

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

С.С. Резников

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВЫСШИХ
КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР**
Учебное-методическое пособие



Санкт-Петербург

2013

Резников С.С., Методы анализа и синтеза высших кинематических пар. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 75 с.

В пособие изложены основные вопросы по анализу и синтезу высших кинематических пар. Рассмотрены общие принципы исследования плоских кривых, пространственных кривых, поверхностей. Приводятся сведения об образовании кинематических пар разных классов, о характеристиках механического движения при контакте двух тел и распределении механических напряжений в зоне взаимодействия.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 221000 «Мехатроника и робототехника», 200100 «Приборостроение», 200400 «Оптотехника», а также обучающихся в аспирантуре по специальностям 05.02.18 «Теория механизмов и машин» и 05.11.01, «Приборы и методы измерений (механические величины)».

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета Точной механики и технологий, 11.06.2013, №6.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2013

©Резников С.С., 2013

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Звенья и детали механизмов состоят из множества элементов, которые характеризуются формой, размерами и материалами. Аналитическая геометрия устанавливает связь между формой (геометрическими образами) и размерами. Дифференциальная геометрия изучает строение геометрических объектов (линий и поверхностей) в бесконечно малых окрестностях. Уравнение кривой или поверхности будем задавать в векторной форме:

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot x + \bar{j} \cdot y + \bar{k} \cdot z,$$

записывать в матричной форме

$$\bar{r}^T = |x \quad y \quad z|,$$

и предполагать, что векторная функция \bar{r} дифференцируема, причем имеет производные до любого порядка, которые нам могут понадобиться.

1.1. Пространственная кривая

Уравнение пространственной кривой может быть задано в одной из следующих форм:

а) параметрическая форма:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad (1.1)$$

б) пересечение двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (1.2)$$

Ниже будем использовать параметрическую форму $\bar{r} = \bar{r}(u)$. В качестве параметра u можно принять любой параметр, в частности $u=x$, u или z .

Будем предполагать, что существуют производные до третьего порядка:

$$\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{du} = \begin{vmatrix} \frac{d}{du} x \\ \frac{d}{du} y \\ \frac{d}{du} z \end{vmatrix}, \quad \bar{r}'' = \frac{d^2\bar{r}}{du^2} = \begin{vmatrix} \frac{d^2}{du^2} x \\ \frac{d^2}{du^2} y \\ \frac{d^2}{du^2} z \end{vmatrix}, \quad \bar{r}''' = \frac{d^3\bar{r}}{du^3} = \begin{vmatrix} \frac{d^3}{du^3} x \\ \frac{d^3}{du^3} y \\ \frac{d^3}{du^3} z \end{vmatrix}.$$

Отложим данные вектора от точки M , лежащей на кривой (рис. 1.1). Вектор \bar{r}' (производная от радиуса-вектора по параметру u) направлен по касательной \bar{t} к кривой и определяет строение кривой до первого порядка. Плоскость, проходящая перпендикулярно вектору \bar{r}' , называется нормальной плоскостью кривой. Плоскость, проходящая через вектора \bar{r}' и \bar{r}'' ,

называется соприкасающейся плоскостью и имеет касание 2-го порядка с кривой.

Нормаль \bar{n} , лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью. Нормаль \bar{b} , перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, – бинормаль. Плоскость, проходящая через касательную \bar{t} и бинормаль \bar{b} , называется спрямляющей плоскостью.

Прямоугольный трехгранник, образованный касательной, главной нормалью и бинормалью, называется сопровождающим трехгранником кривой. Единичные вектора \bar{t} , \bar{n} , \bar{b} , направленные по осям этого трехгранника, называются главными векторами кривой.

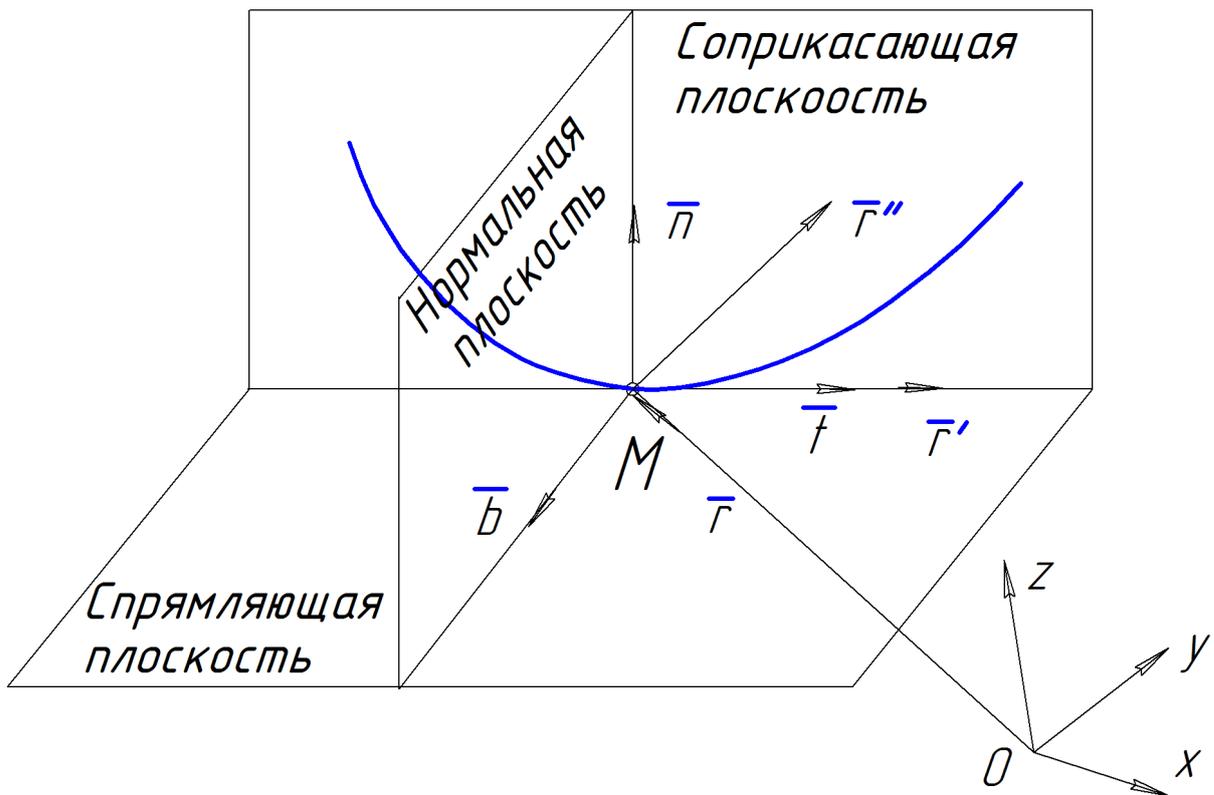


Рис. 1.1. Пространственная кривая

Длина дуги кривой в окрестности точки М:

$$dS = |d\bar{r}'| du.$$

Длина кривой есть величина интеграла:

$$S = \int_{u_0}^{u_1} |d\bar{r}'| du, \quad (1.3)$$

который не зависит от выбора параметра u и называется натуральным параметром кривой. Производные от радиуса-вектора по натуральному параметру обозначаются:

$$d\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dS}, \quad d\ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dS^2}, \quad d\dddot{\bar{r}} = \frac{d^3\bar{r}}{dS^3}.$$

Главные вектора кривой определяются из выражений:

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \dot{\bar{r}}, \\ \bar{n} &= \bar{b} \times \bar{t} = -\frac{\bar{r}' \times (\bar{r}' \times \bar{r}'')}{|\bar{r}'| |\bar{r}' \times \bar{r}''|} = \frac{\ddot{\bar{r}}}{|\ddot{\bar{r}}|}, \\ \bar{b} &= (\bar{t} \times \bar{n}) = \frac{(\bar{r}' \times \bar{r}'')}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|} = \frac{(\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}})}{|\ddot{\bar{r}}|}.\end{aligned}\quad (1.4)$$

1.2 Кривизна и кручение пространственной кривой

Кривизна (радиус кривизны) характеризует отклонение кривой от касательной \bar{t} в соприкасающейся плоскости. Радиус кривизны это радиус соприкасающей окружности в данной точке М пространственной кривой, с которой кривая имеет касание 2-го порядка. Центр соприкасающей окружности называется центром кривизны пространственной кривой. Кручение характеризует отклонение кривой в окрестности точки М от касательной \bar{t} в спрямляющей плоскости.

Кривизна (радиус кривизны) кривой:

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{|(\bar{r}' \times \bar{r}'')|}{|\bar{r}'|^3} = \frac{(\bar{n} \cdot \bar{r}'')}{|\bar{r}'|^2} = |\ddot{\bar{r}}|. \quad (1.5)$$

Кручение кривой:

$$\tau = \frac{|(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')|}{|(\bar{r}' \times \bar{r}'')|^2}. \quad (1.6)$$

Производные главных векторов кривой по её натуральному параметру S (формулы Серре-Френе):

$$\begin{vmatrix} \dot{\bar{t}} \\ \dot{\bar{n}} \\ \dot{\bar{b}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{vmatrix}.$$

Точки кривых, в которых $k=0$, называются точками спрямления, а точки, в которых $\tau=0$, – точки уплощения.

Соотношения:

$$k = k(S), \quad \tau = \tau(S), \quad (1.7)$$

выражающие зависимость кривизны и кручения от натурального параметра, называются натуральными уравнениями кривой, определяют кривую с точностью до положения в пространстве.

Условие $k=0$ характеризует прямую линию, а условие $\tau=0$ – плоскую линию.

Пример 1.1. Исследовать винтовую линию (рис. 1.2).

Уравнение винтовой линии (рис. 1.2):

$$\bar{r}^T = \begin{vmatrix} \rho \cos \vartheta & \rho \sin \vartheta & p\vartheta \end{vmatrix}.$$

Производные радиуса-вектора по параметру ϑ

$$\bar{r}' = \begin{vmatrix} -\rho \sin \vartheta \\ \rho \cos \vartheta \\ p \end{vmatrix}, \quad \bar{r}'' = \begin{vmatrix} -\rho \cos \vartheta \\ -\rho \sin \vartheta \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}''' = \begin{vmatrix} \rho \sin \vartheta \\ -\rho \cos \vartheta \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Векторные произведения:

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}' = |\bar{r}'|^2 = \rho^2 + p^2,$$

$$(\bar{r}' \times \bar{r}'') = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\rho \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & p \\ -\rho \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p\rho \sin \vartheta \\ -p\rho \cos \vartheta \\ \rho\rho \end{vmatrix},$$

$$(\bar{r}' \times \bar{r}'') \cdot (\bar{r}' \times \bar{r}'') = |(\bar{r}' \times \bar{r}'')|^2 = \rho^2(\rho^2 + p^2),$$

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \rho^2 p.$$

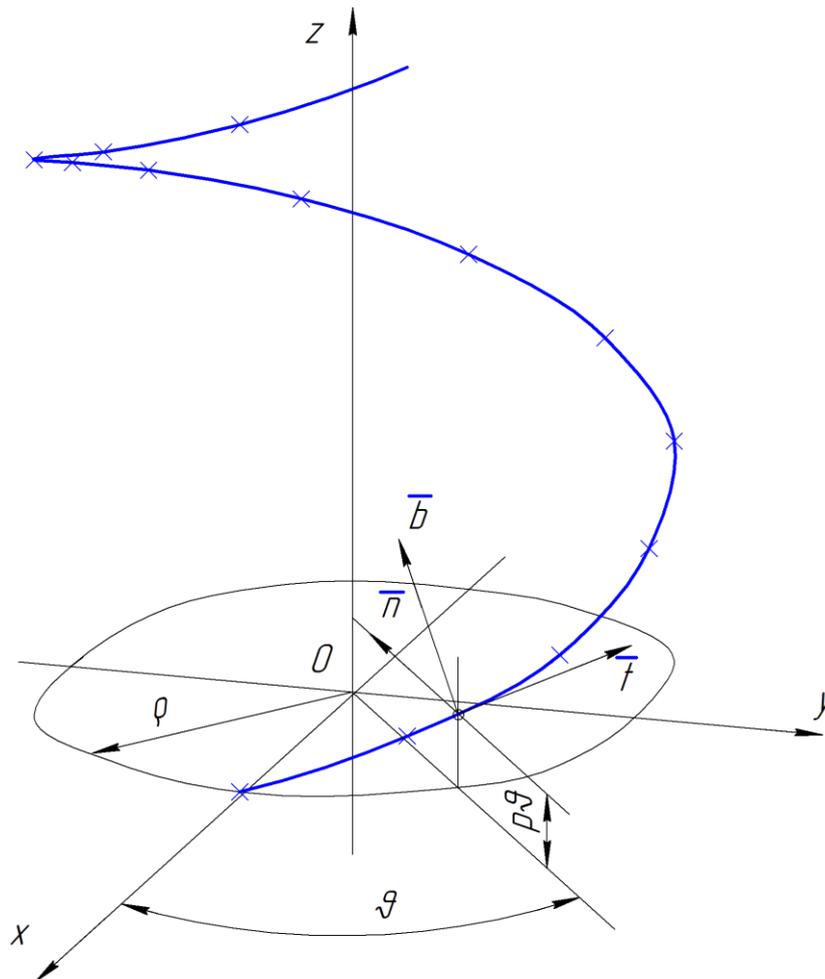


Рис. 1.2. Винтовая линия

Введем обозначение:

$tg\gamma = p/\rho$ – угол подъема винтовой линии,

и представим:

$$|\bar{r}'| = \sqrt{\rho^2 + p^2} = \rho\sqrt{1 + (p/\rho)^2} = \rho/\cos\gamma,$$

$$|(\bar{r}' \times \bar{r}'')| = \sqrt{\rho^2(\rho^2 + p^2)} = \rho^2/\cos\gamma.$$

Главные вектора винтовой линии:

$$\bar{t} = \frac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\gamma \\ \cos\vartheta\cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \frac{(\bar{r}' \times \bar{r}'')}{|(\bar{r}' \times \bar{r}'')|} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\gamma \\ -\cos\vartheta\sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = (\bar{b} \times \bar{t}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \sin\vartheta\sin\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma & \cos\gamma \\ -\sin\vartheta\cos\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Натуральный параметр винтовой линии (длина дуги):

$$S = \int |\bar{r}'| d\vartheta = \int (\rho/\cos\gamma) d\vartheta = \rho\vartheta/\cos\gamma.$$

Кривина и кручение винтовой линии:

$$k = \frac{|(\bar{r}' \times \bar{r}'')|}{|\bar{r}'|^3} = \frac{\rho^2/\cos\gamma}{(\rho/\cos\gamma)^3} = \frac{\cos^2\gamma}{\rho},$$

$$\tau = \frac{|(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')|}{|(\bar{r}' \times \bar{r}'')|^2} = \frac{\rho^2 p}{(\rho^2/\cos\gamma)^2} = \frac{\sin\gamma\cos\gamma}{\rho}.$$

1.3. Уравнение поверхности и нормаль

Уравнение поверхности можно задать в одной из следующих форм:

а) неявная форма:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1.8)$$

б) явная форма:

$$z = f(x, y), \quad (1.9)$$

в) параметрическая форма:

$$\bar{r} = \bar{r}(u, \vartheta) = \begin{pmatrix} x(u, \vartheta) \\ y(u, \vartheta) \\ z(u, \vartheta) \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Изменяя всевозможным образом параметры u и \mathcal{G} , получим радиус-вектор и координаты точек поверхности. Каждой паре значений u и \mathcal{G} отвечает точка поверхности. Уравнение (1.9) есть частный случай уравнений (1.10). Исключая из уравнений (1.10) параметры u и \mathcal{G} , получим уравнение (1.8). В дальнейшем будем использовать параметрическую форму уравнения поверхности и предполагать, что векторная функция (1.10) есть дифференцируемая функция от параметров u и \mathcal{G} различных порядков.

Обозначим частные производные

а) первого порядка:

$$\bar{r}_u = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_\mathcal{G} = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mathcal{G}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathcal{G}} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathcal{G}} \\ \frac{\partial z}{\partial \mathcal{G}} \end{vmatrix}, \quad (1.11)$$

б) второго порядка:

$$\bar{r}_{uu} = \left| \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial u} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial u} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial u} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial u} \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_{u\mathcal{G}} = \left| \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial u \partial \mathcal{G}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial \mathcal{G}} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial \mathcal{G}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial \mathcal{G}} \end{vmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\bar{r}_{\mathcal{G}\mathcal{G}} = \left| \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \mathcal{G} \partial \mathcal{G}} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \mathcal{G} \partial \mathcal{G}} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \mathcal{G} \partial \mathcal{G}} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial \mathcal{G} \partial \mathcal{G}} \end{vmatrix}$$

Криволинейные координаты на поверхности. При фиксированном значении параметра $\mathcal{G} = Const$ и изменении параметра u точка $\bar{r}\{x, y, z\}$ опишет кривую, лежащую на поверхности. Если задать \mathcal{G} различные значения $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$, то получим семейство кривых на поверхности. Так как $\mathcal{G} = Const$ и при движении вдоль каждой кривой изменяется только параметр u , то эти кривые называются u -линиями (рис. 1.3). Аналогично, давая параметру u различные постоянные значения $u = u_1, u_2, \dots$, получим второе семейство кривых – \mathcal{G} -линии.

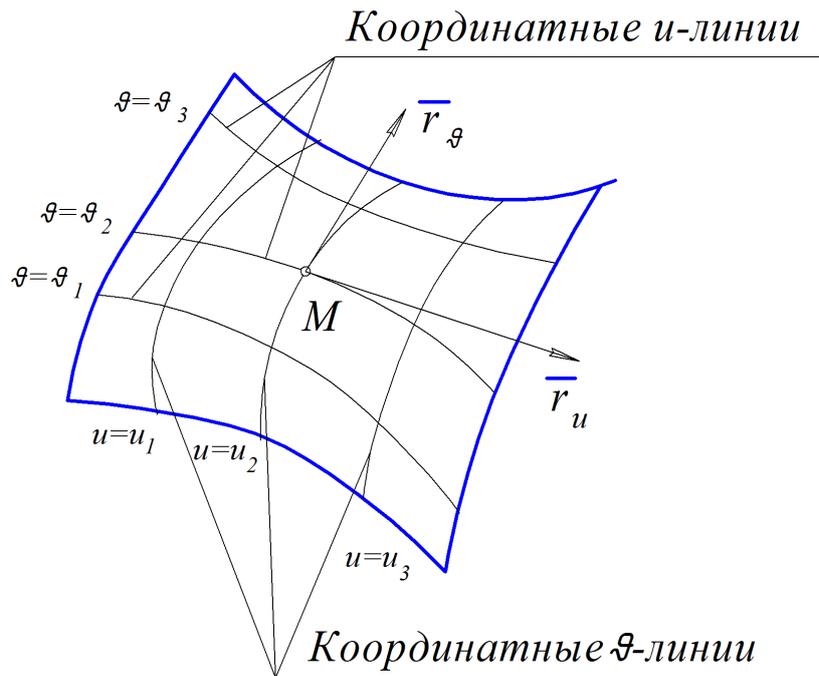


Рис. 1.3. Криволинейные координаты на поверхности

Таким образом, на поверхности образуется сеть кривых – координатных линий, а два числа $u = u_i$ и $g = g_i$ являются криволинейными или гауссовыми координатами точки M на поверхности. Направление касательных к координатным линиям определяются векторами \bar{r}_u и \bar{r}_g (см. п.1.1).

Касательная плоскость и нормаль. Если на поверхности через данную точку $M(\bar{r}; x, y, z)$ провести всевозможные кривые, то касательные к ним в точке M располагаются в одной плоскости – касательной плоскости к поверхности. В точке M это плоскость векторов \bar{r}_u и \bar{r}_g . Так как касательная плоскость проходит через вектора \bar{r}_u и \bar{r}_g в данной точке, то она перпендикулярна к их векторному произведению $[\bar{r}_u \times \bar{r}_g]$, которое определяет направление нормали к поверхности:

$$\bar{n} = [\bar{r}_u \times \bar{r}_g] \quad (1.13)$$

Орт нормали к поверхности

$$\bar{e} = \frac{(\bar{r}_u \times \bar{r}_g)}{|(\bar{r}_u \times \bar{r}_g)|} = \frac{(\bar{r}_u \times \bar{r}_g)}{g} \quad (1.14)$$

(значение параметра g см. п. 1.4).

Если векторное произведение $[\bar{r}_u \times \bar{r}_g] \neq 0$, то точка поверхности называется обыкновенной, если $[\bar{r}_u \times \bar{r}_g] = 0$, точка поверхности – особая точка параметризации. Такие точки мы будем исключать из рассмотрения.

1.4. Квадратичные формы

Криволинейные координаты на поверхности пусть определяются выражениями:

$$u = u(\phi), \quad \mathcal{G} = (\phi),$$

где ϕ – независимая переменная. Пользуясь параметрическим представлением поверхности (1.10), радиус-вектор точки можно записать

$$\bar{r} = \bar{r}(u(\phi), \mathcal{G}(\phi)), \quad (1.15)$$

которое определяет некоторую кривую на поверхности. Дифференциал радиуса-вектора:

$$d\bar{r} = \bar{r}_u(u, \mathcal{G})du + \bar{r}_\mathcal{G}(u, \mathcal{G})d\mathcal{G}, \quad (1.16)$$

где $du = u'(\phi)d\phi$, $d\mathcal{G} = \mathcal{G}'(\phi)d\phi$. Вектор $d\bar{r}$ направлен по касательной к кривой, разлагается по векторам \bar{r}_u и $\bar{r}_\mathcal{G}$ и, следовательно, коллинеарен с ними и лежит в касательной плоскости поверхности. Дифференциал дуги ds кривой (см. (1.3)):

$$ds = |d\bar{r}| = |\bar{r}_u du + \bar{r}_\mathcal{G} d\mathcal{G}|,$$

или

$$ds^2 = (\bar{r}_u du + \bar{r}_\mathcal{G} d\mathcal{G})^2 = \bar{r}_u \bar{r}_u du du + 2\bar{r}_u \bar{r}_\mathcal{G} du d\mathcal{G} + \bar{r}_\mathcal{G} \bar{r}_\mathcal{G} d\mathcal{G} d\mathcal{G}. \quad (1.17)$$

Введем для скалярных произведений векторов сокращенные обозначения:

$$E(u, \mathcal{G}) = \bar{r}_u \bar{r}_u, \quad F(u, \mathcal{G}) = \bar{r}_u \bar{r}_\mathcal{G}, \quad G(u, \mathcal{G}) = \bar{r}_\mathcal{G} \bar{r}_\mathcal{G}, \quad (1.18)$$

и выражение (1.17) перепишем в виде

$$I = ds^2 = E du du + 2F du d\mathcal{G} + G d\mathcal{G} d\mathcal{G}. \quad (1.19)$$

Выражение в правой части называется первой основной квадратичной формой.

Вектора \bar{r}_u , $\bar{r}_\mathcal{G}$ и коэффициенты E , F , G зависят только от выбора точки $M(u, \mathcal{G})$ и не зависят от дифференциалов du и $d\mathcal{G}$, которые определяют только направление касательной к кривой.

Продифференцируем вектор $d\bar{r}$ (1.16):

$$d^2\bar{r} = \bar{r}_{uu}(u, \mathcal{G})du du + 2\bar{r}_{u\mathcal{G}}(u, \mathcal{G})du d\mathcal{G} + \bar{r}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(u, \mathcal{G})d\mathcal{G} d\mathcal{G} + \bar{r}_u(u, \mathcal{G})d^2u + \bar{r}_\mathcal{G}(u, \mathcal{G})d^2\mathcal{G} \quad (1.20)$$

и умножим скалярно на орт нормали \bar{e} :

$$\bar{e} d^2\bar{r} = (\bar{e} \bar{r}_{uu}) du du + 2(\bar{e} \bar{r}_{u\mathcal{G}}) du d\mathcal{G} + (\bar{e} \bar{r}_{\mathcal{G}\mathcal{G}}) d\mathcal{G} d\mathcal{G} \quad (1.21)$$

Введем обозначения:

$$L(u, \mathcal{G}) = \bar{e} \bar{r}_{uu}, \quad M(u, \mathcal{G}) = \bar{e} \bar{r}_{u\mathcal{G}}, \quad N(u, \mathcal{G}) = \bar{e} \bar{r}_{\mathcal{G}\mathcal{G}} \quad (1.22)$$

и запишем:

$$II = \bar{e} d^2\bar{r} = L du du + 2M du d\mathcal{G} + N d\mathcal{G} d\mathcal{G}. \quad (1.23)$$

Эта форма называется второй основной квадратичной формой, причем коэффициенты её суть функции координат u и \mathcal{G} точки M .

Инварианты квадратичных форм:

$$g = \sqrt{E \cdot G - F \cdot F}, \quad W = L \cdot N - M \cdot M \quad (1.24)$$

Коэффициенты второй квадратичной формы можно получить следующим образом. Запишем орт нормали к поверхности и его дифференциал:

$$\bar{e} = \bar{e}(u, \mathcal{G}), \quad d\bar{e} = \bar{e}_u du + \bar{e}_g d\mathcal{G},$$

воспользуемся скалярными произведениями:

$$\bar{e}\bar{r}_u = 0 \quad \text{и} \quad \bar{e}\bar{r}_g = 0,$$

которые продифференцируем:

$$\begin{aligned} \bar{e}_u \bar{r}_u + \bar{e} \bar{r}_{uu} &= 0, & \bar{e}_u \bar{r}_g + \bar{e} \bar{r}_{ug} &= 0, \\ \bar{e}_g \bar{r}_u + \bar{e} \bar{r}_{ug} &= 0, & \bar{e}_g \bar{r}_g + \bar{e} \bar{r}_{gg} &= 0. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения с выражениями (1.22), получаем:

$$\begin{aligned} L(u, \mathcal{G}) &= \bar{e} \bar{r}_{uu} = -\bar{e}_u \bar{r}_u, \\ M(u, \mathcal{G}) &= \bar{e} \bar{r}_{ug} = -\bar{e}_u \bar{r}_g = -\bar{e}_g \bar{r}_u, \\ N(u, \mathcal{G}) &= \bar{e} \bar{r}_{gg} = -\bar{e}_g \bar{r}_g. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Перемножим скалярно вектора $d\bar{r}$ и $d\bar{e}$ и получим:

$$\begin{aligned} \bar{e} d^2 \bar{r} &= -d\bar{r} \cdot d\bar{e} = -[\bar{r}_u \bar{e}_u dud u + (\bar{r}_u \bar{e}_g + \bar{r}_g \bar{e}_u) dud \mathcal{G} + \bar{r}_g \bar{e}_g d\mathcal{G} d\mathcal{G}] = \\ &= Ldudu + 2Mdud\mathcal{G} + Nd\mathcal{G}d\mathcal{G} \end{aligned}$$

Дифференциалы du , $d\mathcal{G}$, $d\bar{r}$, $d\bar{e}$ берутся при одном том же бесконечно малом смещении из данной точки поверхности.

