Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫХ И ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра теоретической ме- ханики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольных работ
для студентов специальностей
170600, 210200, 271300, 070200
факультета заочного обучения и экстерната

Санкт-Петербург 2004

УДК 531(075)

Федорова Л.А., Агапова Л.А. Теоретическая механика: Метод. ука-зания по выполнению контрольных работ для студентов спец. 170600, 210200, 271300, 070200 факультета заочного обучения и экстерната. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2004. – 14 с.

Представлены текстовые и графические условия задач, выполняемых студентами в процессе самостоятельного изучения курса «Теоретическая механика», даны примеры их решения.

Рецензент
Доктор техн. наук, проф. В.В. Пеленко

Рекомендованы к изданию советом факультета холодильной техники

© Санкт-Петербургский государственный
университет низкотемпературных
и пищевых технологий, 2004

ВВЕДЕНИЕ

Студенты специальностей 170600, 210200, 271300, 070200 факультета заочного обучения и экстерната выполняют три контрольные работы по теоретической механике.

К контрольным работам предъявляются следующие требования:

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной (ученической) тетради, страницы которой должны быть пронумерованы. На обложке указываются: номер работы, фамилия, имя, отчество студента, шифр и домашний адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, перечень решаемых задач, год издания методических указаний.

2. Решение каждой задачи обязательно начинают на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверять). Сверху указывается номер задачи, далее делается рисунок и записывается, что в задаче дано и что требуется определить. Рисунок выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел или их расположения должны соответствовать этим условиям. Рисунок должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на рисунке, а также указывать единицы измерения получаемых величин обязательно. Если в соответствии с условием задачи требуется показать на рисунке вектор скорости или ускорения точки в масштабе, необходимо привести единицу масштаба. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получается тот или иной результат и т. п.). На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

Если работа не зачтена, студент должен внести исправления в решение задач и представить ее на повторную рецензию. **К работе,**

высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

3. Контрольные работы выполняются студентами в порядке возрастания номеров, т. е. сначала работа № 1, после получения на нее рецензии и зачета – работа № 2, затем – работа № 3.

4. При возникновении затруднений в проработке теории, решении задач студент может обратиться на кафедру за консультацией.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

В контрольную работу № 1 входят две задачи из раздела «Статика твердого тела» и две задачи из раздела «Кинематика точки».

Поясним, как отобрать необходимый для решения комплект задач:

– первая буква имени студента определяет строку в таблице исходных данных для решения задачи 1 (прил. 1);

– вторая буква имени студента определяет рисунок к задаче 1 (прил. 1);

– начальная буква отчества студента определяет строку в таблице исходных данных для решения задачи 2 и рисунок к задаче 2 (прил. 2);

– первая буква фамилии студента указывает строку в таблице исходных данных для решения задачи 3 (прил. 3);

– вторая буква фамилии указывает строку в таблице исходных данных для решения задачи 4 (прил. 4).

Статика твердого тела

Задача 1

Определить реакции опор твердого тела (рамы) при действии произвольной плоской системы сил.

Порядок решения задачи

Изобразить схему конструкции с заданными внешними силами и опорами. Построить силовую схему, для чего заменить равномерно распределенную нагрузку равнодействующей силой; при необходимости разложить наклонные силы на горизонтальные и вертикальные составляющие, сохраняя неизменной точку их приложения.

Согласно принципу освобождаемости от связей, вместо мысленно отброшенных опор изобразить замещающие их реакции (силы).

Для плоской системы сил, приложенных к балке с ломаной осью (раме), составить три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}&\sum X_i = 0;\\&\sum Y_i = 0;\\&\sum M_{Ai} = 0.\end{aligned} \qquad (1)$$

В рассматриваемых конструкциях количество неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия (статически определимая задача). Поэтому, решая совместно три уравнения равновесия с тремя неизвестными (1), находим все три реакции связей.

Для контроля правильности составления трех уравнений равновесия и выполнения вычислений дополнительно записывается уравнение моментов всех сил относительно нового центра моментов *K*, который выбирается таким образом, чтобы все реакции связей входили в уравнение:

$$\sum M_{Ki} = 0. \qquad (2)$$

Если в результате вычислений уравнение (2) обратится в тождество, то выполненная таким образом проверка подтвердит правильность решения задачи.

Оформление решения задачи

В процессе решения задачи должны быть представлены: исходные данные и конструктивная схема рассчитываемой рамы с задаваемыми (активными) силами; силовая схема, содержащая активные силы и реакции мысленно отброшенных связей; уравнения равновесия плоской системы сил и их решение; уравнение моментов сил для проверки правильности решения задачи.

Примеры решения задачи

Пример 1

Дано: схема конструкции (рис. 1); P = 5 кН; M = 8 кНм; q = 3кН/м; β=30°; размеры – в метрах.

Определить: реакции опоры A.

Решение.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции.

Мысленно отбросим связь – жесткую заделку. Действие связи на раму заменим ее реакциями: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A$. M_A – момент реактивной пары сил, действующей в сечении рамы, проходящем через точку A, называемый для краткости реактивным моментом заделки. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим сосредоточенной силой $\vec{Q}$, приложенной в середине загруженного участка ($Q = q \cdot 2 = =3 \cdot 2 = 6$ кН).

Разложим сосредоточенную силу $\vec{P}$ на две составляющие силы $\vec{P}', \vec{P}''$, определим модули составляющих:

$$\vec{P}' = P\cos\beta = 5\cos 30^{\circ} = 4{,}33 \text{ кН},$$

$$\vec{P}'' = P\sin\beta = 5\sin 30^{\circ} = 2{,}5 \text{ кН}.$$

Силовая схема представлена на рис. 2. Для плоской системы сил, приложенных к раме, составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \qquad X_A + P' = 0; \tag{3}$$

$$\sum Y_i = 0; \qquad Y_A - P'' - Q = 0; \tag{4}$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \qquad M_A - P'' \cdot 2 - M - Q \cdot 4 = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (3) определяем реакцию X_A:

$$X_A = -P' = -4{,}33 \text{ кН}.$$

Знак минус в значении X_A указывает на то, что принятое при составлении уравнений равновесия направление этой реакции не совпадает с ее действительным направлением.

Из уравнения (4) определяем реакцию Y_A:

$$Y_A = P'' + Q = 2{,}5 + 5 = 7{,}5 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5) определяем реактивный момент заделки M_A:

$$M_A = P'' \cdot 2 + M + Q \cdot 4 = 2{,}5 \cdot 2 + 8 + 5 \cdot 4 = 33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проверка. Для проверки правильности решения системы уравнений (3), (4), (5) составляем уравнение моментов относительно точки B:

$$\sum M_{Bi} = M_A - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 3 + P' \cdot 3 + P'' \cdot 3 - M + Q \cdot 1 = 33 - 7{,}5 \cdot 5 + (-4{,}33) \cdot 3 + \\ + 4{,}33 \cdot 3 + 2{,}5 \cdot 3 - 8 + 5 \cdot 1 = 0. \qquad (6)$$

$$0 \equiv 0.$$

Выполнение тождества подтверждает правильность решения.

Пример 2

Дано: схема конструкции (рис. 3); P = 10 кН; M = 3 кН·м; q = 1,2 кН/м; α = 60°; β = 30°; размеры – в метрах.

Определить: реакции опор рамы в точках A и B.

Решение.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Отбросим мысленно связи: шарнирно неподвижную опору в точке A и идеальный стержень BC. Действие связей на раму заменим их реакциями. Так как направление реакции шарнирно неподвижной опоры A неизвестно, определим ее по составляющим $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$.

Покажем реакцию $\vec{R}_B$ идеального стержня BC по оси стержня. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим равнодействующей – сосредоточенной силой $\vec{Q}$, приложенной в середине загруженного участка:

$$Q = q \cdot 2 = 1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4 \text{ кН}.$$

Разложим силу $\vec{P}$ и реакцию $\vec{R}_B$ на две составляющие силы; определим модули составляющих:

$$P' = P\cos\beta = 10\cos 30^\circ = 8{,}66 \text{ кН},$$

$$P'' = P\sin\beta = 10\sin 30^\circ = 5 \text{ кН},$$

$$R'_B = R_B \sin\alpha = R_B \sin 60^\circ = R_B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$R''_B = R_B\cos\alpha = R_B\cos 60^\circ = \frac{1}{2}R_B.$$

Силовая схема представлена на рис. 4. Для плоской системы сил, приложенных к балке, составляем три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + R'_B + P' = 0; \qquad (7)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q + R''_B - P'' = 0; \qquad (8)$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad Q \cdot 1 + M - R'_B \cdot 2 - R''_B \cdot 4 - P' \cdot 2 = 0. \qquad (9)$$

Из уравнения (9) определим алгебраическую величину реакции R_B:

$$R_B = \frac{Q \cdot 1 + M - P' \cdot 4 + P'' \cdot 2}{2\sin\alpha + 4\cos\alpha} = \frac{2{,}4 \cdot 1 + 3 - 8{,}66 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ} = -5{,}16 \text{ кН};$$

$$R'_B = R_B \sin\alpha = -5{,}16\sin 60^\circ = -4{,}47 \text{ кН},$$

$$R''_B = R_B\cos\alpha = -5{,}16\cos 60^\circ = -2{,}58 \text{ кН}.$$

Из уравнения (8) определим алгебраическую величину реакции Y_A:

$$Y_A = Q - R''_B + P'' = 2{,}4 - (-2{,}58) + 5 = 9{,}98 \text{ кН}.$$

Из уравнения (7) определим алгебраическую величину реакции X_A:

$$X_A = -R'_B - P' = -(-4{,}47) - 8{,}66 = -4{,}19 \text{ кН}.$$

Знак минус в значениях R_B и X_A указывает на то, что принятые на рис. 4 направления этих реакций противоположны их действительным направлениям.

Проверка. Для проверки правильности решения системы уравнений (7), (8), (9) составим уравнение моментов относительно точки K (точка K выбрана в качестве центра моментов, так как все реакции входят в уравнение, следовательно, могут быть проверены одновременно):

$$\sum M_{Ki} = 0;$$

$$X_A \cdot 2 + Y_A \cdot 2 - Q \cdot 1 + M - R''_B \cdot 2 - P' \cdot 2 =$$

$$= -4{,}19 \cdot 2 + 9{,}98 \cdot 2 - 2{,}4 \cdot 1 + 3 - (-2{,}58) \cdot 2 - 8{,}66 \cdot 2 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Выполнение тождества подтверждает правильность решения.

Пример 3

Дано: схема конструкции (рис. 5); P = 10 кН; M = 5 кНм; q = 2,5 кН/м; α=60°; β = 30°; размеры – в метрах.

Определить: *реакции в опорах* А *и* В.

Решение

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции.

Мысленно отбросим связи: шарнирно неподвижную опору в точке A и шарнирно подвижную опору в точке B.

Действие связей на раму заменим их реакциями:

$$\vec{X}_A;\ \vec{Y}_A;\ \vec{R}_B.$$

Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим равнодействующей – сосредоточенной силой $\vec{Q}$, приложенной в середине загруженного участка $(Q = q \cdot 3 = 2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5\ \text{кН})$.

Разложим силу $\vec{P}$ и реакцию $\vec{R}_B$ на две составляющие силы, соответственно:

$$P' = P\cos\alpha = 10\cos 60° = 5\ \text{кН},$$

$$P'' = P\sin\alpha = 10\sin 60° = 8{,}66\ \text{кН},$$

$$R'_B = R_B \sin\beta,$$
$$R''_B = R_B \cos\beta.$$

Для плоской системы сил, приложенных к балке, составим три уравнения равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad P' + X_A - R'_B = 0; \qquad (11)$$
$$\sum Y_i = 0; \quad -P'' + Y_A - Q + R''_B = 0; \qquad (12)$$
$$\sum M_{Ai} = 0; \quad P' \cdot 1 + P'' \cdot 2 - M - Q \cdot 1{,}5 + R'_B \cdot 2{,}5 + R''_B \cdot 3 = 0. \qquad (13)$$

Из уравнения (13) определим реакцию R_B:

$$R_B = \frac{-P' \cdot 1 - P'' \cdot 2 + M + Q \cdot 1{,}5}{2{,}5\sin\beta + 3\cos\beta} =$$
$$= \frac{-5 \cdot 1 - 8{,}66 \cdot 2 + 5 + 7{,}5 \cdot 1{,}5}{2{,}5\sin 30^\circ + 3\cos 30^\circ} = -1{,}58 \text{ кН.}$$

Определим соответственно R'_B и R''_B:

$$R'_B = R_B \sin\beta = -1{,}58 \sin 30^\circ = -0{,}79 \text{ кН,}$$
$$R''_B = R_B \cos\beta = -1{,}58 \cos 30^\circ = -1{,}37 \text{ кН.}$$

Из уравнения (12) определим реакцию Y_A:

$$Y_A = P + Q - R''_B = 8{,}66 + 7{,}5 - (-1{,}37) = 17{,}53 \text{ кН.}$$

Из уравнения (11) определим реакцию X_A:

$$X_A = -P' + R'_B = -5 + (-0{,}79) = -5{,}79 \text{ кН.}$$

Знак минус в значениях реакций R_B и X_A указывает на то, что принятое на рис. 6 направление для этих реакций противоположно их действительным направлениям.

Проверка. Для проверки правильности решения системы уравнений (11), (12), (13) составим уравнение моментов относительно точки K:

$$\sum M_{Ki} = -M - X_A \cdot 1 + Y_A \cdot 2 - Q \cdot 3{,}5 + R'_{\text{В}} \cdot 3{,}5 + R''_B \cdot 5 =$$
$$= -5 - (-5{,}79) \cdot 1 + 17{,}53 \cdot 2 - 7{,}5 \cdot 3{,}5 + (-0{,}79) \cdot 3{,}5 + (-1{,}37) \cdot 5 = 0$$
$$0 \equiv 0$$

Выполнение тождества подтверждает правильность решения.

Схемы к примерам решения задачи 1

Схемы к примерам решения задачи 1

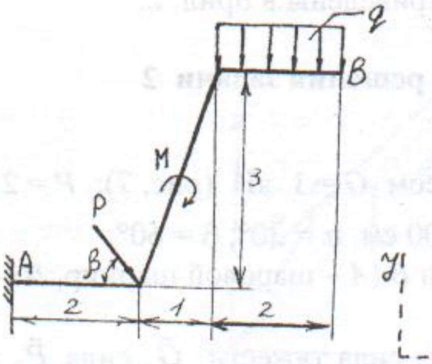


Рис. 1

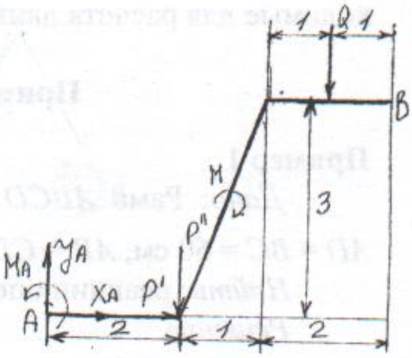


Рис. 2

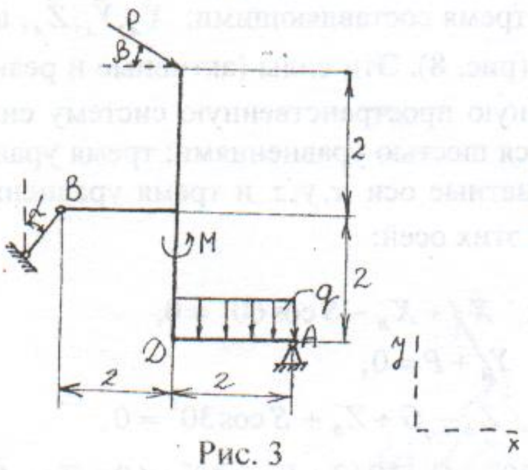


Рис. 3

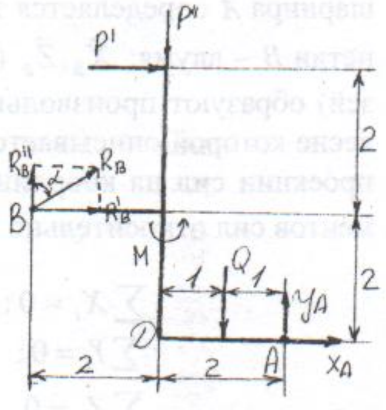


Рис. 4

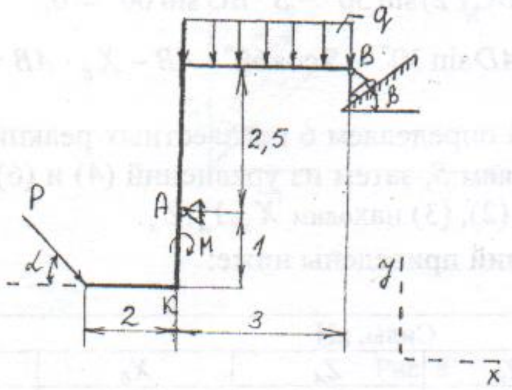


Рис. 5

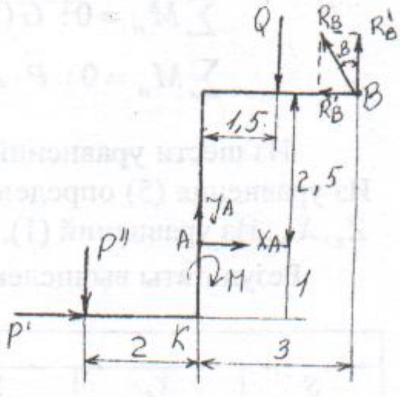


Рис. 6

Задача 2

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций и необходимые для расчета данные приведены в прил. 2.

Примеры решения задачи 2

Пример 1

Дано: Рама *ABCD* весом $G = 1$ кН (рис. 7); $P = 2$кН, $\vec{p}//A_y$, $AD = BC = 60$ см, $AB = СД = 100$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

Найти: реакции опор *A* и *B* (*A* – шаровой шарнир, *B* – петля).

Решение.

К раме *ABСД* приложены сила тяжести $\vec{G}$, сила $\vec{P}$, реакция $\vec{S}$ идеального стержня *CE* и реакции опор *A* и *B*. Реакция шарового шарнира *A* определяется тремя составляющими: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, а реакция петли *B* – двумя: $\vec{X}_B, \vec{Z}_B$ (рис. 8). Эти силы (активные и реакции связей) образуют произвольную пространственную систему сил, равновесие которой описывается шестью уравнениями: тремя уравнениями проекции сил на координатные оси x, y, z и тремя уравнениями моментов сил относительно этих осей:

$$\sum X_i = 0: \quad X_A + X_B - S\cos 60^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A + P = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: \quad Z_A - G + Z_B + S\cos 30^\circ = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_{xi} = 0: -P \cdot AD\cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S\cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_{yi} = 0: \; G(BC/2)\sin 30^\circ - S \cdot BC\sin 60^\circ = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_{zi} = 0: \; P \cdot AD\sin 30^\circ + S\cos 60^\circ \cdot AB - X_B \cdot AB = 0. \tag{6}$$

Из шести уравнений определяем 6 неизвестных реакций связей. Из уравнения (5) определяем *S*, затем из уравнений (4) и (6) находим Z_B, X_B. Из уравнений (1), (2), (3) находим X_A, Y_A, Z_A.

Результаты вычислений приведены ниже:

Силы, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	–0,600	–2,00	–0,54	0,744	1,29

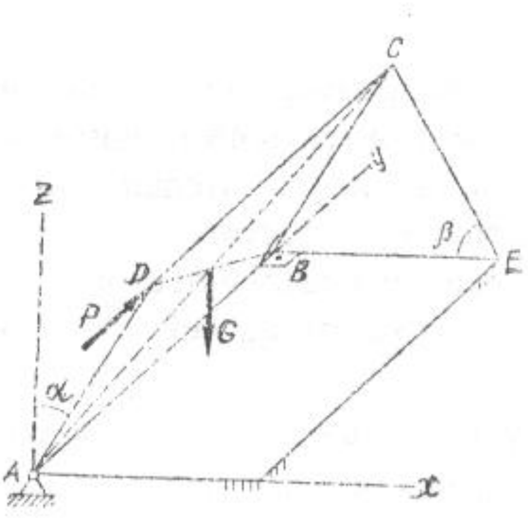


Рис. 7

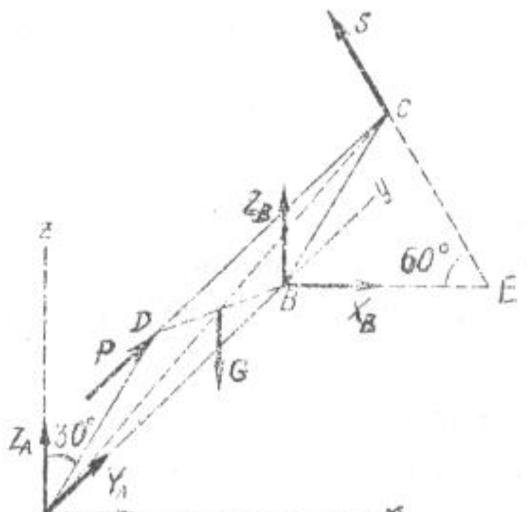


Рис. 8

Кинематика точки

Задачи 3, 4

По заданным уравнениям движения точки установить вид ее траектории и для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

В результате решения задачи построить (в масштабе):

– *траекторию* и указать на ней положение M_1 точки в момент времени t_1;

– *вектор скорости точки* в момент времени t_1 $\vec{V}(t_1)$;

– *полное ускорение точки* в момент времени t_1 $\vec{a}(t_1)$, используя составляющие вектора $\vec{a}_x(t_1)$, $\vec{a}_y(t_1)$;

– *полное ускорение точки* в момент времени t_1, используя касательное $\vec{a}_\tau(t_1)$ и нормальное $\vec{a}_n(t_1)$ ускорения (с целью проверки $\vec{a}(t_1)$).

Примеры решения задач 3, 4

Пример 1

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 16t^2 - 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$t_1 = 0{,}5$с.

Координаты точки заданы в сантиметрах.

Определить и построить в масштабе:

1) траекторию точки, положение M_1 с координатами $x(t_1)$, $y(t_1)$;

2) $\vec{V}(t_1)$;

3) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_x(t_1) + \vec{a}_y(t_1)$;

4) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_\tau(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$;

5) вычислить радиус кривизны траектории $\rho(t_1)$.

