и условной энтропии объекта управления при наличии

управляющего воздействия. Физический смысл условной энтропии  $H(y/x)$  объясняется неопределенностью реакции объекта на конкретное воздействие устройства управления вследствие разного рода помех, возмущений и нарушений в работе канала управления (линия связи, исполнительные устройства и др.), а также в работе самого объекта. В терминах информационной теории такое явление называется неоднозначностью приемника. В идеальной ситуации, когда отсутствуют возмущения и помехи в канале управления и в объекте (т. е. реакция объекта на управляющее воздействие однозначна),  $H(y/x) = 0$ . В этом случае энтропия всей системы согласно выражению (7.18) определяется только энтропией устройства управления.

Используя аналогичный подход и исходные данные можно также оценить неопределенность в работе устройства управления на основании информации о состоянии объекта. Рассмотренная методика исследования с использованием энтропийных оценок применяется на практике для оценки эффективности управления, а также для сравнительной характеристики каналов связи, управления и др.

### **7.3. Использование вероятностных энтропийных оценок для описания стационарных случайных режимов**

Если выходную координату объекта  $y(t)$  рассматривать как некий "информационный след, сигнал" реального физического процесса, то соответствующую центрированную случайную составляющую  $y^0(t)$  можно трактовать как случайную погрешность в реализации управления этим процессом. В таком случае для характеристики данной погрешности помимо величины дисперсии  $\sigma_y^2$  могут также быть использованы энтропийные оценки – энтропийное значение и энтропийный коэффициент закона распределения случайной величины. Эти оценки используются в измерительной технике [31, 32] и базируются на теоремах и постулатах, положенных в основу теории информации Н. Винером и К. Шенноном.

Энтропийное значение случайной величины определяется не только величиной ее дисперсии, но также и видом закона



распределения. В качестве "отправной точки" используется закон равномерной плотности, при котором диапазон изменения случайной величины однозначно определен как  $y_{\max} - y_{\min} = 2\Delta$ , а вероятность принятия случайной величиной какого-либо значения в этом диапазоне:  $p(y) = \frac{1}{2\Delta}$  (рис. 7.2).

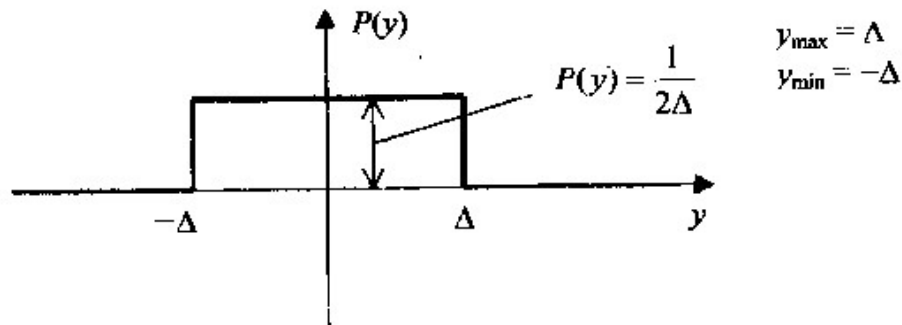


Рис. 7.2. Плотность распределения для закона равномерной плотности

Выражение для энтропии такой случайной величины в соответствии с (7.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 H(y) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Delta} \ln \frac{1}{2\Delta} dy = - \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{2\Delta} \ln \frac{1}{2\Delta} dy = \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \ln 2\Delta \int_{-\Delta}^{\Delta} dy = \ln 2\Delta
 \end{aligned}
 \tag{7.19}$$

Величина  $d_{\text{экв}} = 2\Delta$  называется энтропийным интервалом неопределенности. Для закона равномерной плотности  $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$  или  $d_{\text{экв}} = 3,46\sigma$ . Величину  $d_{\text{экв}}$  можно аналитически определить для любого закона распределения по аналогии с выражением (7.19) как величину, стоящую под знаком натурального логарифма.

Так, например, при наблюдении случайной величины  $y_0$ , распределенной по нормальному закону:  $p(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ , выражение для ее энтропии будет иметь вид

$$\begin{aligned}
H(y/y_0) &= -\int_{-\infty}^{\infty} p(y) \ln \left( \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) \left( \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{y^2}{2\sigma^2} \right) dy = \\
&= \ln \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(y) dy + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy = \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} = \\
&= \ln \sigma\sqrt{2\pi} + \ln \sqrt{e} = \ln (\sigma\sqrt{2\pi e}). \tag{7.20}
\end{aligned}$$

Откуда получаем  $d_{\text{экв}} = \sigma\sqrt{2\pi e} \approx 4,132 \sigma$ .