1.5. Кривизна и кручение поверхности

Через точку М на поверхности проведем кривую. Текущие координаты выразим как функции параметра, в качестве которого принята длина дуги S кривой:

$$u = u(S), \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(S),$$

и уравнение кривой представим в виде:

$$\bar{r} = \bar{r}[u(S), \mathcal{G}(S)].$$

Частные производные:

$$\begin{aligned} d\bar{r} &= \dot{\bar{r}} = \bar{r}_u(u, \mathcal{G})du + \bar{r}_g(u, \mathcal{G})d\mathcal{G}, \\ d^2 \bar{r} &= \ddot{\bar{r}} = \bar{r}_{uu} dud u + 2\bar{r}_{ug} dud \mathcal{G} + \bar{r}_{gg} d\mathcal{G} d\mathcal{G} + \bar{r}_u d^2 u + \bar{r}_g d^2 \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

В точке М поверхности проведем к кривой касательную $d\bar{r}$, нормаль \bar{n} и бинормаль \bar{b} , нормаль \bar{e} к поверхности и вектор $\delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_g \delta \mathcal{G}$, лежащий в касательной плоскости перпендикулярный к вектору $d\bar{r}$ (рис. 1.4). Угол между векторами \bar{e} и \bar{n} , между векторами $\delta\bar{r}$ и \bar{b} равен Θ .

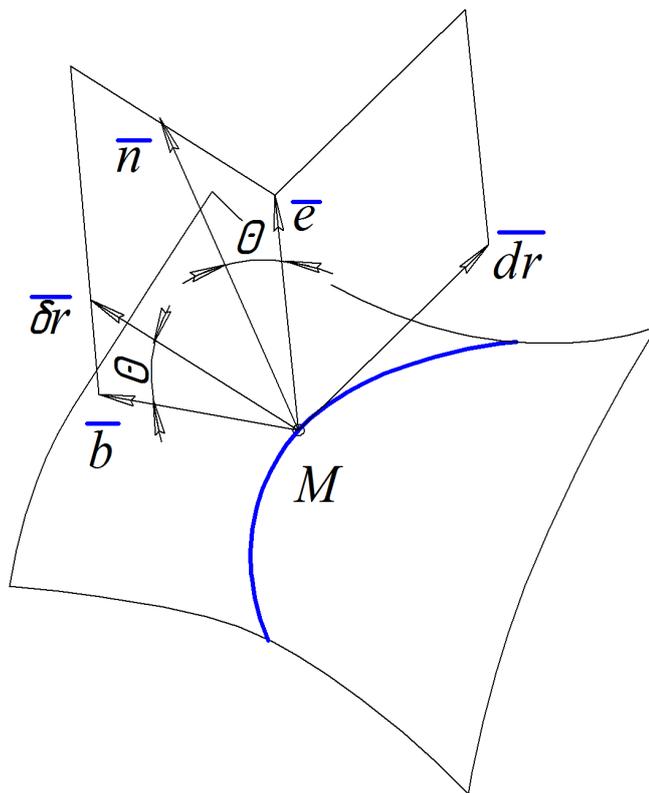


Рис. 1.4. Главные вектора кривой на поверхности

Справедливы для кривой следующие соотношения (см. (1.5) и 1.7))

$$k \cdot \bar{n} = \ddot{\bar{r}}, \quad \dot{\bar{n}} = -k \cdot \bar{t} + \tau \cdot \bar{b}$$

Умножим данные вектора скалярно на вектора \bar{e} и $\delta\bar{r}$ соответственно,

$$k(\bar{e} \cdot \bar{n}) = \bar{e} \cdot \ddot{\bar{r}}, \quad (\dot{\bar{n}} \cdot \delta\bar{r}) = \tau(\bar{b} \cdot \delta\bar{r})$$

Из данных соотношении на основании п. 1.4 получаем:

$$\begin{aligned} k \cos\Theta &= Ldu du + 2Mdud\vartheta + Nd\vartheta d\vartheta \\ \tau \cos\Theta &= Ldu\delta u + M(du\delta\vartheta + d\vartheta\delta u) + Nd\vartheta\delta\vartheta \end{aligned} \quad (1.27)$$

Роль формул (1.27) заключается в том, что для всевозможных кривых, проведенных на поверхности через данную точку M, устанавливаются определенные зависимости между направлением касательной, положение соприкасающейся плоскости, кривизной и кручением.

Среди всевозможных кривых с касательной $d\bar{r}$ можно выбрать одну наиболее непосредственно связанную с самой поверхностью. Это кривая, соприкасающаяся плоскость которой совпадает с нормальной плоскостью поверхности (проходит через вектора \bar{e} и $d\bar{r}$, угол $\Theta=0$). Кривизну и кручение данной кривой, соответственно, называются:

а) нормальной кривизной поверхности

$$\chi = Ldu du + 2Mdud\vartheta + Nd\vartheta d\vartheta, \quad (1.28)$$

б) относительным кручением поверхности:

$$\tau = Ldu\delta u + M(du\delta\vartheta + d\vartheta\delta u) + Nd\vartheta\delta\vartheta, \quad (1.29)$$

в направлении, определяемом вектором $d\bar{r}$. Здесь дифференциалы du , $d\vartheta$, δu и $\delta\vartheta$ нормированы так, что:

$$|d\bar{r}| = |\bar{r}_u du + \bar{r}_\vartheta d\vartheta| = 1, \quad |\delta\bar{r}| = |\bar{r}_u \delta u + \bar{r}_\vartheta \delta\vartheta| = 1, \quad (1.30)$$

то есть вектора $d\bar{r}$ и $\delta\bar{r}$ единичные орты.

1.6. Формулы Эйлера и Родрига

Выберем на поверхности точку М и проведем в касательной плоскости два взаимно ортогональных орта (рис. 1.5):

$$\begin{aligned} \bar{i}_s &= \bar{r}_u du + \bar{r}_\vartheta d\vartheta, & |\bar{i}_s| &= 1, \\ \bar{i}_q &= \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_\vartheta \delta\vartheta, & |\bar{i}_q| &= 1 \end{aligned}$$

Нормальные кривизны и относительное кручение поверхности вдоль данных ортов (см. (1.28) и (1.29)):

$$\begin{aligned} \chi_s &= Ldu du + 2Mdud\vartheta + Nd\vartheta d\vartheta, \\ \chi_q &= L\delta u \delta u + 2M\delta u \delta\vartheta + N\delta\vartheta \delta\vartheta, \\ \tau_s = \tau_q &= Ldu \delta u + M(du \delta\vartheta + d\vartheta \delta u) + Nd\vartheta \delta\vartheta. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Через точку М можно провести бесконечное множество ортов \bar{i}_s и \bar{i}_q , но существуют два ортогональных орта \bar{i}_I и \bar{i}_{II} , вдоль которых кривизны χ_I и χ_{II} принимают экстремальные значения (максимальное и минимальное). Экстремальные кривизны χ_I и χ_{II} называются главной кривизной поверхности, а направления \bar{i}_I и \bar{i}_{II} – главные направления поверхности. Относительное кручение поверхности вдоль главных направлений $\tau_I = \tau_{II} = 0$.

Кривизна χ произвольного нормального сечения выражается по формуле Эйлера через главные кривизны χ_I и χ_{II} и угол φ между касательной этого нормального сечения и первым главным направлением \bar{i}_I :

$$\chi = \chi_I \cos^2 \varphi + \chi_{II} \sin^2 \varphi \quad (1.32)$$

Если совершается бесконечно малое перемещение $d\bar{r}$ по кривой, то и нормаль \bar{e} также смещается на малую величину $d\bar{e}$. Малые перемещения $d\bar{r}$ и $d\bar{e}$ связаны формулой Родрига:

$$\begin{vmatrix} de_I \\ de_{II} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \chi_I & 0 \\ 0 & \chi_{II} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dr_I \\ dr_{II} \end{vmatrix}. \quad (1.33)$$

Перепишем в систему координат ортов \bar{i}_s и \bar{i}_q :

$$\begin{vmatrix} de_s \\ de_q \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_I & 0 \\ 0 & \chi_{II} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma \\ \sin \sigma & \cos \sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dr_s \\ dr_q \end{vmatrix}.$$

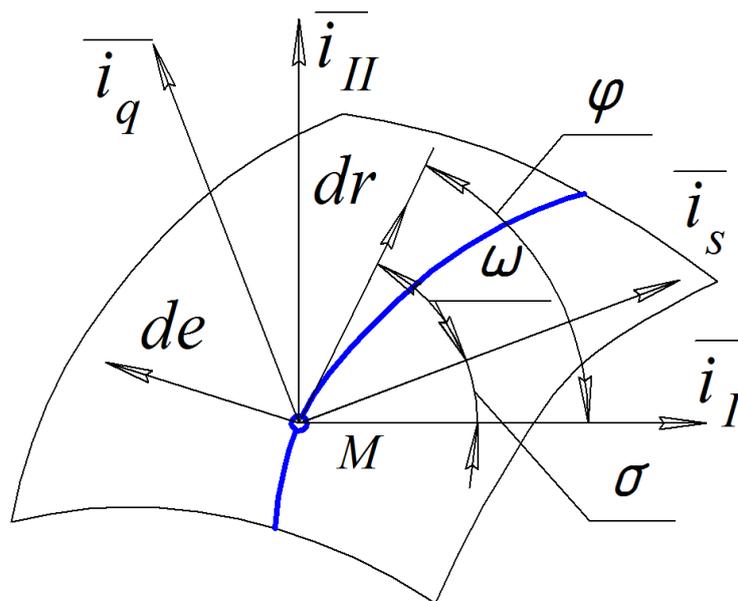


Рис. 1.5. Направляющие орты касательной плоскости

Правила преобразования систем координат описаны в п. 3.1. После перемножения матриц получим:

$$\begin{vmatrix} de_s \\ de_q \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \chi_I \cos^2 \sigma + \chi_{II} \sin^2 \sigma & -(\chi_I - \chi_{II}) \sin \sigma \cos \sigma \\ -(\chi_I - \chi_{II}) \sin \sigma \cos \sigma & \chi_I \sin^2 \sigma + \chi_{II} \cos^2 \sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dr_s \\ dr_q \end{vmatrix}$$

На основании формулы Эйлера (1.32):

$$\begin{aligned} \chi_s &= \chi_I \cos^2 \sigma + \chi_{II} \sin^2 \sigma = \frac{1}{2}(\chi_I + \chi_{II}) + \frac{1}{2}(\chi_I - \chi_{II}) \cos 2\sigma \\ \chi_q &= \chi_I \sin^2 \sigma + \chi_{II} \cos^2 \sigma = \frac{1}{2}(\chi_I + \chi_{II}) - \frac{1}{2}(\chi_I - \chi_{II}) \cos 2\sigma \\ \tau_s &= -(\chi_I - \chi_{II}) \sin \sigma \cos \sigma = -\frac{1}{2}(\chi_I - \chi_{II}) \sin 2\sigma \end{aligned} \quad (1.34)$$

Итак, вектора $d\bar{r}$ и $d\bar{e}$ связаны соотношением:

$$\begin{vmatrix} de_s \\ de_q \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \chi_s & \tau_s \\ \tau_s & \chi_q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dr_s \\ dr_q \end{vmatrix} \quad (1.35)$$

Данное выражение – обобщенная формула Родрига.

Инварианты кривизны поверхности

а) средняя кривизна поверхности:

$$2H = \chi_I + \chi_{II} = \chi_s + \chi_q = \frac{E \cdot N - 2M \cdot F + G \cdot L}{E \cdot G - F \cdot F} \quad (1.36)$$

б) гауссова кривизна:

$$K = \chi_I \chi_{II} = \chi_s \chi_q - \tau_s \tau_s = \frac{L \cdot N - M \cdot M}{E \cdot G - F \cdot F} = \frac{W}{g^2} \quad (1.37)$$

Уравнения (1.35) можно спроектировать на систему координат ортов \bar{i}_ω и \bar{i}_t

$$\begin{vmatrix} de_\omega \\ de_t \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \chi_s & \tau_s \\ \tau_s & \chi_q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dr_\omega \\ dr_t \end{vmatrix}.$$

После преобразований получим:

$$\begin{aligned} \chi_\omega &= \frac{1}{2}(\chi_s + \chi_{qt}) + \left[\frac{1}{2}(\chi_s - \chi_{qt}) \cos 2\omega + \tau_s \sin 2\omega \right] \\ \chi_t &= \frac{1}{2}(\chi_s + \chi_{qt}) - \left[\frac{1}{2}(\chi_s - \chi_{qt}) \cos 2\omega + \tau_s \sin 2\omega \right] \\ \tau_\omega &= -\frac{1}{2}(\chi_s - \chi_{qt}) \sin 2\omega + \tau_s \cos 2\omega \end{aligned} \quad (1.38)$$

Итак, зная нормальную кривизну и относительное кручение поверхности по двум ортогональным направлениям, всегда можно определить их по любым другим направлениям.

1.7. Вычисление кривизны и относительного кручения поверхности

Расчет кривизны и относительного кручения поверхности рассмотрим на примере архимедовой винтовой поверхности.

Уравнение архимедовой винтовой поверхности (см. п. 1.2, пример 1.1)

$$\bar{r} = \begin{vmatrix} (r_0 + u \cos \alpha) \cos \vartheta \\ -(r_0 + u \cos \alpha) \sin \vartheta \\ p \vartheta - u \sin \alpha \end{vmatrix}$$

Введем обозначения

$$r_i = (r_0 + u \cos \alpha), \quad \operatorname{tg} \gamma_i = \frac{p}{r_i},$$

$$g = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma_i} = \sqrt{\cos^2 \gamma_i + \cos^2 \alpha \sin^2 \gamma_i} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma_i}$$

Частные производные от уравнения поверхности по криволинейным координатам:

а) первого порядка

$$\bar{r}_u = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \vartheta \\ \cos \alpha \sin \vartheta \\ -\sin \alpha \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_\vartheta = \begin{vmatrix} -r_i \sin \vartheta \\ r_i \cos \vartheta \\ p \end{vmatrix},$$

б) второго порядка:

$$\bar{r}_{uu} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_{u\vartheta} = \begin{vmatrix} -\cos \alpha \sin \vartheta \\ \cos \alpha \cos \vartheta \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_{\vartheta\vartheta} = \begin{vmatrix} -r_i \cos \vartheta \\ -r_i \sin \vartheta \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Координатная u – линия ($\mathcal{G} = const$) есть прямая линия, совпадающая с вектором \bar{r}_u . Координатная \mathcal{G} -линия ($u = const$) – винтовая линия, касательная к которой определяется вектором \bar{r}_g .

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$E = (\bar{r}_u \bar{r}_u) = 1,$$

$$F = (\bar{r}_u \bar{r}_g) = -p \sin \alpha,$$

$$G = (\bar{r}_g \bar{r}_g) = r_i^2 + p^2 = (r_i / \cos \gamma_i)^2$$

$$g = \sqrt{E \cdot G - F \cdot F} = \sqrt{1 \cdot (r_i / \cos \gamma_i)^2 - (-p \sin \alpha) \cdot (-p \sin \alpha)} = \frac{r_i g_0}{\cos \gamma_i}$$

Орт нормали к поверхности:

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \frac{(\bar{r}_u \times \bar{r}_g)}{g} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \alpha \cos \mathcal{G} & \cos \alpha \sin \mathcal{G} & -\sin \alpha \\ -r_i \sin \mathcal{G} & r_i \cos \mathcal{G} & p \end{vmatrix} = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} r_i \sin \alpha \cos \mathcal{G} + p \cos \alpha \sin \mathcal{G} \\ r_i \sin \alpha \sin \mathcal{G} - p \cos \alpha \cos \mathcal{G} \\ r_i \cos \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{g_0} \begin{vmatrix} \sin \gamma_i \cos \alpha \sin \mathcal{G} + \cos \gamma_i \sin \alpha \cos \mathcal{G} \\ -\sin \gamma_i \cos \alpha \cos \mathcal{G} + \cos \gamma_i \sin \alpha \sin \mathcal{G} \\ \cos \gamma_i \cos \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Коэффициенты второй квадратичной формы:

$$L = \bar{e} \cdot \bar{r}_{uu} = 0,$$

$$M = \bar{e} \cdot \bar{r}_{ug} = -\sin \gamma_i \cos^2 \alpha / g_0$$

$$N = \bar{e} \cdot \bar{r}_{gg} = -r_i \sin \alpha \cos \gamma_i / g_0$$

$$W = L \cdot N - M \cdot M = -(\sin \gamma_i \cos^2 \alpha / g_0)^2$$

Инварианты кривизны поверхности

а) гауссова кривизна:

$$K = \frac{W}{g^2} = -\left(\frac{\sin \gamma_i \cos \gamma_i \cos^2 \alpha}{r_i g_0^2} \right)^2$$

б) средняя кривизна:

$$2H = (LG - 2MF + NE) / g^2 =$$

$$= \left[0 \cdot G - 2(-\sin \gamma_i \cos^2 \alpha / g_0)(-p \sin \alpha) + (-r_i \sin \alpha \cos \gamma_i / g_0) \cdot 1 \right] / \frac{r_i g_0}{\cos \gamma_i} =$$

$$= -\frac{\cos \gamma_i \sin \alpha}{r_i g_0} \left[1 + \left(\frac{\sin \gamma_i \cos^2 \alpha}{g_0} \right)^2 \right]$$

Взаимно ортогональные орты в касательной плоскости поверхности можно выбирать произвольно. Но рекомендуется один из ортов направить по касательной к координатной линии.

Примем за орт \bar{i}_q касательную к винтовой линии (координатная \mathcal{G} – линия):

$$\bar{i}_q = \frac{\bar{r}_g}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\sqrt{(r_i/\cos\gamma_i)^2}} \begin{vmatrix} -r_i \sin \mathcal{G} \\ r_i \cos \mathcal{G} \\ p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin \mathcal{G} \cos \gamma_i \\ \cos \mathcal{G} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \end{vmatrix},$$

$$\delta \mathcal{G} = \frac{\cos \gamma_i}{r_i}, \quad \delta u = 0.$$

Орт \bar{i}_s :

$$\begin{aligned} \bar{i}_s &= \bar{i}_q \times \bar{e} = \frac{\bar{r}_g \times (\bar{r}_u \times \bar{r}_g)}{\sqrt{G}g} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}g} [\bar{r}_u (\bar{r}_g \cdot \bar{r}_g) - \bar{r}_g (\bar{r}_u \times \bar{r}_g)] = \bar{r}_u \frac{1}{\sqrt{G}g} + \bar{r}_g \left(-\frac{F}{\sqrt{G}g} \right), \end{aligned}$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{G}g} = \frac{1}{g_0}, \quad d\mathcal{G} = -\frac{F}{\sqrt{G}g} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0}.$$

$$\bar{i}_s = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \mathcal{G} \\ \cos \alpha \sin \mathcal{G} \\ -\sin \alpha \end{vmatrix} \frac{1}{g_0} + \begin{vmatrix} -r_i \sin \mathcal{G} \\ r_i \cos \mathcal{G} \\ p \end{vmatrix} \frac{\sin \alpha \sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0} =$$

$$= \frac{1}{g_0} \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \mathcal{G} - \sin \alpha \cos \gamma_i \sin \gamma_i \sin \mathcal{G} \\ \cos \alpha \sin \mathcal{G} + \sin \alpha \cos \gamma_i \sin \gamma_i \cos \mathcal{G} \\ -\sin \alpha \cos^2 \gamma_i \end{vmatrix}.$$

Нормальная кривизна поверхности

а) вдоль орта \bar{i}_s :

$$\begin{aligned} \chi_s &= Ldudu + 2Mdud\mathcal{G} + Nd\mathcal{G}d\mathcal{G} = \\ &= 0 \cdot dudu + 2 \left(-\frac{\cos^2 \alpha \sin \gamma_i}{g_0} \right) \frac{1}{g_0} \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0} \right) + \\ &+ \left(-\frac{r_i \sin \alpha \cos \gamma_i}{g_0} \right) \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0} \right)^2 = - \left(\frac{\sin \alpha \sin^2 \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0} \right) \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{g_0^2} \right), \end{aligned}$$

б) вдоль орта \bar{i}_q :

$$\begin{aligned}\chi_q &= L\delta u\delta u + 2M\delta u\delta\vartheta + N\delta\vartheta\delta\vartheta = \\ &= 0 \cdot dud u + 2M \cdot 0 \cdot \delta\vartheta + \left(-\frac{r_i \sin \alpha \cos \gamma_i}{g_0}\right) \left(\frac{\cos \gamma_i}{r_i}\right)^2 = -\frac{\sin \alpha \cos^3 \gamma_i}{r_i g_0},\end{aligned}$$

Относительное кручение поверхности:

$$\begin{aligned}\tau_s = \tau_q &= Ldu\delta u + M(du\delta\vartheta + d\vartheta\delta u) + Nd\vartheta\delta\vartheta = \\ &= 0 \cdot dud u + \left(-\frac{\cos^2 \alpha \sin \gamma_i}{g_0}\right) \left(\frac{1}{g_0} \frac{\cos \gamma_i}{r_i} + 0 \cdot \delta\vartheta\right) + \\ &+ \left(-\frac{r_i \sin \alpha \cos \gamma_i}{g_0}\right) \frac{\cos \gamma_i}{r_i} \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0}\right) = -\frac{\sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i}.\end{aligned}$$

Инварианты поверхности

а) средняя кривизна:

$$\begin{aligned}2H = \chi_s + \chi_q &= -\left(\frac{\sin \alpha \sin^2 \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0}\right) \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{g_0^2}\right) - \frac{\sin \alpha \cos^3 \gamma_i}{r_i g_0} = \\ &= -\frac{\sin \alpha \cos \gamma_i}{r_i g_0} \left[1 + \left(\frac{\cos \alpha \sin \gamma_i}{g_0}\right)^2\right]\end{aligned}$$

б) гауссова кривизна

$$\begin{aligned}K = \chi_s \cdot \chi_q - \tau_s \cdot \tau_s &= \\ &= \left(-\frac{\sin \alpha \sin^2 \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0}\right) \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{g_0^2}\right) \cdot \left(-\frac{\sin \alpha \cos^3 \gamma_i}{r_i g_0}\right) - \left(-\frac{\sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\cos^2 \alpha \sin \gamma_i \cos \gamma_i}{r_i g_0^2}\right)^2\end{aligned}$$

Данные инварианты совпадают с инвариантами, вычисленными через коэффициенты квадратичных форм. Данный расчет проверочный.

Главная нормальная кривизна и главные направления определяются из выражений (см. рис. 1.5):

$$\operatorname{tg} 2\sigma = \frac{2\tau_s}{(\sigma_s - \sigma_q)}, \quad \chi_{i,ii} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_s + \sigma_q) \pm \sqrt{(\sigma_s - \sigma_q)^2 + 4\tau_s^2} \right]$$

Если требуется вычислить нормальную кривизну поверхности вдоль орта \bar{i}_ω , то расчет ведется по формулам (1.38), причем угол ω равен

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\bar{i}_q \cdot \bar{i}_\omega}{\bar{i}_s \cdot \bar{i}_\omega}.$$

ГЛАВА 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ

2.1. Исходные понятия

Механизм – несвободная материальная система, образуемая из твердых тел, подвижно соединенных между собой. Звено – одно или несколько твердых тел, соединенных друг с другом и движущихся как одно целое.

При изучении структуры, кинематики, динамики механизмов будем предполагать, что звенья – абсолютно твердые тела, то есть расстояния между точками тела под действием на него сил неизменны. Реальные звенья – упругие твердые тела, и их деформации необходимо учитывать при исследовании законов движения механизмов и машин.

Звенья механизма соединены между собой подвижно. Кинематическая пара – соединение двух звеньев, позволяющее совершать то или иное движение относительно друг друга.

В местах соединения пары звеньев им придают определенные геометрические формы, чтобы обеспечить требуемый характер относительного движения. Кинематические элементы (элементы кинематической пары) – совокупность точек, линий и поверхностей, которыми звенья непрерывно касаются, характер соприкосновения которых определяет вид относительного движения.

Свободное твердое тело может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость. При переходе из одного положения в другое оно может совершить шесть независимых движений: три вращательных движений вокруг осей X , Y и Z и три поступательных вдоль этих осей (рис.2.1). То есть твердое тело имеет шесть степеней свободы $i=6$.

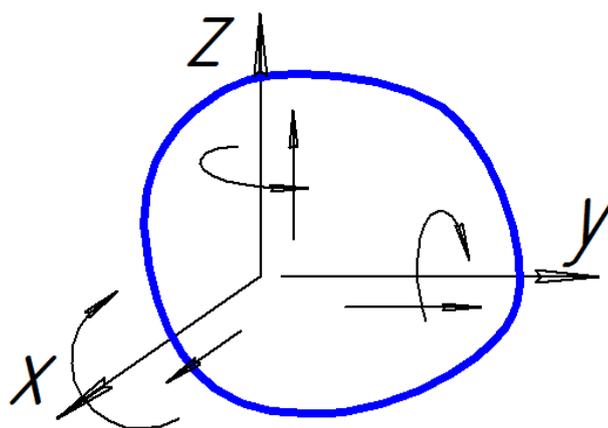


Рис. 2.1. Независимые движения тела в пространстве

В механизме кинематическая пара устанавливает ограничения, не позволяющие звеньям занимать произвольные положения и иметь произвольные скорости, которые называются связями.

Связи делятся на:

- геометрические или голономные – накладывают ограничения на положения тел или их перемещения;
- кинематические или неголономные – накладывают ограничения и на положения тел, и на их скорости.

Если налагаемые ограничения меняются с течением времени, то такая связь называется нестационарной (или реономной).

В кинематических парах устанавливаются только геометрические связи. Каждая связь лишает звено одной степени свободы. Число степеней свободы i и число наложенных связей S звена связаны соотношением $i + S = 6$.

При $S=0$ и $i=6$ звенья не соединены друг с другом, а при $S=6$ и $i=0$ соединение двух тел неподвижное.

Кинематические пары делятся на классы. Класс кинематической пары равен числу положенных связей $1 \leq S \leq 5$.

2.2. Классификация кинематических пар

При физической реализации ограничений, накладываемых кинематической парой, на звено будут действовать дополнительные силы, которые называются реакциями связей. В реальных конструкциях сила распределена по поверхности, но при расчетах мы считаем, что сила сосредоточена и приложена в точке. Поэтому вначале рассмотрим виды кинематических пар с точечными геометрическими связями.

Кинематическую пару класса 1 ($S=1, i=5$) образуют плоскость и шар (Рис. 2.2).