Решение

Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1):

$$t=\frac{x}{4},$$

$$y=16\cdot\frac{x^2}{4^2}-1.$$

Таким образом, уравнение траектории точки имеет вид:

$$y=x^2-1, \tag{2}$$

т. е. траекторией точки является парабола, симметричная относительно оси y, с вершиной в точке с координатами (0; –1), ветви которой направлены в сторону положительной оси y (на рис. 9 траектория изображена в масштабе).

Определяем координаты точки в момент времени t_1 = 0,5 с:

$$x(t_1)=4\cdot 0{,}5=2\ \text{см},$$
$$y(t_1)=16\cdot(0{,}5)^2-1=3\ \text{см}.$$

Находим положение $(\cdot)$ M_1 в плоскости xy (рис. 9).

Далее необходимо построить вектор скорости точки в момент времени t_1, представляя его в виде

$$\vec{V}_1=\vec{V}_{1x}+\vec{V}_{1y}, \tag{3}$$

или

$$\vec{V}_1=V_{1x}\vec{i}+V_{1y}\vec{j}, \tag{3'}$$

где V_{1x},V_{1y} – алгебраические величины проекций скорости точки на координатные оси в момент времени t_1 ($V_x(t_1)\equiv V_{1x}$; $V_y(t_1)\equiv V_{1y}$ – для краткости); $\vec{i},\vec{j}$ – орты координатных осей (рис. 9).

Определяем проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя по времени уравнения (1) , представляющие законы изменения координат точки с течением времени:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = 4 = \text{const}, \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = 32t; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$V_{1x} = 4 \text{ см/с};$$
$$V_{1y} = 32 \cdot 0{,}5 = 16 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки в заданный момент времени равен:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16{,}5 \text{ см/с}.$$

В соответствии с уравнениями (3), (3′) строим вектор скорости $\vec{V}_1$ с началом в $(\cdot)M_1$. Так как $V_{1x}, V_{1y} > 0$, составляющие $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ вектора скорости, параллельные осям x, y, направлены так же, как орты этих осей (рис. 9). Единица масштаба для построения вектора скорости точки выбрана в соответствии с модулями векторов $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ и представлена на рис. 9 справа. Сложив составляющие $\vec{V}_{1x}, \vec{V}_{1y}$ по правилу параллелограмма, получаем направленный по диагонали вектор скорости точки $\vec{V}_1$, линией действия которого является касательная к траектории в $(\cdot)$ M_1, что подтверждает правильность решения задачи (рис. 9).

Вектор ускорения точки $\vec{a}(t_1)$, для краткости обозначаемый $\vec{a}_1$, строим в масштабе двумя способами, чтобы произвести графическую проверку правильности его определения.

I способ подобен рассмотренному выше для построения скорости точки.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y}, \qquad (5)$$

или

$$\vec{a}_1 = a_{1x}\vec{i} + a_{1y}\vec{j}, \qquad (5')$$

где a_{1x}, a_{1y} – алгебраические величины проекций ускорения точки на координатные оси в момент времени t_1. Определяем проекции ускорения точки на оси *x*, *y*, дифференцируя по времени законы (4) изменения проекций скорости точки на эти оси с течением времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0 = \text{const},$$
$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = 32 = \text{const}.$$

Таким образом,

$$a_{1x} = 0,$$
$$a_{1y} = 32 \text{ см/с}^2,$$
$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = 32 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с уравнениями (5), (5′) строим вектор ускорения точки $\vec{a}_1$ с началом в (·) M_1. Так как $a_{1x} = 0$, то полное ускорение точки $\vec{a}_1$ совпадает с его составляющей, параллельной оси *y*. Ускорение $\vec{a}_1$ направлено вверх (как орт $\vec{j}$), поскольку $a_{1y} \succ 0$. Единица масштаба выбрана в соответствии с его модулем и представлена справа (рис. 9).

II способ. Представляем ускорение точки в момент времени t_1 как геометрическую сумму тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}. \qquad (6)$$

и определяем каждую из составляющих.

Известно, что

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

Принимая во внимание, что в любой момент времени $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, где V_x, V_y – функции времени, получим:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right) = \frac{2V_x \dfrac{dV_x}{dt} + 2V_y \dfrac{dV_y}{dt}}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}};$$

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}, \tag{7}$$

где a_τ – алгебраическая величина тангенциального ускорения.

Тогда $a_{1\tau} = \dfrac{V_{1x} a_{1x} + V_{1y} a_{1y}}{V_1} = \dfrac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16{,}5} = 31{,}0$ см/с^2.

Положительный знак $a_{1\tau}$ говорит о том, что в рассматриваемый момент времени направления скорости точки $\vec{V}_1$ и ее тангенциального ускорения совпадают (ускоренное движение). Если $a_{\tau 1} \prec 0$, то касательное ускорение точки направляют по касательной к траектории противоположно вектору скорости $\vec{V}_1$ (замедленное движение).

Модуль нормального ускорения точки равен:

$$a_{1n} = \frac{V_1^2}{\rho_1}, \tag{8}$$

где ρ_1 – радиус кривизны траектории точки в положении M_1.

Так как ρ_1 неизвестен, модуль нормального ускорения a_{1n} определяется по формуле:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2}, \tag{9}$$

$$a_{1n} = \sqrt{32^2 - 31^2} = 7{,}9 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с формулой (8) нормальное ускорение точки всегда положительно, а потому вектор нормального ускорения $\vec{a}_{1n}$ должен быть направлен, как и орт $\vec{n}_1$ главной нормали в положении M_1, в сторону *вогнутости* траектории точки (к центру кривизны кривой в $(\cdot)$ M_1)

$$\vec{a}_{1n} = \vec{n}_1 \frac{V_1^2}{\rho_1}.$$

На рис. 9 нормальное и касательное ускорения точки построены в масштабе. Вектор $\vec{a}_1$, представляющий их геометрическую сумму (6), совместился с ускорением точки в положении M_1, построенным согласно уравнению (5), что подтверждает правильность его определения.

После того, как найдено нормальное ускорение, радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения $\rho_1 = \dfrac{V_1^2}{a_{1n}}$, полученного из формулы (8).

$$\rho_1 = \frac{16{,}5^2}{7{,}9} = 34{,}4 \text{ см}.$$

Результаты вычислений приведены ниже.

Координаты,см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x_1	y_1	V_{1x}	V_{1y}	V_1	a_{1x}	a_{1y}	a_1	$a_{1\tau}$	a_{1n}	ρ_1
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,9	34,4

Пример 2

Дано:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4 - 8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ y &= -4 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$t_1 = 1\text{с}$

Координаты точки заданы в сантиметрах.

Определить и построить в масштабе:

1) траекторию точки, положение M_1 с координатами $x(t_1)$, $y(t_1)$;

2) $\vec{V}(t_1)$;

3) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_x(t_1) + \vec{a}_y(t_1)$;

4) $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_\tau(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$;

5) вычислить радиус кривизны траектории $\rho(t_1)$.

Решение.

Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1), для чего преобразуем их, оставив в правых частях только косинус или синус угла с коэффициентом, равным единице:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-4}{8} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \frac{y+4}{6} &= \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Возведем, левые и правые части уравнений (2) в квадрат, затем сложим полученные выражения почленно.

Уравнение траектории имеет вид

$$\frac{(x-4)^2}{8^2} + \frac{(y+4)^2}{6^2} = 1 \tag{3}$$

и представляет эллипс с центром в точке C с координатами $x_C = 4$ см, $y_C = -4$ см и полуосями a = 8 см, b = 6 см (на рис. 10 траектория изображена в масштабе).

Определяем координаты точки в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$x(t_1) = 4 - 8\cos\frac{\pi}{6} = -2{,}8 \text{ см},$$

$$y(t_1) = -4 + 6\sin\frac{\pi}{6} = -1 \text{ см}.$$

Находим положение $(\cdot)$ M_1 в плоскости xy – рис. 10.

Далее необходимо построить вектор скорости точки в момент времени t_1, представляя его в виде:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1x} + \vec{V}_{1y}, \tag{4}$$

или

$$\vec{V}_1 = V_{1x}\,\vec{i} + V_{1y}\,\vec{j}. \tag{4'}$$

Определяем проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя по времени уравнения (1):

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = 8\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = 6\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$V_{1x} = 8\,\frac{\pi}{6}\,\sin\frac{\pi}{6} = 2{,}1 \text{ см/с},$$

$$V_{1y} = 6\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2{,}7 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки в заданный момент времени равен:

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{2{,}1^2 + 2{,}7^2} = 3{,}4 \text{ см/с}.$$

В соответствии с формулами (4), (4′) строим вектор скорости $\vec{V}_1$ с началом в (·) M_1. Так как $V_{1x}, V_{1y} \succ 0$, составляющие $\vec{V}_{1x}, \vec{V}_{1y}$ вектора скорости, параллельные осям *x*, *y*, направлены так же, как орты этих осей (рис. 10). Единица масштаба для построения вектора скорости точки выбрана в соответствии с модулями векторов $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ и представлена на рис. 10 справа. Сложив составляющие $\vec{V}_{1x}$, $\vec{V}_{1y}$ по правилу параллелограмма, получаем направленный по диагонали вектор скорости точки $\vec{V}_1$, линией действия которого является касательная к траектории в (·) M_1, что подтверждает правильность решения задачи (рис. 10).

Вектор ускорения точки $\vec{a}(t_1)$, для краткости обозначаемый $\vec{a}_1$, строим в масштабе двумя способами, чтобы произвести графическую проверку правильности его определения.

I способ подобен рассмотренному выше для построения скорости точки:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{1y}, \tag{6}$$

или

$$\vec{a}_1 = a_{1x}\,\vec{i} + a_{1y}\,\vec{j}\,, \tag{6'}$$

где a_{1x}, a_{1y} – алгебраические величины проекций ускорения точки на координатные оси в момент времени t_1.

Определяем проекции ускорения точки на оси *x*, *y*, дифференцируя по времени законы (5) изменения проекций скорости точки на эти оси с течением времени:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 8\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{2}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \pi\,\frac{\pi}{6}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right] = -\frac{\pi^2}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

Таким образом,

$$a_{1x} = 2\cdot\frac{\pi^2}{9}\cos\frac{\pi}{6} = 1{,}9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{1y} = -\frac{\pi^2}{6}\sin\frac{\pi}{6} = -0{,}8 \text{ см/с}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{1{,}9^2 + 0{,}8^2} = 2{,}06 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с уравнениями (6), (6′) строим вектор ускорения точки $\vec{a}_1$ с началом в (·) M_1. Ускорение $\vec{a}_{1x}$ направляем вправо (как орт $\vec{i}$), поскольку $a_{1x} \succ 0$; ускорение $\vec{a}_{1y}$ направляем вниз (противоположно орту $\vec{j}$), так как $a_{1y} \prec 0$. Единица масштаба выбрана в соответствии с модулями векторов $\vec{a}_{1x}$, $\vec{a}_{1y}$ и представлена справа (рис. 10).

II способ. Представляем ускорение точки в момент времени t_1 как геометрическую сумму тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{1\tau} + \vec{a}_{1n}, \tag{7}$$

и определяем каждую из составляющих.

$$a_{1\tau} = \frac{v_{1x}\,a_{1x} + v_{1y}\,a_{1y}}{v_1} = \frac{2{,}1\cdot 1{,}9 - 2{,}7\cdot 0{,}8}{3{,}4} = +0{,}54 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{(2{,}06)^2 - (0{,}54)^2} = 1{,}99 \cong 2{,}0\,\text{см/с}^2.$$

Положительный знак $a_{1\tau}$ говорит о том, что в рассматриваемый момент времени направление скорости точки $\vec{V}_1$ и ее тангенциального ускорения совпадают (ускоренное движение).

На рис. 10 нормальное и касательное ускорения точки построены в масштабе.

Вектор $\vec{a}_1$, представляющий их геометрическую сумму (7), совместился с ускорением точки в положении M_1, построенным согласно уравнению (6), что подтверждает правильность его определения.

Радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке равен

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{3{,}4^2}{2{,}0} = 5{,}85\ \text{см}.$$

Результаты вычислений приведены ниже.

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x_1	y_1	V_{1x}	V_{1y}	V_1	a_{1x}	a_{1y}	a_1	$a_{1\tau}$	a_{1n}	ρ_1
–2,8	–1,0	2,1	2,7	3,4	1,9	–0,8	2,06	0,54	2,0	5,85

Схемы к примерам решения задачи 3; 4

Схемы к примерам решения задачи 3; 4

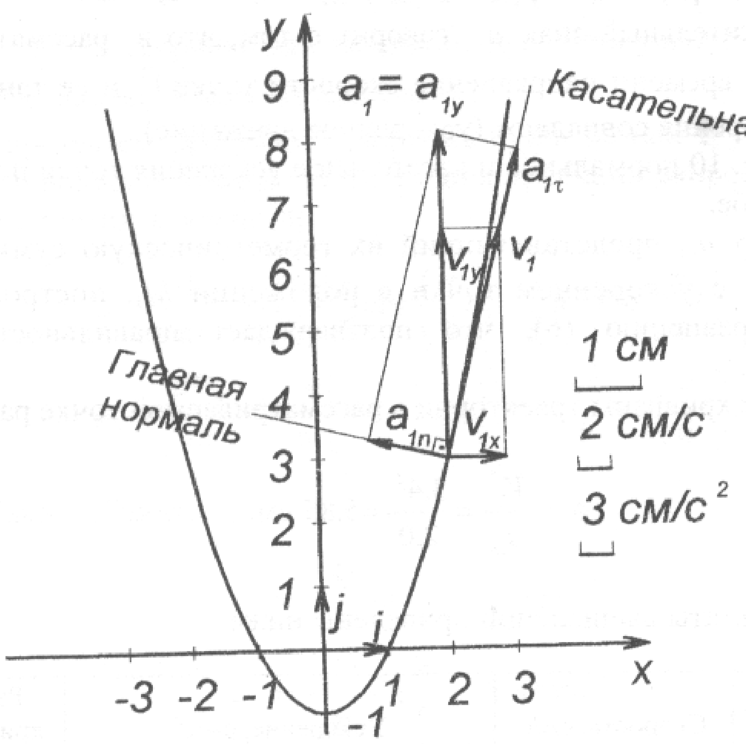


Рис. 9

Рис. 10

Приложения к контрольной работе № 1

Приложение 1

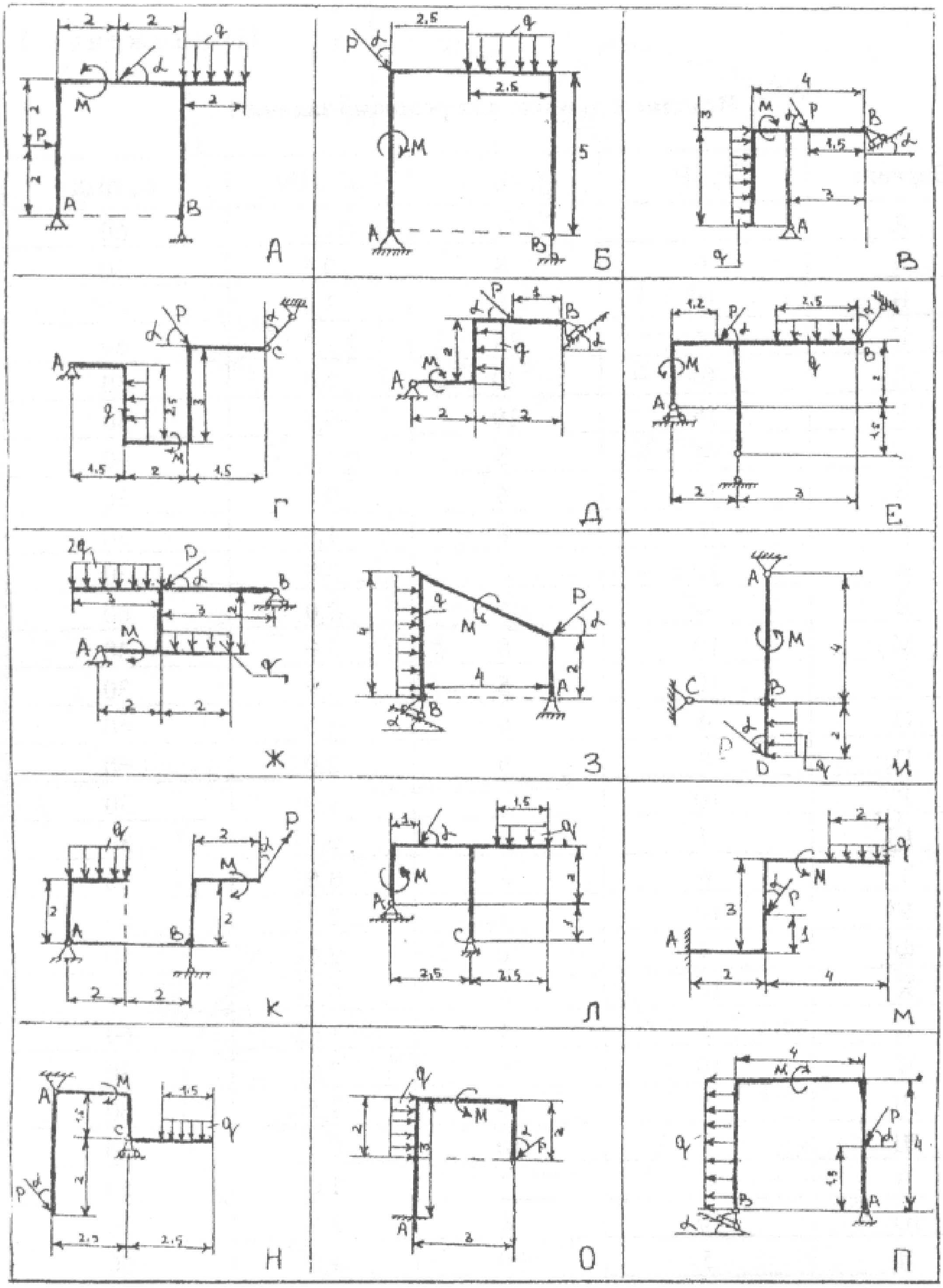
Исходные данные для решения задачи 1

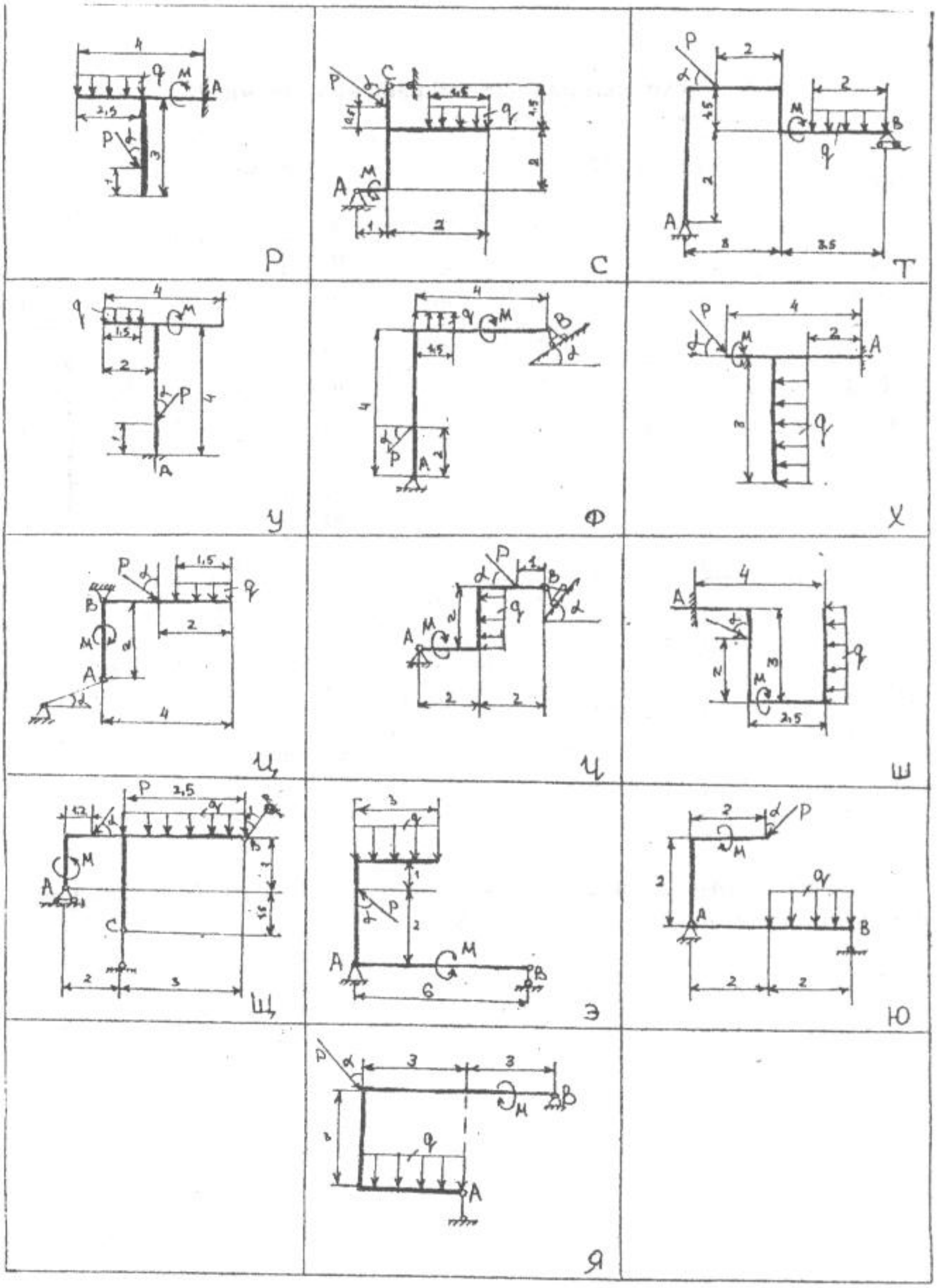
Вариант	P, кН	M, кН·м	q, кН/м	α, град
А	4	7	1,0	60
Б	6	8	0,5	30
В	10	6	3,0	60
Г	4	14	1,0	60
Д	10	20	2,0	30
Е	16	10	0,5	30
Ж	4	8	1,0	60
З	10	6	0,5	30
И	10	8	1,0	30
К	10	7	3,0	30
Л	4	5	2,0	60
М	10	8	3,0	30
Н	10	5	2,0	30
О	4	6	1,0	60
П	8	6	2,0	60
Р	10	7	1,0	30
С	7	6	0,5	30
Т	6	8	3,0	30
У	14	4	2,0	60
Ф	4	10	2,0	60
Х	10	6	0,5	30
Ц	6	4	1,0	60
Ч	10	10	2,0	30
Ш	5	45	1,5	60
Щ	8	10	0,5	30
Э	6	7	1,0	60
Ю	10	8	2,5	30
Я	5	20	1,0	60