Аналогично для треугольного закона распределения имеем  $d_{\text{экв}} = 4,04\sigma$ .

Для практических целей оказывается более удобным оперировать величиной  $\Delta_{\text{экв}} = 0,5d_{\text{экв}}$ , именуемой энтропийным значением случайной величины, которая согласно вышеизложенному определяется из выражения  $H\left(\frac{y}{y_0}\right) = \ln 2\Delta_{\text{э}}$ .

Окончательно имеем

$$\Delta_{\text{э}} = \frac{1}{2} e^{H(y/y_0)}. \tag{7.21}$$

Отсюда следует, что энтропийное значение случайной величины есть половина диапазона равномерного распределения, имеющего такую же энтропию, как и данный закон распределения. Введение понятия энтропийного значения позволяет осуществить своего рода "унификацию" в оценке дестабилизирующего проявления различных воздействий и помех. Связь между величинами  $\Delta_{\text{э}}$  и  $\sigma_y$  определяется через энтропийный коэффициент закона распределения  $K_{\text{э}}$

$$K_{\text{э}} = \frac{\Delta_{\text{э}}}{\sigma_y} \quad \text{или} \quad \Delta_{\text{э}} = K_{\text{э}} \sigma_y. \tag{7.22}$$

Значения  $K_{\text{э}}$  зависят от вида закона распределения случайной величины. Так, из вышеизложенного следует, что для закона равномерной плотности  $K_{\text{э}} = 1,73$ , для нормального закона  $K_{\text{э}} = 2,066$ , для треугольного закона  $K_{\text{э}} = 2,02$ . Значения энтропийных коэффициентов для большинства типовых законов распределения вычислены и приведены в специальной литературе, например, [31, 33]. Как доказано в работах К. Шеннона, максимальное значение  $K_{\text{э}}$

имеет место в случае нормального закона распределения ( $K_3 = 2,066$ ). Теоретически значения  $K_3$  для различных законов могут меняться в пределах  $0 < K_3 \leq 2,066$ . Однако в реальных ситуациях почти всегда величина  $K_3 > 1$ . Таким образом, наибольшим дестабилизирующим воздействием (в энтропийном смысле) из всех возмущений, имеющих одинаковую дисперсию, является то, которое имеет нормальный закон распределения. Использование понятий энтропийного значения и энтропийного коэффициента позволяет увязать дисперсию воздействия с его дестабилизирующим проявлением в соответствующей координате объекта, т. е. оценить эффективность управления по этой координате.

Выражение (7.22) имеет практическое значение для совершенствования управления. Действительно, уменьшение энтропийного значения выходной координаты  $\Delta_3$ , которое фактически характеризует нестабильность свойств выпускаемой продукции или, в конечном счете, качество управления, может быть осуществлено двумя способами. Первый, "классический" способ, основанный на минимизации величины  $\sigma_y$ , рассмотрен в предыдущих разделах. Второй способ состоит в организации таких мероприятий и воздействий на объект, при которых произойдет трансформация закона распределения случайной составляющей выходной координаты, соответствующей уменьшению величины энтропийного коэффициента  $K_3$ . Как следует из вышеизложенных данных о возможных диапазонах варьирования величины  $K_3$ , такой способ организации управления позволяет целенаправленно уменьшить величину  $\Delta_3$  на десятки и более процентов. Поэтому в данном случае фактически появляется дополнительный канал внесения управляющего воздействия для стабилизации выходных координат, определяющих свойства выпускаемой продукции.