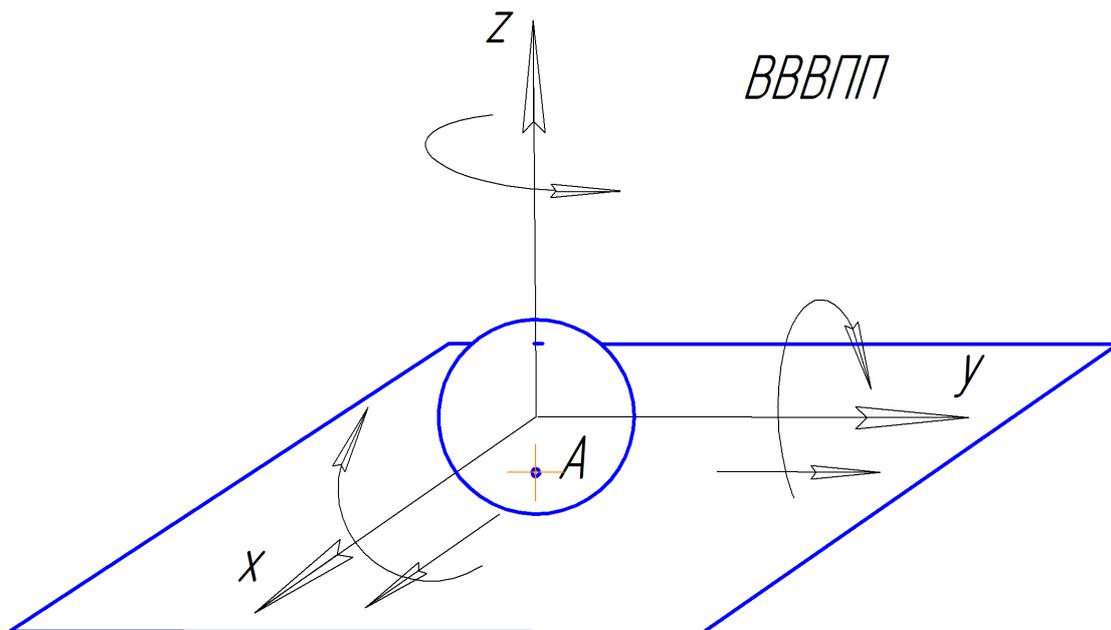


Рис. 2.2 Кинематическая пара класса 1

Относительное движение определяется пятью параметрами вращениями вокруг осей X , Y , Z и поступательными перемещениями вдоль осей x и y . Наложённая геометрическая связь в точке A ограничивает поступательное перемещение вдоль оси Z .

Кинематическая пара класса 2 ($S=2$, $i=4$, относительное движение определяется четырьмя параметрами) образуется:

а) плоскостью и двумя шарами, соединёнными друг с другом (рис. 2.3а) – относительное движение: вращения вокруг осей x и z , поступательные перемещения вдоль осей x и y , две геометрические связи в точках A и B ограничивают вращение вокруг оси y и поступательное перемещение вдоль оси z ;

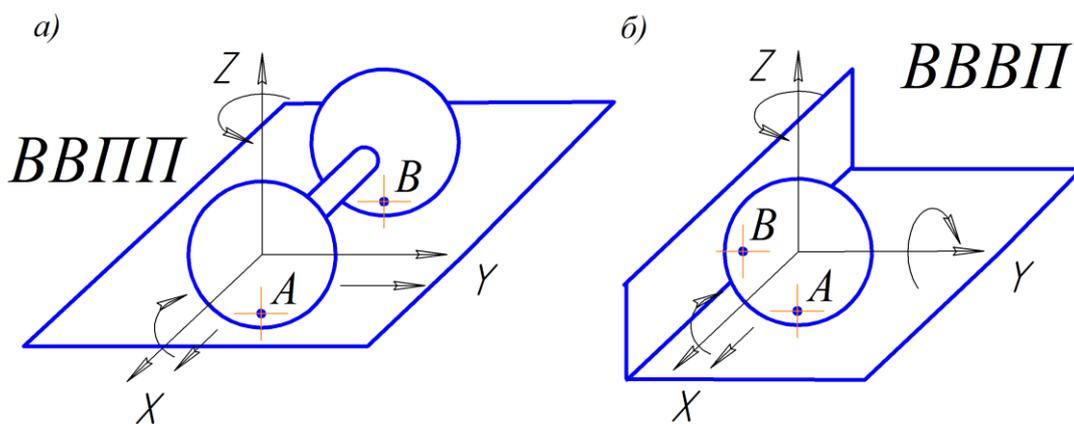


Рис. 2.3. Кинематическая пара класса 2

б) шаром и двумя соединительными плоскостями (рис.2.3б) – относительное движение: вращения вокруг осей x , y и z , поступательное перемещение вдоль оси x , геометрические связи в точках A и B ограничивают перемещения вдоль осей y и z .

Кинематическая пара класса 3 ($i=3$, $S=3$, относительное движение определяется тремя параметрами) образуется:

а) плоскостью и тремя соединёнными шарами (рис. 2.4а) – относительное движение: вращение вокруг оси z и поступательные перемещения вдоль осей x и y ; три геометрические связи в точках A , B и C ограничивают вращения вокруг осей x и y , поступательное перемещение вдоль оси z ;

б) двумя соединёнными плоскостями и двумя соединёнными шарами (рис. 2.4б) – относительное движение: вращения вокруг осей y и z , поступательные перемещение вдоль оси x ; три геометрические связи в точках A, B, C ограничивают вращение вокруг оси x и поступательные перемещения вдоль оси y и z ;

в) шаром и тремя соединениями плоскостями (рис. 2.4в) – относительное движение: вращения вокруг осей x , y , z ; три геометрические связи в точках A, B, C ограничивают поступательные перемещения вдоль осей x , y , z .

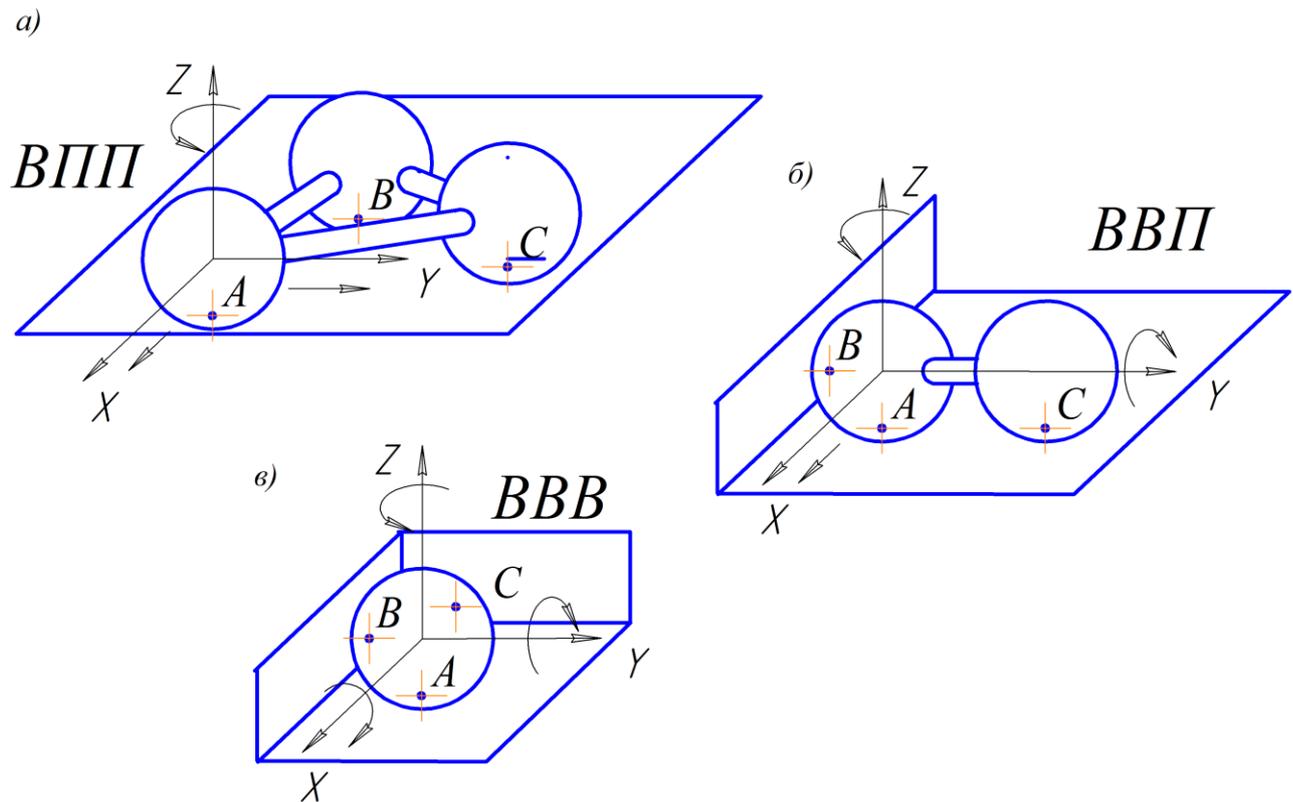


Рис. 2.4. Кинематическая пара класса 3

Кинематическая пара класса 4 ($i=2$, $S=4$, относительное движение определяется двумя параметрами, геометрические связи в точках А, В, С, D ограничивают четыре перемещения) образуются:

а) двумя соединенными плоскостями и четырьмя соединенными шарами (рис. 2.5а) – относительное движение: вращение вокруг оси z и поступательное перемещение вдоль оси x;

б) двумя соединенными плоскостями двумя соединенными шарами (рис. 2.5б) – относительные движения: вращение и поступательное перемещение вдоль оси x;

в) двумя соединенными плоскостями и тремя соединенными шарами (рис. 2.5в) – относительные движения: вращение вокруг оси z и поступательное перемещение вдоль оси x;

г) тремя соединенными плоскостями и двумя соединенными шарами (рис. 2.5г) – вращение вокруг осей x и z.

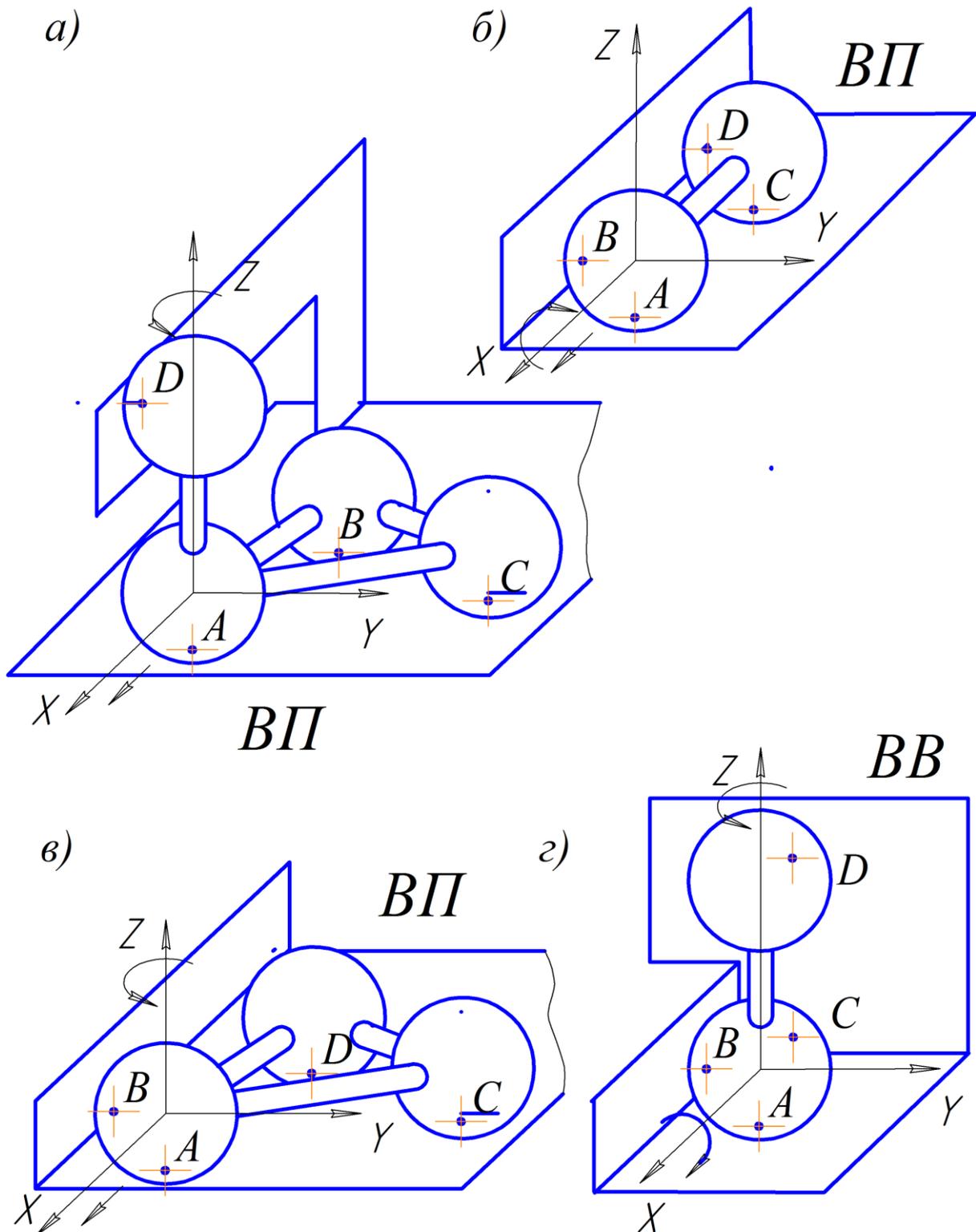


Рис. 2.5. Кинематическая пара класса 4

Кинематическая пара класса 5 ($i=1$, $S=5$, относительное движение определяется одним параметром, геометрические связи в точках А, В, С, D, F ограничивают пять перемещений) образуются:

а) тремя соединенными плоскостями и четырьмя соединенными шарами (рис. 2.6а) – относительное движение: вращение вокруг оси z,

б) тремя соединенными плоскостями и двумя соединенными шарами (рис. 2.6б) – относительное движение – вращение вокруг оси X ;

в) двумя соединенными плоскостями и тремя соединенными шарами (рис. 6в) – относительное движение – поступательное перемещение вдоль оси X .

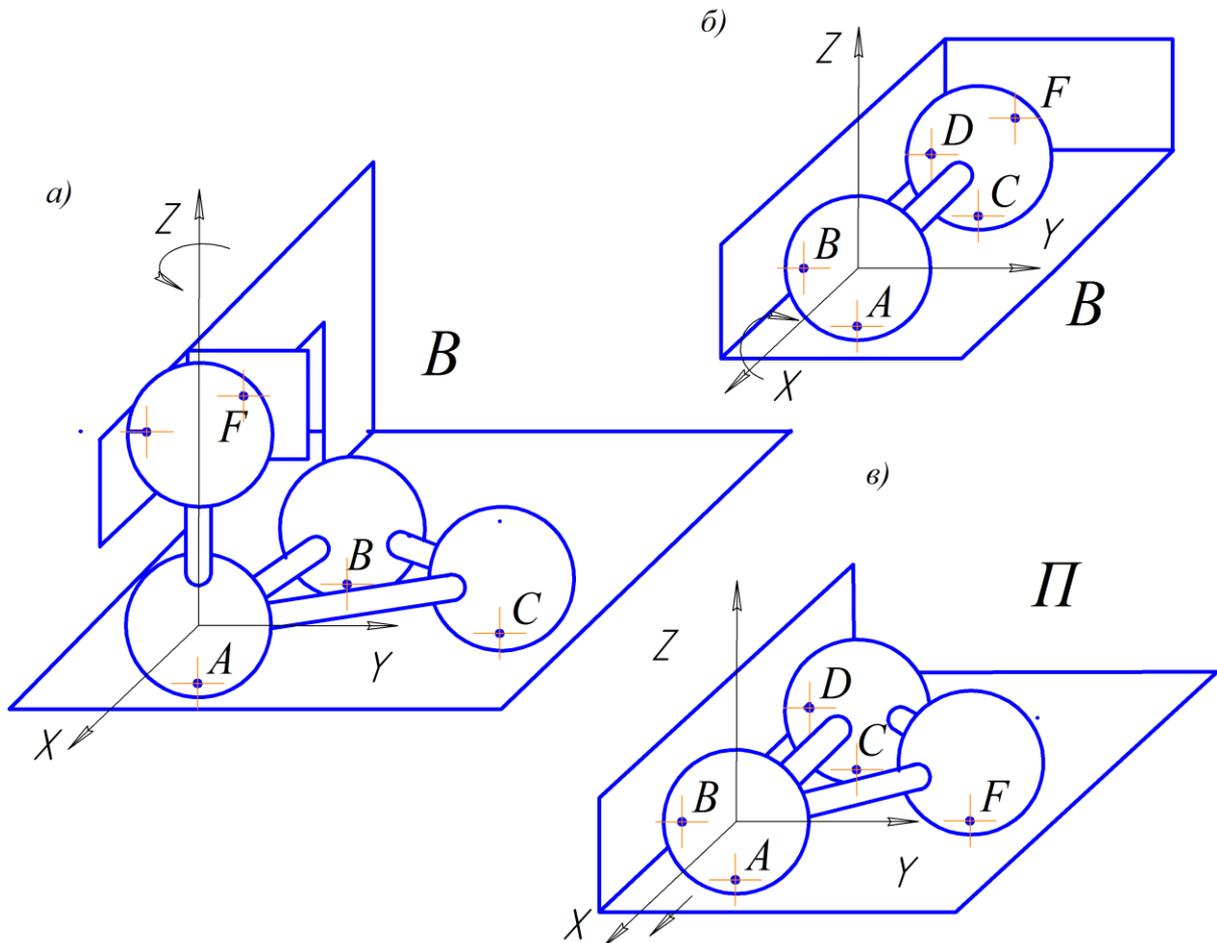


Рис. 2.6. Кинематическая пара класса 5

Здесь необходимо отметить, что следующие кинематические пары являются неустойчивыми:

а) пара класса 3 (рис. 2.4б) – может перейти в кинематическую пару класса 4 (рис. 5б);

б) кинематическая пара класса 2 (рис. 2.3б) – в кинематическую пару класса 5 (рис. 2.6в).

Устанавливая классы кинематических пар, принималось, что относительные перемещения совершаются за бесконечно малый промежуток времени dt . Эти перемещения можно рассматривать и в прямоугольной, и в косоугольной системе координат.

Относительное движение шаров может совершаться не только по плоскостям, но и по произвольным поверхностям (см. рис. 2.7, кинематическая пара класса 5).

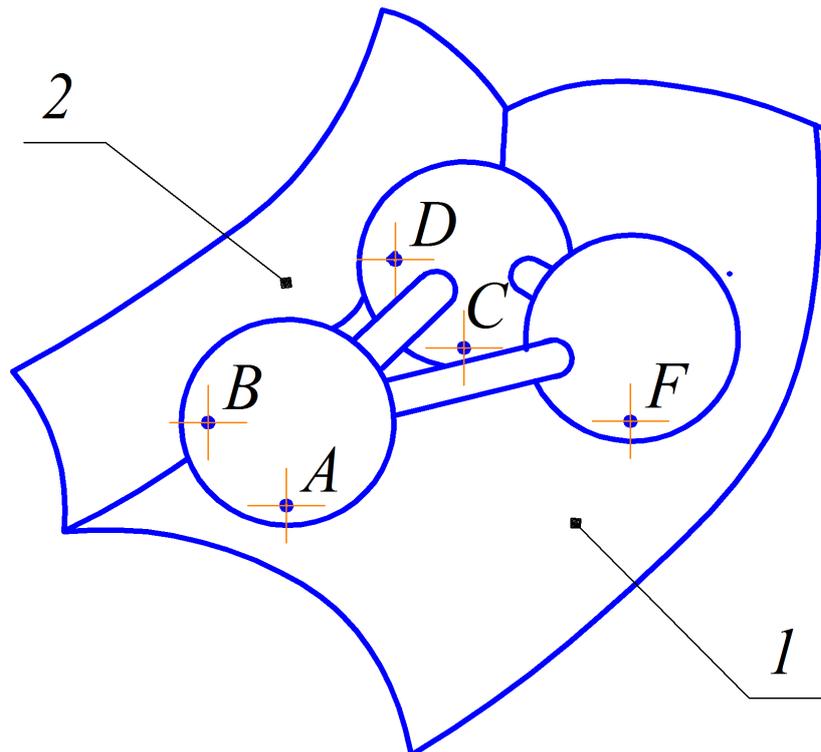


Рис. 2.7. Кинематическая пара класса 5, движение по поверхности

Примером такой пары служит соединение винт-гайка. Здесь поверхность 1 и 2 – винтовая поверхность, линия пересечения поверхностей – тоже винтовая линия.

2.3. Конструктивное исполнение кинематических пар

Качественная оценка конструкций, кинематических пар механизмов производится по следующим параметрам:

- точность взаимного положения звеньев;
- чувствительность к температурным деформациям;
- нагрузочная способность;
- стойкость против износа;
- сила трения;
- габариты и масса механизма;
- технологичность изготовления, стоимость.

Для того чтобы звенья кинематической пары непрерывно касались друг друга, необходимо предусмотреть так называемое замыкание. Различают:

- силовое замыкание, осуществляемое за счет веса звеньев и пружин;
- геометрическое замыкание, достигаемое приданием определенных геометрических форм кинематическим элементам.

Из условий: точности взаимного положения, чувствительности к температурным деформациям – в кинематических парах должны быть реализованы точечные геометрические связи, которые разносятся в пространстве. Из условий: нагрузочной способности и износостойкости – касание в кинематических парах должно быть по линиям или по поверхностям.

Из геометрии известно:

- а) две точки однозначно определяют прямую;
- б) через две точки можно провести любую кривую;
- в) на плоскостях кривая второго порядка (окружность, эллипс, парабола) определяется тремя точками;
- г) три точки определяют однозначно плоскость;
- д) через три точки можно провести любую поверхность;
- е) четыре точки в пространстве определяют поверхности второго порядка (цилиндр, конус, сфера).

Теоретически геометрическая связь приложена в точке. Но конструктивно в окрестности точки связь мы можем реализовать в виде кривой или поверхности.

Кинематическая пара класса 1 может быть образована любыми выпуклыми поверхностями (рис. 2.8а) или выпуклой и выгнутой поверхностями (рис. 2.8б).

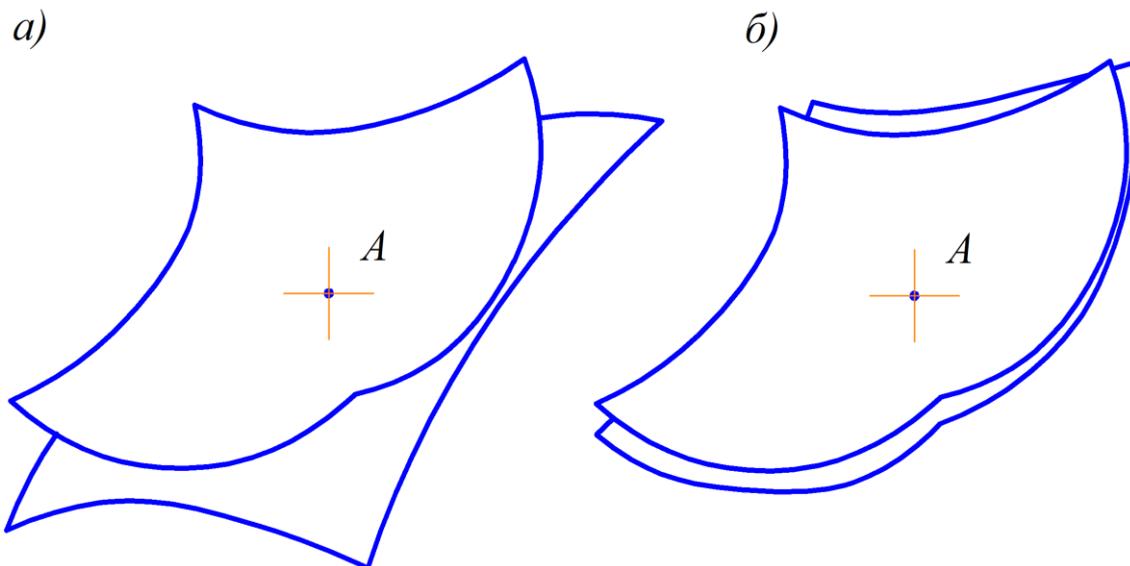


Рис. 2.8. Образование кинематической пары класса 1

Кинематическая пара класса 2 (рис. 2.3а) через точки А и В геометрических связей можно провести прямую, и эта прямая вместо шаров может образовать цилиндр (рис. 2.9а), конус (рис. 2.9б) или произвольную линейную поверхность (рис. 2.9в). Здесь мы получаем неопределенность наложения геометрических связей, поэтому используется не вся длина образующей, а только отдельные участки в окрестности точек геометрических связей (рис. 2.9г).

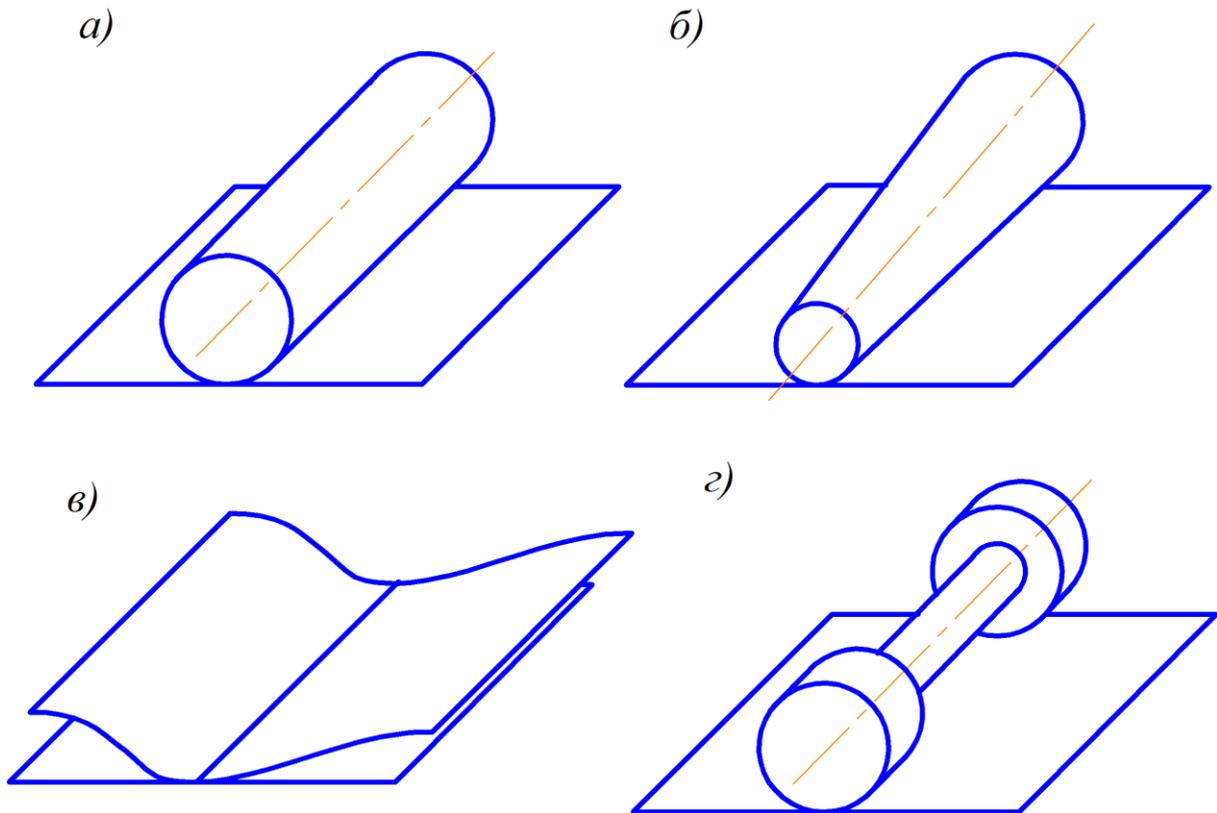


Рис. 2.9. Образование кинематической пары класса 2 на плоскости

Если вместо плоскости взять сферическую поверхность, то шары можно заменить цилиндром (рис. 2.10а) или конусом (рис. 2.10б). Если через точки А и В сферы провести дугу окружности, которая относительно общей оси шаров образует тор (рис. 2.10в).