Примечание. В задаче 1 определить реакции опор твердого тела

Схемы к задаче 1

Схемы к задаче 1




Р
С
Т
У
Ф
Х
Ц
Ч
Ш
Щ
Э
Ю
Я

Приложение 2

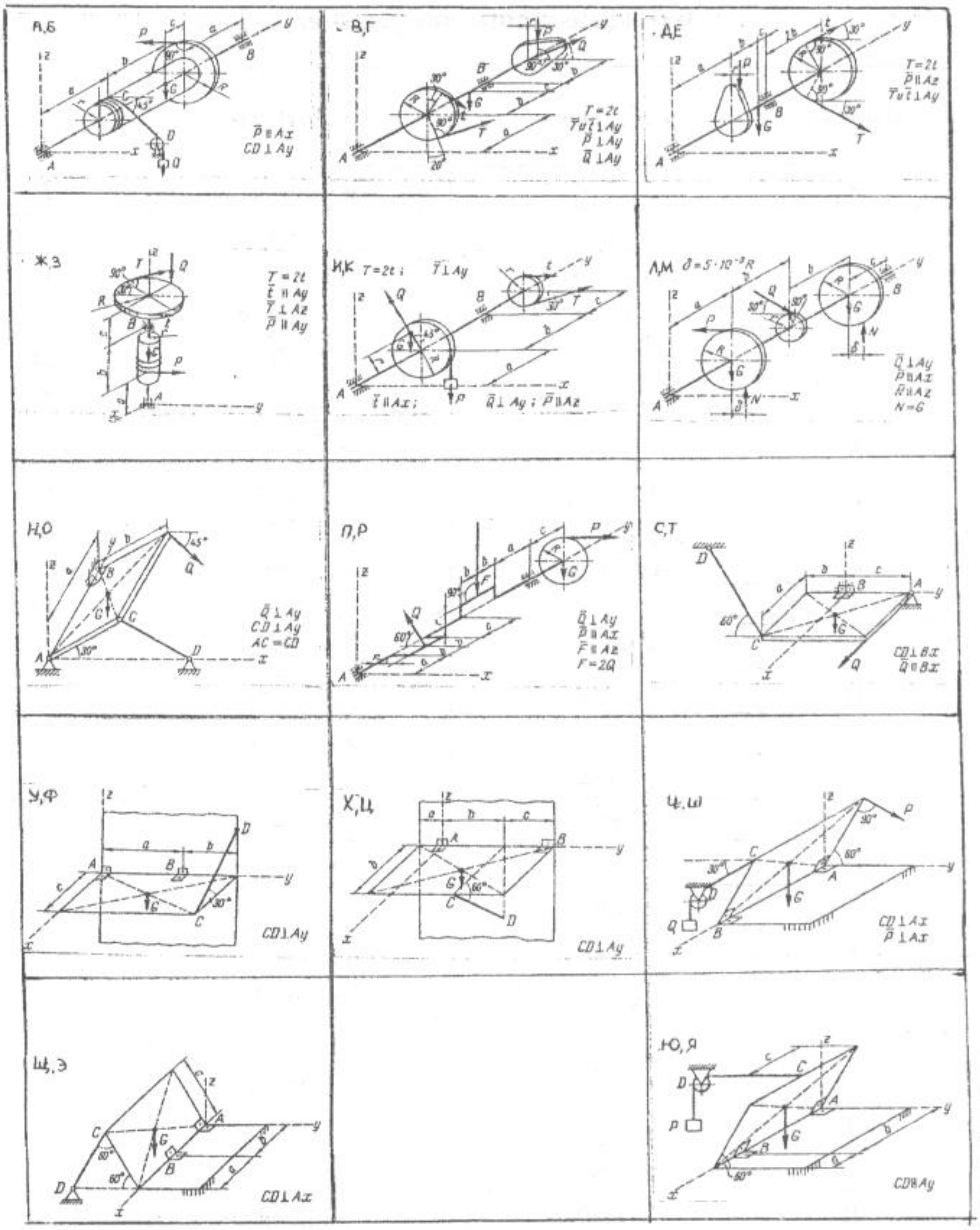
Исходные данные для решения задачи 2

Вариант	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	*T*	*G*	*a*	*b*	*c*	*R*	*r*
А, Б	2	–	20	20	30	10	15	5
В, Г	1	4	2	40	30	20	20	10
Д, Е	–	3	1	30	10	5	18	6
Ж, З	4	6	3	20	40	15	20	10
И, К	1	4	2	30	40	20	20	10
Л, М	10	–	5	40	30	20	25	15
Н, О	4	–	2	50	30	–	–	–
П, Р	2	–	1	15	10	20	20	5
С, Т	6	–	2	60	40	60	–	–
У, Ф	–	–	5	20	50	30	–	–
Х, Ц	–	–	4	40	30	50	–	–
Ч, Ш	5	–	2	–	–	–	–	–
Щ, Э	–	–	3	50	50	60	–	–
Ю, Я	–	–	1	20	60	40	–	–

Примечание. Считать, что в вариантах Н, О; С, Т; У–Я петли не препятствуют перемещению рамы вдоль *AB*.

Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2



Приложение 3

Исходные данные для решения задачи 3

Вариант	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1, с
А	$x = 4t$	$y = 2t - 3t^2$	2
Б	$x = 1 - 4t^2$	$y = -3t$	1
В	$x = 2t^2 + 4t + 1$	$y = 4t$	1
Г	$x = 6t$	$y = -2t^2 - 4$	1
Д	$x = t^2 - 3$	$y = 5t$	$1/4$
Е	$x = t - 5$	$y = 6(t + 0{,}5t^2)$	2
Ж	$x = t^2$	$y = 2t - 1$	1
З	$x = 2 + 3t^2$	$y = 4 - 3t$	1
И	$x = 4t^2 + 1$	$y = 8t$	1
К	$x = 2t^2 + 2$	$y = -4t$	$1/2$
Л	$x = 3 - 2t^2$	$y = -5t$	$1/2$
М	$x = 10t - 0{,}1t^2$	$y = 5t$	2
Н	$x = 3t$	$y = 4t - 5t^2$	2
О	$x = 4t^2 + 1$	$y = 12t - 3$	2
П	$x = 3t$	$y = 1 + t^2$	1
Р	$x = 3t^2 + 5t$	$y = 5t$	2
С	$x = 4 - 2t$	$y = (t + 1)^2$	1
Т	$x = 2t + 2$	$y = 3t^2 - 2$	1
У	$x = 10t$	$y = 4 + 5t^2$	2
Ф	$x = 2t^2$	$y = 4t - 1$	$1/4$
Х	$x = 5t$	$y = 4{,}9t^2 - 5$	1
Ц	$x = 8t$	$y = 2t^2 + 1$	$1/2$
Ч	$x = 1 - 2t^2$	$y = 3t$	1
Ш	$x = -5t + 4$	$y = 2t^2$	1
Щ	$x = 20t$	$y = 245 - 49t^2$	1
Э	$x = 10t$	$y = 20t - 5t^2$	1
Ю	$x = t^2 - 6t$	$y = 25t$	2
Я	$x = 4t^2 + 1$	$y = 8t - 2$	1

Приложение 4

Исходные данные для решения задачи 4

Вариант	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1, с
А	$x=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y=-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
Б	$x=3-6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y=4-9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
В	$x=2+\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y=1+2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1/2
Г	$x=2+3\cos(\pi t)$	$y=3\sin(\pi t)$	1/2
Д	$x=4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$y=3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
Е	$x=8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y=-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
Ж	$x=4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y=4-6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2
З	$x=7\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$y=-7\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)+3$	1
И	$x=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y=4-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
К	$x=4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y=-2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
Л	$x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$y=3\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	2
М	$x=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$y=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
Н	$x=3+2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y=4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	1
О	$x=5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y=-5\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1

Продолжение прил. 4

Вариант	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	t_1, с
П	$x = 4\sin(\pi t)$	$y = 4\cos(\pi t)$	$1/3$
Р	$x = 4\cos(2t)$	$y = 4\sin(2t)$	$\pi/2$
С	$x = 15\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1/2
Т	$x = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1/2
У	$x = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 1+3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	3
Ф	$x = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$y = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
Х	$x = 5+3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	1
Ц	$x = -3 = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 2+4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	1
Ч	$x = 6\sin(\pi t)-2$	$y = 6\cos(\pi t)-1$	1/4
Ш	$x = 2\cos(\pi t)$	$y = 2\sin(\pi t)$	1
Щ	$x = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	1
Э	$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)-3$	1
Ю	$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
Я	$x = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4-6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

В контрольную работу № 2 входят три задачи из раздела «Кинематика твердого тела» и одна задача из раздела «Кинематика точки» (сложное движение точки).

Поясним, как отобрать необходимый для решения комплект задач:

– первая буква имени студента определяет строку в исходных данных и рисунок для решения задачи 1 (прил. 5);

– вторая буква имени студента указывает рисунок и исходные данные для решения задачи 2 (прил. 6);

– начальная буква отчества студента определяет рисунок и исходные данные для решения задачи 3 (прил. 7);

– первая буква фамилии студента указывает строку исходных данных и рисунок для решения задачи 4 (прил. 8).

Кинематика твердого тела

Поступательное и вращательное движения твердого тела

Задача 1

По заданному уравнению поступательного движения груза (тела *1*) определить в момент времени его скорость и ускорение, а также скорость и ускорение точки M одного из колес механизма.

Пример решения

Дано:

Схема механизма (рис. 11), $R_2 = 50$ см, $r_2 = 25$ см, $r_3 = 40$ см, $x = 36t^2 + 5t + 14$, $t_1 = 1$ с.

Определить и построить:

1) скорость и ускорение груза *1* в момент времени t_1;

2) скорость и ускорение точки M колеса *3* в момент времени t_1.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из трех материальных тел (рис. 11). Груз *1* совершает поступательное движение, колеса *2*, *3* вращаются вокруг неподвижных осей. В соответствии со свойствами поступательного движения рассматриваем тело *1* как материальную точку, которая перемещается относительно оси x (рис. 11) по закону:

$$x = 36t^2 + 5t + 14.$$

Определим скорость и ускорение точки (т. е. скорость и ускорение груза *1*) по формулам, рассмотренным в разделе «Кинематика точки»:

$$V_1 = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 72t + 5,$$

$$a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = 72 \text{ см/с}.$$

Для определения скорости точки M свяжем скорость груза V_1 с угловой скоростью ω_3 колеса *3*.

В соответствии со схемой механизма (рис. 12) $V_K = V_1$, так как нить, соединяющая тела *1* и *2* нерастяжима и не проскальзывает; $V_K = \omega_2 r_2$, так как точка K принадлежит телу *2*, вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω_2.

Следовательно, $V_1 = \omega_2 r_2$, откуда $\omega_2 = \dfrac{V_1}{r_2}$. Далее определяем скорость точки L тела *2*:

$$V_L = \omega_2 R_2 = \frac{V_1}{r_2} R_2.$$

В силу идеальности нити, связывающей тела *2* и *3*, имеем $V_L = V_N$, т. е.

$$V_N = \frac{V_1}{r_2} R_2. \tag{1}$$

С другой стороны,

$$V_N = \omega_3 R_3, \tag{2}$$

так как точка N принадлежит телу *3*, вращающемуся с угловой скоростью ω_3 вокруг неподвижной оси. Принимая во внимание (1) и (2), получим

$$\frac{V_1}{r_2} R_2 = \omega_3 R_3,$$

$$\omega_3 = \frac{V_1}{r_2} \cdot \frac{R_2}{R_3}.$$

После подстановки данных

$$\omega_3 = 2{,}215t = 0{,}154. \qquad (3)$$

Угловое ускорение колеса *3* определяем, дифференцируя по времени закон изменения (3) угловой скорости колеса *3*

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \dot{\omega}_3 = 2{,}215 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки *M*, ее вращательное, осестремительное и полное ускорения определяются по формулам теории вращательного движения

$$V_M = \omega_3 r_3,$$

$$a_M^{\varepsilon} = \varepsilon_3 r_3, \quad a_M^{\omega} = \omega_3^2 r_3,$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^{\varepsilon}\right)^2 + \left(a_M^{\omega}\right)^2}.$$

Результаты вычислений для заданного момента времени t_1 = 1 с приведены ниже.

Скорости и ускорения тела *1* и точки *M* показаны на рис. 12.

V_1, см/с	a_1, см/с^2	ω_3, рад/с	ε_3, рад/с^2	V_M, см/с	a_M^{ε}, см/с^2	a_M^{ω}, см/с^2	a_M, см/с^2
77	72	2,37	2,22	94,8	224	88,6	241

Схемы к примеру решения задачи 1

Схемы к примеру решения задачи 1

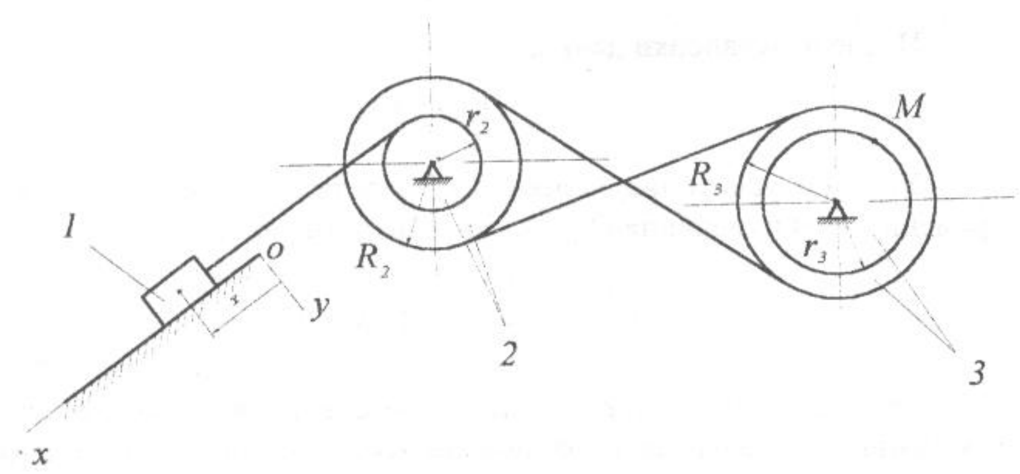


Рис. 11

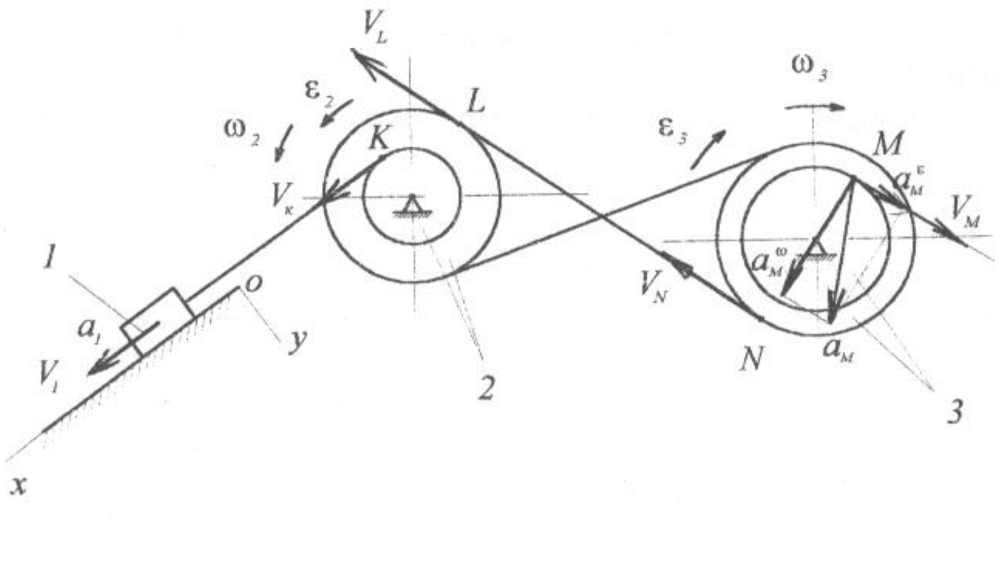


Рис. 12

Плоское движение твердого тела

Задача 2

В этой задаче требуется найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат. Построить план скоростей и план ускорений шатуна *AB*. Схемы механизмов приведены в прил. 6.

Пример решения

Дано: схема кривошипно-ползунного механизма в заданном положении (рис. 13); $OA = 10$ см, $AB = 60$ см, $AC = 20$ см; $\omega_{OA} = 1{,}5$ рад/с, $\varepsilon_{OA} = 2$ рад/с^2.

Определить: скорости и ускорения точек *B* и *C*, угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Построить: план скоростей и план ускорений шатуна *AB*.

Решение

1. Определение скоростей точек и угловой скорости звена (рис. 14)

Определяем модуль скорости точки *B*, рассматривая ее как точку шатуна *AB*, совершающего плоское движение. Скорость точки *B* является вращательной скоростью при вращении шатуна *AB* вокруг оси, проходящей через его мгновенный центр скоростей *P*, т. е.

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB \qquad (1)$$

Положение *P* мгновенного центра скоростей шатуна *AB* в рассматриваемом положении кривошипно-ползунного механизма находим как точку пересечения прямых, перпендикулярных к линиям действия векторов скоростей точек *A* и *B* шатуна (рис. 14). Линии действия скоростей точек *A* и *B* известны: точка *A* принадлежит кривошипу *OA*, вращающемуся вокруг неподвижной оси, и в рассматриваемом положении механизма имеет горизонтальную линию действия; точка *B* принадлежит ползуну, совершающему поступательное движение по вертикали, поэтому линия действия скорости точки *B* вертикальна.

Расстояние *PB* определяется из рассмотрения треугольника *ABP*:

$$PB = AB/2 = 60/2 = 30{,}0 \text{ см.}$$

Для нахождения мгновенной угловой скорости шатуна ω_{AB} необходимо определить скорость точки A. Модуль скорости точки A (полюса кривошипа OA) при заданном положении механизма равен

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA \qquad (2)$$

С другой стороны, точка A принадлежит шатуну AB, совершающему плоское движение и имеющему в рассматриваемом положении угловую скорость ω_{AB}. Следовательно, модуль скорости точки A определяется по формуле:

$$V_A = \omega_{AB} \cdot PA \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (2), (3) получим:

$$\omega_{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot OA}{PA}.$$

Расстояние PA определяется из рассмотрения треугольника ABP:

$$PA = AB \cdot \cos 30° = 60 \cdot 0{,}867 = 52{,}0 \text{ см}.$$

Таким образом, $\omega_{AB} = 1{,}5 \cdot 10/52 = 0{,}29$ рад/с.

Модуль скорости точки C шатуна определяется по формуле

$$V_C = \omega_{AB} \cdot PC$$

Расстояние PC находим, рассматривая треугольник ACP и применяя теорему косинусов:

$$PC = \sqrt{AC^2 + PA^2 - 2AC \cdot PA \cos 30^\circ} =$$
$$\sqrt{20^2 + 52^2 - 2 \cdot 20 \cdot 52 \cdot 0{,}867} = 36{,}1 \text{ см}$$

В соответствии с формулами (1) и (4) имеем

$$V_B = 0{,}29 \cdot 30{,}0 = 8{,}7 \text{ см/с},$$
$$V_C = 0{,}29 \cdot 36{,}1 = 10{,}5 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости точки A направлен в сторону, соответствующую направлению вращения кривошипа OA (рис. 14). Вектор $\vec{V}_A$ определяет направление вращения звена AB вокруг оси, проходящей через точку P (направление угловой скорости ω_{AB} шатуна AB). В соответствии с направлением ω_{AB} вектор скорости точки B – $\vec{V}_B$ направлен вверх по вертикали, вектор скорости точки C – $\vec{V}_C$ – вверх по линии действия, перпендикулярной отрезку PC.

Для проверки определим скорость точки B шатуна другим способом, используя теорему о скоростях точек плоской фигуры

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \tag{5}$$

где $\vec{V}_A$ – скорость полюса, $\vec{V}_{BA}$ – вращательная скорость точки B вокруг полюса A. Зависимость (5) позволяет определять скорости точек шатуна простым и наглядным построением, называемым планом скоростей шатуна AB.

Зная модуль и направление скорости $\vec{V}_A$ конца кривошипа и прямую, по которой направлена скорость точки B, строим план скоростей для шатуна AB.

Из произвольной точки p откладываем отрезок $\overline{pa}$, изображающий по модулю и направлению скорость $\vec{V}_A$ (рис. 15). При этом необходимо выбрать масштабный коэффициент K_V для построения плана скоростей. Так, для изображения скорости точки A, равной по модулю 15 см/с, удобно выбрать отрезок pa = 75 мм, тогда масштабный коэффициент K_V, представляющий отношение действительной величины скорости к длине отрезка на чертеже, изображающего этот параметр, равен

$$K_V = \frac{15}{75}\frac{\text{см}}{\text{с}\cdot\text{мм}} = 0{,}2\frac{\text{см}}{\text{с}\cdot\text{мм}}.$$

Построив отрезок $\overline{pa}$, проводим через точку a прямую, перпендикулярную шатуну AB и параллельную линии действия вращательной скорости $\vec{V}_{BA}$, а через точку p – прямую, параллельную линии действия скорости точки B. Эти прямые продолжаем до их пересечения в точке b, являющейся вершиной плана скоростей. Отрезок $\overline{pb}$ изображает по модулю и направлению скорость $\vec{V}_B$, отрезок $\overline{ab}$ – вращательную скорость $\vec{V}_{BA}$ точки B вокруг полюса A. Построенный план скоростей можно использовать для определения скорости любой точки шатуна *AB*. Для определения модуля и направления скорости точки *C* шатуна *AB* делим отрезок *ab* плана скоростей в отношении *AC* : *AB*, находим точку *c* и проводим луч $\overline{pc}$, определяющий собой модуль и направление скорости точки *C*:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } ac = \frac{AC}{AB} \cdot ab = \frac{20}{60} \cdot ab = \frac{ab}{3}.$$

С помощью построенного плана скоростей шатуна определяем модули скоростей точек *B* и *C*. Измерив длины отрезков $\overline{pb}$, $\overline{pc}$ получаем:

$$pb = 43{,}5 \text{ мм}, \; pc = 52{,}5 \text{ мм}.$$

Действительные модули скоростей равны:

$$V_B = K_V \cdot pb = 0{,}2 \cdot 43{,}5 = 8{,}7 \text{ см/с},$$
$$V_C = K_V \cdot pc = 0{,}2 \cdot 52{,}5 = 10{,}5 \text{ см/с},$$

т. е. совпадают с найденными выше значениями.