Энтропийное значение результирующего отклика объекта или системы  $\Delta_{3\Sigma}$ , обусловленное наличием совокупности воздействий, может быть также оценено из выражения (7.22). Только в этом случае вместо величины  $\sigma_y$  необходимо использовать  $\sigma_{y\Sigma}$  – суммарную результирующую величину СКО, которая для независимых случайных откликов определяется из выражения

$$\sigma_{y\Sigma} = \sqrt{\sum_{(i)} \sigma_{yi}^2}, \quad i \in I. \quad (7.23)$$

В случае наличия взаимно коррелированных откликов к исходной сумме дисперсий  $\sigma_{yi}$  в выражение (7.23) добавится сумма всех парных корреляционных моментов этих откликов. Вместо величины  $K_{\sigma}$  в выражении (7.22) необходимо использовать величину  $K_{\sigma\Sigma}$  – энтропийный коэффициент результирующего закона распределения случайного отклика по исследуемой координате. При наличии жестко коррелированных откликов их закон распределения в линейной системе повторяет закон распределения воздействия, вызвавшего их появление. Поэтому  $K_{\sigma\Sigma}$  определяется видом закона распределения инициирующего случайного воздействия. Для определения  $K_{\sigma\Sigma}$  в случае композиции некоррелированных случайных откликов разработаны специальные графики – номограммы для сочетаний основных типовых законов распределений. Для определения  $K_{\sigma\Sigma}$  сначала вычисляется вспомогательная величина  $P = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}$ , характеризующая относительный вес дисперсии  $\sigma_2^2$  в суммарной дисперсии  $(\sigma_2^2 + \sigma_1^2)$  и являющаяся входной переменной для обращения к соответствующему графику, описывающему композицию этих двух законов распределения. Затем из графика (по оси ординат) определяется величина  $K_{\sigma\Sigma}$ . Соответствующие графики, методики и примеры решения задач по определению  $K_{\sigma\Sigma}$  приведены в работах [31, 33].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. – Л.: Энергия, 1975.
2. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М.: Наука, 1966.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978.
5. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1962.
6. Фарзани Н.Г., Илясов Л.В., Азим-заде А.Ю. Технологические измерения и приборы: Учеб. для студ. вузов по спец. "Автоматизация технологических процессов и производств". – М.: Высш. шк., 1989.
7. Кондрашкова Г.А. Технологические измерения и приборы в целлюлозно-бумажной промышленности: Учеб. для вузов. – М.: Лесная пром-сть, 1981.
8. Основы автоматического управления / Под ред. В.С. Пугачева. – М.: Наука, 1968.
9. Казаков И.Е. Статистические методы проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1969.
10. Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г. Основы статистической теории автоматических систем. – М.: Машиностроение, 1974.
11. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического регулирования. – М.: Наука, 1985.
12. Методы гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Е.П. Попова. – М.: Машиностроение, 1970.
13. Автоматизация технологических процессов пищевых производств / Под ред. Е.Б. Карпина. – М.: Пищ. пром-сть, 1977.
14. Под ред. В.В. Солодовникова. Техническая кибернетика в 2-х т. Теория автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1967.
15. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. – М.: Советское радио, 1968.
16. Измерения в промышленности: Справ. издание в 3 томах / Под ред. Профоса П. Пер. с нем. под ред. Д.И. Агейкина. 2-е изд., перераб. и дополн. – М.: Metallургия, 1990.

17. Волгин В.В., Каримов Р.Н. Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления. – М.: Энергия, 1979.
18. Виленкин С.Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. – М.: Энергия, 1979.
19. Лазарев В.Л. Методы и приборы для измерения реологических характеристик и цвета в мясной и молочной промышленности: Текст лекций. – Л.: ЛТИХП, 1987.
20. Брусиловский Л.П., Вайнберг А.Я. Приборы технологического контроля в молочной промышленности: Справ. – М.: Агропромиздат, 1990.
21. Бегунов А.А. Метрологическое обеспечение производства пищевой продукции: Справ. – СПб.: МП "Издатель", 1992.
22. Горбатов А.В. и др. Структурно-механические характеристики пищевых продуктов: Справ. / А.В. Горбатов, А.М. Маслов, Ю.А. Мачи-хин и др. / Под ред. А.В. Горбатова. – М.: Лег. и пищ. пром-сть, 1982.
23. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3 Методы современной теории автоматического управления / Под ред. Н.Г. Егунова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
24. Методы классической и современной теории автоматического управления в 3 томах. Т. 2. Синтез регуляторов и теория оптимальных систем автоматического управления / Под ред. Н.Г. Егунова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
25. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука, 1983.
26. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965.
27. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. – М.: Наука,
28. Орнштейн Д. Эргодическая теория, случайность и динамические системы. Пер. с англ. – М.: 1978.
29. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. – М.: 1980.
30. Краснов А.Е., Красуля О.В., Большаков О.В., Шленская Т.В. Информационные технологии пищевых производств в условиях неопределенности (Системный анализ управления и

прогнозирования с элементами компьютерного моделирования). – М.: ВНИИМ, 2001.