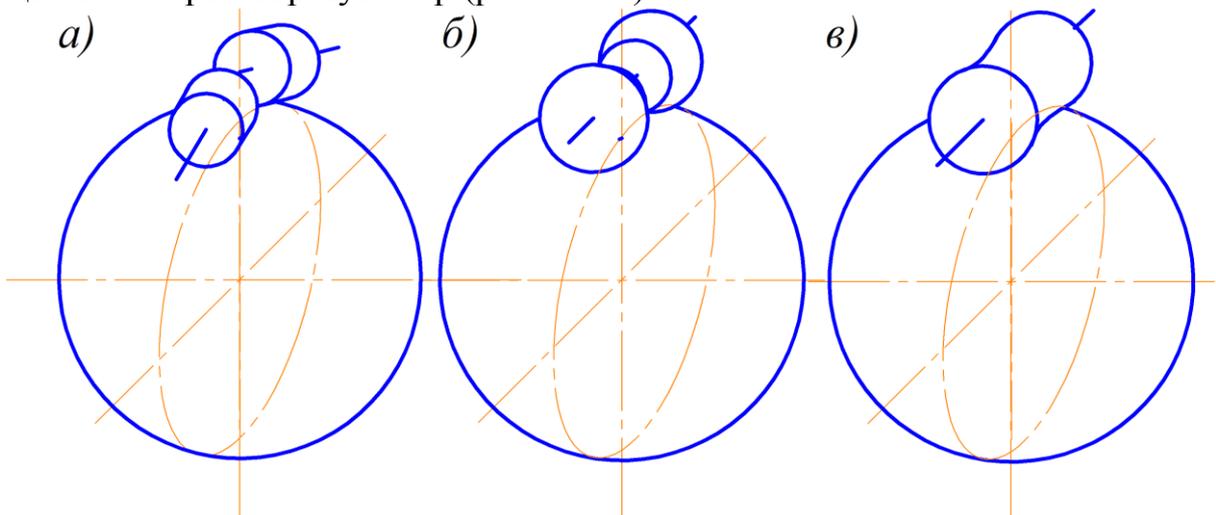


Рис. 2.10. Образование кинематической пары класса 2 на сфере

Кинематическая пара класса 2 (рис. 2.3б). При поступательном движении шар воспроизводит цилиндр (рис. 2.11а) или произвольную каналовую поверхность (рис. 2.11б), с которыми касание происходит по окружности.

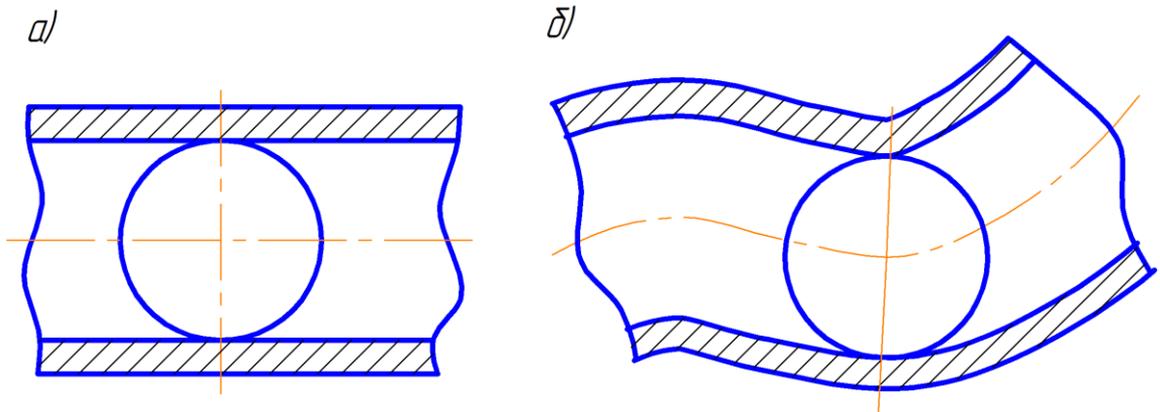


Рис. 2.11. Образование кинематической пары класса 2 (рис. 2.3б)

Кинематическая пара класса 3 (рис. 2.4а). Три точки определяют плоскость. Поэтому данную пару представим, как движение плоскости по плоскости (рис. 2.12а). Эту плоскость можно представить двумя параллельными линиями (рис. 2.12б) или кольцом (рис. 2.12в).

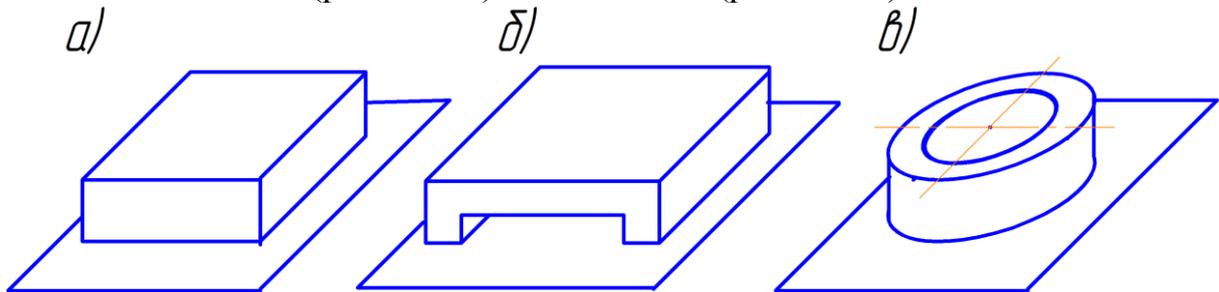


Рис. 2.12. Образование кинематической пары класса 3 (рис. 2.4а)

Кинематическую пару класса 3 (рис. 2.4в) можно представить, как
 – сфера в конусе (рис. 2.13), который определяется точкой, лежащей на линии пересечения плоскостей, и окружностью, проходящей через точки А, В, С геометрических связей на шаре,
 – сфера в сфере.

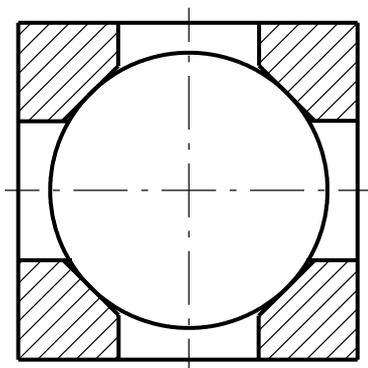


Рис. 2.13. Образование кинематической пары класса 3 (рис. 2.4в)

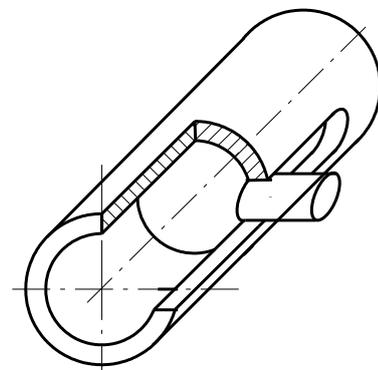


Рис. 2.14. Образование кинематической пары класса 3 (рис. 2.4б)

Кинематическую пару класса 3 (рис.2.4б) можно рассматривать как кинематическую пару класса 2(рис. 2.11а), в которой вводится ограничение ещё одного вращения (рис. 2.14).

Кинематическую пару класса 4 (рис. 2.5а, 2.4в) – можно рассматривать как объединение кинематических пар класса 2 (рис. 2.3б) и класса 3 (рис. 2.4а), её конструктивное исполнение изображению на рис. 2.15, где а) круговой цилиндр движется вдоль произвольной линейчатой поверхности, б) движение вдоль плоскости цилиндра произвольной формы.

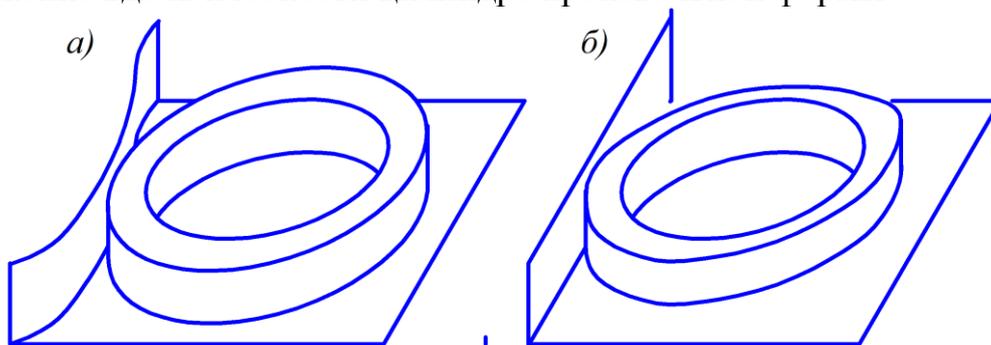


Рис. 2.15. Образование кинематической пары класса 4 (рис. 2.5а)

Кинематическая пара класса 4 (рис. 2.5б) – четыре точки геометрических связей попарно задают две прямых, поэтому кинематическую пару можно представить как движение:

- цилиндра произвольной формы вдоль плоскостей (рис. 2.16а);
- конуса произвольной формы вдоль плоскостей (рис. 2.16б);
- кругового цилиндра в цилиндре (рис. 2.16в).

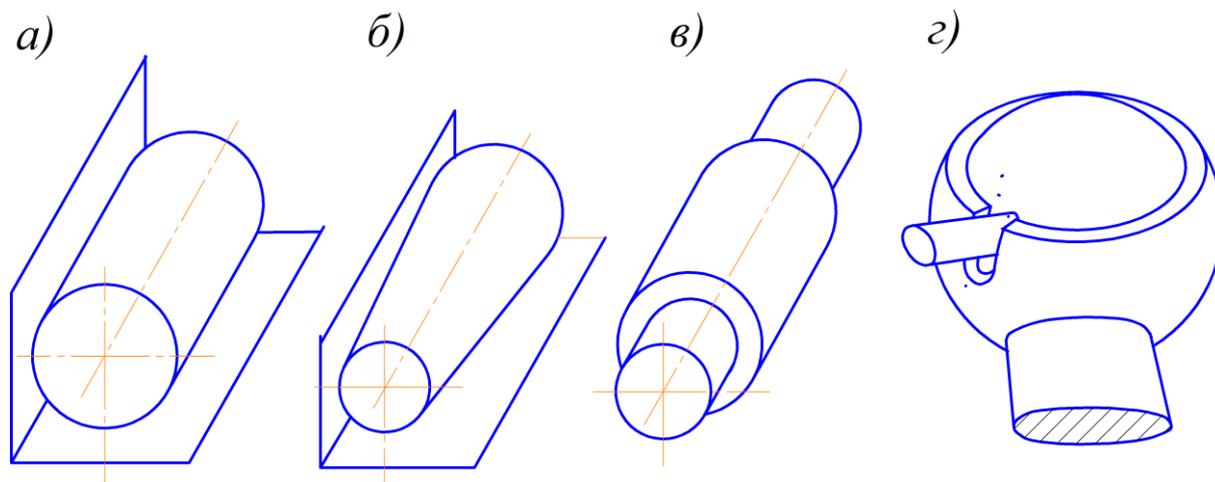


Рис. 2.16. Образование кинематической пары класса 4 (рис. 2.5б)

Кинематическую пару класса 4 (рис. 2.5г) можно реализовать как сферу в сфере (или конусе) с пальцем (рис. 2.16г).

Конструктивная реализация кинематических пар класса 5 очень многообразна. Некоторые варианты представлены:

а) для поступательной пары (рис. 2.6в) на рис. 2.17, здесь на рис *а* и *в* плоскость задана двумя параллельными прямыми, реализованные в виде цилиндров;

б) вращательной пары (рис. 2.6б) – на рис. 2.18;

в) вращательной пары (рис. 2.6а) – рис. 2.19.

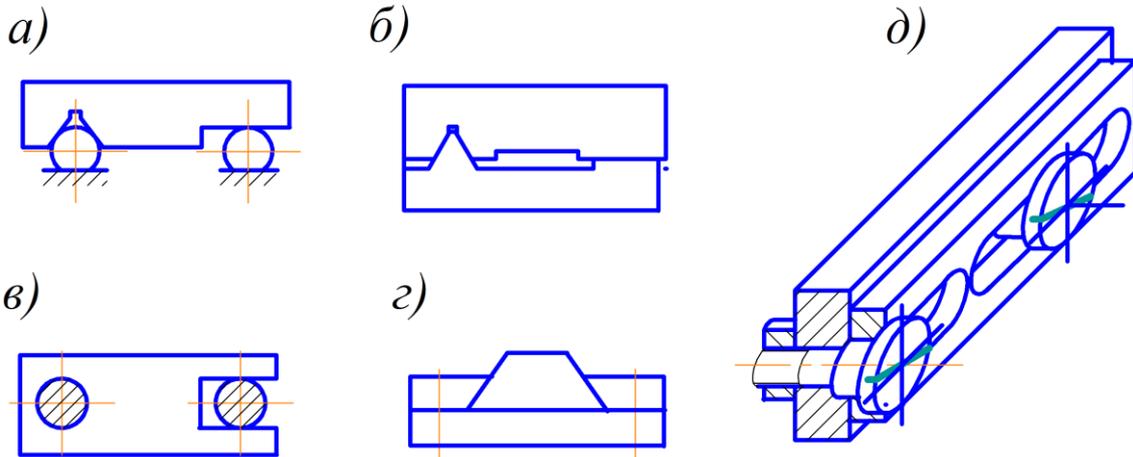


Рис. 2.17. Образование кинематической пары класса 5 (рис. 2.6в)

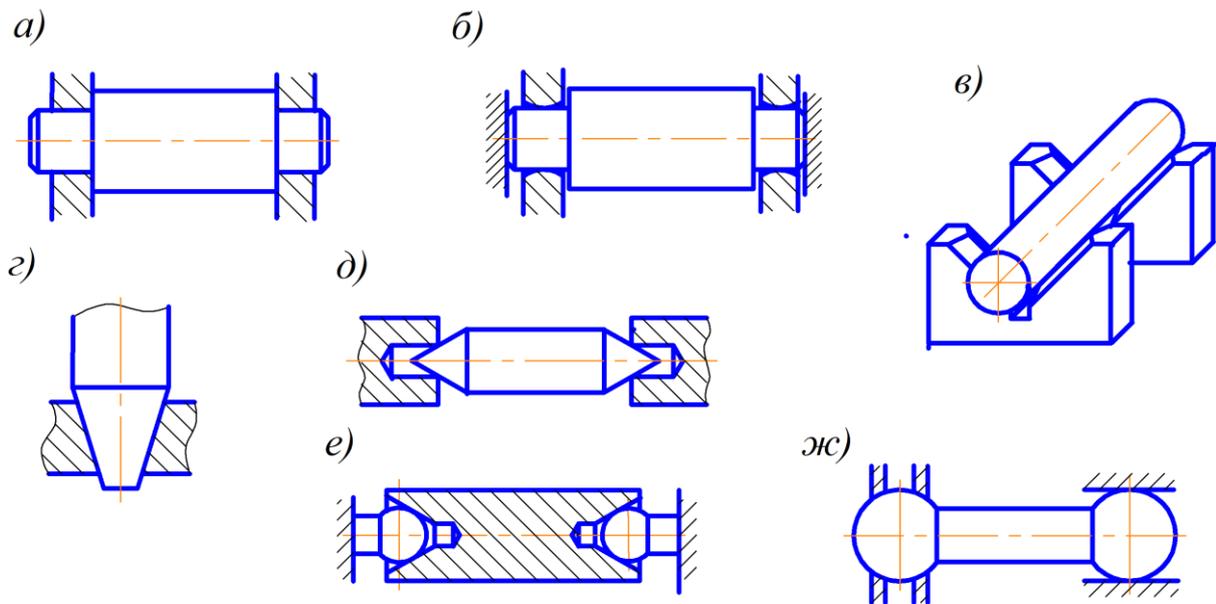


Рис. 2.18. Образование кинематической пары класса 5 (рис. 2.6б)

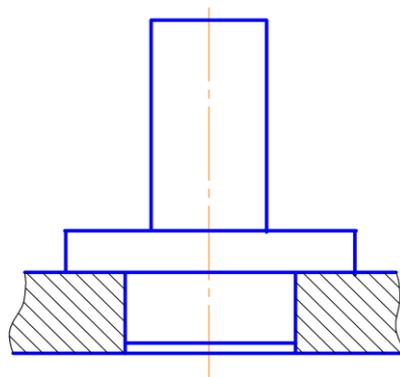


Рис. 2.19 . Образование кинематической пары класса 5 (рис. 2.6а)

2.4. Параметры перемещения точек и линий по поверхности

Рассмотрим перемещение точек элементов кинематических пар на примере соединения двух звеньев кинематической пары класса 1.

В начальный момент времени поверхности Σ_1 и Σ_2 , образующие кинематическую пару класса 1 соединения звеньев 1 и 2 (рис. 2.20а), касаются друг друга в точке A_0 . При движении звеньев через промежуток времени dt они уже будут касаться в точке A_1 , то – есть точка контакта (касания) поверхностей Σ_1 и Σ_2 переместились из положения A_0 в положение A_1 по кривой $d\bar{S}$ (рис. 2.20б). Это перемещение точки контакта можно представить следующим образом:

а) точка контакта A_0 , принадлежащая поверхности Σ_1 звена 1 вместе со звеном вначале переместится в положение A_{01} по дуге $d\bar{S}_{e1}$, а затем по поверхности Σ_1 в положение A_1 по дуге $d\bar{S}_{r1}$,

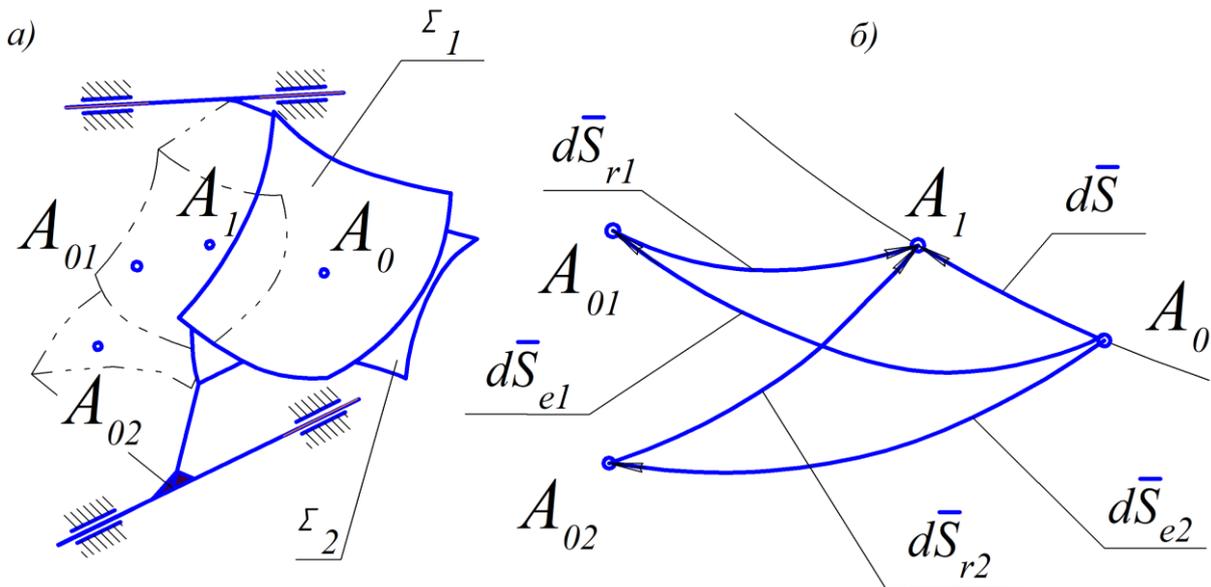


Рис. 2.20. Перемещение точки поверхностей

б) точки контакта A_0 поверхности Σ_2 вместе со звеном 2 вначале переместится в положение A_{02} по дуге $d\bar{S}_{e2}$, а затем по дуге $d\bar{S}_{r2}$ в положение A_1 :

$$d\bar{S} = d\bar{S}_{e1} + d\bar{S}_{r1} = d\bar{S}_{e2} + d\bar{S}_{r2} \quad (2.1)$$

где $d\bar{S}_{ei}$ – переносное перемещение точки контакта звена i вместе со звеном, $d\bar{S}_{ri}$ – относительное перемещение точка контакта по элементам кинематической пары, принадлежащей звену i .

Так как нас интересует чаще относительные перемещения звеньев, то соотношение (2.1) будем представлять в виде:

$$d\bar{S}_{r1} = d\bar{S}_{r2} + d\bar{S}_{21} \quad (2.2)$$

$$d\bar{S}_{r2} = d\bar{S}_{r1} + d\bar{S}_{12} \quad (2.3)$$

где $d\bar{S}_{21} = (d\bar{S}_{e2} - d\bar{S}_{e1})$, $d\bar{S}_{12} = -d\bar{S}_{21} = (d\bar{S}_{e1} - d\bar{S}_{e2})$ – относительное перемещение точки контакта вместе со звеном. В уравнении (2.2) – звено 1 “стоит”, а звено 2 перемещаемого относительно звена 1, в уравнении (2.3) – наоборот.

Разделив уравнение (2.1) на dt , а затем продифференцировав по времени, получаем скорость и ускорение точки контакта:

$$\bar{V} = \bar{V}_{e1} + \bar{V}_{r1} = \bar{V}_{e2} + \bar{V}_{r2}, \quad (2.4)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_{e1} + \bar{a}_{r1} + \bar{a}_{c1} = \bar{a}_{e2} + \bar{a}_{r2} + \bar{a}_{c2}, \quad (2.5)$$

где \bar{V}_{ei} , \bar{a}_{ei} – переносные скорость и ускорение точки при перемещении вместе со звеном i ; \bar{V}_{ri} , \bar{a}_{ri} – относительные скорость и ускорение точки контакта при перемещении по кинематическим элементам звена i ; \bar{a}_{ci} – кориолисово ускорение, возникающее при совместных переносном и относительном перемещениях.

Из уравнений (2.2) и (2.3) получаем:

$$\bar{V}_{r1} = \bar{V}_{r2} + \bar{V}_{21}, \quad \bar{V}_{r2} = \bar{V}_{r1} + \bar{V}_{12} \quad (2.6)$$

$$\bar{a}_{r1} = \bar{a}_{r2} + \bar{a}_{21} + \bar{a}_{c21}, \quad \bar{a}_{r2} = \bar{a}_{r1} + \bar{a}_{12} + \bar{a}_{c12}. \quad (2.7)$$

Линия перемещения точки контакта по поверхности зависит от относительного движения звеньев, от формы поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Примеры таких линий представлены на рис. 2.21, (A_0 – начальная точка, A_1 – конечная точка контакта).

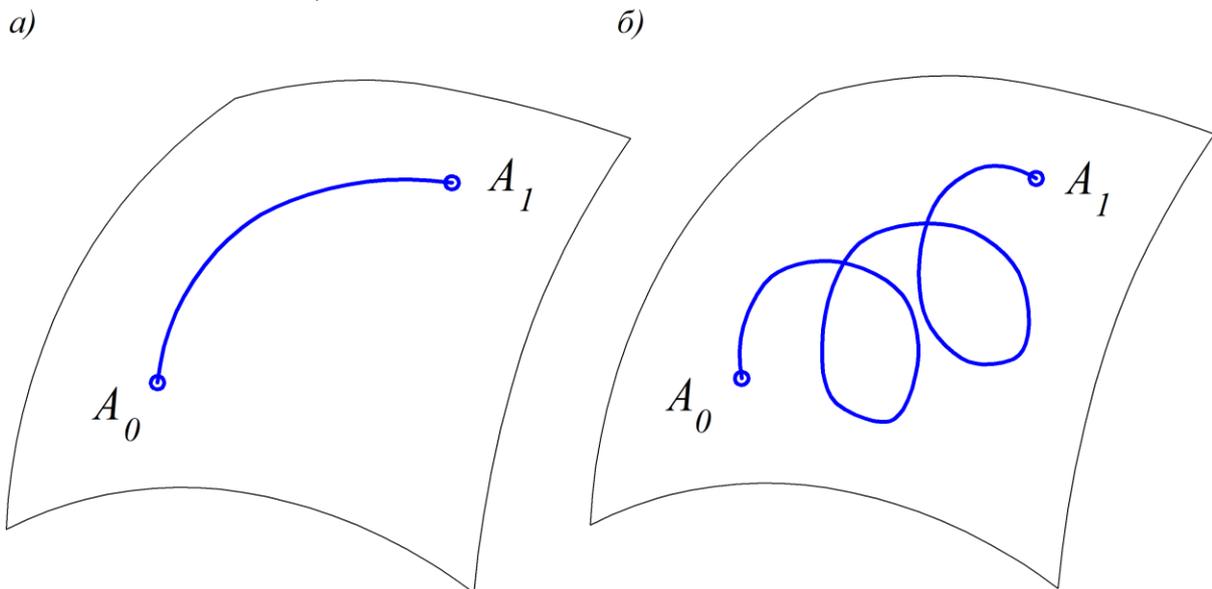


Рис. 2.21. Форма линий контакта

Рассмотрим второй случай, когда поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются по линии, в начальный момент по линии L_0 , в следующий момент – по линии L_1 (рис. 2.23). Перемещение произвольной точки A_0 на линии L_0 определя-

ется так же, как и при точечном контакте. Только здесь мы имеем неопределенность – точка контакта A_0 на линии L_0 может переместиться в произвольную точку A_{1i} от точки A_{10} до точки A_{11} на линии L_1 . Примеры формы и перемещения линии контакта представлены на (рис.2.23).