2. Определение ускорений точек и углового ускорения шатуна *AB*

Согласно теореме об ускорениях точек плоской фигуры,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение полюса.

Так как точка *A* принадлежит кривошипу *OA*, ее ускорение складывается из вращательного и осестремительного ускорений

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\varepsilon} + \vec{a}_A^{\omega}, \; a_A^{\varepsilon} = \varepsilon_{OA} \cdot OA, \; a_A^{\omega} = \omega_{OA}^2 \cdot OA.$$

Осестремительное ускорение $\vec{a}_A^{\omega}$ конца *A* кривошипа направлено к его оси вращения. Линия действия вращательного ускорения $\vec{a}_A^{\varepsilon}$ перпендикулярна отрезку *OA*, а направление соответствует направлению углового ускорения ε_{OA} (рис. 16 а).

Таким образом, ускорение точки *B* шатуна имеет в общем случае четыре составляющих

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\varepsilon} + \vec{a}_A^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon}.$$

Осестремительное ускорение точки *B* во вращательном движении шатуна *AB* вокруг полюса *A*

$$a_{BA}^{\omega} = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$$

По приведенным формулам вычисляем модули ускорений

$$a_A^{\varepsilon} = 2 \cdot 10 = 20{,}0 \text{ см/с}^2,$$
$$a_A^{\omega} = 1{,}5^2 \cdot 10 = 22{,}5 \text{ см/с}^2,$$
$$a_{BA}^{\omega} = 0{,}29^2 \cdot 60 = 5{,}0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^{\omega}$ направлен от точки *B* к точке *A* (к мгновенной оси вращения шатуна, проходящей через полюс (рис. 16 а). Что касается ускорения $\vec{a}_B$ точки *B* и вращательного ускорения $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$, то известны только линии действия этих векторов: $\vec{a}_B$ – по вертикали вдоль направляющих ползуна, $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$ – перпендикулярно *AB*, так как $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис. 16 а). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (6) на оси координат. Знак ускорения показывает, соответствует ли истинное направление вектора принятому при расчете.

Выбрав направление осей *x* и *y*, как показано на рис. 16 а, получаем

$$a_B \cos 30° = -a_A^{\varepsilon} \cos 60° + a_A^{\omega} \cos 30° + a_{BA}^{\omega} \tag{7}$$

$$a_B \cos 60° = a_A^{\varepsilon} \cos 30° + a_A^{\omega} \cos 60° + a_{BA}^{\varepsilon} \tag{8}$$

Из уравнения (7) находим $a_B = 16{,}7$ см/с^2.

Ускорение $\vec{a}_B$ направлено, как показано на рис. 16 а. Из уравнения (8) получаем $a_{BA}^{\varepsilon} = -20{,}2$ см/с^2.

Направление $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$ противоположно показанному на рис 16 а.

Ускорение $\vec{a}_B$ и все его составляющие с учетом их истинных направлений показаны на рис. 16 б.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{BA}^{ε} – алгебраическая величина, определяется по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{\varepsilon}\right|}{AB}.$$

Вычисляя, находим ε_{AB} = 0,34 рад/с^2.

Направление ускорения $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ε_{AB}. Здесь под направлением углового ускорения понимается направление дуговой стрелки, которое при ускоренном вращении звена совпадает с направлением его вращения, а при замедленном — противоположно ему. В данном случае угловое ускорение противоположно направлению шатуна (рис. 16 а).

Определяем ускорение точки С

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A^{\varepsilon} + \vec{a}_A^{\omega} + \vec{a}_{CA}^{\varepsilon} + \vec{a}_{CA}^{\omega}.$$

Вращательное и осестремительное ускорения точки C во вращательном движении звена AB вокруг полюса A равны

$$a_{CA}^{\varepsilon} = \varepsilon_{AB} \cdot AC; \; a_{CA}^{\omega} = \omega_{AB}^2 \cdot AC,$$

после подстановки получаем:

$$a_{CA}^{\varepsilon} = 0{,}34 \cdot 20 = 6{,}8 \text{ см/с}^2; \quad a_{CA}^{\omega} = 0{,}29^2 \cdot 20 = 1{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{CA}^{\varepsilon}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_{CA}^{\omega}$ и направлен соответственно угловому ускорению ε_{AB}.

Ускорение точки C находим способом проекций (рис. 16 а):

$$a_{C_x} = a_{CA}^{\omega} + a_A^{\omega} \cos 30° - a_A^{\varepsilon} \cos 60°,$$

$$a_{C_Y} = a_A^{\omega} \cos 60° + a_A^{\varepsilon} \cos 30° - a_{CA}^{\varepsilon}$$

$$a_C = \sqrt{\left(a_{C_x}\right)^2 + \left(a_{C_Y}\right)^2}.$$

В результате вычислений получаем:

a_{C_x} = 11,2см/с^2, a_{C_Y} = 21,8см/с^2, a_C = 24,5 см/с^2 (см. рис. 16 в).

Определим графически ускорения $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$, $\vec{a}_C$.

Используя уравнение (6), построим план ускорений шатуна *AB*.

Из произвольной точки π, называемой полюсом плана ускорений, откладываем отрезок $\overline{\pi m}$, изображающий по модулю и направлению первую составляющую ускорения точки *B,* согласно формуле (6), – $\vec{a}_A^{\varepsilon}$. При этом необходимо выбрать масштабный коэффициент K_a для построения плана ускорений. Так, для изображения вращательного ускорения точки *A*, равного по модулю 20 см/с^2, удобно выбрать отрезок πm = 40 мм, тогда масштабный коэффициент K_a, составляющий отношение действительной величины ускорения к длине отрезка на чертеже, изображающего этот параметр, равен

$$K_a = \frac{20}{40} \frac{\text{см}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} = 0{,}5 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}.$$

Построив отрезок $\overline{\pi m}$, строим отрезок $\overline{ma}$, изображающий по модулю и направлению вторую составляющую ускорения точки *A*, в соответствии с формулой (6) – осестремительное ускорение конца кривошипа $\vec{a}_A^{\omega}$ (рис. 17).

$$ma = \frac{a_A^{\omega}}{K_a} = \frac{22{,}5}{0{,}5} \frac{\text{см} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{мм}}{\text{с}^2 \cdot \text{см}} = 45 \text{ мм}.$$

Далее строим отрезок $\overline{an}$, в масштабе изображающий по модулю и направлению ускорение $\vec{a}_{BA}^{\omega}$ — параллельно звену *AB* в направлении от точки *B* к точке *A*.

$$an = \frac{a_{BA}^{\omega}}{K_a} = \frac{5}{0{,}5} \frac{\text{см} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{мм}}{\text{с}^2 \cdot \text{см}} = 10 \text{ мм}.$$

Затем через точку *n* проводим прямую, перпендикулярную отрезку $\overline{an}$ (параллельную известной линии действия ускорения $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$), а через точку π – вертикальную прямую, параллельную линии действия ускорения точки *B*. Эти прямые продолжаем до их пересечения в точке *b*, являющейся вершиной плана ускорений. Отрезок $\overline{\pi b}$ изображает по модулю и направлению ускорение $\vec{a}_B$, отрезок $\overline{nb}$ – вращательное ускорение $\vec{a}^{\varepsilon}_{BA}$ точки B при вращении шатуна вокруг полюса *A*.

Построенный план ускорений можно использовать для определения ускорения любой точки шатуна *AB*.

Для определения модуля и направления ускорения точки *C* шатуна *AB* делим отрезок *ab* плана ускорений в отношении *AC*:*AB*, находим точку *C* и проводим луч $\overline{\pi c}$, определяющий собой модуль и

направление ускорения точки *C*

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB},$$

откуда $ac = \dfrac{AC}{AB}ab = \dfrac{20}{60}ab = \dfrac{ab}{3}$.

С помощью построенного плана ускорений шатуна определяем модули ускорений точек *B* и *C*. Измерив длины отрезков $\overline{\pi b}$, $\overline{\pi c}$, получаем πb= 33,5 мм, πc = 49 мм.

Действительные модули ускорений равны:

$$a_B = K_а \cdot \pi b = 0{,}5 \cdot 33{,}5 = 16{,}75 \text{ см/с}^2,$$
$$a_C = K_а \cdot \pi c = 0{,}5 \cdot 49 = 24{,}5 \text{ см/с}^2,$$

т. е. совпадают с найденными выше значениями.

Пользуясь планом ускорений, можно определить величину и направление углового ускорения звена *AB*.

Величину ε_{AB} получим из выражения:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a^{\varepsilon}_{BA}}{AB} = \frac{K_a \cdot nb}{AB} = \frac{0{,}5 \cdot 40{,}5}{60} = 0{,}34 \text{рад/с}^2.$$

Для определения направления ε_{AB} следует вектор $\overline{nb}$, направленный к точке *b*, перенести в точку *B* на схеме механизма; стрелка вектора укажет направление углового ускорения ε_{AB}.

Схемы к примеру решения задачи 2

Схемы к примеру решения задачи 2

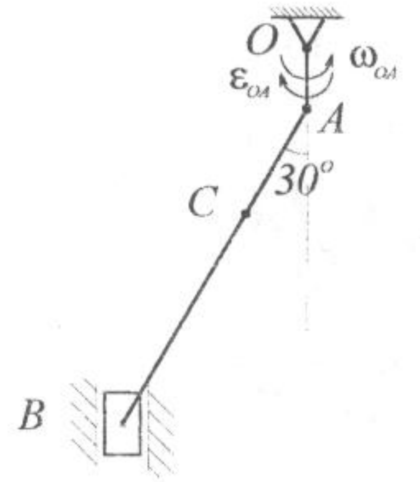


Рис. 13

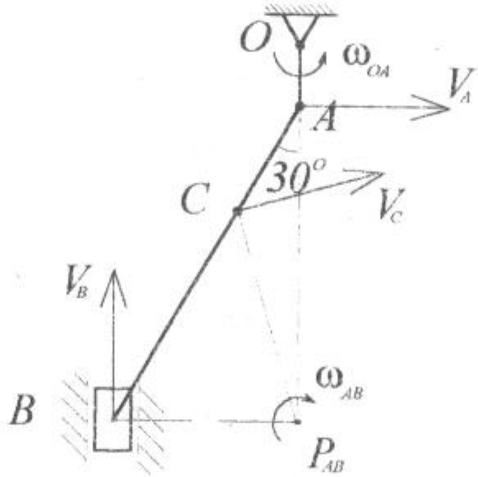


Рис. 14

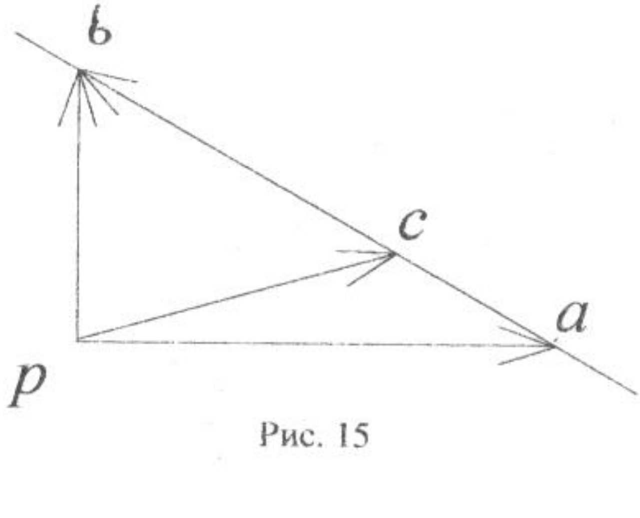


Рис. 15

Схемы к примеру решения задачи 2
(окончание)

Схемы к примеру решения задачи 2
(окончание)

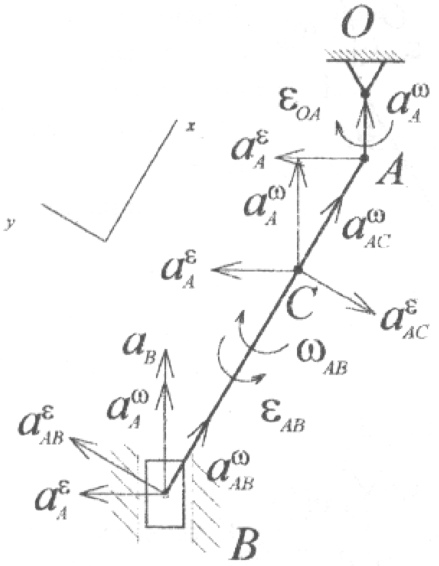


Рис. 16 а

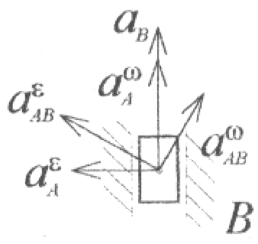


Рис. 16 б

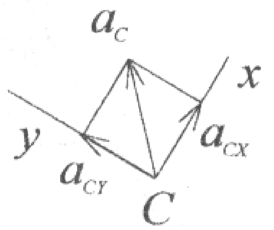


Рис. 16 в

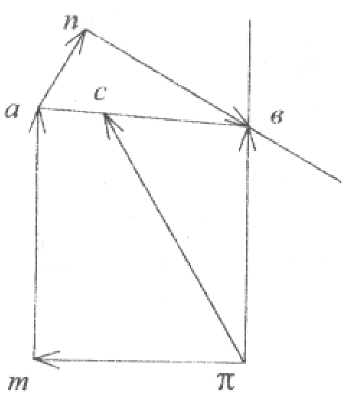


Рис. 17

Задача 3

Колесо радиуса R катится без скольжения по неподвижной плоскости. Зная скорость $\vec{V}_A$ и ускорение $\vec{a}_A$ центра A колеса в некоторый момент времени, определить скорости и ускорения точек B и C колеса в этот момент времени.

Рисунки и необходимые для расчета данные приведены в прил. 7.

Пример решения

Дано: Колесо радиуса R = 40 см катится без скольжения по неподвижной плоскости. Модули скорости и ускорения его центра A (рис. 18 а) в рассматриваемый момент равны V_A = 40 см/с, a_A = 20 см/с^2.

Определить: Скорости и ускорения точек B и C, указанных на рис. 18, в данный момент времени.

Решение

1. Определение скоростей точек колеса и его угловой скорости

Колесо совершает плоское движение. Так как оно катится без скольжения, то скорость точки касания колеса с неподвижной плоскостью (точка B) равна нулю. Точка B является мгновенным центром скоростей (точка P на рис. 18 б). Следовательно, $V_B = 0$

Зная положение мгновенного центра скоростей и скорость точки A колеса, найдем модуль его угловой скорости:

$$\omega = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_A}{R} = \frac{40}{40} = 1 \text{ рад/с.}$$

Направление угловой скорости колеса определяем, рассматривая скорость точки A как вращательную вокруг мгновенного центра скоростей P (рис. 18 б).

Определив модуль и направление угловой скорости ω и зная положение мгновенного центра скоростей P, найдем модуль скорости точки C:

$$V_C = \omega \cdot PC.$$

Расстояние PC определяется из рассмотрения равнобедренного треугольника ABC:

$$PC = R\sqrt{2}.$$

Тогда

$$V_C = \omega\ PC = \frac{V_A}{R} R\sqrt{2} = V_A\sqrt{2} = 40\sqrt{2} = 56{,}6\ \text{см/с}.$$

Скорость V_C направлена по прямой, перпендикулярной отрезку BC, в сторону вращения колеса (рис. 18 б). *А*налогично определяется скорость любой точки колеса.

2. Определение углового ускорения колеса и ускорений его точек

Для того, чтобы определить ускорения точек колеса по теореме об ускорениях точек плоской фигуры, необходимо знать его угловую скорость ω и угловое ускорение ε в рассматриваемый момент времени.

Модуль угловой скорости колеса равен

$$\omega = \frac{V_A}{PA}.$$

Расстояние от центра диска A до мгновенного центра скоростей P при движении не изменяется, а потому

$$\varepsilon = \left|\frac{d\omega}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(\frac{V_A}{R}\right)\right| = \left|\frac{1}{R}\cdot\frac{dV_A}{dt}\right| = \frac{1}{R}\ a_A.$$

Подставляя в это выражение числовые значения, находим

$$\varepsilon = \frac{a_A}{R} = \frac{20}{40} = 0{,}5\ \text{рад/с}^2$$

Направление ε определяется направлением $\vec{a}_A$. Так как качение колеса происходит без скольжения, ускорение $\vec{a}_A$ является вращательным ускорением точки A при вращении вокруг точки B, если ее выбрать в качестве полюса. Угловое ускорение направлено по часовой стрелке (см. направление ускорения центра колеса A по отношению к полюсу B на рис. 18 в).

Выразим ускорения точек B и C в соответствии с теоремой об ускорениях точек плоской фигуры

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon} + \vec{a}_{BA}^{\omega}; \qquad (9)$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{\varepsilon} + \vec{a}_{CA}^{\omega}. \qquad (10)$$

Модули вращательного и осестремительного ускорений точек определяем по известным формулам:

$$a_{BA}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot AB = \varepsilon R = 0{,}5 \cdot 40 = 20 \text{ см/с}^2;$$
$$a_{BA}^{\omega} = \omega^2 \cdot AB = \omega^2 \cdot R = 1^2 \cdot 40 = 40 \text{ см/с}^2;$$
$$a_{CA}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot AC = \varepsilon R = 0{,}5 \cdot 40 = 20 \text{ см/с}^2;$$
$$a_{CA}^{\omega} = \omega^2 \cdot AC = \omega^2 \cdot R = 1^2 \cdot 40 = 40 \text{ см/с}^2.$$

Направления всех ускорений, входящих в правые части уравнений (9) и (10). известны и показаны на рис. 18 в.

Для определения модуля ускорения точки B спроектируем векторное равенство (9) на оси X и Y, показанные на рис. 18 в

$$a_{BX} = a_A - a_{BA}^{\varepsilon}, \quad a_{BX} = 20 - 20 = 0.$$
$$a_{BY} = a_{BA}^{\omega}, \quad a_{BY} = 40 \text{ см/с}^2.$$

Таким образом, ускорение точки B равно

$$a_B = \sqrt{a_{BX}^2 + a_{BY}^2} = a_{BY} = 40 \text{ см/с}^2.$$

Аналогично определяется модуль ускорения точки C

$$a_{CX} = a_A - a_{CA}^{\omega}, \quad a_{CX} = 20 - 40 = 20 \text{ см/с}^2.$$
$$a_{CY} = -a_{CA}^{\varepsilon}, \quad a_{CY} = -20 \text{ см/с}^2.$$
$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Схемы к примеру решения задачи 3

Схемы к примеру решения задачи 3

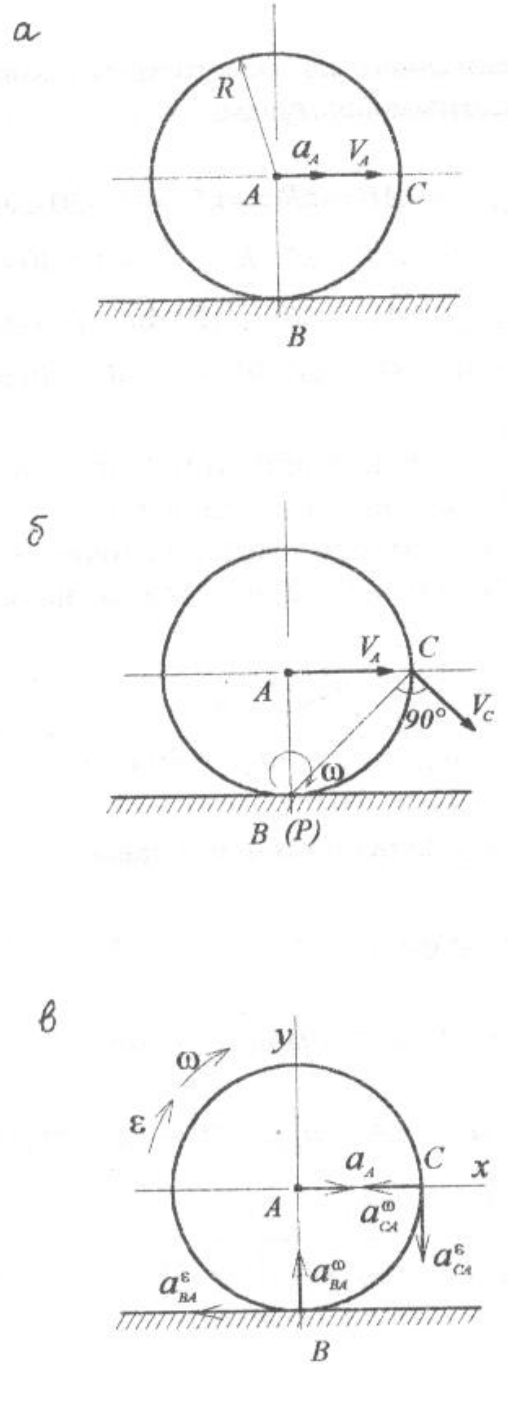


Рис. 18

Кинематика точки
(сложное движение точки)

Задача 4

Точка M движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки M и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Схемы механизмов показаны на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в прил. 8.

Примеры решения задачи 4

Пример 1

Дано: схема механизма (рис. 19). Точка M движется относительно тела D, согласно уравнению

$$s_r = OM = 16 - 8\cos 3\pi t.$$

Тело D вращается вокруг вертикальной оси по закону

$$\varphi_e = 0{,}9t^2 - 9t^3,$$

$$t_1 = \frac{2}{9}.$$

Определить: абсолютную скорость $\vec{V}$ и абсолютное ускорение $\vec{a}$ точки M в заданный момент времени t_1.

Решение

1. Определение положения точки M в заданный момент времени t_1

Будем считать, что в заданный момент времени плоскость чертежа (рис. 19) совпадает с плоскостью треугольника D. Положение точки M на теле D определяется расстоянием $s_r = OM$ при $t = 2/9$ с

$$s_r = 16 - 8\cos(3\pi \cdot 2/9) = 20{,}0 \text{ см}.$$

2. Определение абсолютной скорости точки M в заданный момент времени

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей (рис. 20 а)

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Модуль относительной скорости

$$V_r = \left|\tilde{V}_r\right|,$$

где

$$\tilde{V}_r = \frac{dS_r}{dt} = 24\pi \sin 3\pi t.$$

($\tilde{V}_r$ – алгебраическая величина относительной скорости).

При t = 2/9 с

$$\tilde{V}_r = 65{,}2 \text{ см/с}, \quad V_r = 65{,}2 \text{ см/с}.$$

Положительный знак величины $\tilde{V}_r$ показывает, что вектор $\vec{V}_r$ направлен в сторону возрастания S_r.