31. Электрические измерения неэлектрических величин. А.М. Туричин, П.В. Новицкий, Е.С. Левшина и др. / Под ред. П.В. Новицкого. – Л.: Энергия, 1975.

32. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешности результатов измерений. – М.: Энергоатомиздат, 1985.

33. Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегеря В.В. Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2001.

## СОДЕРЖАНИЕ

<u>ВВЕДЕНИЕ.....</u>	<u>3</u>
<u>1. РЕЖИМЫ РАБОТЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ</u>	
<u>ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ.....</u>	<u>5</u>
<u>1.1. Основные положения</u>	
<u>Классификация режимов работы.....</u>	<u>5</u>
<u>1.2. Работа систем управления в переходных режимах.....</u>	<u>6</u>
<u>1.3. Статические режимы систем управления.....</u>	<u>10</u>
<u>1.4. Динамические режимы систем управления.....</u>	<u>15</u>
<u>2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....</u>	<u>27</u>
<u>2.1. Основные положения.....</u>	<u>27</u>
<u>2.2. Случайные величины и случайные функции.....</u>	<u>30</u>
<u>2.3. Случайная величина и ее характеристики.....</u>	<u>30</u>
<u>2.4. Случайная функция и ее характеристики.....</u>	<u>34</u>
<u>3. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ</u>	
<u>НА ОБЪЕКТЫ И СИСТЕМЫ.....</u>	<u>40</u>
<u>3.1. Основные положения.....</u>	<u>40</u>
<u>3.2. Преобразование стационарного случайного</u>	
<u>воздействия динамической линейной системой.....</u>	<u>40</u>
<u>3.3. Пример исследования влияния случайных</u>	
<u>воздействий на управление процессом термообработки.....</u>	<u>44</u>
<u>3.4. Преобразование стационарного случайного</u>	
<u>воздействия нелинейной системой.....</u>	<u>52</u>
<u>4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ</u>	
<u>И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....</u>	<u>67</u>
<u>4.1. Основные положения.....</u>	<u>67</u>
<u>4.2. Аналитический метод получения математического</u>	
<u>описания.....</u>	<u>68</u>
<u>4.3. Экспериментальные методы получения</u>	
<u>математического описания.....</u>	<u>76</u>



<u>5. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....</u>	<u>82</u>
<u>5.1. Основные положения. Методы и технические средства определения характеристик случайных воздействий.....</u>	<u>82</u>
<u>5.2. Особенности экспериментальных исследований случайных воздействий в пищевой промышленности.....</u>	<u>84</u>
<u>5.3. Типовые математические модели характеристик случайных воздействий.....</u>	<u>94</u>
<u>5.4. Методы моделирования и расчета характеристик случайных воздействий.....</u>	<u>96</u>
<u>6. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ.....</u>	<u>100</u>
<u>6.1. Основные положения.....</u>	<u>100</u>
<u>6.2. Постановка задачи синтеза систем управления.....</u>	<u>100</u>
<u>6.3. Синтез систем управления при наличии случайных воздействий.....</u>	<u>106</u>
<u>6.4. Синтез робастных систем управления при наличии ограниченной информации о случайных воздействиях.....</u>	<u>116</u>
<u>7. ОРГАНИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭНТРОПИЙНЫХ ОЦЕНОК КООРДИНАТ.....</u>	<u>130</u>
<u>7.1. Основные положения.....</u>	<u>130</u>
<u>7.2. Исследование эффективности работы системы управления с использованием энтропийных оценок координат.....</u>	<u>132</u>
<u>7.3. Использование вероятностных энтропийных оценок для описания стационарных случайных режимов.....</u>	<u>136</u>
<u>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</u>	<u>141</u>

Лазарев Виктор Лазаревич

**РОБАСТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ  
В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

Учебное пособие

*Редактор*

Т.В. Белянкина

*Корректор*

Н.И. Михайлова

*Компьютерная верстка*

Н.В. Гуральник

*Директор ИПЦ*

Т.Г. Смирнова

---

Подписано в печать 27.05.2003. Формат 60×84 1/16.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,84. Печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,19  
Тираж 300 экз. Заказ № С 9

---

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9  
ИПЦ СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9