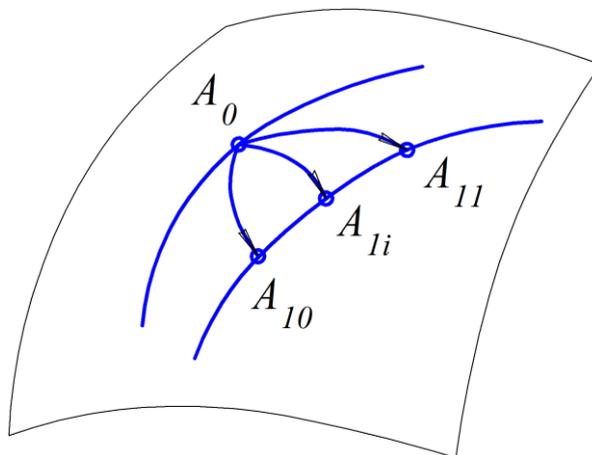


Рис.2.22. Перемещение точки контакта при линейном касании поверхностей

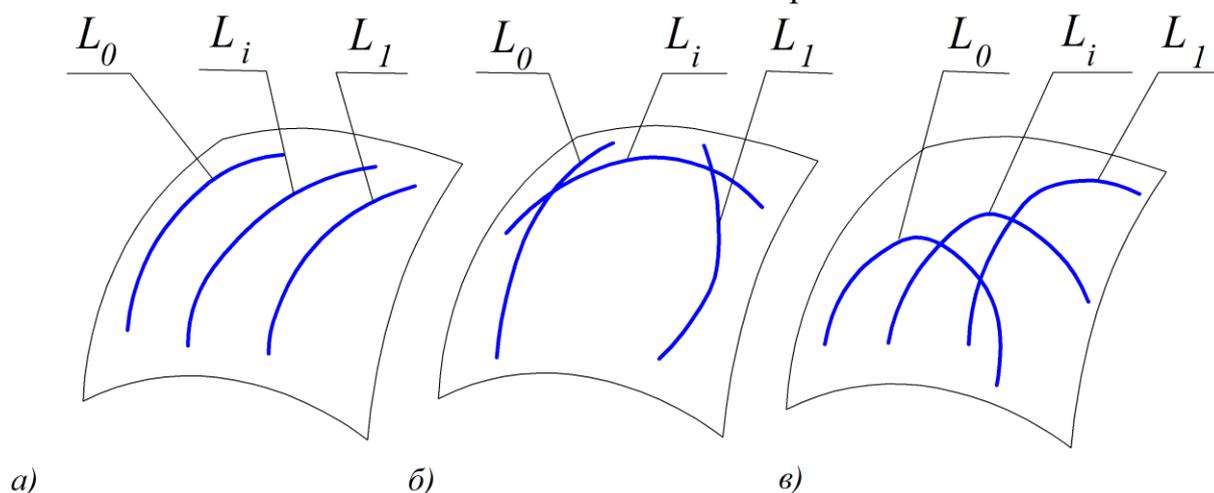


Рис.2.23. Форма и перемещение линии контакта

2.5. Характеристики контакта элементов кинематической пары

Как мы уже отмечали (см. п. 2.2.), каждая геометрическая связь вызывает действие дополнительной силы (реакции связи). Величина реакции связи зависит от внешних сил, действующих на механизм, геометрических параметров механизма, законов движения его ведущих звеньев, и её определение не рассматривается в данном пособии. Нагрузочная способность кинематической пары определяется геометрией её элементов и значением реакций связей.

Кинематические элементы звеньев поверхности. Рассмотрим различные случаи теоретического касания поверхностей.

а) Касание в точке А (рис. 2.24а). В окрестности точки А реально касание поверхностей будет по площадке (рис.2.24.б). В теории упругости принимается площадка контакта в виде эллипса с полуосями а и в.

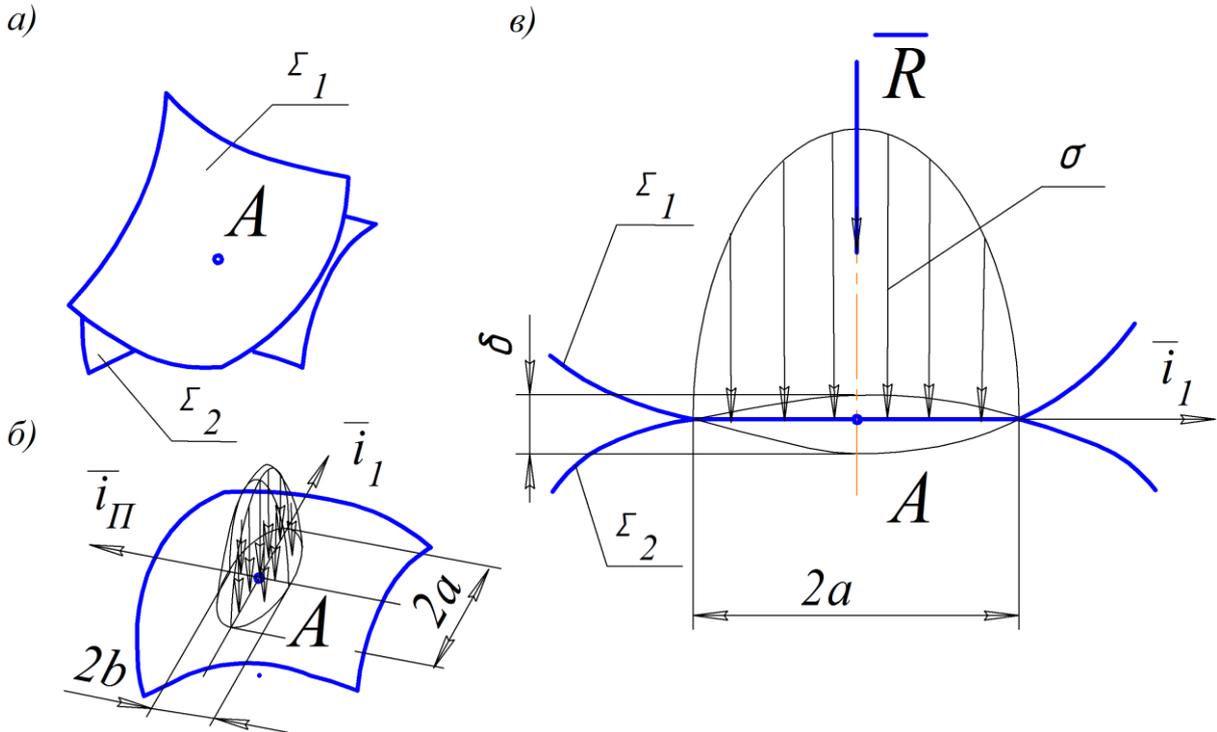


Рис. 2.24. Теоретическое и реальное касание поверхностей в точке

Из-за деформации поверхностей в окрестности точки А происходит их сближение на величину δ (рис.2.24в, сечение вдоль орта \bar{i}_1 большой оси эллипса). Параметры а, в и δ связаны соотношением:

$$a = \sqrt{\frac{2\delta}{\chi_{prI}}}, \quad b = \sqrt{\frac{2\delta}{\chi_{prII}}} \quad (2.8)$$

где χ_{prI} , χ_{prII} – главные приведенные кривизны поверхностей соотношению вдоль ортов \bar{i}_1 , \bar{i}_II большой и малой оси эллипса контакта. Определение главной приведенной кривизны поверхностей смотри в п. 3.

Реакция связей \bar{R} будем распределена по площадке контакта, среднее напряжение равно:

$$\sigma_c = \frac{R}{\pi a b} \quad (2.9)$$

Величина сближения δ и максимальное контактное напряжение σ_m определяется по формулам теории упругости и зависит от реакции связи R , главной приведенной кривизны χ_{prI} , χ_{prII} , и от модуля упругости E_1 и E_2 материалов кинематических элементов звеньев 1 и 2.

б) Касание поверхностей по линии на (рис.2.25а). Реальное касание поверхностей – вдоль полоски, центральной линией, которой является линия L_0 .

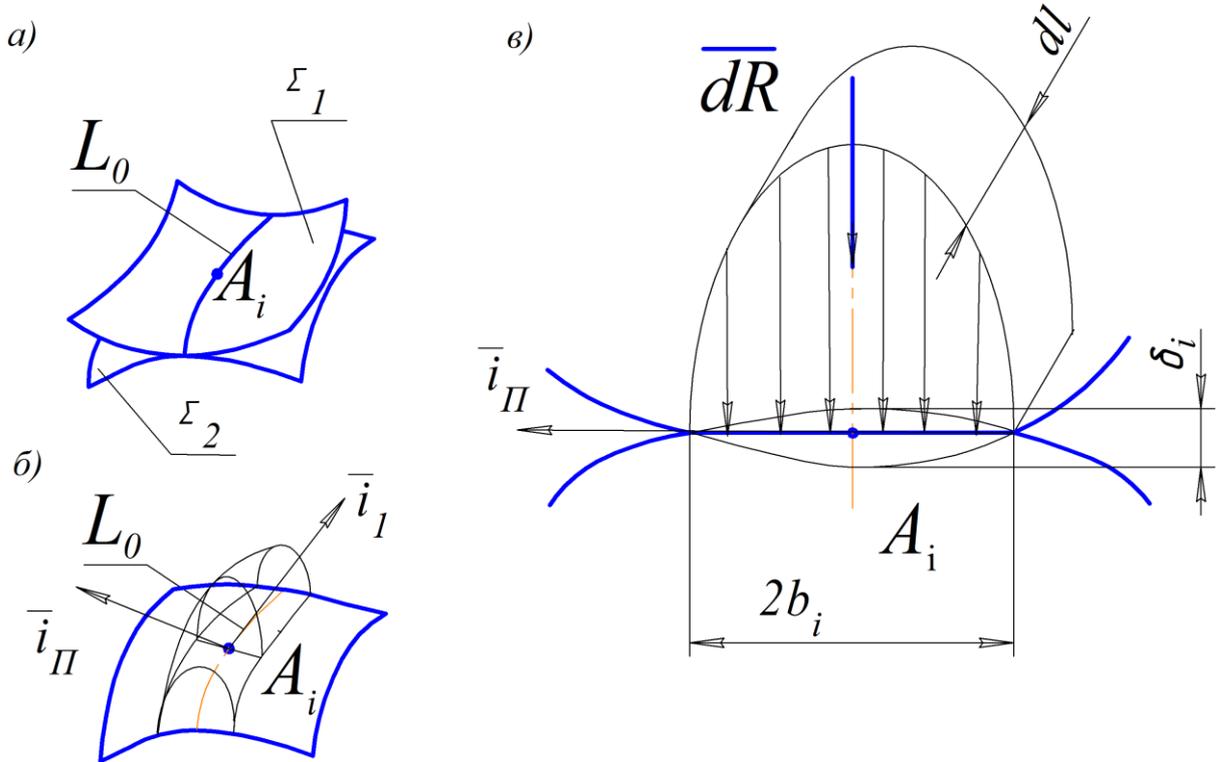


Рис. 2.25. Теоретическое и реальное касание поверхностей по линии

В окрестности произвольной точки A_i на линии L_0 действует нагрузка dR , и принимается, что эта нагрузка вдоль орты \bar{i}_1 касательной к линии распределяется равномерно (рис.2.25б). Распределение нагрузки вдоль орты \bar{i}_{II} (перпендикулярно к касательной) представлено на рис.2.25в. Ширина площадки:

$$b = \sqrt{\frac{2\delta}{\chi_{prII}}} \quad (2.10)$$

(обозначения см. выше). В этом случае главная приведенная кривизна $\chi_{prI} = 0$. Здесь необходимо решать вторую задачу теории упругости – распределение нагрузки вдоль контактной линии:

$$q = \frac{dR}{dS} = q(S), \quad (2.11)$$

где S – параметр вдоль контактной линии. Среднее контактное напряжение в точки A :

$$\sigma_{CA} = \frac{q}{2b}. \quad (2.12)$$

в) Касание по поверхности. Рассмотрим на примере соединения цилиндр – в цилиндре (рис.2.26а). В зависимости от допусков на размеры и

погрешностей изготовления цилиндры будут касаться по линии (рис.2.26б). Реальное касание цилиндров происходит по дуге $A_0 A A_1$, по которой и распределяется неравномерно нагрузка (рис.2.26в). Среднее контактное напряжение:

$$\sigma_c = \frac{R}{d \cdot b} \quad (2.13)$$

Максимальное напряжение σ_m зависит от распределения нагрузки вдоль образующей:

$$q = \frac{dR}{dS} = q(S) \quad (2.14)$$

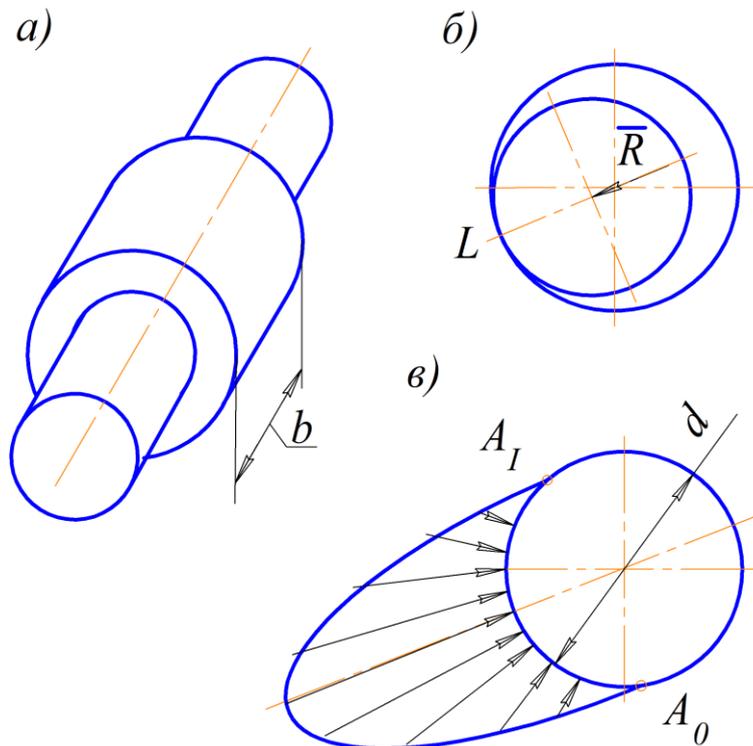


Рис. 2.26. Теоретическое и реальное касание по поверхности

г) Кромочный контакт. Это касание поверхностей – наихудший случай. Такой контакт возникает в результате неправильного назначения геометрических размеров кинематических элементов, погрешностей изготовления и сборки механизма, износа кинематических элементов.

Поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются в точке А (рис.2.27а), причем точка А на поверхности Σ_2 лежит кромке, её ограничивающей, причем нормали \bar{e}_1 и \bar{e}_2 к поверхностям не совпадают. Реальное касание в окрестности точки А – внедрение клина в поверхность Σ_1 , которой при движении работает как резец.

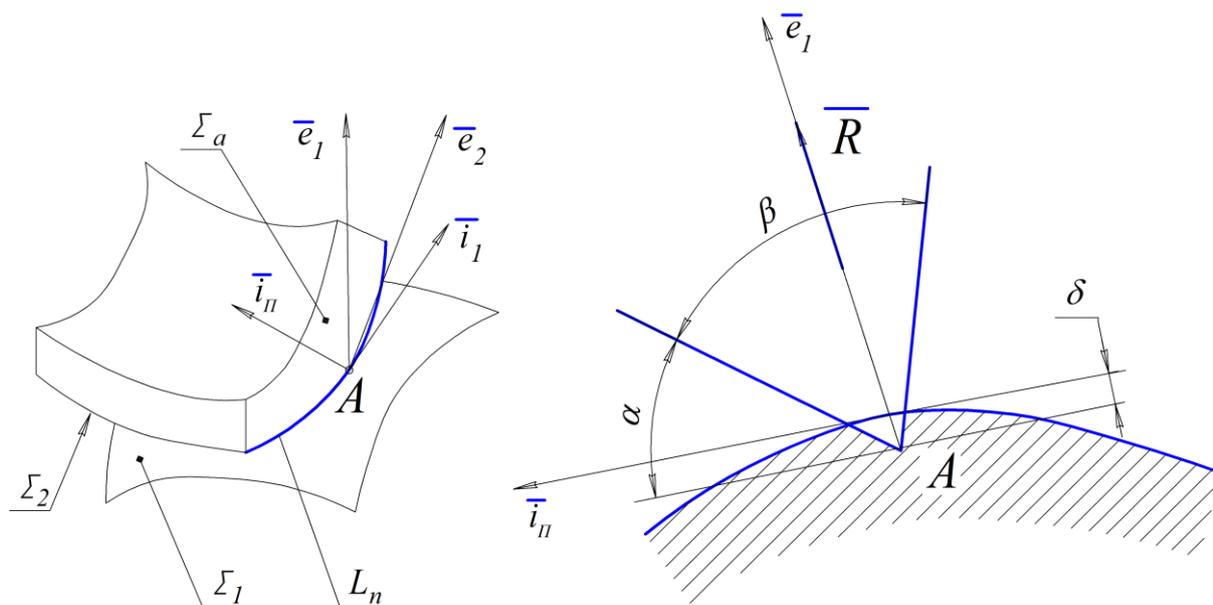


Рис. 2.27. Кромочный контакт поверхностей

Величина сближения поверхностей δ и максимальные напряжения зависят от угла α между касательными к поверхностям Σ_2 и Σ_a и угла β между касательными к поверхностям Σ_1 и Σ_2 (рис.2.27б).

2.6. Износ элементов кинематической пары. Виды изнашивания

При движении механизма в результате реакций связей в кинематических парах возникают силы трения, которые рассматриваются как составляющие этих реакций. Силы трения существенно влияют на коэффициент полезного действия механизма, на точность работы. При изменении направления движения линиями меняется направление сил трения и знак деформаций, вызываемых силами трения. Это явление вызывает появление упругого мертвого хода, приводит к вариации показаний в измерительных приборах, является источником автоколебаний в механизмах.

При трении выделяется энергия, большая часть которой переходит в тепло, а ничтожная доля поглощается материалом трущихся пары, вызывая различные структурные преобразования в его поверхностном слое, его разрушение с отделением разрушенных частиц, то есть износ. Тепловыделение при трении приводит к повышению температуры трущихся тел, которая в свою очередь влияет на интенсивность указанных процессов.

Поверхность трущихся тел и покрывающие её различные пленки, образуют следующую структуру:

- материал с исходной структурой;
- слой окислов;
- адсорбированный слой газов;
- адсорбированный слой воды;

- поверхностно-ориентированный слой полярных молекул смазки;
- слой смазки.

Характерная особенность тонких слоев смазки, покрывающих металл – они теряют свойства жидкости, обнаруживают упругость формы, передают нормальные и касательные усилия подобно твердым телам.

Обобщенная формула для определения силы трения.

$$F = A + f R, \quad (2.15)$$

где $A = \text{const}$ – молекулярная составляющая силы трения; R – сила нормального давления; f – коэффициент трения. Как правило при расчетах первое слагаемое не учитывается. Пусть в точке A_0 действует нормальная сила dR и сила трения dF (см. рис.2.25). Элементарная работа и мощность силы трения

$$\begin{aligned} dA &= dF \cdot dS_{21}, \\ dN &= dF \cdot V_{21}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

определение относительного перемещения dS_{21} и скорости V_{21} см. уравнения п. 2.4).

Износ – наиболее характерный вид разрушения поверхностей элементов кинематических пар, и является результатом изнашивания.

Изнашивание – процесс постепенного изменения размеров детали по её поверхности, происходящего под действием сил трения, и связано с потерей массы.

Различают следующие виды изнашивания.

1. Механическое:

а) абразивное – происходит микрорезание в присутствии абразива или продуктов износа, изнашивание весьма интенсивное, и стремятся его не допустить;

б) усталостное – разрушение поверхность в результате циклического действия контактных напряжений.

2. Молекулярно-механическое:

а) адгезионное – недопустимый вид изнашивания, при высоких температурах в зоне контакта разрушаются защитные пленки трущихся поверхностей, происходит схватывание (сваривание) поверхностей, а затем вырывание материала;

б) избирательный перенос – процесс обмена атомами между сталью и медью (или её сплавами).

3. Коррозионно – механическое:

а) окислительное – окисные пленки постоянно восстанавливаются после их износа, наименее интенсивный вид изнашивания, считается нормальным, допустимым видом;

б) фреттинг–коррозия – происходит в местах циклических контактных деформаций в пределах упругости, наблюдается интенсивное окисление поверхности.

Показатели износа:

а) линейный износ U (мкм) – изменение размера детали, измеренное по нормали к поверхности трения,

б) скорость изнашивания $\gamma = dU/dt$, где t – время изнашивания,

в) интенсивность изнашивания $J = dU/dS$, где S – путь трения при изнашивании.

Скорость изнашивания:

$$\gamma = k \sigma^m V^n \quad (2.17)$$

где k – коэффициент изнашивания, σ – контактное напряжение, V – относительная скорость скольжения, m и n – показатели степени. Для инженерных расчетов принимают $m=n=1$ и расчетное выражение принимает вид $\gamma = k \sigma V$.

2.7. Геометрические условия существования элементов кинематических пар

Элемент кинематической пары – это поверхность, размеры которой ограничены. При выборе этой поверхности, назначение её параметров и размеров. Необходимо учитывать следующие явления:

- кромочный контакт;
- интерференция (подрезание);
- узловые точки контакта и огибающую линий контакта;
- повторный контакт.

Кромочный контакт (рис.2.27) описан в п. 2.5.

Явление интерференции изображено на рис.2.28. Пусть в данный момент поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются в точке A_0 , и одновременно поверхность Σ_2 своей кромкой касается с поверхностью Σ_1 в точке B_0 . В следующий момент поверхности должны касаться в точке A_i , но при этом кромка поверхности Σ_2 придет в точку B_i , находящуюся внутри поверхности Σ_1 (положение Σ_{2i}). Чтобы это произошло, кромка должна внедриться (подрезать) в поверхность Σ_1 . Если этого внедрения не наблюдается, то контакт из точки A_0 сразу переходит в крошечный контакт в точке B_0 (положение Σ_{2n}).

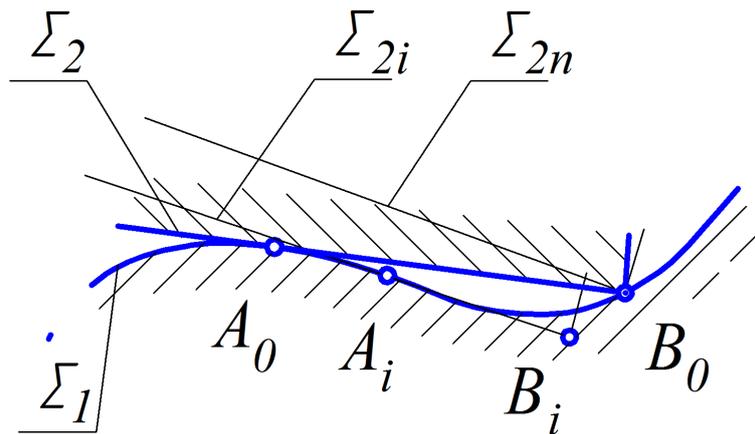


Рис. 2.28. Интерференция поверхностей

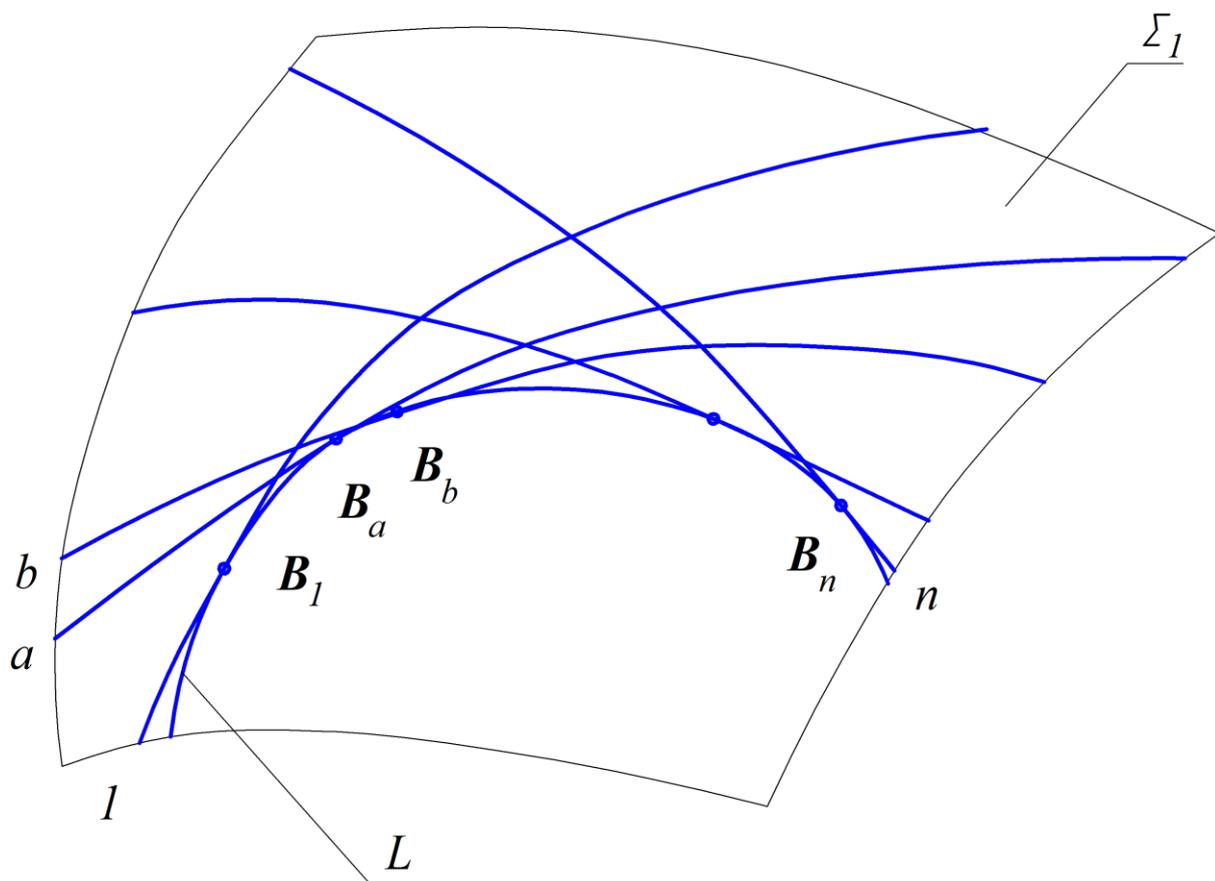


Рис. 2.29. Узловые точки и огибающая семейства линий контакта

Узловые точки контакта. На поверхности Σ_1 имеем семейство линий контакта (рис.2.29, линии 1, ..., a, b, ..., n) с поверхностью Σ_2 в их относительном движении. Проведем линию L так, чтобы она касалась линий данного семейства в точках B_i ($i = 1, \dots, n$). Линия L называется огибающей семействе линий контакта. Рассмотрим две близких лежащих линий контакта a и b. Они пересекаются в точке B_0 и касаются огибающей в точках

V_a и V_b . При бесконечно близком сближении линий a и b , точки V_a , V_b и V_0 совпадут.