Модуль переносной скорости:

$$V_e = R\,\omega_e. \tag{11}$$

где R – радиус окружности L, описываемой той точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка M; $R = S_r \cdot \sin 30° = 10{,}0$ см; ω_e – модуль угловой скорости тела

$$\omega_e = \left|\tilde{\omega}_e\right|; \quad \tilde{\omega}_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 1{,}8t - 27t^2.$$

При t = 2/9 с

$$\tilde{\omega}_e = -\,0{,}93 \text{ рад/с}; \ \omega_e = 0{,}93 \text{ рад/с},$$

где $\tilde{\omega}_e$ – алгебраическая величина угловой скорости тела D.

Отрицательный знак у величины $\tilde{\omega}_e$ показывает, что вращение треугольника происходит вокруг оси Oz в сторону, обратную направлению отсчета угла φ. Поэтому вектор $\tilde{\omega}_e$ направлен по оси Oz вниз (рис. 20 а).

Модуль переносной скорости по формуле (11) равен

$$V_e = 9{,}3 \text{ см/с}.$$

Вектор $\vec{V}_e$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела. Так как $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}\,,$$

или

$$V = 65{,}9 \text{ см/с}.$$

3. Определение абсолютного ускорения точки M в заданный момент времени

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C\,,$$

или в развернутом виде:

$$\vec{a} = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_e^{\varepsilon} + \vec{a}_e^{\omega} + \vec{a}_C\,.$$

Модуль относительного касательного ускорения:

$$a_{r\tau} = \left|\tilde{a}_{r\tau}\right|,$$

где

$$\tilde{a}_{r\tau} = \frac{d\tilde{V}_r}{dt} = 72\pi^2 \cos 3\pi t\,.$$

($\tilde{a}_{r\tau}$ – алгебраическая величина относительного касательного ускорения).

При t = 2/9 с

$$\tilde{a}_{r\tau} = -355 \text{ см/с}^2; \; a_{r\tau} = 355 \text{ см/с}^2.$$

Знаки $\tilde{V}_r$ и $\tilde{a}_{r\tau}$ противоположны; следовательно, относительное движение точки M замедленное.

Относительное нормальное ускорение

$$a_{rn} = \frac{V_r^2}{\rho} = 0,$$

так как траектория относительного движения – прямая ($\rho = \infty$)

Модуль переносного вращательного ускорения

$$a_e^{\varepsilon} = R\,\varepsilon_e, \qquad (12)$$

где $\varepsilon_e = |\tilde{\varepsilon}_e|$ – модуль углового ускорения тела D

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 1{,}8 - 54t,$$

где $\tilde{\varepsilon}_e$ – алгебраическая величина углового ускорения тела D.

При t = 2/9 с

$$\tilde{\varepsilon}_e = -10{,}2 \text{ рад/с}^2; \; \varepsilon_e = 10{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\tilde{\varepsilon}_e$ и $\tilde{\omega}_e$ одинаковы, следовательно, вращение треугольника D – ускоренное, а направления векторов $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\varepsilon}_e$ совпадают (рис. 20 а, б). Согласно формуле (12),

$$a_e^{\varepsilon} = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{V}_e$. Модуль переносного осестремительного ускорения

$$a_e^{\omega} = R\,\omega_e^2, \text{ или } a_e^{\omega} = 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^{\omega}$ направлен к центру окружности L.

Кориолисово ускорение

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \cdot \vec{V}_r .$$

Модуль кориолисова ускорения

$$a_C = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r),$$

где

$$\sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = \sin 150° = 0{,}5.$$

С учетом найденных выше значений ω_e и V_r получаем:

$$a_C = 61 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_C$ направлен согласно правилу векторного произведения (рис. 20 б).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций:

$$a_X = a_e^\varepsilon + a_C; \quad a_Y = -a_e^\omega - a_{r\tau} \cos 60°;$$

$$a_Z = -a_{r\tau} \cos 30°; \quad a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} .$$

Результаты расчета сведены в следующие таблицы:

$\tilde{\omega}_e$, рад/с	Скорость, см/с			$\tilde{\varepsilon}_e$, рад/с^2
	$V_в$	$\tilde{V}_r$	V	
–0,93	9,3	65,2	65,9	–10,2

Ускорение, см/с^2								
a_e^ω	a_e^ε	$a_{r\,n}$	$a_{r\tau}$	a_C	a_X	a_Y	a_Z	a
9	102	0	–355	61	163	–186	308	395

Пример 2

Дано: точка движется в кольце D радиуса R = 20 см (рис. 21) в соответствии с законом $S_r = OM = \frac{5\pi}{3}t^2$ см. Кольцо вращается вокруг вертикального диаметра согласно уравнению $\varphi_e = 0{,}5t^2$ рад. На рис. 21 направление возрастания утла поворота кольца φ_e показано дуговой стрелкой; в начальный момент времени механизм находился в состоянии покоя; t_1 = 2 с.

Определить: абсолютную скорость $\vec{V}$ и абсолютное ускорение $\vec{a}$ точки M в заданный момент времени t_1.

Решение

Движение точки относительно вращающегося кольца является относительным; в относительном движении, согласно закону $S_r = \frac{5\pi}{3}t^2$, точка совершает криволинейную траекторию – окружность радиуса R (рис. 21). Кроме того, точка участвует в переносном движении – вращении кольца вокруг вертикального диаметра согласно закону $\varphi_e = 0{,}5t^2$. Абсолютным движением точки M является ее движение по отношению к условно неподвижной системе координат (X_1, Y_1, Z_1), где Z_1 – ось вращения кольца D (рис.21).

1. Определение положения точки в заданный момент времени t_1

Определим положение точки M на окружности радиуса R, описываемой ею в относительном движении, в заданный момент времени. Вместо t в выражение закона относительного движения подставим t_1, получим соответствующее значение дуговой координаты точки:

$$S_{r1} = \cup OM_1 = \frac{5\pi \cdot 2^2}{3} = \frac{20\pi}{3} \text{ см.}$$

Таким образом, в течение двух секунд в относительном движении из начального положения O точка прошла дугу OM, соответствующую центральному углу

$$\angle OO_1M_1 = \frac{S_{r1}}{R} = \frac{\cup OM_1}{R} = \frac{20\pi}{3 \cdot 20} = \frac{\pi}{3} \text{ рад} = 60°.$$

Итак, в заданный момент времени точка занимает положение M_1 (рис. 21).

2. Определение абсолютной скорости точки в заданный момент времени

Абсолютную скорость точки найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Относительная скорость точки в любой момент времени определяется по формуле

$$\tilde{V}_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{10\pi t}{3}.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с алгебраическая величина относительной скорости равна

$$\tilde{V}_{r1} = \frac{10\pi \cdot 2}{3} = \frac{20\pi}{3} = 21 \text{ см/с}.$$

Линия действия вектора $\vec{V}_{r1}$ является касательной к траектории точки в относительном движении, т. е. касательной к окружности радиуса R. Положительный знак $\tilde{V}_{r1}$ показывает, что вектор $\vec{V}_{r1}$ направлен в сторону возрастания дуговой координаты S_r (рис. 21).

Переносная скорость рассматриваемой точки в любой момент времени равна скорости той точки вращающегося кольца D ,с которой точка M совпадает. Модуль переносной скорости в момент времени t_1

$$V_{e1} = M_1K \cdot \omega_{e1}, \tag{13}$$

где ω_{e1} – модуль угловой скорости кольца D в момент времени $t_1 = 2$ с; M_1K – радиус окружности L, описываемой той точкой тела D, с которой в данный момент совпадает точка M

$$M_1K = R \cdot \sin 60° = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ см}.$$

Алгебраическая величина угловой скорости кольца D равна:

$$\tilde{\omega}_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}5t^2\right) = 0{,}5 \cdot 2t = t\,.$$

При t_1 = 2 с

$$\tilde{\omega}_{e1} = 2 \text{ рад/с; } \omega_{e1} = \left|\tilde{\omega}_{e1}\right| = 2 \text{ рад/с.}$$

Положительный знак у величины $\tilde{\omega}_{e1}$ показывает, что вращение кольца D вокруг оси Z_1 происходит в сторону возрастания угла φ_e. Поэтому вектор $\vec{\omega}_{e1}$ направлен по оси Z_1 вверх (рис. 21).

Модуль переносной скорости по формуле (13) равен

$$V_{e1} = 10\sqrt{3} \cdot 2 = 34{,}6 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_{e1}$ направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела D, т.е. перпендикулярно плоскости кольца от нас (рис. 21). Так как $\vec{V}_{r1}$ и $\vec{V}_{e1}$ взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M равен:

$$V_1 = \sqrt{V_{r1}^2 + V_{e1}^2} = \sqrt{21^2 + 20^2 \cdot 3} = \sqrt{1641} = 40{,}5 \text{ см/с.}$$

3. Определение абсолютного ускорения точки M в заданный момент времени

Абсолютное ускорение точки M равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C,$$

или в развернутом виде:

$$\vec{a} = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rn} + \vec{a}_e^{\varepsilon} + \vec{a}_e^{\omega} + \vec{a}_C\,.$$

Модуль относительного касательного ускорения:

$$a_{r\tau} = \left|\tilde{a}_{r\tau}\right|,$$

где

$$\tilde{a}_{r\tau} = \frac{d\tilde{V}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{10\pi}{3}t\right) = \frac{10\pi}{3} = 10{,}5 \text{ см} = \text{const}.$$

Таким образом, при $t_1 = 2$ с

$$\tilde{a}_{r\tau 1} = 10{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Знаки $\tilde{V}_{r1}$ и $\tilde{a}_{r\tau 1}$ одинаково положительны, следовательно, относительное движение точки M ускоренное. Вектор $\vec{a}_{r\tau 1}$ направлен по той же прямой в ту же сторону, что и вектор относительной скорости точки $\vec{V}_{r1}$ (рис. 21).

Модуль относительного нормального ускорения точки M в момент времени $t_1 = 2$ с равен:

$$a_{rn1} = \frac{V_{r1}^2}{R} = \frac{21^2}{20} = 22{,}0 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{rn1}$ направлен вдоль радиуса O_1M_1 к центру O_1 окружности, являющейся траекторией точки в относительном движении.

Модуль переносного вращательного ускорения в момент времени $t_1 = 2$ с:

$$a_{e1}^{\varepsilon} = M_1K \cdot \varepsilon_{e1}. \tag{14}$$

Определим алгебраическую величину углового ускорения кольца D:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{d\tilde{\omega}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(t) = 1 = \text{const}.$$

Таким образом,

$$\tilde{\varepsilon}_{e1} = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки $\tilde{\varepsilon}_{e1}$ и $\tilde{\omega}_{e1}$ одинаковы (положительны), следовательно, вращение кольца D ускоренное, направления векторов $\vec{\varepsilon}_{e1}$ и $\vec{\omega}_{e1}$ совпадают (рис. 21). Согласно (14):

$$a_{e1}^{\varepsilon} = 10\sqrt{3} \cdot 1 = 17{,}3 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{e1}^{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{V}_{e1}$.

Модуль переносного осестремительного ускорения в момент времени $t_1 = 2$ с:

$$a_{e1}^{\omega} = M_1K \cdot \omega_{e1}^2 = 10\sqrt{3} \cdot 2^2 = 69{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{e1}^{\omega}$ направлен к центру окружности L (к оси вращения кольца D) — рис. 21.

Кориолисово ускорение

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \cdot \vec{V}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения точки M в момент времени $t_1 = 2$ с равен:

$$a_{C1} = 2\omega_{e1} \cdot V_{r1} \cdot \sin(\vec{\omega}_{e1}, \vec{V}_{r1}).$$

Так как вектор угловой скорости кольца D $\vec{\omega}_{e1}$ направлен вверх по оси вращения (рис. 21), то угол $(\vec{\omega}_{e1}, \vec{V}_{r1}) = 150°$ и $\sin(\vec{\omega}_{e1}, \vec{V}_{r1}) = 0{,}5$. С учетом найденных выше значений ω_{e1}, V_{r1} получаем

$$a_{C1} = 2 \cdot 2 \cdot 21 \cdot 0{,}5 = 42 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{C1}$ направлен согласно правилу векторного произведения

$$\vec{a}_{C1} = 2\vec{\omega}_{e1} \cdot \vec{V}_{r1},$$

т. е. перпендикулярно плоскости кольца D <u>от нас</u> (рис. 21).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим, проектируя равенство

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{r\tau 1} + \vec{a}_{rn1} + \vec{a}_{e1}^{\varepsilon} + \vec{a}_{e1}^{\omega} + \vec{a}_{C1}$$

на оси подвижной системы координат (M_1xyz), связанной с вращающимся кольцом. Плоскость yz совпадает с плоскостью кольца, ось z параллельна оси вращения кольца, ось x перпендикулярна плоскости кольца и направлена <u>на нас</u> – рис. 21

$$a_{1X} = -a_{e1}^{\varepsilon} - a_{C1} = -17{,}3 - 42 = -59{,}3 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{1Y} = -a_{rn1}\cos 30° + a_{r\tau 1}\cos 60° - a_{e1}^{\omega} = -22\frac{\sqrt{3}}{2} + 10{,}5 \cdot 0{,}5 - 69{,}2 = 82{,}7 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{1Z} = -a_{rn1}\cos 60° - a_{r\tau 1}\cos 30° = -22 \cdot 0{,}5 - 10{,}5\frac{\sqrt{3}}{2} = -19{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки M равен

$$a_1 = \sqrt{a_{1X}^2 + a_{1Y}^2 + a_{1Z}^2} = \sqrt{59{,}3^2 + 82{,}7^2 + 19{,}9^2} \cong 104 \text{ см/с}^2.$$

Схемы к примерам решения задачи 4

Схемы к примерам решения задачи 4

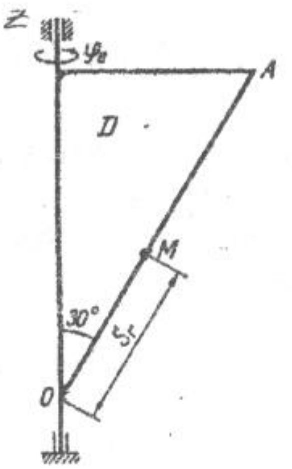
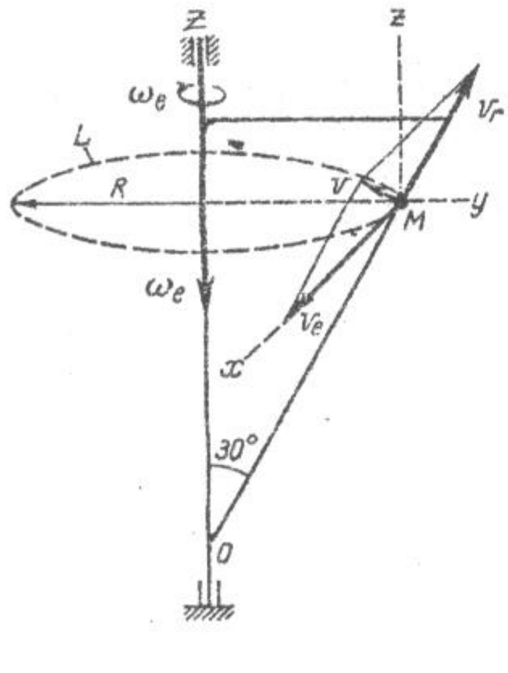


Рис. 19



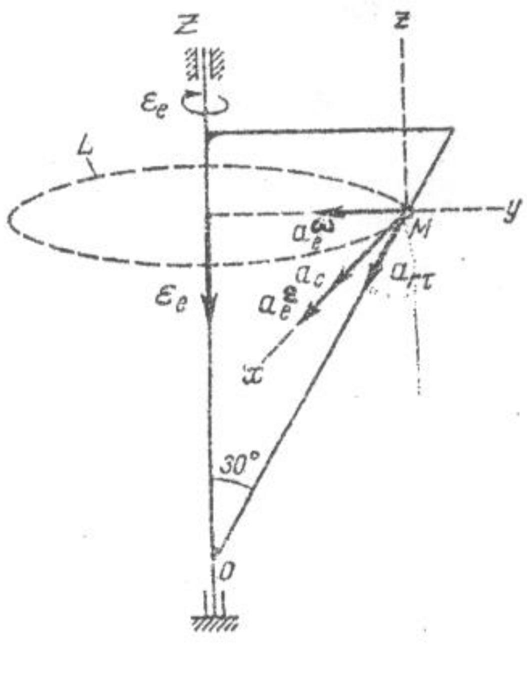


Рис. 20 а

Рис. 20 б

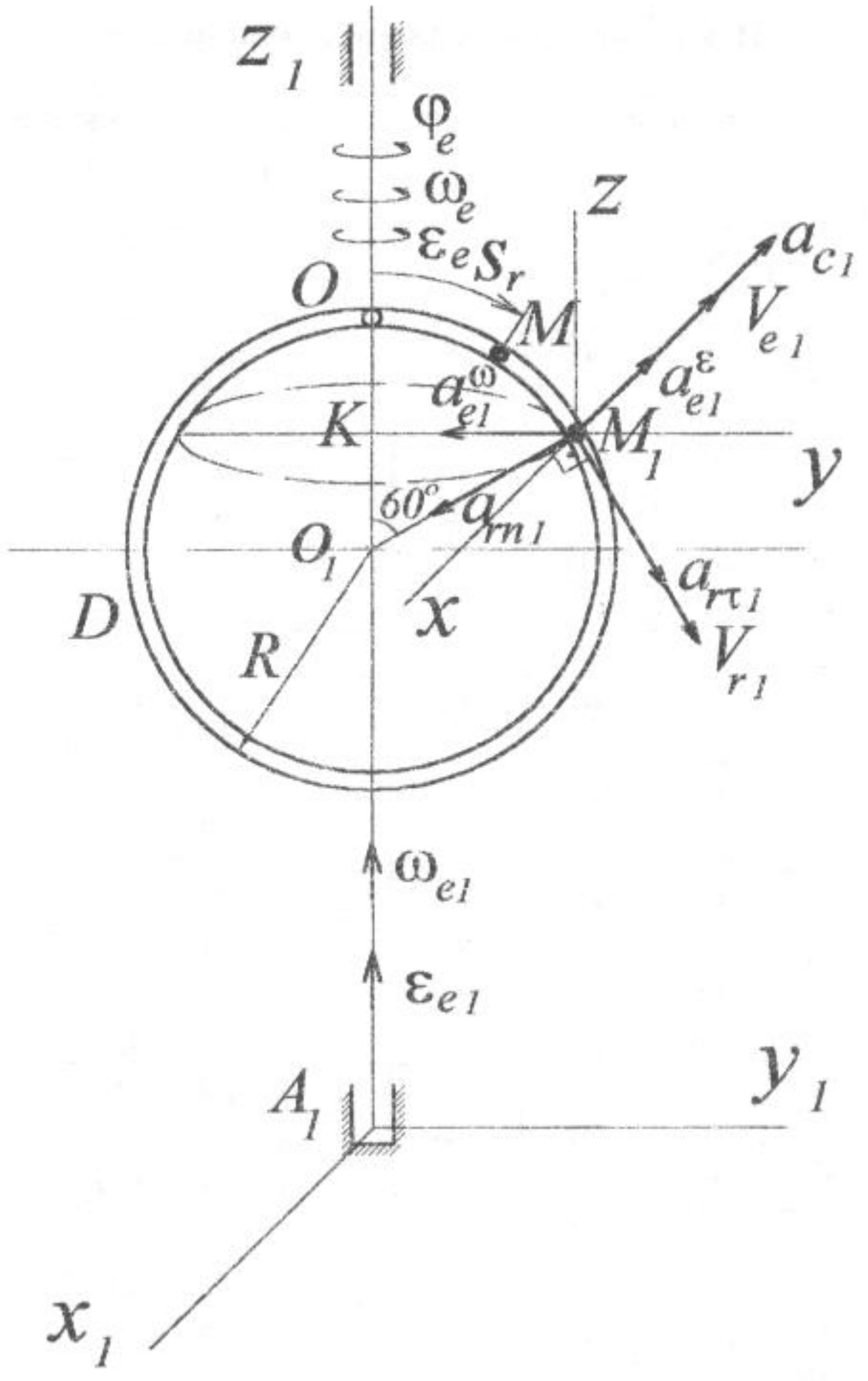

z1
φe
ωe
εe
Sr
O
M
Z
ac1
Ve1
aεe1
aωe1
K
M1
y
60°
arn1
O1
x
arτ1
Vr1
D
R
ωe1
εe1
A1
y1
x1

Рис. 21

Приложения к контрольной работе № 2

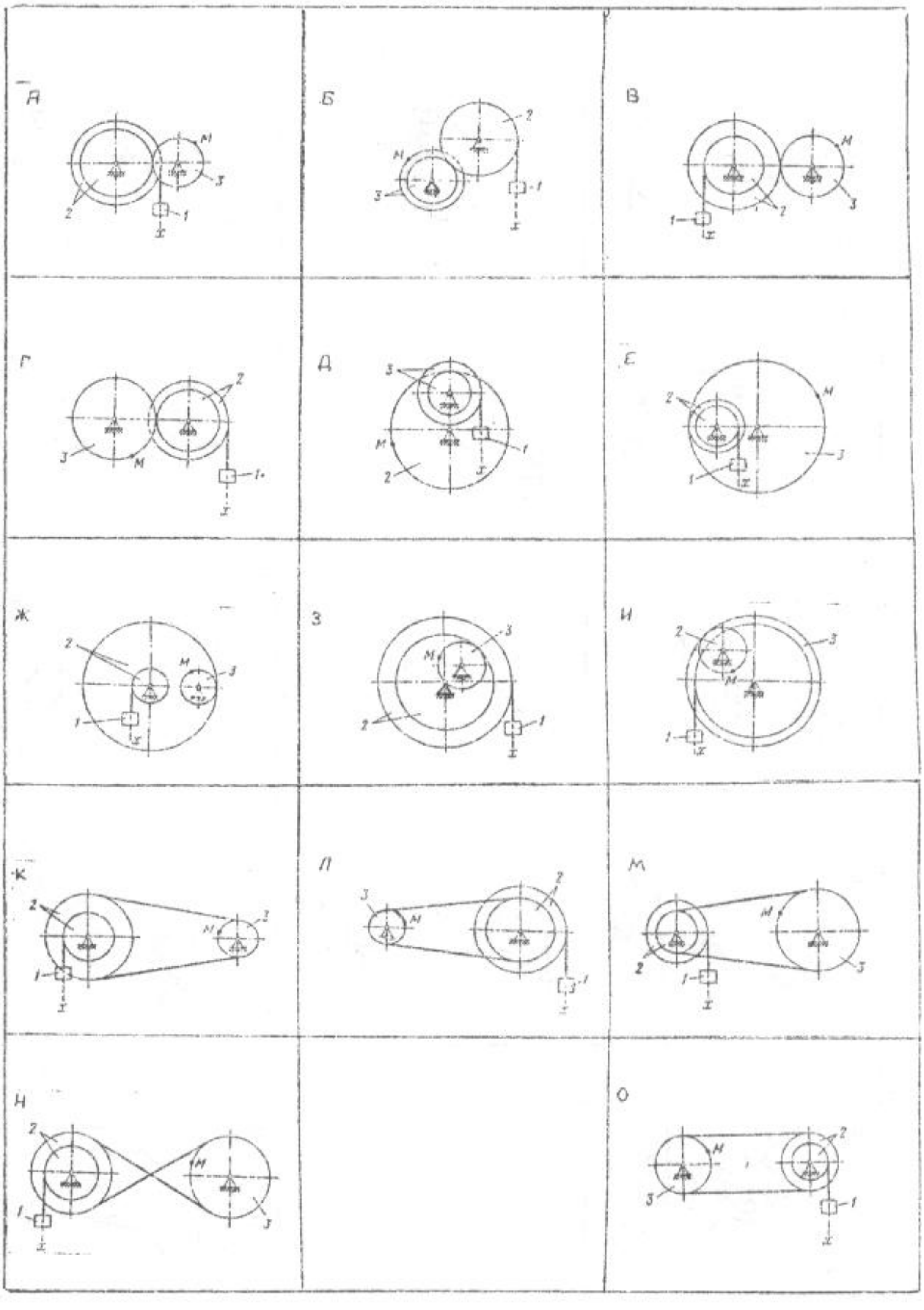
Приложение 5

Исходные данные для решения задачи 1

Вариант	Радиусы, см				Уравнение движения груза (тела 1)	Расчетный момент времени, с
	R_2	r_2	R_3	r_3	$x = f(t)$	t_1
А	60	45	36	–	$x = 15t^2 + 12t + 2$	2
Б	80	–	60	45	$x = 4t^2 + 10t + 5$	1
В	100	60	75	–	$x = 0{,}5t^2 + 6t + 5$	2
Г	58	45	60	–	$x = 9{,}5t^2 + 4t + 4$	3
Д	80	–	45	30	$x = 6t^2 + 15t + 3$	2
Е	45	35	105	–	$x = 6t^2 + 5t + 8$	3
Ж	35	10	10	–	$x = 11t^2 + 2t + 6$	2
З	40	30	15	–	$x = 6t^2 + 7t + 10$	1
И	15	–	40	35	$x = 7t^2 + 3t + 5$	3
К	40	25	20	–	$x = 10t^2 + 8t + 9$	1
Л	20	15	10	–	$x = 16t^2 + 10t + 5$	2
М	30	20	40	–	$x = 22t^2 + 7$	2
Н	15	10	15	–	$x = 17t^2 + 3t + 6$	1
О	15	10	15	–	$x = 11t^2 + 2t + 5$	2
П	20	15	15	–	$x = 12t^2 + 6t + 4$	3
Р	15	10	20	–	$x = 7t^2 + 4t + 8$	1
С	20	15	10	–	$x = 10t^2 + 12t + 3$	1
Т	15	10	20	–	$x = 18t^2 + 10t + 5$	3
У	25	15	10	–	$x = 27t^2 + 8t + 10$	1
Ф	20	10	30	10	$x = 13t^2 + 5t + 6$	2
Х	40	20	35	–	$x = 21t^2 + 6t + 7$	1
Ц	40	30	30	15	$x = 18t^2 + 9t + 5$	2
Ч	30	15	40	20	$x = 4t^2 + 8t + 9$	2
Ш	50	20	60	–	$x = 11t^2 + 4t + 8$	2
Щ	32	16	32	16	$x = 50t^2 + 14t + 6$	2
Э	40	18	40	18	$x = 42t^2 + 10t + 5$	1
Ю	40	20	40	15	$x = 36t^2 + 5t + 8$	2
Я	25	20	50	25	$x = 4t^2 + 6t + 4$	1

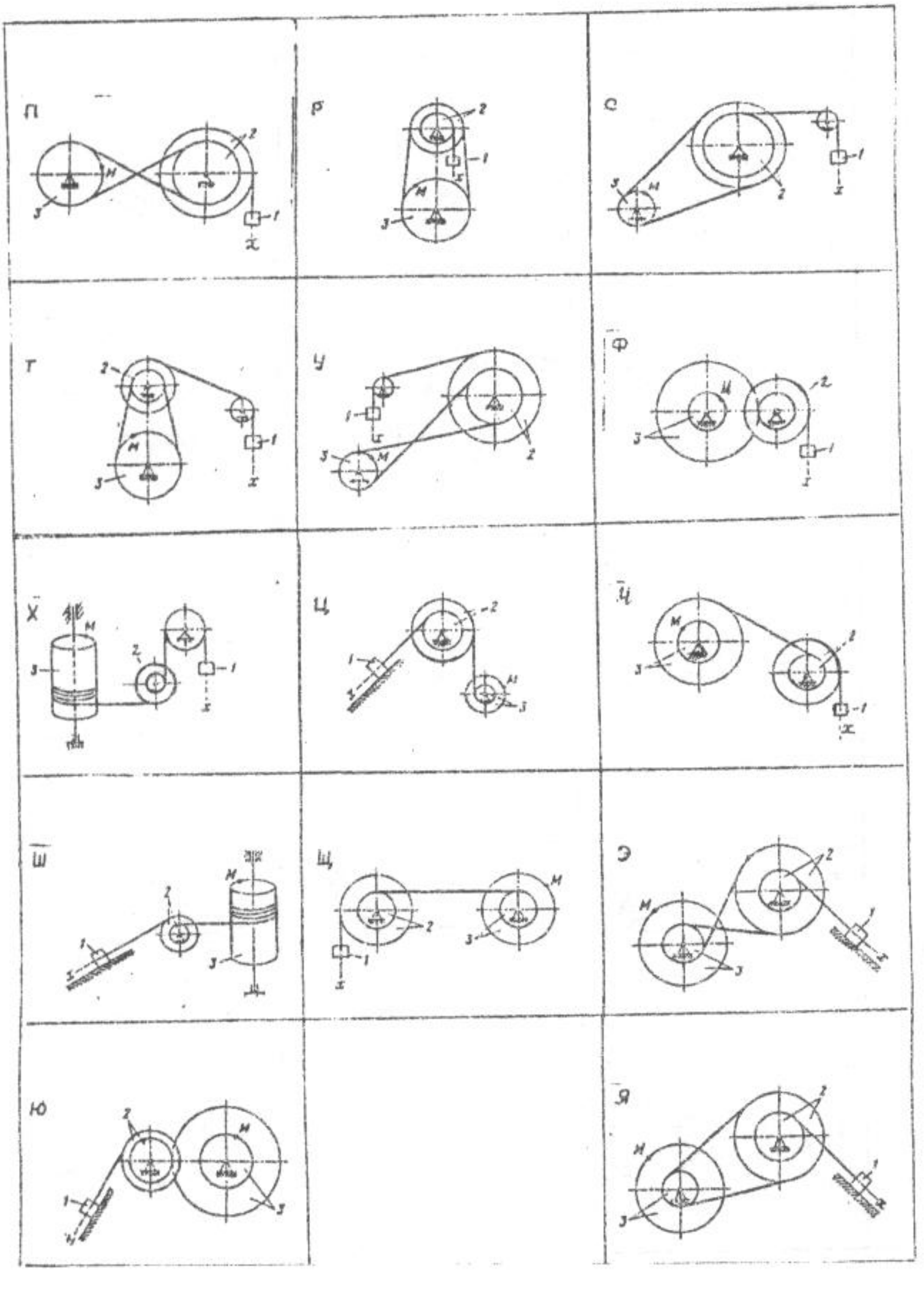
Схемы к задаче 1

Схемы к задаче 1



Схемы к задаче 1

Схемы к задаче 1



П р и л о ж е н и е 6

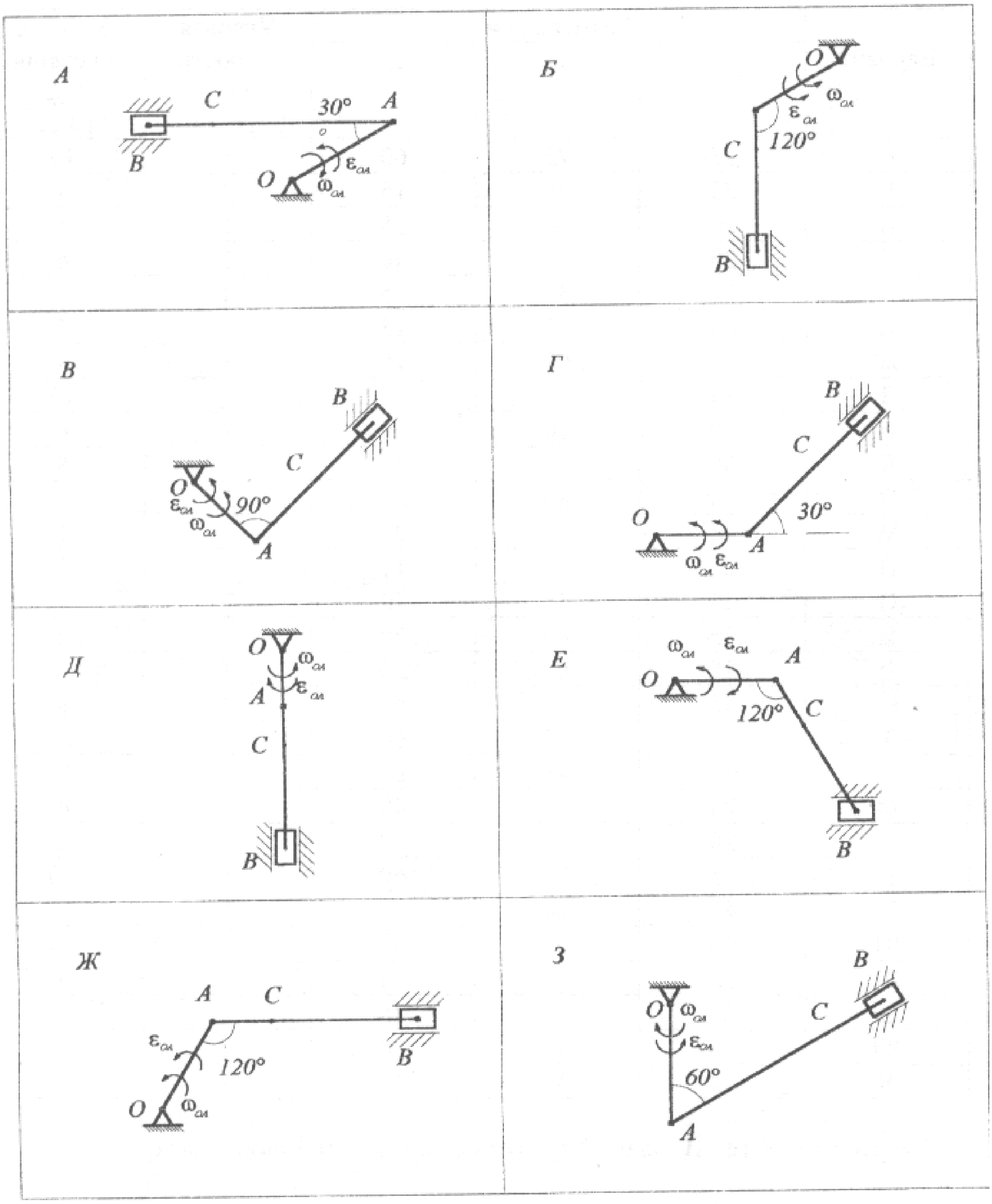
Исходные данные для решения задачи 2

Вариант	Размеры, см			Угловая скорость, рад/с ω_{OA}	Угловое ускорение, рад/с^2 ε_{OA}
	OA	*AB*	*AC*		
А	35	75	60	5	10
Б	25	35	15	2	3
В	20	50	25	1	1
Г	25	55	40	2	4
Д	12	35	15	4	6
Е	25	35	15	2	3
Ж	30	60	15	3	8
З	35	70	60	5	10
И	10	10	5	2	6
К	35	–	45	4	8
Л	25	80	20	1	2
М	25	–	20	1	1
Н	25	35	15	2	3
О	25	55	40	2	4
П	25	80	20	1	2
Р	25	80	20	1	2
С	35	–	45	4	8
Т	35	75	60	5	10
У	35	75	60	5	10
Ф	25	55	40	2	4
Х	20	70	20	1	2
Ц	35	75	60	5	10
Ч	40	20	–	5	10
Ш	35	75	60	5	10
Щ	25	35	15	2	3
Э	20	50	25	1	1
Ю	25	55	40	2	4
Я	12	35	15	4	6

П р и м е ч а н и е. В задаче 2 требуется определить ускорения точек *B* и *C*.

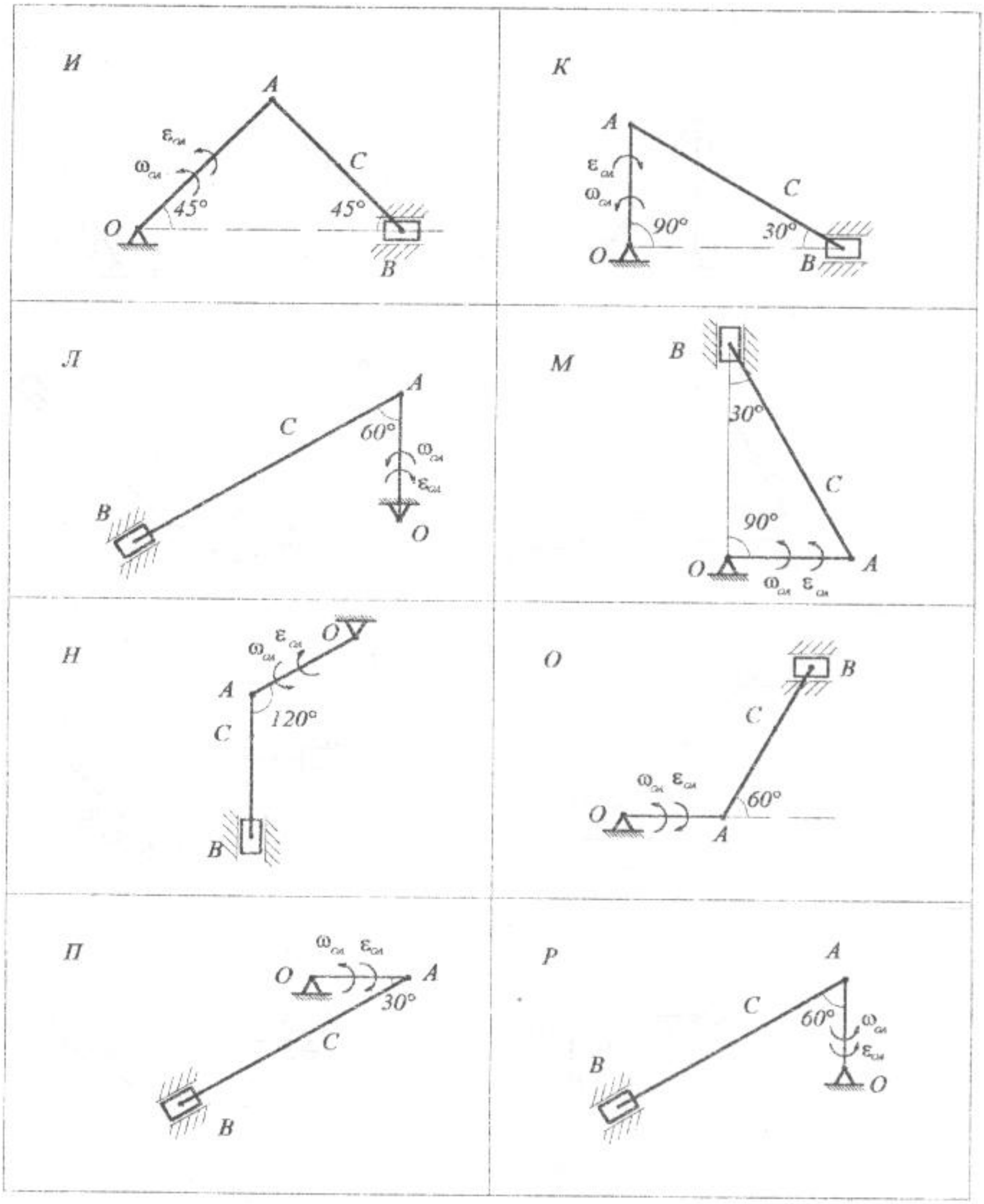
Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2



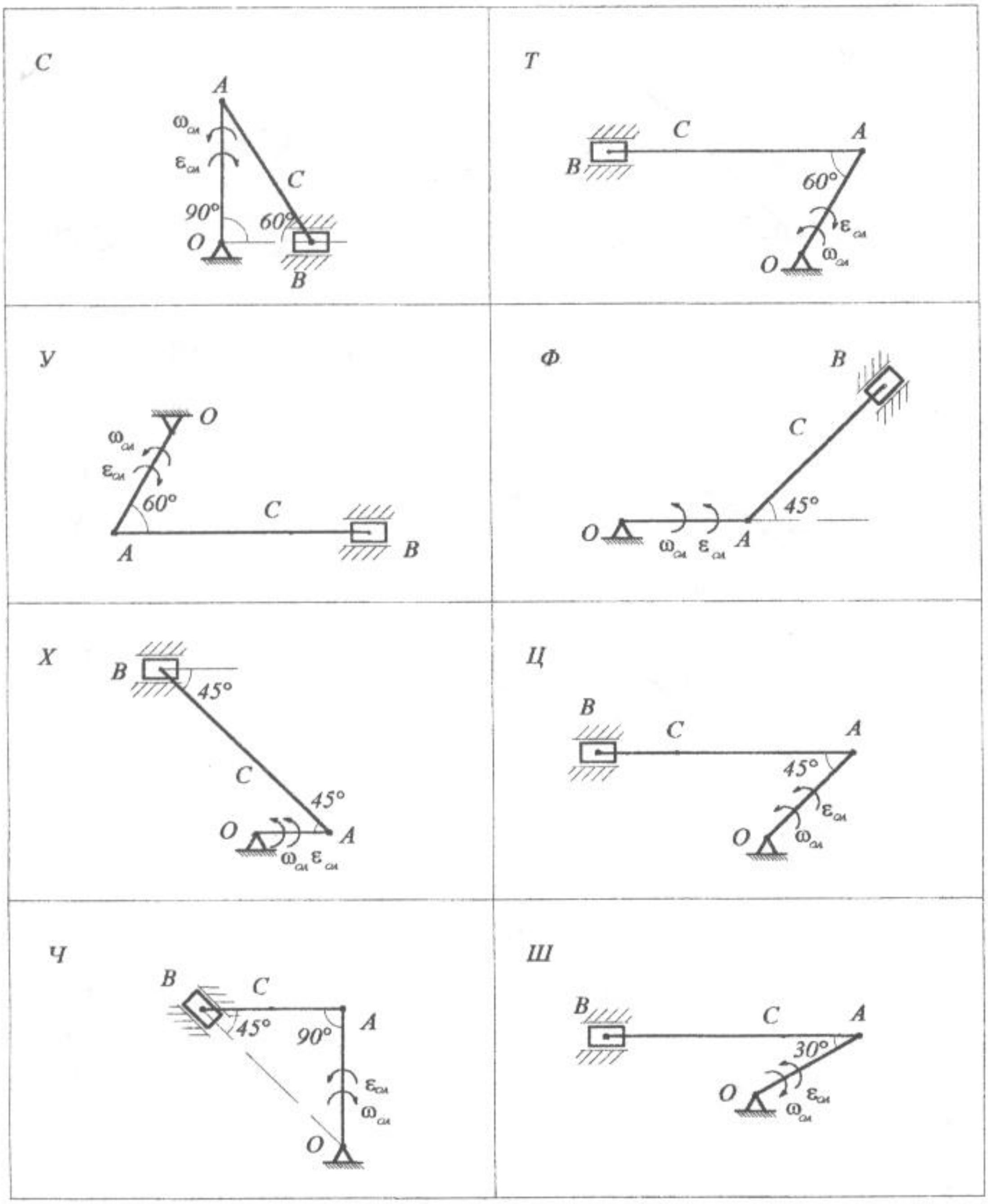
Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2



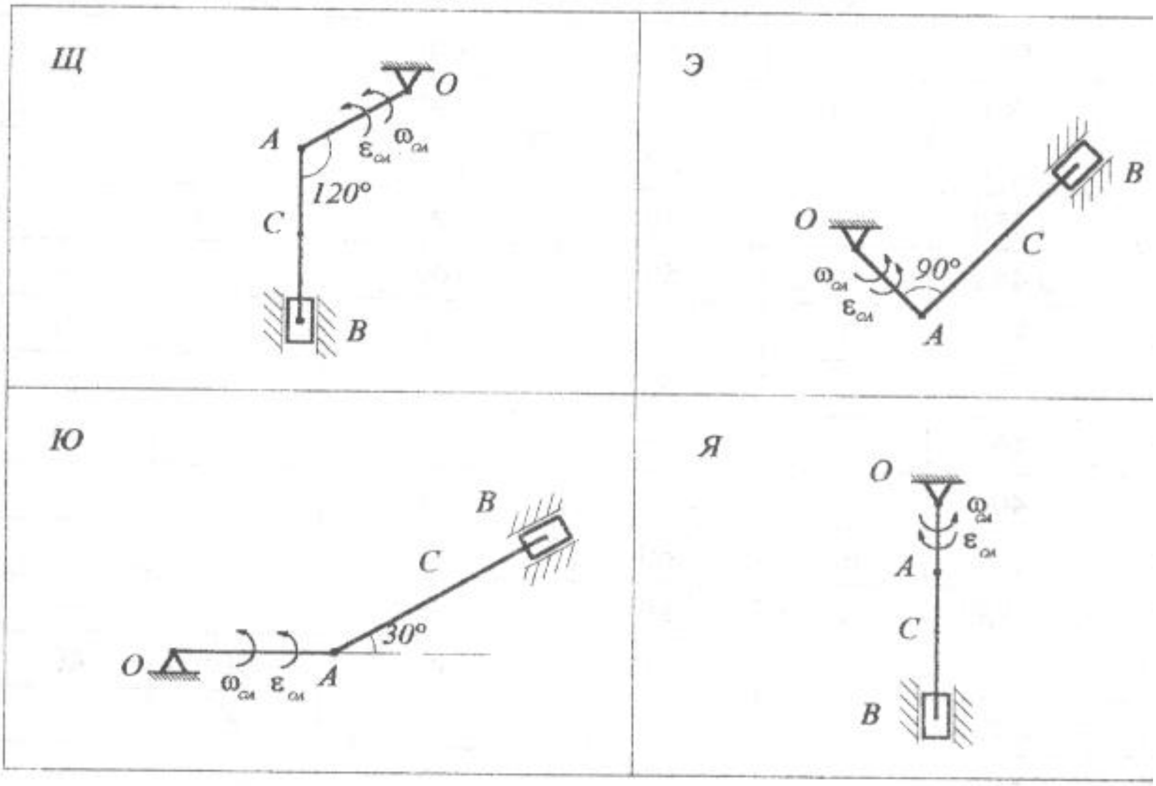
Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2