Точка V_i касания линии контакта с огибающей L есть точка пересечения двух бесконечно близких линий контакта и называется узловой точкой контакта.

Огибающая (геометрическое место узловых точек контакта) делит поверхность Σ_1 на две зоны A и B . При назначении размеров поверхности желательно исключить нерабочую зону B .

Примером отсутствия узловых точек контакта и огибающей является семейств линий контакта, изображенных на рис.2.23а.

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ

3.1. Преобразование систем координат

Движение тела i в пространстве рассматривается относительно системы координат $S_0\{x, y, z\}$ (рис. 3.1). Чтобы определить положение тела в пространстве достаточно задать положение одной точки тела, например точки O_i . А чтобы определить ориентацию тела в пространстве, необходимо с телом связать три оси x_i, y_i, z_i . Точка O_i и оси x_i, y_i, z_i образуют систему координат S_i , жестко связанную с телом. Движение данной системы координат S_i можно рассматривать вместо движения тела i .

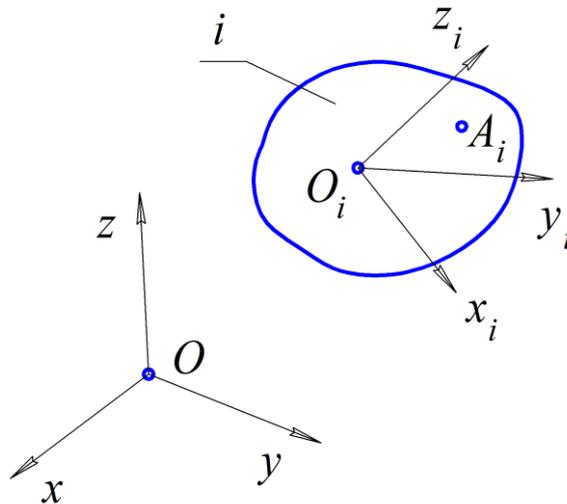


Рис. 3.1. Движение тела в пространстве

Уравнения связи между системами координат известны из аналитической геометрии. Пусть заданы две системы координат S_i и S_j (рис. 3.2). Уравнения связи имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= x_j \cdot \cos\varphi - y_j \cdot \sin\varphi + a, \\ y_i &= x_j \cdot \sin\varphi + y_j \cdot \cos\varphi + b. \end{aligned} \quad (3.1)$$

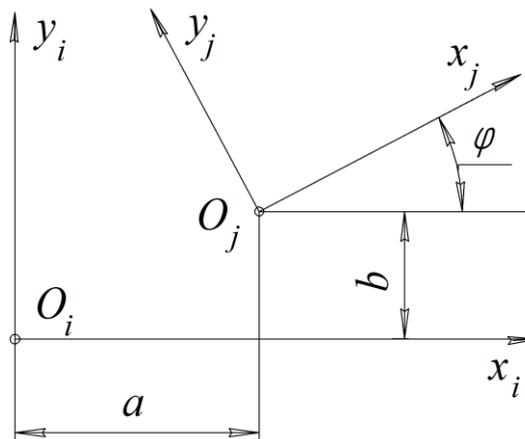


Рис. 3.2. Параметры связи между системами координат

Если считать параметры x_k, y_k ($k=i, j$) переменными величинами, то эти уравнения можно считать линейными уравнениями, которые запишем в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

или

$$\bar{r}_i = H_{ij} \bar{r}_j + \bar{R}_i \quad (3.3)$$

С точки зрения формализации расчетов на ЭВМ такая запись неудобна. Введем, так называемые однородные системы координат:

$$\bar{r}_k^T = |x_k \quad y_k \quad 1|, \quad k = i, j. \quad (3.4)$$

И примем $t \equiv 1$. Тогда связь между системами координат запишем в виде:

$$\bar{r}_i = A_{ij} \bar{r}_j \quad (3.5)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & a \\ \sin \varphi & \cos \varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Разобьем матрицу A_{ij} на блоки:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} H_{ij} & \bar{R}_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Матрица H_{ij} описывает поворот старой системы координат S_j относительно новой системы S_i и её можно представить в следующем виде:

$$H_{ij} = \begin{vmatrix} \cos(x_i \hat{x}_j) & \cos(x_i \hat{y}_j) \\ \cos(y_i \hat{x}_j) & \cos(y_i \hat{y}_j) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Матрица (вектор) \bar{R}_i описывает положение начала координат O_j старой системы S_j в новой системе S_i :

$$\bar{R}_i = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

Матричная запись преобразования систем координат позволяет формально подходить к обратным преобразованиям:

$$\bar{r}_i = A_{ij} \bar{r}_j$$

Причем

$$A_{ji} = \begin{vmatrix} H_{ji} & \bar{R}_j \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Кроме того

$$H_{ji} = H_{ij}^{-1} = H_{ij}^T$$

$$\bar{R}_j = -H_{ji}\bar{R}_i \quad (3.11)$$

Матрица $H_{ij} = \{h_{mn}\}$ обладает следующими свойствами

1. $\det H=1$,
2. $\sum_{i=1}^p h_{mi}h_{ni} = \begin{cases} 1-npi & n = m, \\ 0-npi & n \neq m, \end{cases}$
3. $\sum_{i=1}^p h_{im}h_{in} = \begin{cases} 1-npi & n = m, \\ 0-npi & n \neq m, \end{cases}$

где $p=2, 3$ – ранг матрицы

Для нашего примера имеем

- 1) $\cos\varphi \cdot \cos\varphi - (-\sin\varphi) \cdot \sin\varphi = 1$
- 2) $\cos\varphi \cdot \cos\varphi + (-\sin\varphi) \cdot (-\sin\varphi) = 1$
- 3) $\cos\varphi \cdot \sin\varphi + (-\sin\varphi) \cdot \cos\varphi = 0$

Эти свойства вытекают из того, что орты координатных осей взаимно ортогональны.

Для пространственных систем координат имеем:

$$\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(x_i \hat{x}_j) & \cos(x_i \hat{y}_j) & \cos(x_i \hat{z}_j) & a \\ \cos(y_i \hat{x}_j) & \cos(y_i \hat{y}_j) & \cos(y_i \hat{z}_j) & b \\ \cos(z_i \hat{x}_j) & \cos(z_i \hat{y}_j) & \cos(z_i \hat{z}_j) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Часто бывает, что составить матрицу перехода между системами координат S_i и S_j непосредственно трудно. В этом случае целесообразно ввести промежуточные вспомогательные системы координат:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &= A_{im}\bar{r}_m = A_{ij}A_{ijk}A_{kl}A_{lm}\bar{r}_m \\ \bar{r}_m &= A_{mi}\bar{r}_i = A_{mi}A_{lk}A_{kj}A_{ji}\bar{r}_i = A_{lm}^{-1}A_{kl}^{-1}A_{jk}^{-1}A_{ij}^{-1}\bar{r}_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

При преобразовании проекций векторов из одной системы координат в другую также будем пользоваться матричным уравнением:

$$\bar{V}_i = A_{ij}\bar{V}_j$$

При этом в однородной системе координат проекции векторов будем записывать следующим образом:

$$\bar{V}_i^T = \begin{vmatrix} V_x & V_y & V_z & 0 \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Пример 3.1. Рассмотрим системы координат для исследования кулачкового механизма.

Схема механизма и системы координат показаны на рис. 3.3. С кулачком 1 связана система координат S_1 , с толкателем 2 – система S_2 . Движение звеньев можно рассматривать как относительно системы координат S_0 , так и относительно системы S_1 . Движение кулачка определяется пара-

метром φ_1 , а толкателя – параметром S . Уравнения связи между системами координат:

$$\bar{r}_2 = A_{20}A_{01}\bar{r}_1, \quad \bar{r}_1 = A_{10}A_{02}\bar{r}_2.$$

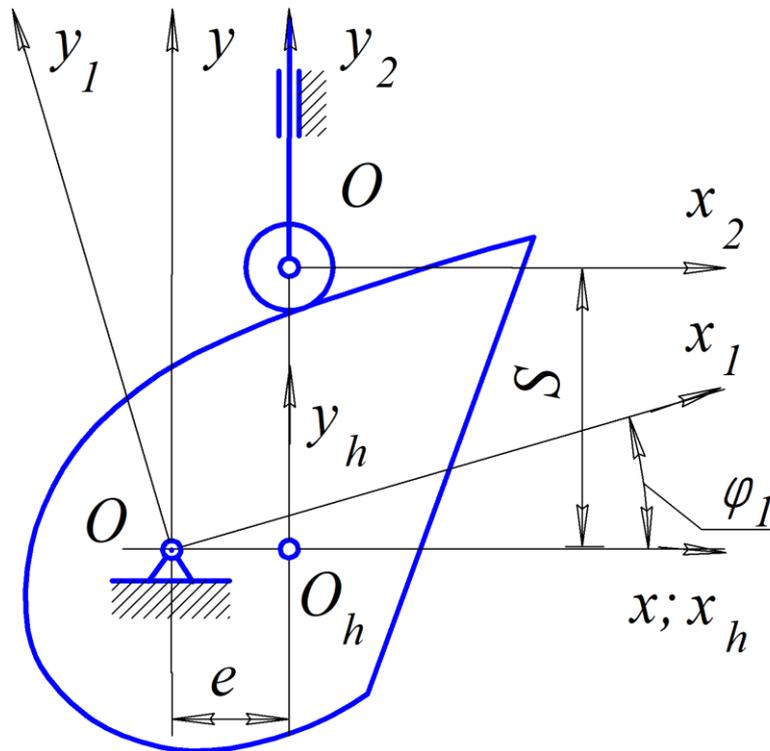


Рис. 3.3. Системы координат кулачкового механизма

Матрицы перехода между системами координат:

$$A_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{02} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & S \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример 3.2. Установить системы координат для исследования механизма с высшей кинематической парой. Оси вращения звеньев механизма скрещиваются, расстояние осями равно A , угол скрещивания осей равен Σ (рис. 3.4).

Движение звеньев будем рассматривать относительно неподвижной системы координат S . Ось x направим вдоль кратчайшего расстояния между осями вращения звеньев. Ось z направим вдоль оси вращения звена 1. Кроме того, введем дополнительную неподвижную систему координат S_h . Ось z_h направим вдоль оси вращения звена 2, а ось x_h – вдоль оси x . С каждым звеном i ($i=1,2$) свяжем подвижную систему координат S_i , причем ось z_i направим вдоль оси вращения звена. Движение звена i определяется параметром φ_i .

Уравнения связи между системами координат:

$$\bar{r}_1 = A_{10}A_{0h}A_{h2}\bar{r}_2, \quad \bar{r}_2 = A_{2h}A_{h0}A_{01}\bar{r}_1.$$

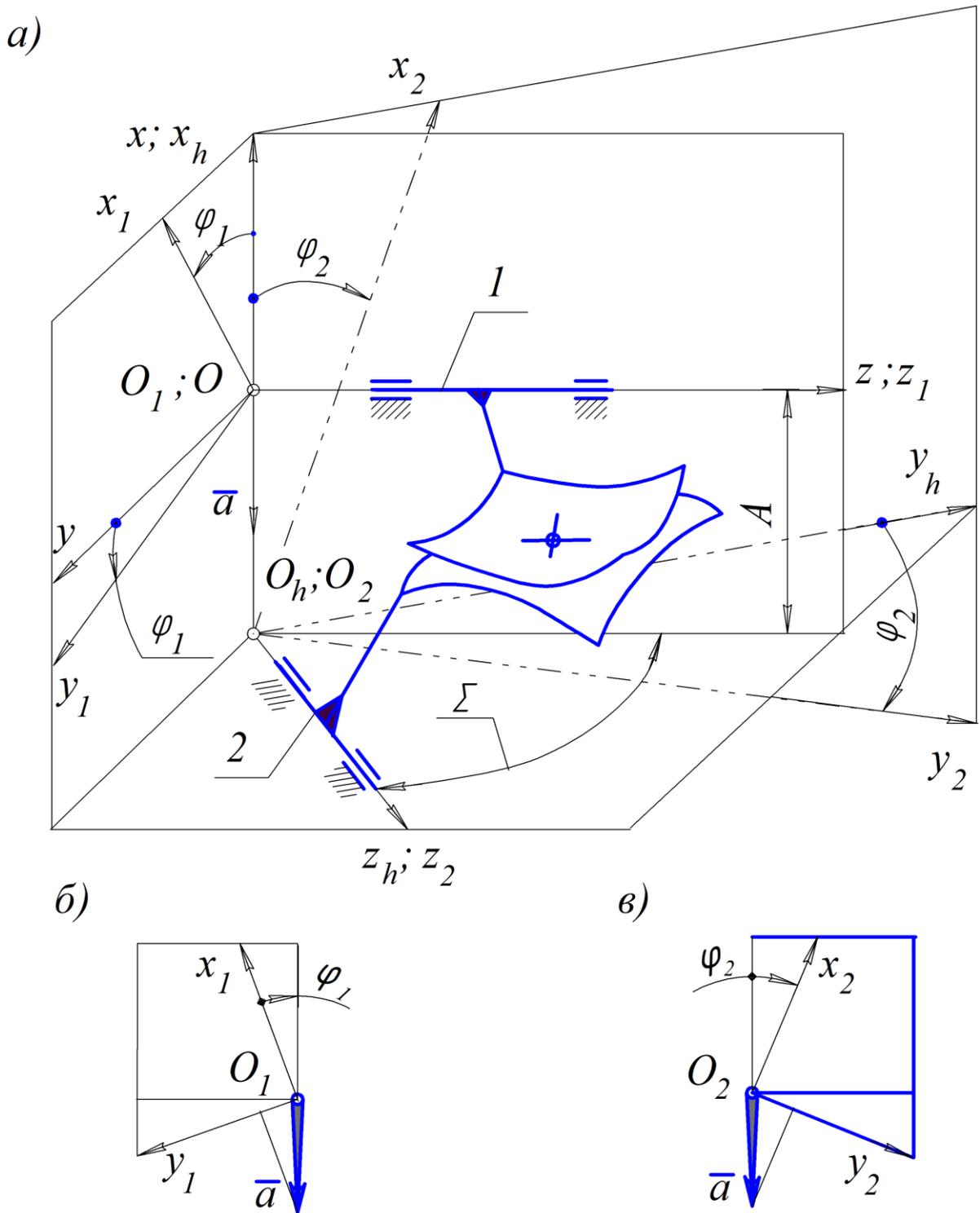


Рис. 3.4. Механизм с пространственной высшей кинематической парой

Матрицы перехода между системами координат:

$$A_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{0h} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & -\cos \Sigma & \sin \Sigma & 0 \\ 0 & \sin \Sigma & \cos \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{h2} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.2. Матричный метод определения скоростей и ускорений

Тело движется в пространстве относительно неподвижной системы координат S_0 и с ним связана система координат S_i (рис. 3.1). Пусть тело имеет n степеней свободы, и его положение описывается n независимыми параметрами q_1, q_2, \dots, q_n . Уравнение связи между системами координат:

$$\bar{r} = A_{0i} \bar{r}_i,$$

есть уравнение движения произвольной точки $A_i \{x_i, y_i, z_i\}$ нашего тела. Матрица связи между системами координат зависит от n параметров q_1, q_2, \dots, q_n :

$$A_{0i} = A_{0i}(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Примем, что координаты точки A_i не меняются $\bar{r}_i = Const$.

Скорость и ускорение точки A_i :

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt} [A_{0i}(q_1, q_2, \dots, q_n) \bar{r}_i] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} \bar{r}_i \dot{q}_k \\ \bar{a} &= \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} \bar{r}_i \ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial^2 A_{0i}}{\partial q_k \partial q_l} \bar{r}_i \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием $\bar{r}_i = A_{i0} \bar{r}$ получим:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} A_{i0} \right) \bar{r} \dot{q}_k \\ \bar{a} &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} A_{i0} \right) \bar{r} \ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial^2 A_{0i}}{\partial q_k \partial q_l} A_{i0} \right) \bar{r} \dot{q}_k \dot{q}_l \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Введем обозначения:

- а) $L_{V,k} = \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} A_{i0}$ – матрица аналога скорости,
- б) $L_{n,k} = L_{V,k} L_{V,k}$ – матрица аналога нормального ускорения
- в) $L_{C,kl}$ – матрица аналога ускорения кариолиса.

Продифференцируем матрицу аналога скорости по произвольному параметру

$$\frac{\partial L_{V,k}}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} A_{i0} \right) = \frac{\partial^2 A_{0i}}{\partial q_k \partial q_l} A_{i0} + \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} \frac{\partial A_{i0}}{\partial q_l} \quad (3.17)$$

Воспользуемся свойством прямых и обратных матриц связи между системами координат:

$$A_{0i}A_{i0} = A_{i0}A_{0i} = I$$

и продифференцируем это уравнение (I – единичная матрица):

$$\frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} A_{i0} + A_{0i} \frac{\partial A_{i0}}{\partial q_k} = 0.$$

На основании этого уравнения преобразуем соотношение:

$$\frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} \frac{\partial A_{i0}}{\partial q_l} = \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} (A_{i0} \cdot A_{0i}) \frac{\partial A_{i0}}{\partial q_l} = -L_{V,k} L_{V,l}$$

из которого следует:

$$\frac{\partial^2 A_{0i}}{\partial q_k \partial q_l} A_{i0} = \frac{\partial L_{V,k}}{\partial q_l} + L_{V,k} L_{V,l}. \quad (3.18)$$

Матрица аналога ускорения кариолиса:

$$2L_{C,kl} = \left(\frac{\partial L_{V,k}}{\partial q_l} + L_{V,k} L_{V,l} \right) + \left(\frac{\partial L_{V,l}}{\partial q_k} + L_{V,l} L_{V,k} \right). \quad (3.19)$$

Итак, скорость и ускорение точки A_i тела в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \sum_{k=1}^n L_{V,k} \bar{r} \dot{q}_k, \\ \bar{a} &= \sum_{k=1}^n \left[L_{V,k} \bar{r} \ddot{q}_k + L_{n,k} \bar{r} \dot{q}_k \dot{q}_k + \sum_{l=1}^n 2L_{C,kl} \bar{r} \dot{q}_k \dot{q}_l \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Скорость и ускорение точки в подвижной системе координат (жестко связанной с телом):

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= A_{i0} \bar{V} = \sum_{k=1}^n \left(A_{i0} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} \right) \bar{r}_i \dot{q}_k, \\ \bar{a}_i &= A_{i0} \bar{a} = \sum_{k=1}^n \left[\left(A_{i0} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} \right) \bar{r}_i \ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \left(A_{i0} \frac{\partial^2 A_{0i}}{\partial q_k \partial q_l} \right) \bar{r}_i \dot{q}_k \dot{q}_l \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Введя для подвижной системы координат S_i обозначения:

а) $L_{V,k}^i = A_{i0} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_k} = A_{i0} L_{V,k} A_{0i}$ – матрица аналога скорости,

б) $L_{n,k}^i = L_{V,k}^i L_{V,k}^i = A_{i0} L_{n,k} A_{0i}$ – матрица аналога нормального ускорения,

в) $2L_{C,kl}^i = \left(\frac{\partial L_{V,k}^i}{\partial q_l} + L_{V,k}^i L_{V,l}^i \right) + \left(\frac{\partial L_{V,l}^i}{\partial q_k} + L_{V,l}^i L_{V,k}^i \right)$ – матрица аналога

ускорения кариолиса, получим:

$$\begin{aligned}\bar{V}_i &= \sum_{k=1}^n L_{V,k}^i r_i \dot{q}_k, \\ \bar{a}_i &= \sum_{k=1}^n \left[L_{V,k}^i \bar{r}_i \ddot{q}_k + L_{n,k}^i \bar{r}_i \dot{q}_k \dot{q}_k + \sum_{l=1}^n 2L_{C,kl}^i \bar{r}_i \dot{q}_k \dot{q}_l \right].\end{aligned}\quad (3.22)$$

Матрицу аналога скорости представим в блочном виде:

$$L_V = \begin{vmatrix} L_\omega & \bar{V}_O \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где \bar{V}_O – аналог скорости движения начала подвижной системы координат, L_ω – матрица аналога угловой скорости. Матрица L_ω имеет следующую структуру:

$$L_\omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}.$$

Отступление. Скалярное и векторное произведение векторов

$$c = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{b}$$

в матричной форме представляется в виде

$$c = \bar{a}^T \cdot \bar{b}, \quad \bar{V} = L_\omega \times \bar{b}$$

Вектор мгновенной угловой скорости тела будем представлять в двух видах

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k \dot{q}_k, \\ L_\Omega &= \sum_{k=1}^n L_{\omega,k} \dot{q}_k,\end{aligned}\quad (3.23)$$

Матрица $L_{\omega,k}$ и $\bar{\omega}_k$ определяются из матрицы аналога скорости $L_{V,k}$.

Вектор мгновенного углового ускорения:

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^n \left[\bar{\omega}_k \ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{\omega}_k}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right].\quad (3.24)$$

Вектор мгновенных угловых скорости и ускорения в подвижной системе координат:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_i &= A_{i0} \bar{\Omega} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k^i \dot{q}_k, \\ \bar{E}_i &= A_{i0} \bar{E} = \sum_{k=1}^n \left[\bar{\omega}_k^i \ddot{q}_k + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \bar{\omega}_k^i}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l \right]\end{aligned}\quad (3.25)$$

Матрица $L_{\omega,k}^i$ и $\bar{\omega}_k^i$ определяется из матрицы $L_{V,k}^i$.

Пример 3.3. Определить матрицы аналога скорости и ускорения движения звена 2 относительно звена 1 для механизма с ВКП (пример 3.2, рис. 3.3).

Движение звена 2 описывается уравнением связи между системами координат:

$$\bar{r}_1 = A_{10}(\varphi_1)A_{0h}A_{h2}(\varphi_2)\bar{r}_2 = A_{12}\bar{r}_2$$

Будем считать, что параметры движения φ_1 и φ_2 независимые.

Матрицы аналога скорости:

$$L_{V,1}^1 = \frac{\partial A_{12}}{\partial \varphi_1} A_{21} = \frac{\partial A_{12}}{\partial \varphi_1} A_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L_{V,2}^1 = \frac{\partial A_{12}}{\partial \varphi_2} A_{21} = A_{10} \left[A_{0h} \left(\frac{\partial A_{h2}}{\partial \varphi_2} A_{2h} \right) A_{h0} \right] A_{01} =$$

$$= A_{10} \left[A_{0h} \begin{vmatrix} -\sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} A_{h0} \right] A_{01} =$$

$$= A_{10} \left[A_{0h} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} A_{h0} \right] A_{01} = A_{10} \begin{vmatrix} 0 & \cos \Sigma & -\sin \Sigma & 0 \\ -\cos \Sigma & 0 & 0 & -A \cos \Sigma \\ \sin \Sigma & 0 & 0 & A \sin \Sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} A_{01} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos \Sigma & -\cos \varphi_1 \sin \Sigma & -A \cos \Sigma \sin \varphi_1 \\ -\cos \Sigma & 0 & \sin \varphi_1 \sin \Sigma & -A \cos \Sigma \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \sin \Sigma & -\sin \varphi_1 \sin \Sigma & 0 & A \sin \Sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Матрицы аналога нормального ускорения:

$$L_{n,1}^1 = L_{V,1}^1 L_{V,1}^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$L_{n,2}^1 = L_{V,2}^1 L_{V,2}^1 =$$

$$= \begin{vmatrix} -(\cos^2 \Sigma + \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \Sigma) & \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^2 \Sigma & \sin \varphi_1 \sin \Sigma \cos \Sigma \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^2 \Sigma & -(\cos^2 \Sigma + \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \Sigma) & \cos \varphi_1 \sin \Sigma \cos \Sigma \\ \sin \varphi_1 \sin \Sigma \cos \Sigma & \cos \varphi_1 \sin \Sigma \cos \Sigma & -\sin^2 \Sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -A \cos \varphi \\ A \sin \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Матрица аналога ускорения кариолиса:

$$L_{C,12}^1 = \left(\frac{\partial L_{V,1}^1}{\partial q_2} + L_{V,1}^1 L_{V,2}^1 \right) + \left(\frac{\partial L_{V,2}^1}{\partial q_1} + L_{V,21}^1 L_{V,1}^1 \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -\cos \Sigma & 0 & \sin \varphi_1 s \sin \Sigma & -A \cos \Sigma \cos \varphi_1 \\ 0 & -\cos \Sigma & \cos \varphi_1 \sin \Sigma & A \cos \Sigma \sin \varphi_1 s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi_1 s \sin \Sigma & -A \cos \Sigma \cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_1 \sin \Sigma & A \cos \Sigma \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 \sin \Sigma & -\cos \varphi_1 \sin \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -\cos \Sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \Sigma & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 \sin \Sigma & -\cos \varphi_1 \sin \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -\cos \Sigma & 0 & \sin \varphi_1 s \sin \Sigma & -A \cos \Sigma \cos \varphi_1 \\ 0 & -\cos \Sigma & \cos \varphi_1 \sin \Sigma & A \cos \Sigma \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вектор угловой скорости и углового ускорения:

$$\bar{\Omega}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \dot{\varphi}_1 + \begin{vmatrix} -\sin \varphi_1 \sin \Sigma \\ -\cos \varphi_1 \sin \Sigma \\ -\cos \Sigma \\ 0 \end{vmatrix} \dot{\varphi}_2$$

$$\bar{E}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \begin{vmatrix} -\sin \varphi_1 \sin \Sigma \\ -\cos \varphi_1 \sin \Sigma \\ -\cos \Sigma \\ 0 \end{vmatrix} \ddot{\varphi}_2 + \begin{vmatrix} -\cos \varphi_1 \sin \Sigma \\ \sin \varphi_1 \sin \Sigma \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2.$$

В исследуемом механизме параметры φ_1 и φ_2 связаны соотношением:

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$$

$$\dot{\varphi}_2 = u_{21} \dot{\varphi}_1, \quad \ddot{\varphi}_2 = u_{21} \ddot{\varphi}_1 + u'_{21} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1$$

$$\text{где } u_{21} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1}, \quad u'_{21} = \frac{\partial u_{21}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi_1^2}.$$

Скорость и ускорение точки звена 2 в относительном движении:

$$\bar{V} = (L_V^1 \bar{r}_1) \dot{\varphi}_1,$$

$$\bar{a} = (L_V^1 \bar{r}_1) \ddot{\varphi}_1 + (L_n^1 \bar{r}_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 + (2L_C^1 \bar{r}_1) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1,$$

$$\text{где } L_V^1 = L_{V,1}^1 + u_{21} L_{V,2}^1,$$

$$L_n^1 = L_{n,1}^1 + u_{21}^2 L_{n,2}^1 + u'_{21} L_{V,2}^1,$$

$$2L_C^1 = 2u_{21} L_{C,21}^1.$$

3.3. Анализ трехзвенного механизма с промежуточной ВКП

Задача анализа (обратная задача) механизма с ВКП – задана схема механизма, известны поверхности Σ_1 и Σ_2 кинематических элементов ВКП, соединяющих звенья, требуется определить закон движения в виде функции, связывающей перемещения обоих звеньев.