Схемы к задаче 2

Схемы к задаче 2



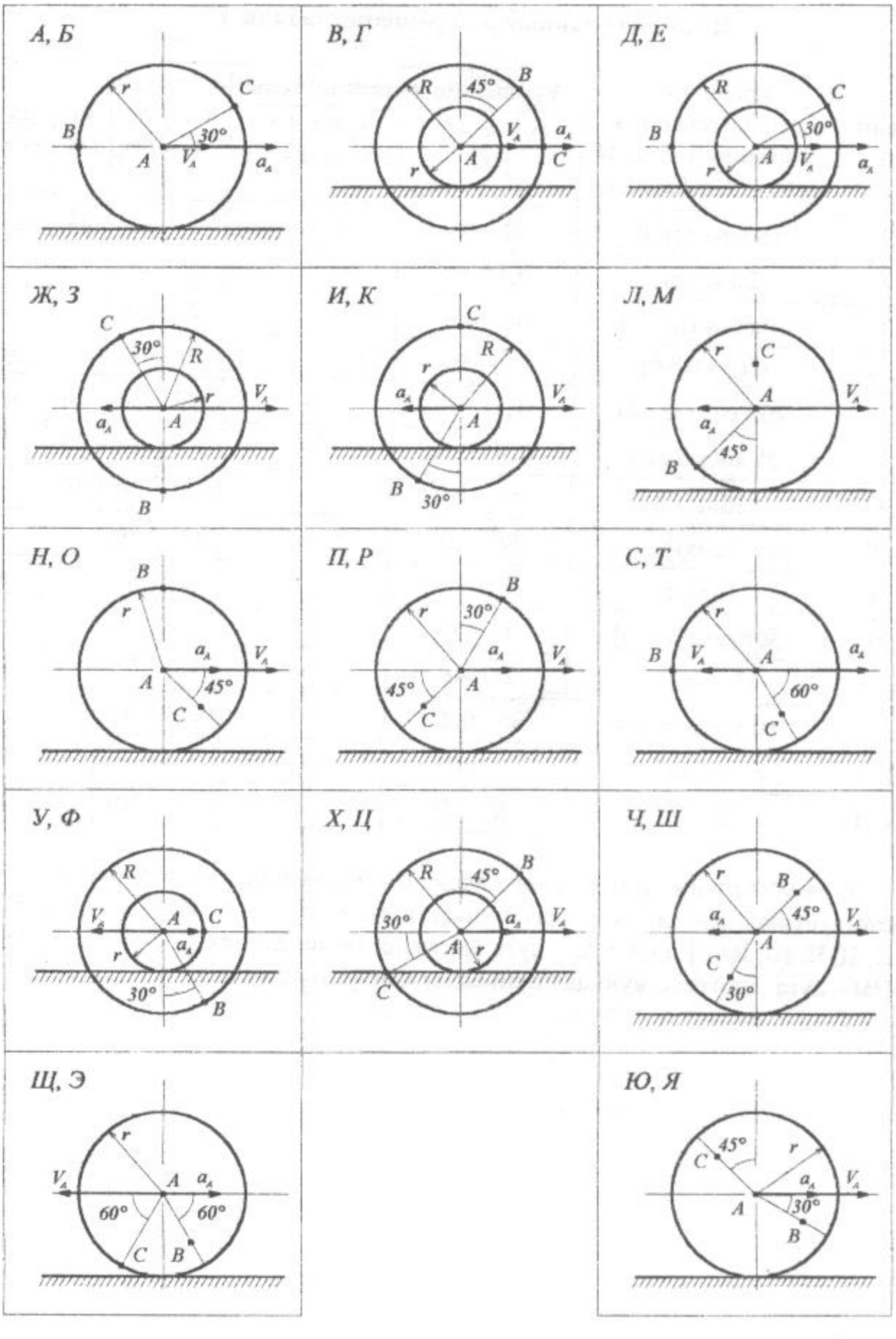
Приложение 7

Исходные данные для решения задачи 3

Вариант	Радиусы, см		Скорость, см/с	Ускорение, см/с^2	Размеры, см	
	r	R	V_A	a_A	AB	AC
А, Б	50	–	50	100	–	–
В, Г	0,8R	50	50	100	–	–
Д, Е	0,5R	50	50	100	–	–
Ж, З	0,25R	50	50	100	–	–
И, К	0,45R	50	50	100	–	–
Л, М	30	–	80	50	–	10
Н, О	15	–	60	30	–	5
П, Р	40	–	40	20	–	20
С, Т	40	–	40	30	–	30
У, Ф	0,6R	60	60	20	–	–
Х, Ц	0,8R	60	80	40	–	–
Ч, Ш	60	–	100	40	30	40
Щ, Э	80	–	80	20	60	–
Ю, Я	60	–	100	40	40	20

Схемы к задаче 3

Схемы к задаче 3



Приложение 8

Исходные данные для решения задачи 4

Вариант	Уравнение относительного движения точки M $OM = S_r = S_r(t)$, см	Уравнение движения тела $\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см	t_1, с	R, см	a, см	α, град
А, Б	$18 \sin(\pi t / 4)$	$2t^3 - t^2$	–	2/3	–	25	–
В, Г	$20 \sin \pi t$	$0{,}4t^2 + t$	–	5/3	20	–	–
Д, Е	$40\pi \cos(\pi t / 6)$	$3t - 0{,}5t^3$	–	2	30	–	–
Ж, З	$6(t + 0{,}5t^2)$	$t^3 - 5t$	–	2	–	–	30
И, К	$20\pi \cos(\pi t / 4)$	$1{,}2t - t^2$	–	4/3	20	20	–
Л, М	$25 \sin(\pi t / 3)$	$2t^2 - 0{,}5t$	–	4	–	25	–
Н, О	$15\pi t^3 / 8$	$5t - 4t^2$	–	2	30	30	–
П, Р	$120\pi t^2$	$8t^2 - 3t$	–	1/3	40	–	–
С, Т	$10t + t^3$	$8t - t^2$	–	2	–	–	60
У, Ф	$30\pi \cos(\pi t / 6)$	$6t + t^2$	–	3	60	–	–
Х, Ц	$25\pi(t + t^2)$	$2t - 4t^2$	–	1/2	25	–	–
Ч, Ш	$10\pi \sin(\pi t / 4)$	$3t - 0{,}2t^2$	–	2/3	30	–	–
Щ, Э	$8 \cos(\pi t / 2)$	$-2\pi t^2$	–	3/2	–	–	45
Ю, Я	$2{,}5\pi t^2$	$2t^3 - 5t$	–	2	40	–	–

Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению S_r; в вариантах Д, Е, И, К, Н, О, П, Р, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Ю, Я $OM = S_r$ – дуга окружности; на схемах Д, Е, И, К, Н, О, Х, Ц OM – дуга, соответствующая меньшему центральному углу.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Динамика

Данная работа содержит две задачи из раздела «Динамика» для студентов специальностей 070200, 170600, 271300, 210200.

Задача 1

Для решения этой задачи на составление дифференциальных уравнений движения материальной точки студент по первой букве имени определяет номер схемы и номер варианта по табл. 1.

Исходные данные приведены в табл. 2.

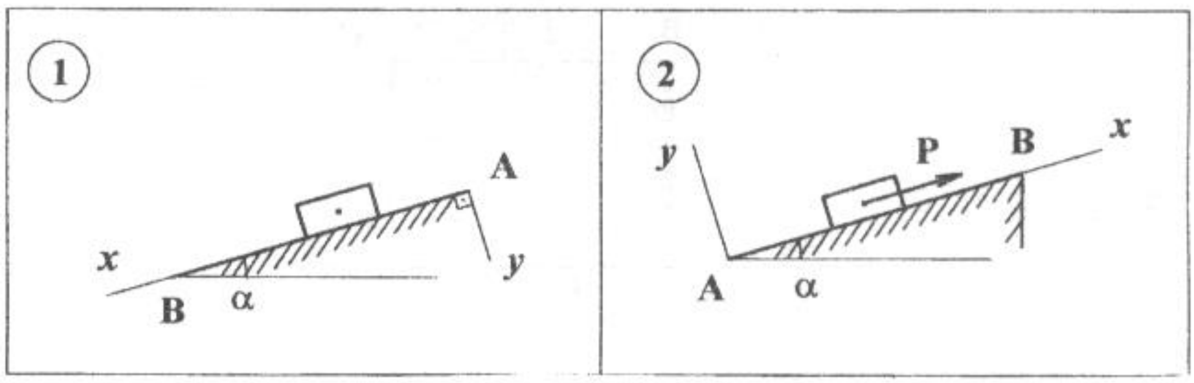
Таблица 1

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т
Схема	1						2						3					
Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

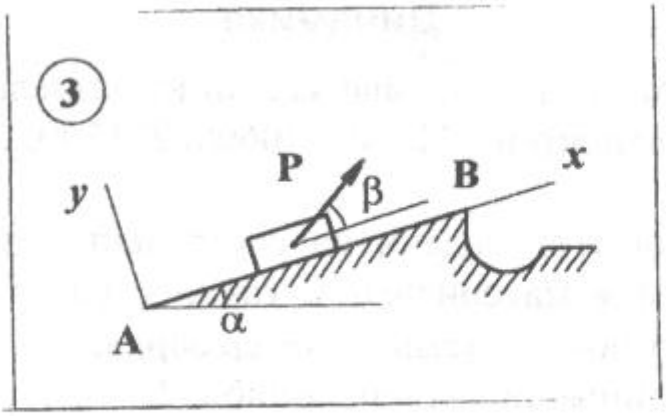
Буква	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Э	Ю	Я
Схема	4						5			
Вариант	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

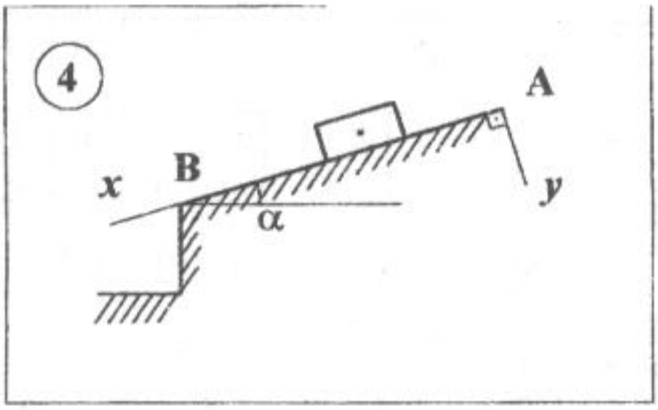
Схемы к задаче 1

Схемы к задаче 1



Схемы к задаче 1





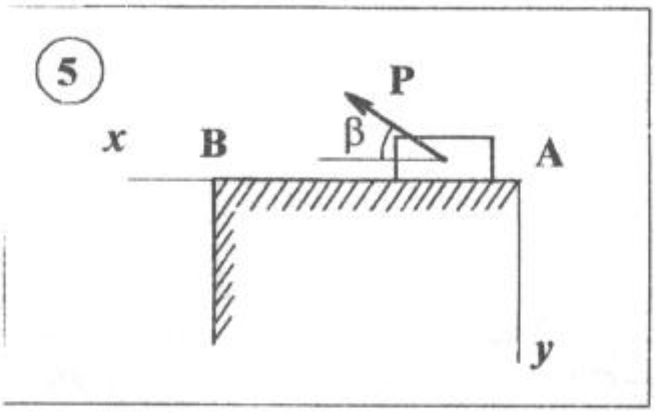


Таблица 2

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	V_A, м/с	V_B, м/с	f, безр.	t, с	l, м	p, Н	β, град	α, град	m, кг
1	2	10	0,2	t	l	–	–	30	–
2	1	8	f	t	9	–	–	45	–
3	0	V_B	f	2	9,8	–	–	60	–
4	V_A	V_B	0,1	1	10	–	–	15	–
5	2	V_B	f	1	5,3	–	–	60	–
6	2	8	f	t	10	–	–	45	–
7	4	36,28	0,1	t	l	22	–	30	2
8	1	21	0	2	l	p	–	30	2
9	2	8	0,6	t	5	p	–	60	4
10	20	V_B	0,2	3	l	20	–	15	1
11	20	40	0,1	t	l	90	–	60	4
12	10	V_B	0,1	1	l	10	–	60	2
13	10	5,2	0,2	2	l	p	0	45	3
14	20	14,8	0,3	1	l	p	0	15	2
15	10	29	0,1	t	l	20	30	45	2
16	V_A	5	0,1	t	5	20	45	60	3
17	25	V_B	f	1	20	10	60	30	4
18	V_A	V_B	0,2	2	27,36	40	75	30	2
19	2	5,28	0,1	t	l	–	–	15	–
20	0	30	f	t	8	–	–	30	–
21	5	V_B	f	1	8	–	–	45	–
22	V_A	V_B	0,1	2	20,2	–	–	60	–
23	2	V_B	f	1	2,72	–	–	10	–
24	2	4	f	t	9	–	–	15	–
25	4	13,2	0,1	t	l	10	15	–	2
26	3	3,2	f	1	l	10	30	–	2
27	2	V_B	0,2	2	l	20	45	–	2
28	V_A	V_B	0,3	0,5	4,125	40	60	–	2

Примечание. В первой задаче требуется определить величины, обозначенные в таблице буквами.

Пример решения задачи 1

Тело движется из точки *A* по участку *AB* (длиной *l*) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение *t* секунд. Его начальная скорость V_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен *f*.

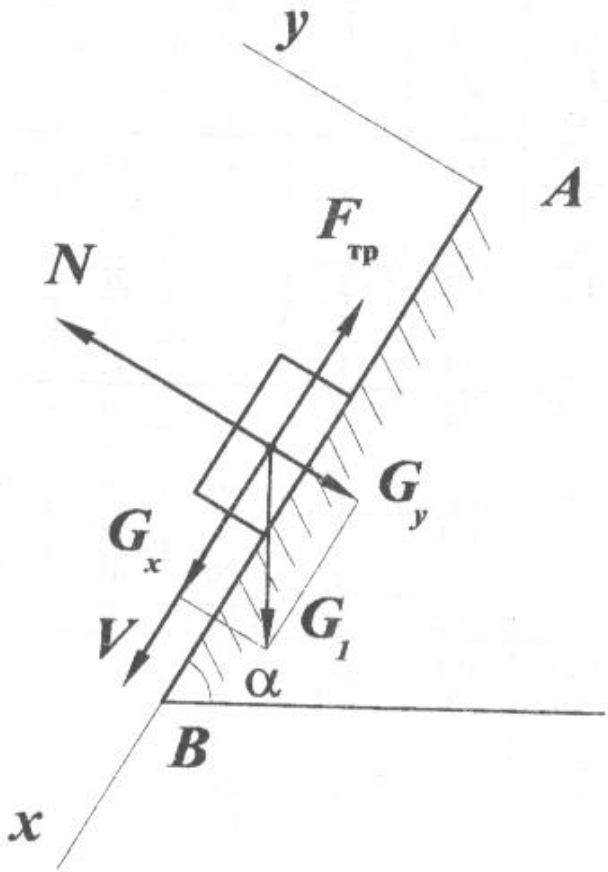


Рис. 1

Рис. 1

Дано: $\alpha = 30°$; $V_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м.
Определить: t, V_B.

Решение

Рассмотрим движение тела на участке *AB*, принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы тяжести $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}_{тр}$.

Составим дифференциальные уравнения движения тела на участке *AB*:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \end{cases}$$

где m – масса точки; $\ddot{x}, \ddot{y}$ – ускорения точки в проекциях на оси *x, y*; $\sum F_{ix}$, $\sum F_{iy}$ – сумма проекций всех сил на оси *x, y*.

Для данной задачи дифференциальные уравнения будут записаны так:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = G\sin\alpha - F_{тр}, \\ m\ddot{y} = N - G\cos\alpha. \end{cases}$$

Так как движение тела происходит только вдоль оси *x*, а вдоль оси *y* движения нет, то $\ddot{y} = 0$.

Следовательно, $0 = N - G\cos\alpha$, $N = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$. Тогда

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - fN,$$

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha,$$

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha,$$

$$\ddot{x} = 3{,}2.$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка с разделяющими переменными

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 3{,}2; \quad d\dot{x} = 3{,}2dt;$$

$$\int d\dot{x} = 3{,}2\int dt;$$

$$\dot{x} = 3{,}2t + C_1. \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3{,}2t + C_1; \qquad dx = 3{,}2tdt + C_1dt;$$

$$\int d\,x = 3{,}2\int t\,dt + C_1 \int dt;$$

$$x = 3{,}2\,\frac{t^2}{2} + C_1\,t + C_2. \qquad (2)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из начальных условий:

$$t_0 = 0, \qquad \dot{x}_0 = V_A = 2\,\text{м/с}, \quad x_0 = 0\,\text{м}.$$

Подставим начальные условия в уравнения (1) и (2):

$$2 = 3{,}2 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow \quad C_1 = 2,$$
$$0 = 3{,}2 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в уравнения (1) и (2):

$$\begin{cases} \dot{x} = 3{,}2\,t, \\ x = 1{,}6\,t^2 + 2t. \end{cases}$$

Данные уравнения описывают движение тела на участке AB. Для момента времени t перепишем эти уравнения:

$$\begin{cases} V_B = 3{,}2t, \\ l = 1{,}6t^2 + 2t. \end{cases}$$

$$10 = 1{,}6t^2 + 2t,$$

$$1{,}6t^2 + 2t - 10 = 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1{,}6(-10)}}{3{,}2} = \frac{-2 \pm 8{,}2}{3{,}2};$$

$$t_1 = -3{,}2,$$

$$t_2 = 1{,}9.$$

Так как время – величина положительная, выбираем $t = 1{,}9$ с.

Скорость тела в точке B: $V_B = 3{,}2t = 3{,}2 \cdot 1{,}9 = 6{,}08$ м/с.

Задача 2

Условия ршения этой задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии механической системы определяются по первой букве фамилии по табл. 1. Схемы задач приведены ниже, варианты задач – в табл. 3. В этой задаче во всех вариантах определяется скорость и ускорение тела *1*: V_1 и a_1.

Схемы к задаче 2

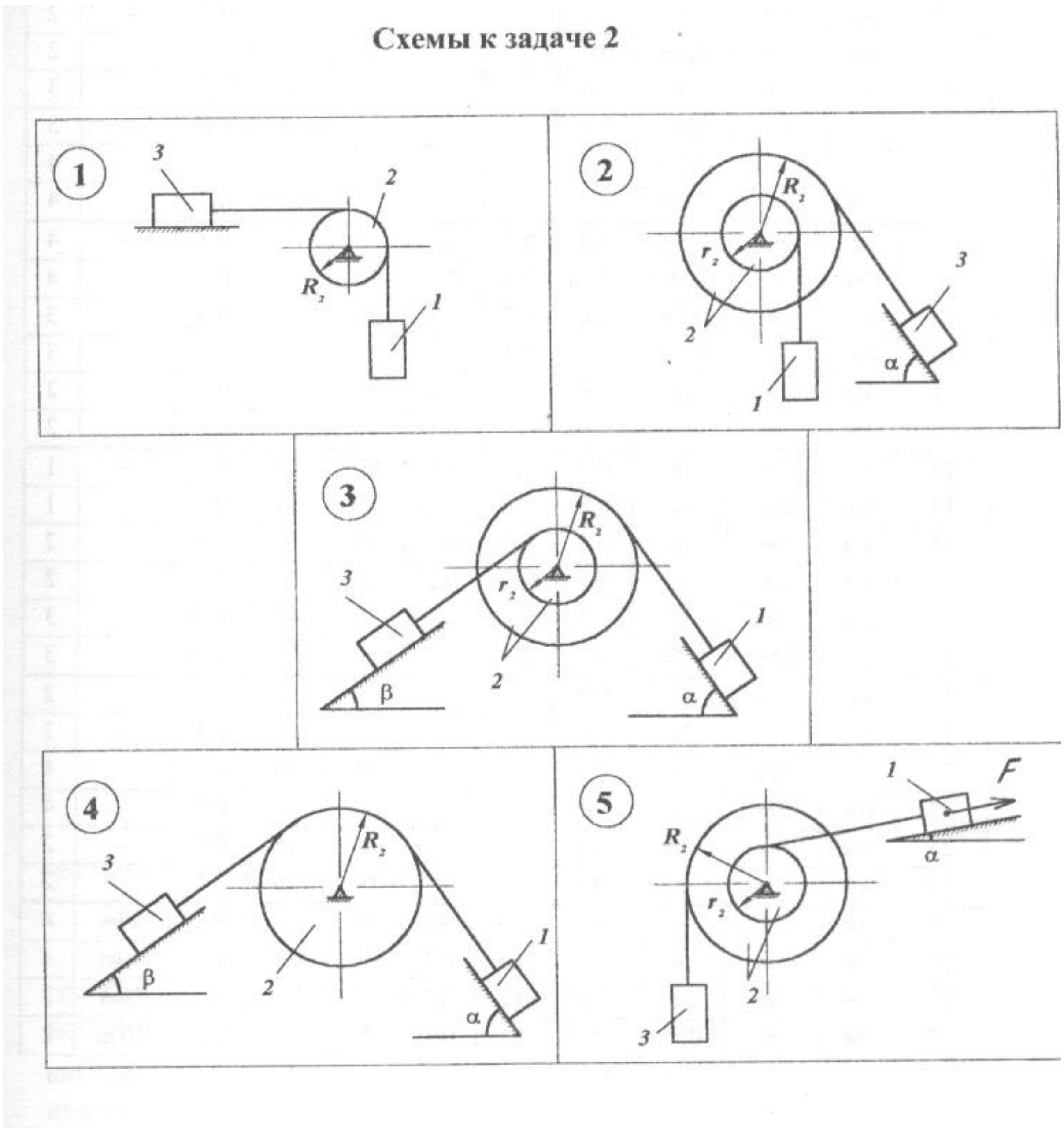


Таблица 3

Заданные и определяемые параметры

№ варианта	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_2, м	r_2, м	i_{2x}, м	α, град	β, град	f, безр	F, кН	S_1, м
1	8m	2m	m	0,5	–	–	–	–	0,2	–	2
2	6m	2m	0,5m	0,4	–	–	–	–	0,1	–	2
3	8m	4m	2m	0,6	–	–	–	–	0,3	–	3
4	6m	4m	2m	0,4	–	–	–	–	0,2	–	3
5	4m	m	0,5m	0,2	–	–	–	–	0,1	–	4
6	2m	m	0,5m	0,1	–	–	–	–	0,1	–	4
7	m	m	0,5m	0,4	0,2	0,1	15	–	0,1	–	4
8	2m	m	0,25m	0,6	0,4	0,1	15	–	0,2	–	4
9	4m	m	0,5m	0,6	0,2	0,2	30	–	0,3	–	3
10	3m	m	0,2m	0,6	0,3	0,2	30	–	0,2	–	3
11	4m	2m	m	0,6	0,2	0,1	45	–	0,1	–	2
12	4m	3m	m	0,4	0,2	0,1	45	–	0,2	–	2
13	6m	4m	2m	0,8	0,4	0,15	60	15	0,2	–	1
14	6m	2m	m	0,8	0,6	0,15	45	15	0,2	–	1
15	4m	3m	2m	0,8	0,2	0,2	45	30	0,1	–	2
16	3m	2m	m	0,4	0,2	0,2	30	30	0,1	–	2
17	2m	m	m	0,4	0,1	0,1	30	45	0,15	–	3
18	2m	0,5m	0,5m	0,2	0,1	0,1	60	45	0,15	–	3
19	8m	6m	4m	0,8	–	–	30	15	0,1	–	2
20	8m	4m	2m	0,6	–	–	30	15	0,1	–	2
21	6m	4m	2m	0,4	–	–	45	30	0,2	–	4
22	6m	2m	m	0,2	–	–	45	30	0,2	–	4
23	4m	3m	2m	0,1	–	–	60	15	0,1	–	2
24	4m	2m	m	0,1	–	–	60	15	0,1	–	2
25	5m	2m	m	0,8	0,4	0,1	45	–	0,1	40m	4
26	5m	3m	m	0,6	0,3	0,1	30	–	0,1	40m	4
27	3m	2m	m	0,4	0,2	0,1	15	–	0,1	20m	2
28	3m	m	0,5m	0,2	0,1	0,1	45	–	0,1	20 m	2

Пример решения задачи 2

Дано: $m_1 = 6m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 0{,}5m$; $f = 0{,}1$; $F = 40\ m$, H; R_2 = 40 см = 0,4 м; r_2 = 40 см = 0,4 м; $\alpha = 30°$; i_{2x} = 10 см = 0,1 м; S_1 = 2 м.

Определить: V_1; a_1.

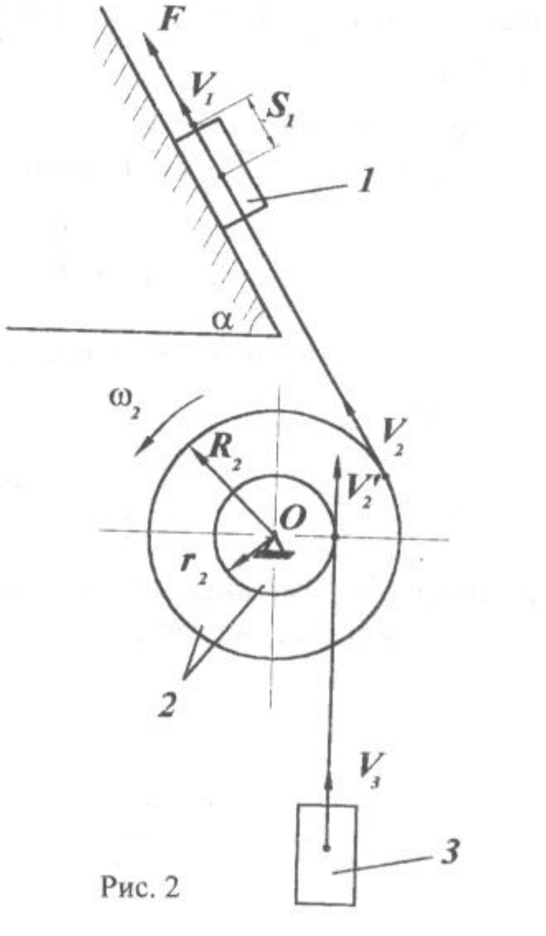


Рис. 2

Решение

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы записывается в виде:

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \tag{3}$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия механической системы в начальном и конечном положении; $\sum A_i^E, \sum A_i^J$ – сумма работ внешних и внутренних сил системы при ее перемещении из начального положения в конечное.

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, т. е. скорость тел была равна нулю, а кинетическая энергия является функцией скорости, то $T_1 = 0$.

Сумма работ внутренних сил равна нулю, так как внутренние силы парные и работы одной силы равна работе другой силы с противоположным знаком: $\sum A_i^J = 0$. Таким образом, формула (3) примет вид: $T_2 = \sum A_i^E$.

Механическая система состоит из трех тел. Тело *1* совершает поступательное движение, тело *2* – вращательное, тело *3* – поступательное.

$$T_2 = T_2^1 + T_2^2 + T_2^3,$$

где T_2^1, T_2^2, T_2^3 – кинетическая энергия тел *1, 2, 3* соответственно в конечном положении.

$$T_2^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}; \quad T_2^2 = \frac{Y_{0x}\omega_2^2}{2}; \quad T_2^3 = \frac{m_3 V_3^2}{2}.$$

Скорости всех тел должны быть выражены через скорость тела 1. Запишем кинематические связи.

Таблица 4

Перемещения	Скорости	Ускорения
$S_1 = S_2$	$V_1 = V_2 = \omega_2 R_2$	$a_1 = a_2$
$\varphi_2 = \dfrac{S_1}{R_2}$	$\omega_2 = \dfrac{V_1}{R_2}$	$\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{R_2}$
$S_2' = S_3 = \dfrac{S_1 r_2}{R_2}$	$V_2' = \omega_2 r_2 = \dfrac{V_1 r_2}{R_2} = V_3$	$a_2' = a_3 = \dfrac{a_1 r_2}{R_2}$

Момент инерции тела *2* (неоднородное тело) относительно оси x:

$$Y_{OX} = m_2 i_{2X}^2 ,$$

где i_{2X} – радиус инерции тела.

Ось x проходит через (·) 0 перпендикулярно плоскости вращения. Подставим все значения в формулы кинетических энергий тел

$$T_2^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}; \quad T_2^2 = \frac{m_2\, i_{2x}^2 V_1^2}{2R_2^2}; \quad T_2^3 = \frac{m_3 V_1^2 r_2^2}{2R_2^2}.$$

Найдем суммарное значение кинетической энергии системы

$$T_2 = \frac{6mV_1^2}{2} + \frac{4m \cdot 0{,}01V_1^2}{2 \cdot 0{,}16} + \frac{0{,}5mV_1^2 \cdot 0{,}04}{2 \cdot 0{,}16} =$$

$$= mV_1^2 (3 + 0{,}125 + 0{,}0625) = 3{,}1875 mV_1^2$$

Теперь определим работу всех внешних сил. На тело *1* действуют следующие силы: G_1 – тяжести тела *1*, N_1 – нормальная реакция опоры, F_1 – сила трения, F – заданная сила.

$$A_{G_1} = -G_1 h_1 = -m_1 g h_1 = -6m \cdot 10 S_1 \sin\alpha = -60mS_1 \cdot 0{,}5 = -30mS_1,$$

$$A_{N_1} = N_1 S_1 \cos(\vec{N}_1 \wedge \vec{S}_1) = N_1 S_1 \cos 90^\circ = 0,$$

$$A_{F_{\text{тр}1}} = F_{\text{тр}1} S_1 \cos(\vec{F}_{\text{тр}1} \vec{S}_1) = -F_{\text{тр}1} S_1 = -f_1 N_1 S_1 = -f_1 G_1 \cos\alpha\, S_1 =$$

$$= -0{,}1 \cdot 10m \cdot 10 \cdot 0{,}86 S_1 = -5{,}16 mS_1,$$

$$A_F = F\ S_1 \cos(\vec{F};\vec{S}\,) = 40mS_1 \cos\,0^\circ = 40mS_1.$$

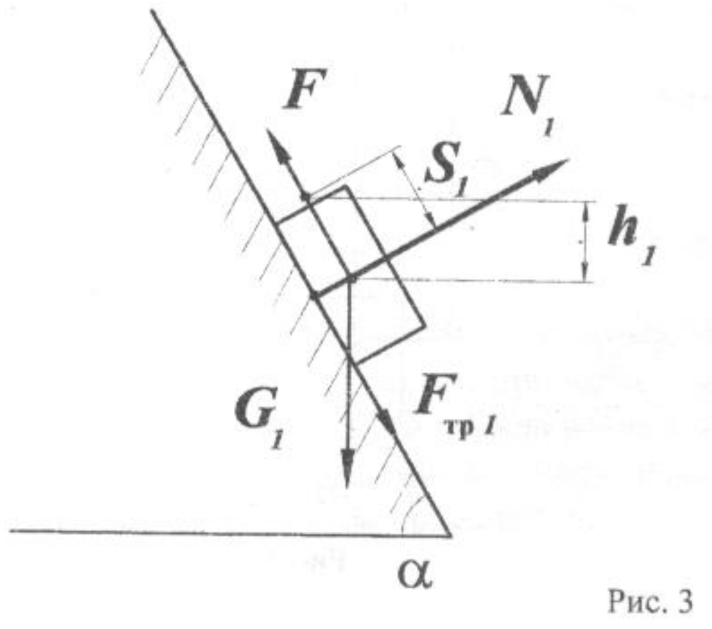


Рис. 3

На тело *2* действуют силы: G_2 – сила тяжести тела *2*, R_y и R_z – реакции связей, $A_{G_2} = 0$; $A_{R_Z} = A_{R_Z} = 0$ (рис. 4).

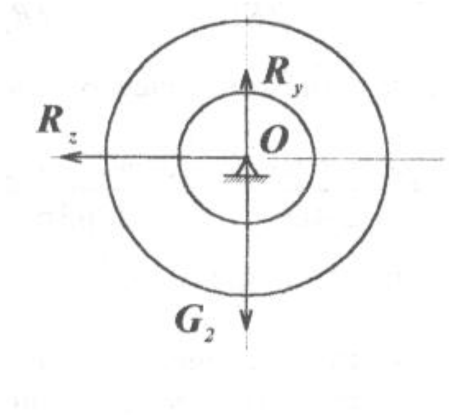


Рис. 4

Рис. 4

На тело *3* действует сила G_3 – сила тяжести тела *3* (рис. 5).

$$A_{G_3} = -G_3 h_3 = -m_3 g h_3 = -m_3 g S_3 =$$

$$= -0{,}5\ m \cdot 10\,\frac{S_1 r_2}{R_2} = -0{,}5 m \cdot 10\,\frac{S_1 \cdot 0{,}2}{0{,}4} = -2{,}5 m S_1.$$

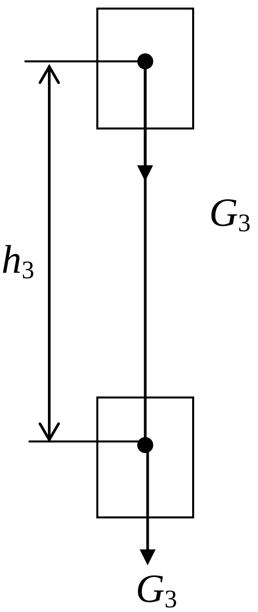


Рис. 5

Окончательно запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$3{,}1875mV_1^2 = -30mS_1 - 5{,}16mS_1 + 40mS_1 - 2{,}5mS_1,$$

$$3{,}1875V_1^2 = 2{,}34S_1,$$

$$V_1^2 = 0{,}73,$$

$$V_1 = 0{,}85\text{м/с}. \qquad (4)$$

Определим ускорение a_1, продифференцировав уравнение для скорости (4):

$$2V_1\frac{dV_1}{dt} = 0{,}73\frac{dS_1}{dt},$$

$$2a_1 = 0{,}73,$$

$$a_1 = 0{,}37 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3.

Эта задача на составление общего уравнения динамики решается для той же схемы и варианта, что и задача 2. (рис. 6)

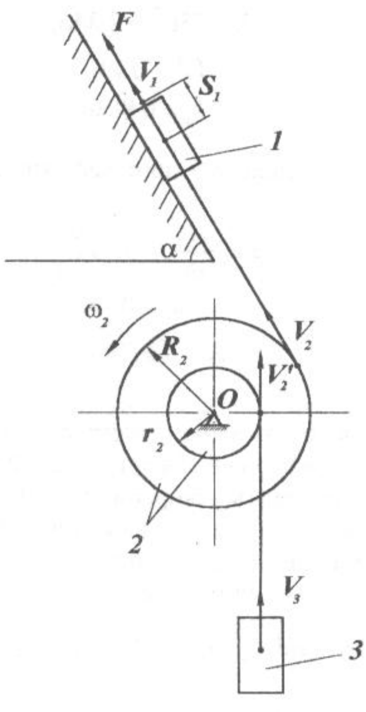


Рис. 6

Требуется определить ускорение тела *1*: a_1. Оно должно совпадать по величине с ускорением a_1, найденным в задаче 2.

Общее уравнение динамики представляет собой уравнение работ всех внешних сил и сил инерции на возможном перемещении

$$\sum P_i^E \cdot \delta S_i \cdot \cos\left(\overrightarrow{P_i^E}; \delta\overrightarrow{S_i}\right) + \sum \Phi_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\left(\overrightarrow{\Phi_i}; \delta\overrightarrow{S_i}\right) = 0,$$

где P_i^E – внешние силы, Н; Ф – силы инерции, Н; δS_i – возможное перемещение, м

Предполагается, что все связи в рассматриваемой механической системе двусторонние и идеальные (силы трения, если они имеются, отнесены к числу задаваемых сил).

Если механическая система состоит из отдельных твердых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения.

Чтобы воспользоваться общим уравнением динамики, нужно:

– к каждому телу, входящему в механическую систему, приложить действующие на него силы;

– условно приложить силы инерции в зависимости от вида движения тела;

– сообщить системе возможное перемещение и для всей совокупности задаваемых сил и приведенных сил инерции составить общее уравнение динамики.

Силы инерции для различных видов движений тел представлены следующим образом:

Поступательное движение – силы инерции для тел *1* и *3* выражаются векторами $\overrightarrow{\Phi_1} = -m\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{\Phi_3} = -m\overrightarrow{a_3}$:

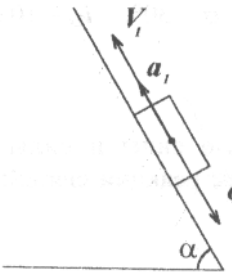


Рис. 7

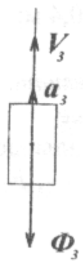


Рис. 8

Силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_3$ направлены в стороны, противоположные ускорениям $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_3$. Ускорения считаем сонаправленными со скоростями.

Вращательное движение – силы инерции для блока *2*, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ε_2, приводятся к паре сил с моментом $\overrightarrow{M}_2^{\varphi} = -I_{2x} \cdot \vec{\varepsilon}_2$

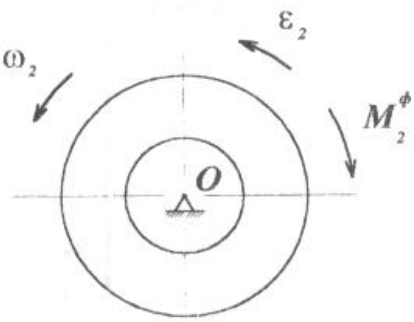


Рис. 9

Пример решения задачи 3

Дано: $m_1 = 6m$; $m_2 = 4m$; $m_3 = 0{,}5m$; $f = 0{,}1$; $F = 40\ m, H$; $R_2 = 40$ см $= 0{,}4$ м; $r_2 = 20$ см $= 0{,}2$ м; $\alpha = 30°$; $i_{2x} = 10$ см $= 0{,}1$ м; $S_1 = 2$ м.

Определить: a_1.

Решение

Прикладываем к телам задаваемые силы и силы инерции: Φ_1, M_2^{Φ}, Φ_3, G_1, F_1, F, G_2, G_3. Показываем реакции связей: N_1, R_y, R_z: (рис. 10)

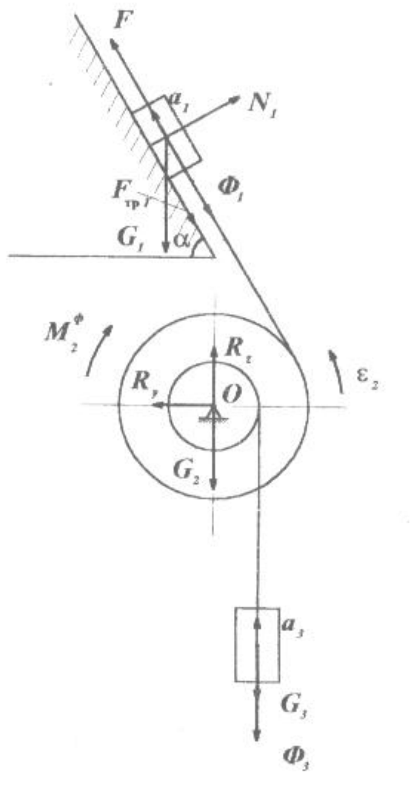


Рис. 10

Задаем возможное перемещение δS_1 и выражаем через него перемещения других тел (рис. 11)

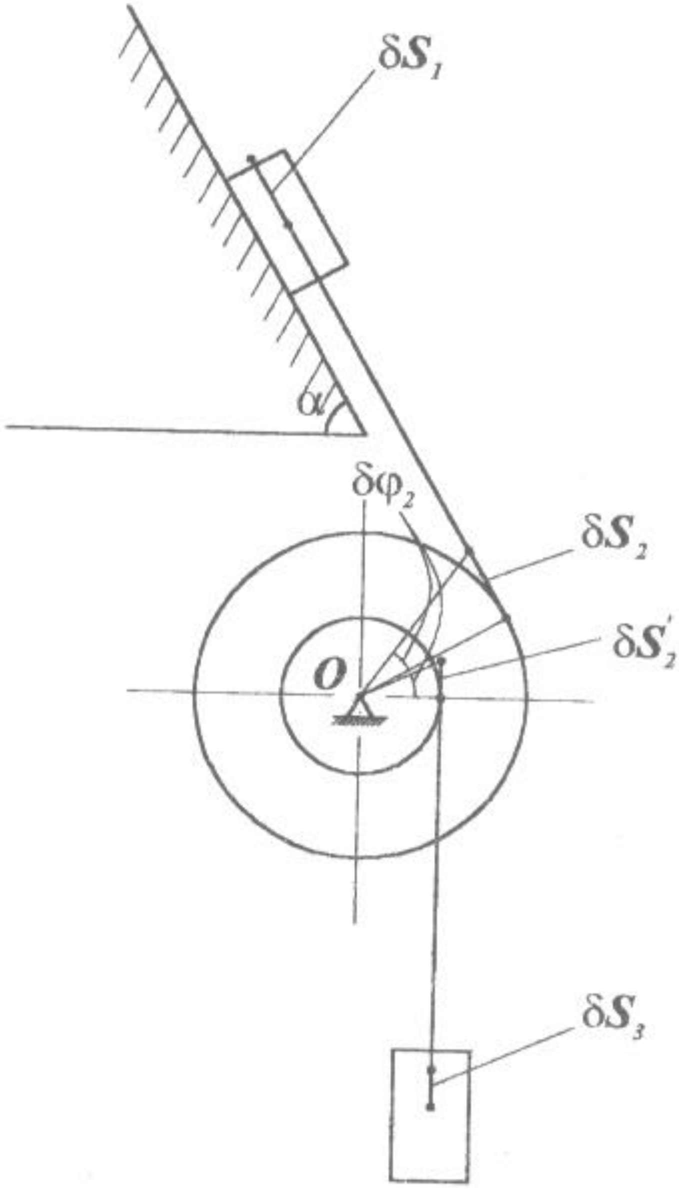


Рис. 11

$$\delta S_1 = \delta S_2,\ \ \delta S_2 = \delta\varphi_2 R_2,\ \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_2}{R_2} = \frac{\delta S_1}{R_2},$$

$$\delta S_2^{'} = \delta\varphi_2 r_2 = \frac{\delta S_1 r_2}{R_2} = \delta S_3.$$

Составляем общее уравнение динамики (уравнение всех внешних сил и сил инерции) и решаем его:

$$F\delta S_1 - G_1 \sin\alpha\delta S_1 - F_{\text{тр}}\delta S_1 - \Phi_1\delta S_1 - M_2^{\Phi}\delta\varphi_2 - G_3\delta S_3 - \Phi_3\delta S_3 = 0,$$

$$40m\delta S_1 - 6mg\cdot\frac{1}{2}\delta S_1 - 6mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}1\delta S_1 - 6ma_1\delta S_1 - 4m\cdot 0{,}01\frac{a_1}{R_2}\frac{\delta S_1}{R_2} -$$

$$-0{,}5mg\frac{\delta S_1 r_2}{R_2} - 0{,}5m\frac{a_1 r_2}{R_2}\frac{\delta S_1 r_2}{R_2} = 0,$$

$$40m - 30m - 5{,}16m - 2{,}5m = 6ma_1 + 0{,}25ma_1 + 0{,}125ma_1,$$

$$2{,}34m = 6{,}375ma_1,$$

$$a_1 = 0{,}37\ \text{м/с}^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского.– М.: Высш. шк., 2000.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики: в 2 т.– М.: Высш. шк., 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Федорова Людмила Анатольевна
Агапова Лидия Анатольевна

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольных работ
для студентов специальностей
170600, 210200, 271300, 070200
факультета заочного обучения и экстерната

Редактор
Л.Г. Лебедева

Корректор
Н.И. Михайлова

Подписано в печать 27.12.2004. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,58. Печ. л. 6,00. Уч.-изд. л. 5,28
Тираж 450 экз. Заказ № С 33

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИПЦ СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9