Со звеньями 1 и 2 механизма свяжем соответственно подвижные системы координат S_1 и S_2 , а со стойкой связана неподвижная система координат S_0 . Пусть в системе S_i заданы уравнение поверхности Σ_i и орт её нормали ($i=1, 2$):

$$\bar{r}_i^i = \bar{r}_i^i(u_i, \mathcal{G}_1),$$

$$\bar{e}_i^i = \bar{e}_i^i(u_i, \mathcal{G}_1). \quad (3.26)$$

Требуется найти зависимость между перемещениями φ_1 и φ_2 звеньев, линию зацепления и активно действующие линии на поверхностях ВКП обоих звеньев.

Уравнения (3.26) поверхности Σ_i и орта нормали перепишем в неподвижную систему координат S_0 :

$$\bar{r}^i = A_{0i} \bar{r}_i^i = \bar{r}^i(u_i, \mathcal{G}_1, \varphi_i),$$

$$\bar{e}^i = A_{0i} \bar{e}_i^i = \bar{e}^i(u_i, \mathcal{G}_1, \varphi_i). \quad (3.27)$$

Для точки касания поверхностей должны соблюдаться следующие уравнения

$$\begin{aligned}\bar{r}^1(u_{1i}, \mathcal{G}_1, \varphi_1) &= \bar{r}^2(u_2, \mathcal{G}_2, \varphi_2), \\ \bar{e}^1(u_1, \mathcal{G}_1, \varphi_1) &= \bar{e}_i^2(u_2, \mathcal{G}_2, \varphi_2).\end{aligned}\quad (3.28)$$

Данные уравнения в общем случае тождественны пяти скалярным, так как

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 \equiv 1.$$

В результате решения этих уравнений, придавая фиксированные значения параметру φ_1 , найдем $u_1, v_1, u_2, v_2, \varphi_2$ в виде функций от φ_1 . Функция $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ есть функция перемещения исследуемого механизма. В системе S_i совокупность точек поверхности Σ_i с параметрами u_i, v_i ($i=1,2$) представляет при точечном касании поверхностей активно действующую линию на рабочей поверхности ВКП. Совокупность этих же точек в неподвижной системе S_0 представит линию зацепления поверхностей.

В частных случаях независимых уравнений может быть и четыре, и три. При четырех независимых уравнениях поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются по линии, при трех – поверхности Σ_1 и Σ_2 совпадают. Условия существования точечного, линейного или поверхностного касания поверхностей будет рассмотрено в п. 3.5. В механизме имеем непрерывное движение звеньев, и вместе с ним непрерывное движение поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Возможен переход точечного касания поверхностей в линейное, а затем в поверхностное, а также и обратный переход.

Решив уравнения (3.28), функция аналога скорости (передаточное отношение):

$$u_{21} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1}$$

можно определить следующим образом. Уравнения касания поверхностей (3.28) представим в виде:

$$\begin{aligned}\bar{r}_1^1 &= A_{10}(\varphi_1)A_{02}(\varphi_2)\bar{r}_2^2 \\ \bar{e}_1^1 &= A_{10}(\varphi_1)A_{02}(\varphi_2)\bar{e}_2^2\end{aligned}$$

и продифференцируем их по параметру φ_1 :

$$\begin{aligned}\bar{V}_{r1}^1 &= \left[\frac{\partial A_{10}}{\partial \varphi_1} A_{02} + u_{21} A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial \varphi_2} \right] \bar{r}_2^2 + A_{10} A_{02} \bar{V}_{r2}^2, \\ d\bar{e}_{r1}^1 &= \left[\frac{\partial A_{10}}{\partial \varphi_1} A_{02} + u_{21} A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial \varphi_2} \right] \bar{e}_2^2 + A_{10} A_{02} d\bar{e}_{r2}^2,\end{aligned}\quad (3.29)$$

где $\bar{V}_{ri}^i = \left(\frac{\partial \bar{r}_i^i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \bar{r}_i^i}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \varphi_i} \right)$ – аналог скорости перемещения точки

контакта по поверхности, $d\bar{e}_{ri}^i = \left(\frac{\partial \bar{e}_{ri}^i}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \bar{e}_{ri}^i}{\partial \vartheta_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \varphi_i} \right)$ – аналог скорости поворота орта при перемещении точки контакта по поверхности Σ_i (данные вектора лежат в касательной плоскости).

Подставим обратные преобразования:

$$\begin{aligned} \bar{r}_2^2 &= A_{20}A_{01}\bar{r}_1^1, \\ \bar{e}_2^2 &= A_{20}A_{01}\bar{e}_1^1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

и введем обозначения принятые в п.3.2:

$$\begin{aligned} L_{V,1}^1 &= \frac{\partial A_{10}}{\partial \varphi_1} A_{01}, \quad L_{V,2}^1 = A_{10} \left(\frac{\partial A_{02}}{\partial \varphi_2} A_{20} \right) A_{01}, \\ L_V^1 &= L_{V,1}^1 + u_{21}L_{V,2}^1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Обозначим:

$$\bar{V}_{r1}^2 = A_{10}A_{02}\bar{V}_{r2}^2, \quad d\bar{e}_{r1}^2 = A_{10}A_{02}d\bar{e}_{r2}^2$$

Дифференциальные уравнения запишем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{r1}^1 &= L_V^1 \bar{r}_1^1 + \bar{V}_{r1}^2, \\ d\bar{e}_{r1}^1 &= L_V^1 \bar{e}_1^1 + d\bar{e}_{r1}^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Спроектируем первое векторное уравнение на орт нормали \bar{e}_1^1 :

$$\left(\bar{e}_1^{1T} L_V^1 \bar{r}_1^1 \right) = 0 \quad (3.33)$$

Данное уравнение называется уравнением связи параметров поверхностей Σ_1 и Σ_2 , из которого определяется передаточное отношение:

$$u_{21} = - \left(\bar{e}_1^{1T} L_{V,1}^1 \bar{r}_1^1 \right) / \left(\bar{e}_1^{1T} L_{V,2}^1 \bar{r}_1^1 \right) \quad (3.34)$$

Пример 3.4. Определить закон перемещения толкателя в кулачковом механизме. Профиль кулачка очерчен спиралью Архимеда (рис. 3.5).

Уравнение поверхности Σ_1 кулачка и орта нормали

$$\bar{r}_1^1 = \begin{vmatrix} r_i \sin \vartheta_1 \\ r_i \cos \vartheta_1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{e}_1^1 = \begin{vmatrix} \sin(\vartheta_1 - \gamma_i) \\ \cos(\vartheta_1 - \gamma_i) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} r_i &= r_0 + a\vartheta_1, \\ \operatorname{tg} \gamma_i &= \frac{a}{r_i}. \end{aligned}$$

Уравнение поверхности Σ_2 ролика толкателя и нормали:

$$\bar{r}_2^2 = \begin{vmatrix} \rho \cos \vartheta_2 \\ \rho \sin \vartheta_2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{e}_2^2 = \begin{vmatrix} -\cos \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_2 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

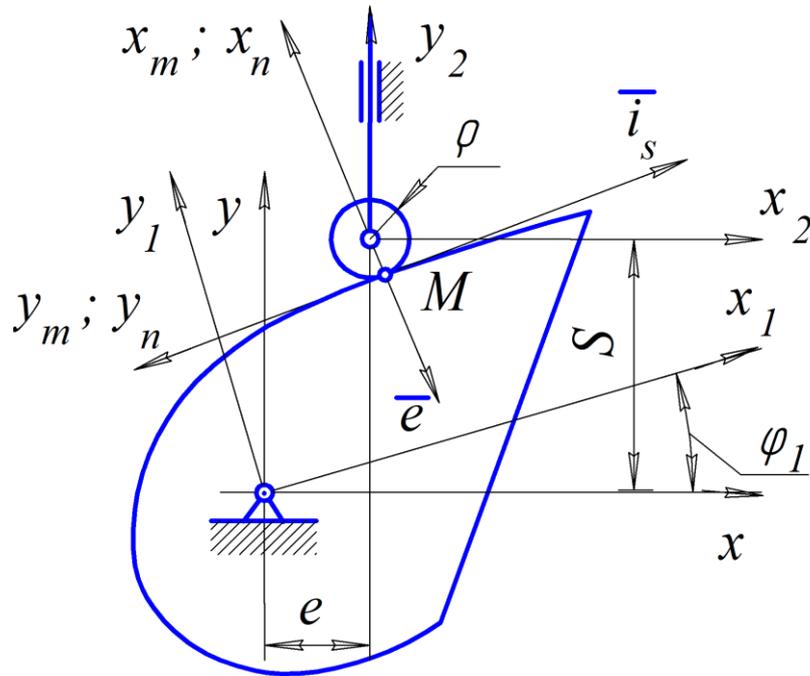


Рис. 3.5. Кулачковый механизм

Уравнения поверхности и орта нормали в неподвижной системе координат S_0 :

а) кулачка

$$\bar{r}^1 = A_{01} \bar{r}_1^1 = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{r}_1^1 = \begin{vmatrix} -r_i \sin(\varphi_1 - \vartheta_1) \\ r_i \cos(\varphi_1 - \vartheta_1) \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{e}^1 = A_{01} \bar{e}_1^1 = \begin{vmatrix} -\sin(\varphi_1 + \gamma_i - \vartheta_1) \\ \cos(\varphi_1 + \gamma_i - \vartheta_1) \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} r_i &= r_0 + a \vartheta_1, \\ \operatorname{tg} \gamma_i &= \frac{a}{r_i}. \end{aligned}$$

б) ролика толкателя

$$\bar{r}^2 = A_{02} \bar{r}_2^2 = \begin{vmatrix} \rho \cos \vartheta_2 + e \\ \rho \sin \vartheta_2 + S \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\bar{e}^2 = A_{02} \bar{e}_2^2 = \begin{vmatrix} -\cos \vartheta_2 \\ -\sin \vartheta_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Условия касания поверхностей:

$$-r_i \sin(\varphi_1 - \vartheta_1) = \rho \cos \vartheta_2 + e,$$

$$r_i \cos(\varphi_1 - \vartheta_1) = \rho \sin \vartheta_2 + S,$$

$$-\sin(\varphi_1 + \gamma_i - \mathcal{G}_1) = -\cos \mathcal{G}_2,$$

$$\cos(\varphi_1 + \gamma_i - \mathcal{G}_1) = -\sin \mathcal{G}_2,$$

При решении этой системы уравнений целесообразно задаваться параметром r_i (или \mathcal{G}_1). Тогда после преобразований получим следующую систему расчетных уравнений:

$$r_i = r_0 + a \mathcal{G}_1, \quad \operatorname{tg} \gamma_i = \frac{a}{r_i}.$$

$$S = \sqrt{(r_i + \rho \cos \gamma_i)^2 + (\rho \sin \gamma_i)^2}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_1 - \mathcal{G}_1}{2} \right) = \frac{S - (r_i + \rho \cos \gamma_i)}{\rho \sin \gamma_i} \quad \operatorname{ctg} \mathcal{G}_2 = -\operatorname{tg}((\varphi_1 + \gamma_i - \mathcal{G}_1))$$

Матрица аналога скорости движения (см. пример 3.1):

а) кулачка 1

$$L_{V,1}^1 = \frac{\partial A_{10}}{\partial \varphi_1} A_{01} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

б) толкателя 2

$$L_{V,2}^1 = A_{10} \frac{\partial A_{02}}{\partial \varphi_1} A_{20} A_{01} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

в) толкателя 2 относительно кулачка 1

$$L_V^1 = L_{V,1}^1 + u_{21} L_{V<2}^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & u_{21} \sin \varphi_1 \\ -1 & 0 & u_{21} \cos \varphi_1 \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

Уравнение связи параметров:

$$f = \left(\vec{e}_1^{1T} L_V^1 \vec{r}_1^{-1} \right) = \begin{vmatrix} \sin(\mathcal{G}_1 - \gamma_i) & \cos(\mathcal{G}_1 - \gamma_i) & 0 \\ -1 & 0 & u_{21} \cos \varphi_1 \\ & & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_i \sin \mathcal{G}_1 \\ r_i \cos \mathcal{G}_1 \\ 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -r_i \sin \gamma_i + u_{21} \cos(\varphi_1 + \gamma_i - \mathcal{G}_1) = 0$$

Аналог скорости (передаточное отношение) механизма

$$u_{21} = \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = \frac{r_i \sin \gamma_i}{\cos(\varphi_1 + \gamma_i - \mathcal{G}_1)}$$

3.4. Преобразование уравнений обратной задачи

Векторное уравнение (3.28), определяющее условия касания поверхностей ВКП (уравнения обратной задачи), тождественны пяти скалярным уравнениям для пространственной пары и трем для плоской пары. Для сложных кинематических пар эти уравнения, как правило, в явном виде решить не удаётся, приходится применять различные численные методы. Эффективность применения численных методов тем выше, чем ниже порядок решаемой системы уравнений.

Рассмотрим преобразование уравнений обратной задачи на примере пространственной ВКП (см. рис. 3.4, пример 3.2). Для этой пары первое уравнение системы (3.28) можно представить в следующем виде:

$$\bar{R} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = (\bar{a}A - \bar{l}_1H - \bar{l}_2E) \quad (3.35)$$

где \bar{l}_1 и \bar{l}_2 – орты осей вращения звеньев механизма, \bar{a} – орт кратчайшего расстояния между осями, Σ – межосевой угол, H , E – смещение по осям вращения от линии кратчайшего расстояния начала подвижных систем координат (на рис. $H=E=0$).

Пусть поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются в какой-то точке M (т.е. $\bar{e}^1 = \bar{e}^2$). Точка M является точкой контакта, если выполняется уравнение системы (3.35).

Векторное уравнение (3.35) тождественно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) &= A, \\ \bar{l}_1 \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) &= -H + E \cos \Sigma, \\ \bar{l}_2 \cdot (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) &= E - H \cos \Sigma. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Уравнения поверхностей ВКП и орты её нормали будем записывать в подвижных системах координат S_i ($i=1,2$), причем оси z_i совпадают с осями вращения \bar{l}_i :

$$\bar{r}_i^i = \bar{r}_i^i(u_i, \vartheta_i), \quad \bar{e}_i^i = \bar{e}_i^i(u_i, \vartheta_i).$$

Дополнительные системы координат. На поверхности Σ_1 возьмем произвольную точку M_1 и в этой точке поместим дополнительную систему координат S_m . Ось x_m совместим с ортом нормали к поверхности \bar{e}_1 , ось y_m проведем перпендикулярно ортам \bar{e}_1 и \bar{l}_1 . Связь между системами координат S_1 и S_m выразим следующей матрицей:

$$A_{1m} = \begin{vmatrix} e_{x1} & -\frac{e_{y1}}{k_1} & -\frac{e_{x1}e_{z1}}{k_1} & x_1 \\ e_{y1} & \frac{e_{x1}}{k_1} & -\frac{e_{y1}e_{z1}}{k_1} & y_1 \\ e_{z1} & 0 & k_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad k_1 = \sqrt{e_{x1}^2 + e_{y1}^2} = \sqrt{1 - e_{z1}^2}$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты точки M_1 в системе S_1 , e_{x1}, e_{y1}, e_{z1} – проекции орта нормали к поверхности в точке M_1 также в системе S_1 . При выводе матрицы учитывались следующие соотношения для ортов осей y_m и z_m системы координат S_m :

$$\bar{j}_m = \frac{\bar{l}_1 \times \bar{e}_1}{|\bar{l}_1 \times \bar{e}_1|}, \quad \bar{k}_m = \bar{e}_1 \times \bar{j}_m$$

На поверхности Σ_2 второго звена возьмем точку M_2 и также в этой точке поместим дополнительную систему координат S_n . Связь между системами координат S_n и S_2 имеют вид:

$$A_{2n} = \begin{vmatrix} e_{x2} & -\frac{e_{y2}}{k_2} & -\frac{e_{x2}e_{z2}}{k_2} & x_2 \\ e_{y2} & \frac{e_{x2}}{k_2} & -\frac{e_{y2}e_{z2}}{k_2} & y_2 \\ e_{z2} & 0 & k_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad k_2 = \sqrt{e_{x2}^2 + e_{y2}^2} = \sqrt{1 - e_{z2}^2}$$

Связь между дополнительными системами координат. Поверхности Σ_1 и Σ_2 мысленно введем в соприкосновение точками M_1 и M_2 . Орты нормалей к поверхностям совпадут $\bar{e}^1 = \bar{e}^2$.

Затем развернем поверхности вокруг нормали \bar{e} на угол σ так, чтобы угол между осями вращения стал равным межосевому углу Σ . При этом дополнительные системы координат S_m и S_n , связанные соответственно с точками M_1 и M_2 , расположатся так, как показано на рис. 3.6.

Матрица перехода между системами координат:

$$A_{mn} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma & \sin \sigma & 0 \\ 0 & -\sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

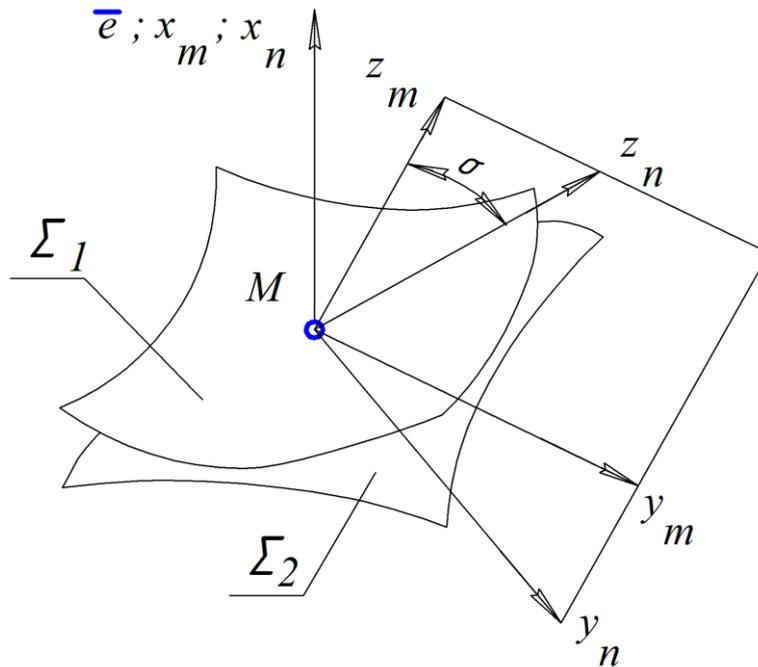


Рис. 3.6. Дополнительные системы координат

Угол σ определим из условия:

$$\bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 = \cos \Sigma \quad (3.37)$$

Для этого найдем проекции ортов \bar{l}_1 и \bar{l}_2 осей вращения звеньев в систем координат S_m :

$$\bar{l}_{1m} = A_{m1} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{z1} \\ 0 \\ k_1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \bar{l}_{2m} = A_{mn} A_{n2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{z2} \\ k_2 \sin \sigma \\ k_2 \cos \sigma \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (3.38)$$

Подставим проекции ортов из (3.38) в уравнение (3.37), после преобразований получим следующее уравнение для вычисления значений угла σ

$$\cos \sigma = \frac{\cos \Sigma - e_{z1} e_{z2}}{k_1 k_2}. \quad (3.39)$$

Итак, связь между подвижными системами координат S_1 и S_2 можно выразить через дополнительные системы координат S_m и S_h :

$$A_{12} = A_{1m} A_{mn} A_{n2}$$

которую представим в общем виде

$$A_{12} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

Решение уравнений (3.36). Данную систему уравнений представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} A \sin \Sigma &= (\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{r}^1) - (\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{r}^2), \\ E \cos \Sigma - H &= (\bar{l}_1 \bar{r}^1) - (\bar{l}_1 \bar{r}^2), \\ E - H \cos \Sigma &= (\bar{l}_2 \bar{r}^1) - (\bar{l}_2 \bar{r}^2). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Скалярные и смешанные произведения векторов инвариантны относительно систем координат, поэтому произведения векторов $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{r}^1)$, $(\bar{l}_1 \bar{r}^1)$ и $(\bar{l}_2 \bar{r}^1)$ будем определять в системе координат S_1 , связанной со звеном 1, а векторные произведения $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{r}^2)$, $(\bar{l}_1 \bar{r}^2)$ и $(\bar{l}_2 \bar{r}^2)$ будем определять в системе координат S_2 , связанной со звеном 2 (см. рис. 3.4).

Проекция векторов \bar{l}_1 , \bar{l}_2 и \bar{r}^1 в системе S_1 :

$$\bar{l}_{11} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_1^1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{l}_{21} = A_{12} \bar{l}_{22} = \begin{vmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.42)$$

Проекция векторов \bar{l}_1 , \bar{l}_2 и \bar{r}^2 в системе S_2 :

$$\bar{l}_{22} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_2^2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \bar{l}_{12} = A_{21} \bar{l}_{11} = \begin{vmatrix} m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

Произведения векторов:

$$(\bar{l}_1 \bar{r}^1) = z_1,$$

$$(\bar{l}_2 \bar{r}^1) = (m_{13}x_1 + m_{23}y_1 + m_{33}z_1),$$

$$(\bar{l}_1 \bar{r}^2) = (m_{31}x_2 + m_{32}y_2 + m_{33}z_2),$$

$$(\bar{l}_2 \bar{r}^2) = z_2,$$

$$(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{r}^1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = (m_{13}y_1 - m_{23}x_1),$$

$$(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{r}^2) = \begin{bmatrix} m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = -(m_{31}y_2 - m_{32}x_2). \quad (3.44)$$

Итак, с учетом уравнений (3.42) ... (3.44) расчетная система уравнений (3.41) для решения обратной задачи приводится к виду:

$$\begin{aligned}
A \sin \Sigma &= (m_{13}y_1 - m_{23}x_1) + (m_{31}y_2 - m_{32}x_2), \\
E \cos \Sigma - H &= z_1 - (m_{31}x_2 + m_{32}y_2 + m_{33}z_2), \\
E - H \cos \Sigma &= z_2 - (m_{13}x_1 + m_{23}y_1 + m_{33}z_1).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Полученная система уравнений является функцией от четырех параметров (криволинейных координат) поверхностей:

$$F(u_1, \mathcal{G}_1, u_2, \mathcal{G}_2) = 0.$$

Для её решения необходимо задаваться одним параметром и определять остальные три.

Углы поворота звеньев механизма. Угол поворота φ_1 звена 1 (параметр определяющий положение подвижной системы координат S_1 относительно стойки, см. рис. 3.4 б) можно рассчитать из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\bar{j}_1 \bar{a}}{\bar{i}_1 \bar{a}} = -\frac{(\bar{j}_1, \bar{l}_1, \bar{l}_2)}{(\bar{i}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2)} = -\frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}} = \frac{m_{13}}{m_{23}} \tag{3.46}$$

Угол поворота φ_2 звена 2 (рис. 3.4 в):

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{\bar{j}_2 \bar{a}}{\bar{i}_2 \bar{a}} = -\frac{(\bar{j}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2)}{(\bar{i}_2, \bar{l}_1, \bar{l}_2)} = -\frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{m_{31}}{m_{32}} \tag{3.47}$$

Углы поворота звеньев определяются после того, как найдены координаты точки контакта.

В заключение отметим, в расчетных зависимостях используются только одна строка и один столбец матрицы M_{12} . Их можно определить из следующих соотношений:

$$\begin{vmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ 0 \end{vmatrix} = A_{1m} \begin{vmatrix} e_{z2} \\ k_2 \sin \sigma \\ k_2 \cos \sigma \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \\ 0 \end{vmatrix} = A_{2n} \begin{vmatrix} e_{z1} \\ -k_1 \sin \sigma \\ k_1 \cos \sigma \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{3.48}$$

Для проверки необходимо использовать соотношение:

$$m_{33} = \cos \sigma. \tag{3.49}$$

Изложенный метод с успехом можно использовать и для исследования плоских механизмов. Только для каждого механизма необходимо

устанавливать свои инвариантные соотношения. Например, кулачковый механизм с толкателем – расстояние e от центра вращения кулачка до линии перемещения толкателя (рис. 3.5). Цилиндрическая зубчатая передача – расстояние между осями вращения зубчатых колес.

Пример 3.5. Преобразовать уравнения обратной задачи в примере 3.4.

Первое векторное уравнение касания поверхностей представим в виде (рис. 3.5):

$$\bar{R} = (r^1 - \bar{r}^2) = \bar{i}_2 e + \bar{j}_2 S,$$

которое тождественно двум скалярным уравнениям:

$$\bar{i}_2 (r^1 - \bar{r}^2) = e,$$

$$\bar{j}_2 (r^1 - \bar{r}^2) = \bar{j}_2 S,$$

В точке касания поверхностей поместим дополнительные системы координат S_m и S_n , которые в нашем случае будут совпадать, то есть матрица перехода:

$$A_{mn} = A_{nm} = I,$$

где I – единичная матрица. Матрицы перехода между системами координат:

$$A_{1m} = \begin{vmatrix} e_{x1} & -e_{y1} & x_1 \\ e_{y1} & e_{x1} & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{n2} = \begin{vmatrix} e_{x2} & e_{y2} & -(x_2 e_{x2} + y_2 e_{y2}) \\ -e_{y2} & e_{x2} & (x_2 e_{y2} - y_2 e_{x2}) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = A_{1m} A_{mn} A_{n2} = \begin{pmatrix} (e_{x1} e_{x2} + e_{y1} e_{y2}) & (e_{x1} e_{y2} - e_{y1} e_{x2}) & X \\ -(e_{x1} e_{y2} - e_{y1} e_{x2}) & (e_{x1} e_{x2} + e_{y1} e_{y2}) & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проекция ортов \bar{i}_2 и \bar{j}_2 в системах координат S_1 и S_2 :

$$\bar{i}_{22} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\bar{i}_{21} = A_{12} \bar{i}_{22} = \begin{vmatrix} (e_{x1} e_{x2} + e_{y1} e_{y2}) \\ -(e_{x1} e_{y2} - e_{y1} e_{x2}) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) \\ -\cos(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{j}_{22} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\bar{j}_{21} = A_{12} \bar{j}_{22} = \begin{vmatrix} (e_{x1}e_{y2} - e_{y1}e_{x2}) \\ (e_{x1}e_{x2} + e_{y1}e_{y2}) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) \\ -\sin(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Условия касания поверхностей:

$$-r_i \sin \mathcal{G}_1 \sin(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) - r_i \cos \mathcal{G}_1 \cos(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) - \rho \cos \mathcal{G}_2 = e,$$

$$r_i \sin \mathcal{G}_1 \cos(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) - r_i \cos \mathcal{G}_1 \sin(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) - \rho \cos \mathcal{G}_2 = S.$$

Данные уравнения приводятся к виду:

$$-(r_i \cos \gamma_i + \rho) \cos \mathcal{G}_2 - r_i \sin \gamma_i \sin \mathcal{G}_2 = e$$

$$-(r_i \cos \gamma_i + \rho) \sin \mathcal{G}_2 + r_i \sin \gamma_i \cos \mathcal{G}_2 = S$$

Угол поворота кулачка определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\operatorname{ctg}(\mathcal{G}_1 - \gamma_i + \mathcal{G}_2) =$$

Если сравнить системы уравнений, полученные в данном примере и в примере 3.4, то после несложных преобразований легко убедится, что они тождественны.

3.5. Связь между кривизнами сопряженных поверхностей. Приведенная кривизна

Для точки контакта сопряженных поверхностей Σ_1 и Σ_2 получены дифференциальные уравнения, записанные в системе координат S_1 , связанной со звеном 1:

$$\bar{V}_r^1 = L_V^1 \bar{r}^1 + \bar{V}_r^2 \quad (3.50)$$

$$d\bar{e}_r^1 = L_V^1 \bar{e}^1 + d\bar{e}_r^2. \quad (3.51)$$

Здесь опущены нижние индексы. Так как вектора \bar{V}_r^i и $d\bar{e}_r^i$ лежат в касательной плоскости, то в этой плоскости выберем два взаимно ортогональных орта \bar{i}_s и \bar{i}_q и спроектируем уравнения (3.50) и (3.51) на эти орты. При проектировании дифференциалов ортов воспользуемся формулой Родрига (1.33):

$$\begin{vmatrix} V_{rs}^1 \\ V_{rq}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\bar{i}_s^T L_V^1 \bar{r}^1) + V_{rs}^2 \\ (\bar{i}_q^T L_V^1 \bar{r}^1) + V_{rq}^2 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} \chi_s^1 & \tau_s^1 \\ \tau_s^1 & \chi_q^1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{rs}^1 \\ V_{rq}^1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \chi_s^2 & \tau_s^2 \\ \tau_s^2 & \chi_q^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{rs}^2 \\ V_{rq}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\bar{i}_s^T L_V^1 \bar{e}^1) \\ (\bar{i}_q^T L_V^1 \bar{e}^1) \end{vmatrix}$$

Произведя подстановки из первого уравнения во второе, после преобразований получим в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} (\chi_s^1 - \chi_s^2) & (\tau_s^{12} - \tau_s^2) & \alpha_s \\ (\tau_s^{12} - \tau_s^2) & (\chi_q^1 - \chi_q^2) & \alpha_q \\ \alpha_s & \alpha_q & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{rs}^2 \\ V_{rq}^2 \\ 1 \end{vmatrix} = |0|, \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \chi_s^1 (\bar{i}_s^T L_V^1 \bar{r}^1) + \tau_s^1 (\bar{i}_q^T L_V^1 \bar{r}^1) + (\bar{i}_s^T L_V^1 \bar{e}^1) \\ \alpha_q &= \tau_s^1 (\bar{i}_s^T L_V^1 \bar{r}^1) + \chi_q^1 (\bar{i}_q^T L_V^1 \bar{r}^1) + (\bar{i}_q^T L_V^1 \bar{e}^1) \end{aligned}$$

Для получения ещё одного соотношения продифференцируем уравнение связи параметров (3.33):

$$\left(d\bar{e}_r^1 L_V^1 \bar{r}^1 \right) + \left(\bar{e}^1 L_V^1 \bar{V}_r^1 \right) + \left(\bar{e}^1 \frac{\partial L_V^1}{\partial \varphi_1} \bar{r}^1 \right) = 0 \quad (3.53)$$

Произведя замену вектора $d\bar{e}_r^1$ по формуле Родрига, после преобразований получим:

$$\alpha_s V_{rs}^1 + \alpha_q V_{rq}^1 + d = 0, \quad d = - \left(\bar{e}^1 \frac{\partial L_V^1}{\partial \varphi_1} \bar{r}^1 \right), \quad (3.54)$$

значения коэффициентов α_s и α_q смотри выше. Подставив уравнение (3.52) в (3.54), получим:

$$\alpha_s V_{rs}^2 + \alpha_q V_{rq}^2 + g = 0, \quad (3.55)$$

где

$$g = d + \alpha_s (\bar{i}_s^T L_V^1 \bar{r}^1) + \alpha_q (\bar{i}_q^T L_V^1 \bar{r}^1).$$

В окончательном виде уравнения связи между кривизнами имеют вид:

$$\begin{vmatrix} (\chi_s^1 - \chi_s^2) & (\tau_s^1 - \tau_s^2) & \alpha_s \\ (\tau_s^1 - \tau_s^2) & (\chi_q^1 - \chi_q^2) & \alpha_q \\ \alpha_s & \alpha_q & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{rs}^2 \\ V_{rq}^2 \\ 1 \end{vmatrix} = |0| \quad (3.56)$$

Под приведенной кривизной χ_{np} понимается разность кривизн обеих поверхностей в общем нормальном сечении:

$$\chi_{np} = \chi^1 - \chi^2$$

Приведенную кривизну в произвольном сечении (направление определяется ортом \bar{i}_ω , рис. 3.7) выразим через главные кривизны поверхностей:

$$\begin{aligned} \chi_{np} &= [\chi_I^1 \cos^2(\sigma_1 + \varphi) + \chi_{II}^1 \sin^2(\sigma_1 + \varphi)] - \\ &\quad - [\chi_I^2 \cos^2(\sigma_2 + \varphi) + \chi_{II}^2 \sin^2(\sigma_2 + \varphi)] \end{aligned}$$

После преобразований это уравнение представим в виде:

$$\begin{aligned} \chi_{np} &= (\chi_s^1 - \chi_s^2) \cos^2 \varphi + (\chi_q^1 - \chi_q^2) \sin^2 \varphi + 2(\tau_s^1 - \tau_s^2) \cos \varphi \sin \varphi = \\ &= \chi_{nps} \cos^2 \varphi + \chi_{npq} \sin^2 \varphi + 2\tau_{nps} \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

Итак, приведенная кривизна в произвольном сечении может быть выражена через приведенные кривизны и приведенное относительное кручение поверхностей, определенных вдоль двух взаимно ортогональных направлений.

Главные направления (см. рис. 2.11) и главные приведенные кривизны определяются из выражений (см. уравнения (2.21) для поверхности):

$$\operatorname{tg} 2q = \frac{2\tau_{nps}}{\chi_{nps} - \chi_{npq}},$$

$$\chi_{npI,II} = \frac{1}{2} \left[(\chi_{nps} + \chi_{npq}) \pm \frac{\chi_{nps} - \chi_{npq}}{\cos 2q} \right],$$

или

$$\chi_{npI,II} = \frac{1}{2} \left[(\chi_{nps} + \chi_{npq}) \pm \sqrt{(\chi_{nps} - \chi_{npq})^2 + 4\tau_{nps}^2} \right]$$

Уравнения связи (3.56) можно представить так:

$$\begin{vmatrix} \chi_{nps} & \tau_{nps} & \alpha_s \\ \tau_{nps} & \chi_{npq} & \alpha_q \\ \alpha_s & \alpha_q & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{rs}^2 \\ V_{rq}^2 \\ 1 \end{vmatrix} = |0|$$

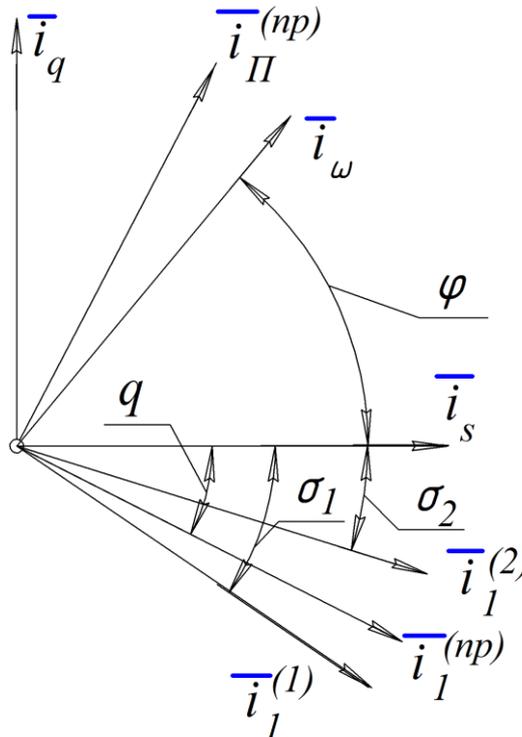


Рис. 3.7. Системы координат в точке контакта

Инварианты приведенной кривизны:

а) средняя приведенная кривизна

$$2H_{np} = \chi_{npI} + \chi_{npII} = \chi_{nps} + \chi_{npq},$$

б) гауссова приведенная кривизна

$$K_{np} = \chi_{npI} \cdot \chi_{npII} = \chi_{nps} \cdot \chi_{npq} - \tau_{nps}^2.$$

Если поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются в точке, то вследствие упругих деформаций после сжатия, они начинают касаться по некоторой площадке. Проекция площадки на касательную плоскость являются эллипсом (см. п. 2.5 и рис. 2.24).

Направление осей эллипса совпадают с главными направлениями приведенных кривизн поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Главные приведенные кривизны и их инварианты не равны нулю:

$$2H_{np} = \chi_{nps} + \chi_{npq} \neq 0, \quad K_{np} = \chi_{nps} \cdot \chi_{npq} - \tau_{nps}^2 \neq 0.$$

Если в окрестности точки контакта поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются по линии (рис. 2.25), то одна из приведенных кривизн равна нулю, и для их инвариантов справедливы соотношение

$$2H_{np} = \chi_{nps} + \chi_{npq} \neq 0, \quad K_{np} = \chi_{nps} \cdot \chi_{npq} - \tau_{nps}^2 = 0.$$

При поверхностном контакте в окрестности точки контакта приведенная кривизна по всем направлениям равна нулю. И инварианты приведенной кривизны также равны нулю:

$$2H_{np} = \chi_{nps} + \chi_{npq} = 0, \quad K_{np} = \chi_{nps} \cdot \chi_{npq} - \tau_{nps}^2 = 0.$$

Уравнения связи между кривизнами (3.56) или (3.57) используются для решения следующих трех задач.

Задача 1. Поверхность Σ_2 образуется поверхностью Σ_1 (поверхность Σ_1 и Σ_2 взаимно огибаемые). В этом случае уравнения (3.56) используются для определения кривизн поверхности Σ_2 .

Поверхности Σ_1 и Σ_2 касаются по линии, Переход из точки A_0 линии контакта L_0 к линии контакта L_1 может идти по произвольному направлению (рис. 2.22), поэтому определитель квадратной матрицы в уравнениях (3.56) должен быть равен нулю, Отсюда справедливо следующее матричное соотношение:

$$\begin{vmatrix} (\chi_s^1 - \chi_s^2) & (\tau_s^1 - \tau_s^2) \\ (\tau_s^1 - \tau_s^2) & (\chi_q^1 - \chi_q^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_s & 1 \\ \alpha_q & g \end{vmatrix} \alpha_s \quad \alpha_q = \begin{vmatrix} \frac{\alpha_s \alpha_s}{g} & \frac{\alpha_s \alpha_q}{g} \\ \frac{\alpha_s \alpha_q}{g} & \frac{\alpha_q \alpha_q}{g} \\ g & g \end{vmatrix}$$

Из этого матричного равенства получаем следующие соотношения между кривизнами взаимно огибаемых поверхностей

$$\begin{aligned}\chi_s^2 &= \chi_s^1 - \frac{\alpha_s \alpha_s}{g}, \\ \chi_q^2 &= \chi_q^1 - \frac{\alpha_q \alpha_q}{g}, \\ \tau_s^2 &= \tau_s^1 - \frac{\alpha_s \alpha_q}{g}.\end{aligned}\tag{3.57}$$

Расчет кривизн поверхностей по данным соотношениям гораздо проще чем использование методов дифференциальной геометрии.

Задача 2. Заданы поверхности Σ_1 и Σ_2 и их движения относительно стойки, требуется определить аналог скорости и аналог ускорения. Пусть поверхности касаются в точке.

Первые два уравнения системы (3.56) позволяют определить проекции касательной к активно действующей на поверхности Σ_2 :

$$\begin{vmatrix} V_{rs}^2 \\ V_{rq}^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\chi_{nps} \chi_{npq} - \tau_{nps}^2} \begin{vmatrix} \tau_{nps} \alpha_q - \chi_{npq} \alpha_s \\ \tau_{nps} \alpha_s - \chi_{nps} \alpha_q \end{vmatrix}.$$

Затем из уравнения (3.56) определяются проекции касательной V_{rs}^1 и V_{rq}^1 к активно действующей линии на поверхности Σ_1 . И наконец, из дифференциального уравнения связи параметров (3.54) определяется параметр d , для его расчета необходимо знать производную матрицы $\frac{\partial L_V^1}{\partial \varphi_1}$, в которую неявно входит аналог ускорения.

Задача 3 (синтез ВКП). Задан механизм с ВКП, известны поверхность Σ_1 и закон передачи движения. Какие должны быть кривизны поверхности Σ_2 , чтобы обеспечить заданные размеры пятна контакта и направление активно действующей линии.

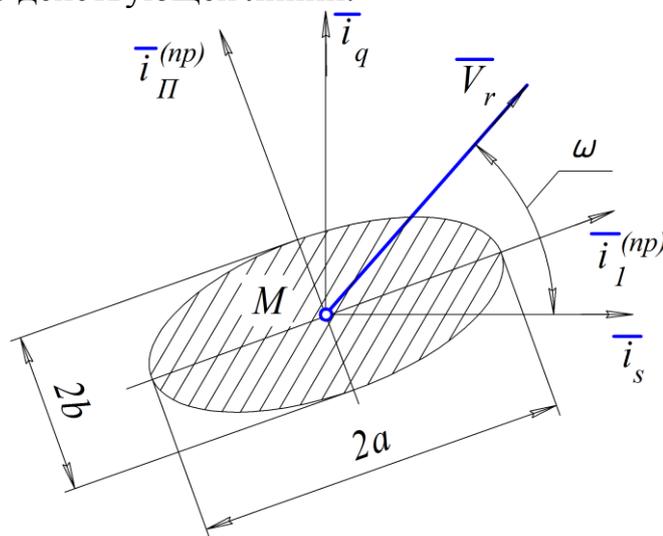


Рис. 3.8. Параметры контакта при синтезе ВКП

Направление активно действующей линии на поверхности Σ_2 будем задавать углом ω (рис. 2.12). Проекция площадки контакта на касательную плоскость является эллипсом (рис. 2.12). Направление осей эллипса совпадает с главными направлениями приведенных кривизн соприкасающихся поверхностей Σ_1 и Σ_2 . Полуоси эллипса a и b определяются из выражений:

$$a = \sqrt{\frac{2\delta}{\chi_{npI}}}, \quad b = \sqrt{\frac{2\delta}{\chi_{npLi}}},$$

где χ_{npI} , χ_{npLi} – главные приведенные кривизны, δ – величина упругого сближения тел. Отсюда следует, что задание размеров пятна контакта тождественно заданию одной из главных приведенных кривизн, обозначим её $\tilde{\chi}_{np}$.

На основании уравнений (3.57) после многочисленных подстановок и преобразований получена следующая система соотношений между кривизнами поверхностей Σ_1 и Σ_2 :

$$\begin{aligned} \chi_s^2 &= \chi_s^1 - \frac{\alpha_s \alpha_s}{g} - \Delta\chi \sin^2 \omega, \\ \chi_q^2 &= \chi_q^1 - \frac{\alpha_q \alpha_q}{g} - \Delta\chi \cos^2 \omega, \\ \tau_s^2 &= \tau_s^1 - \frac{\alpha_s \alpha_q}{g} + \Delta\chi \sin \omega \cos \omega, \end{aligned}$$

где

$$\Delta\chi = \frac{\tilde{\chi}_{np} \left[\tilde{\chi}_{np} - \frac{\alpha_s \alpha_s}{g} - \frac{\alpha_q \alpha_q}{g} \right]}{\left[\tilde{\chi}_{np} - \frac{(\alpha_s \cos \omega + \alpha_q \sin \omega)^2}{g} \right]}.$$

Полученная система уравнений используется при синтезе ВКП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. –М.: Наука, 1968. 584с.
2. Литвин Ф.Л. Проектирование механизмов и деталей приборов. –Л.: Машиностроение, 1973. –696с.
3. Фролов К.В. и др. Теория механизмов и машин: Учеб. Для студентов вузов.– [4-еизд.,испр.идоп.]–М.: Высшая школа, 2002
4. Заблонский К.И. и др. Теория механизмов и машин. –М.: Машиностроение, 1989, 432с.
5. Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия. ГОНТИ, 1939.
6. Шевелева Г.И. Теория формообразования и контакта движущихся тел. –М.,Станкин, 1999

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	3
1.1. Пространственная кривая	3
1.2. Кривизна и кручение пространственной кривой	5
1.3. Уравнение поверхности и нормаль	7
1.4. Квадратичные формы	10
1.5. Кривизна и кручение поверхности	11
1.6. Формулы Эйлера и Родрига	13
1.7. Вычисление кривизны и относительного кручения поверхности	15
ГЛАВА 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ И ИХ ЭЛЕМЕНТЫ	19
2.1. Исходные понятия	19
2.2. Классификация кинематических пар	20
2.3. Конструктивное исполнение кинематических пар	25
2.4. Параметры перемещения точек и линий по поверхности	31
2.5. Характеристики контакта элементов кинематической пары	33
2.6. Износ элементов кинематической пары. Виды изнашивания	37
2.7. Геометрические условия существования элементов кинематических пар	39
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ ВЫСШЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРЫ	42
3.1. Преобразование систем координат	42
3.2. Матричный метод определения скоростей и ускорений	47
3.3. Анализ трехзвенного механизма с промежуточной ВКП	52
3.4. Преобразование уравнений обратной задачи	57
3.5. Связь между кривизнами сопряженных поверхностей. Приведенная кривизна	63
ЛИТЕРАТУРА	69



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»



КАФЕДРА МЕХАТРОНИКИ

Кафедра Мехатроники, одна из старейших кафедр СПбГУ ИТМО, история которой начинается с 30-х годов XX века. Первое упоминание о прародительнице кафедры Мехатроники содержится в приказе № 18 от 3.10.1930 по Учебному комбинату точной механики и оптики: "доцент Замыцкий Н.П. назначен с 1.10.1930 заведующим кафедрой Детали машин института точной механики и оптики". Важным этапом было существование в 30-х годах кафедры «Сопротивление материалов и детали машин», поскольку речь шла уже не только о выборе схемы устройства (машины, прибора), но и об определении размеров и формы деталей при прочностном расчете. Руководил кафедрой в то время виднейший ученый в области строительной механики Яги Ю.И.

С 1945 г. руководство кафедрой осуществляет Н.И. Колчин, крупнейший учёный механик в самом широком смысле этого слова. Он расширил и обогатил исследовательскую и преподавательскую деятельность кафедры методами Теории машин и механизмов. Нельзя не сказать, что Н.И. Колчин был в той или иной мере учителем трех последующих заведующих кафедрой – Ф.Л. Литвина, К.И. Гуляева, Б.П. Тимофеева.

С 1951 года, заведующим кафедрой Теории механизмов и деталей машин, становится Рифтин Л.П. Именно в этот момент учебная и научная деятельность кафедры приобрела черты синтетической научной дисциплины, где выбор схем машины, прибора, устройства сопровождался учетом не только геометро-кинематических, но и динамических, прочностных характеристик.

1964 год: "Ректорат и Совет ЛИТМО поручили профессору Литвину Ф.Л. провести реорганизацию кафедры Теории механизмов и деталей машин в кафедру приборостроительного типа, закладывающую основы конструкторской подготовки специалистов, выпускаемых ЛИТМО". Во время заведования кафедрой Литвиным Ф.Л. была создана лабораторная база с оригинальными лабораторными установками, написаны мно-

гочисленные методические пособия, разработаны и изготовлены учебные стенды, макеты устройств и прозрачные модели, отвечающие современным требованиям учебного процесса в высшей школе.

Мало того, кафедра приобрела широкую известность в стране и за рубежом. Особенно массовой была подготовка научных кадров высшей квалификации для Болгарии и Эстонии. Кафедра до сих пор гордится такими бывшими аспирантами как Кольо Минков Петров — директор Института механики и биомеханики Болгарской АН, кандидат в президенты страны от Земледельческого союза в начале 90-х. Запомнились и м механизм, особенно их динамике в камерах скоростной съемки. Работы, связанные с расчетом и конструированием механизмов ограничителей вращения. Тематика, связанная со счетно-решающими приборами, главная для кафедры в эпоху Л.П. Рифтина, уже умерла. Счетно-решающие приборы сменила эра электромеханики, когда электромеханические элементы связаны в систему точными кинематическими цепями.

В области теории передач следует особо выделить два направления деятельности. Во-первых, проектирование червячных и глобоидных передач. В этом направлении существенных результатов добились В.И. Рыбаков и Н.Г. Линдтроп в червячных передачах, В.Д. Брицкий — в части глобоидных передач. Последний на долгое время определил основное поле своей научной деятельности — совершенствование прикладных методов теории поверхностей, отличающихся удобством проведения расчетов на ЭВМ, т.е. он совершенствовал методы анализа и синтеза передач одновременно (а иногда и с опережающим темпом) с развитием ЭВМ. Сегодня вошли в учебную практику матричные методы определения скоростей и ускорений, кривизны и геодезического кручения и пр., к созданию которых В.Д. Брицкий приступил еще в 60-х.

Во-вторых, оптимизационный синтез конических и гипоидных передач. Эта тема базировалась во многом на тесных связях с автомобильными гигантами страны — ЗИЛом, ГАЗом, ВАЗом, однако работы выходили далеко за пределы частных задач проектирования передач задних мостов автомобилей, тем более, что уже после Ф.Л. Литвина кафедра много занималась этой тематикой по договорам с предприятиями авиационной промышленности страны. Коническими и гипоидными передачами занимался большой отряд ученых кафедры: А.А. Заостровский, Л.Я. Либушкин, Б.Д. Зильберман, Б.П. Тимофеев, Ю.А. Синичкин, В.С. Смирнов, В.Н. Рубцов, Е.И. Гутман и др. занимались методами нарезания колес и оптимизацией качества передач, попутно решая глобальные задачи теории зубчатых зацеплений — "Обратную задачу", задачу синтеза передач с локализованным контактом — синтеза "локального", "двухточечного" и "четырёхточечного", синтеза с проверкой условий зацепления по всей активной действующей линии, с правкой условий ЭВМ в цикле, либо исполнителем по результатам анализа и т.д. И совсем уже оригинальную задачу решал под руководством Ф.Л. Литвина, А.М. Политавкин — образование поверхностей сопряженных гиперболоидальных винтов на скрещивающихся осях с помощью двух режущих линий. Эти винты транспортировали жидкость с включением твердой фазы в замкнутом объеме. Новый метод синтеза сопряженных поверхностей в результате дал блестящий результат.

В-третьих, в 70-х на кафедре возникло направление на пересечении теории передач и механизмов и деталей приборов — это разработка теории точности механизмов и создание приборов для контроля моментов трогания и кинематической погрешности передаточных механизмов. Нельзя не отметить вклад Н.Г. Линдтропа, Б.П. Тимофеева, начавшего сотрудничество в этом направлении еще в 60-е годы с ЦНИИ Электроприбор, М.А. Ноздрин, много занимавшегося не только кинематомерами, но и специальными стендами оборонного назначения. Этой же тематикой при Ф.Л. Литвине начали заниматься В.А. Мурашев и Е.В. Шалобаев, защитившие кандидатские диссертации по мелко модульным зубчатым передачам позднее.

Весьма плодотворным было сотрудничество кафедры со столь известными профессорами нашего института как Г.А. Петухов и С.А. Родионов. С первым работа шла в русле многочисленных и исключительно плодотворных консультаций в части методов вычислительной математики, использования различных языков программирования. С профессором С.А. Родионовым особенно интенсивно сотрудничали работники кафедры в период работы над библиотекой программ автокода "Инженер", во многом предвосхитившего сегодняшнюю программу pro-engineer. Хотелось бы думать, что польза была обоюдной — мы получали методы решения задач теории передач на ЭВМ, а С.А. Родионов — задачи для отладки целого ряда программ, в особенности оптимизационных. Горько сознавать, что обоих этих прекрасных ученых уже нет в живых, и старая истина: "Лучшие уходят раньше" кажется жестокой и несправедливой.

Была начата еще одна область научных работ, темой которой являлся анализ и синтез пространственных стержневых механизмов и манипуляторов. Еще в 70-х кафедра ТМиДП подбиралась к мехатронной тематике, ведь роботы являются наиболее распространенными и типичными мехатронными устройствами, а манипуляционная система — неотъемлемый элемент промышленного робота. Пока еще не стоят вопросы интеллектуальности и антропоморфности роботов — все начинается, как и положено на кафедре теории механизмов и деталей приборов, с анализа и синтеза механизмов — манипуляционных систем, но слово синтез — создание, проектирование, дизайн, конструирование, уже присутствует.

В период заведования кафедрой ТМиДП Ф.Л. Литвин (1964-1977) являлся научным руководителем Ленинградского филиала семинара по теории механизмов и машин, действовавшего при отделении механики и процессов управления АН СССР. Он был членом Президиума научно-технического совета по ТММ МИНВУЗа СССР, членом редакции международного журнала "Mechanism and Machine Theory" (США).

В начале 1979 года заведующим кафедрой становится профессор Гуляев К.И. По своей направленности кафедра становится общеинженерной.

В 1989 году Тимофеев Б.П. приступил к заведыванию общеинженерной кафедрой Теории механизмов и деталей приборов, преобразовав её в выпускающую кафедру Мехатроники. Только в 1994 году специальность "Мехатроника" появилась в официальном списке специальностей.

С 2005 года кафедру возглавляет доцент Ноздрин М.А. В учебную и научную деятельность внедряются компьютерные технологии, разрабатываются инновационные образовательные программы, создаются новые лабораторные циклы и лаборатории. В 2009 году утверждена научная школа "Фундаментальные проблемы надежности и точности машин и приборов".

В 2011 году исполняющим обязанности заведующего становится Монахов Ю.С., в прошлом выпускник кафедры Мехатроники.

С 2012 года заведующим кафедрой становится профессор Мусалимов В.М.

Резников Станислав Сергеевич

**Методы анализа и синтеза высших кинематических
пар**

Учебное-методическое пособие

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального исследова-
тельского университета информационных техно-
логий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

