Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике.

Предлагаемое пособие содержит задачи для самостоятельного решения по двум разделам:
1) задачи по теории вероятностей,
2) задачи по математической статистике.

Теория вероятностей.

В данном разделе предлагается 30 задач по каждой из 7 тем, перечисленных ниже. Перед задачами даны методические указания и там, где необходимо, – примеры. Темы заданий:

1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Геометрические вероятности.
3. Формула полной вероятности и формула Байеса.
4. Повторение опытов (схема Бернулли).
5. Дискретные случайные величины.
6. Непрерывные случайные величины.
7. Функции случайных величин.

Тема 1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Множество Ω, состоящее из всех взаимно исключающих результатов (исходов) случайного эксперимента, называется ***пространством элементарных событий***. Его элементы будем обозначать ω (с индексами или без). Всякое подмножество Ω называется ***событием***. Говорят, что событие $A \subset \Omega$ произошло, если эксперимент закончился одним из исходов, входящих в A.

Пусть пространство элементарных событий Ω конечно или счётно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Зададим на Ω вероятности, то есть поставим в соответствие каждому ω_i число $p(\omega_i) \geq 0$, причём $\sum_i p(\omega_i) = 1$. Последнее равенство называется ***условием нормировки***. Теперь для любого события $A \subset \Omega$ определим его вероятность $\mathbf{P}(A)$ с помощью равенства:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega:\,\omega\in A} p(\omega). \tag{1}$$

В качестве частного случая рассмотрим ***классическую схему***. Здесь $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $p(\omega_i) = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega:\,\omega\in A} p(\omega) = \frac{\mathbf{card}\, A}{n} = \frac{\mathbf{card}\, A}{\mathbf{card}\,\Omega},$$

где $\mathbf{card}\, A$ – мощность (кардинальное число) множества A. Другими словами, в рамках классической схемы вероятность события – это отношение числа исходов, входящих в это событие, к общему числу исходов.

Приведем теперь несколько определений и формул из комбинаторики, которые будут полезны для решения задач.

Перестановками множества, состоящего из n различных элементов, называются упорядоченные наборы, составленные из всех элементов этого множества. Число всех перестановок $P_n = n!$.

Размещениями из n по k, $k \le n$, множества, состоящего из n различных элементов, называются упорядоченные наборы, составленные из k различных элементов этого множества. Число всех размещений $A_n^k = n!/((n-k)!)$.

Сочетаниями из n по k, $k \le n$, множества, состоящего из n различных элементов, называются неупорядоченные наборы, составленные из k различных элементов этого множества. Число всех сочетаний $C_n^k = n!/(k!\cdot(n-k)!)$.

Пример 1. *Библиотекарь в случайном порядке выставляет на полку* 5 *учебников по теории вероятностей следующих авторов: Колмогоров, Ширяев, Гнеденко, Бородин и Ротарь. Какова вероятность того, что книги будут выставлены в алфавитном порядке (по фамилиям авторов)?*

Решение. Учебники можно пронумеровать, например, в том порядке, в котором они выписаны в условии. Тогда пространство элементарных событий Ω состоит из всех перестановок множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Его мощность равна числу этих перестановок: $\mathbf{card}\,\Omega = P_5 = 5! = 120$. Событие A, вероятность которого нам нужно найти, состоит из одного элемента: $A = \{(4, 3, 1, 5, 2)\}$ (то есть учебник Бородина стоит на первом месте и т. д.). Таким образом, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{card}\, A/\mathbf{card}\,\Omega = 1/120$.

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого случайного эксперимента, $A, B \subset \Omega$ – некоторые события. Множество Ω, очевидно, само является событием. Оно включает в себя все возможные исходы случайного эксперимента и называется ***достоверным событием***. Из равенства (1) и условия нормировки получаем: $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Событием, ***противоположным*** для события A, называется событие $\overline{A}$, состоящее из всех исходов случайного эксперимента, не входящих в A. Таким образом, наступление события $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило. Полезна формула: $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Событие $\emptyset$, не содержащее ни одного исхода, называется ***невозможным***: $\emptyset = \overline{\Omega}$, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

Произведением событий A и B называется событие AB, включающее в себя все исходы, входящие и в A, и в B, то есть наступление события AB означает, что произошло и событие A, и событие B. События A и B называются ***несовместными***, если они не могут произойти одновременно в результате случайного эксперимента: $AB = \emptyset$.

Суммой событий A и B называется событие $A + B$, включающие в себя все исходы, которые входят хотя бы в одно из событий A, B, то есть наступление события $A + B$ означает, что наступило или событие A, или B, или AB. Для вычисления вероятности суммы событий может быть полезна ***формула сложения вероятностей***:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

Условная вероятность события A относительно события B, $\mathbf{P}(B) > 0$, – это число $\mathbf{P}(A|B)$, вычисляемое по формуле:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Условная вероятность $\mathbf{P}(A|B)$ – это вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B наступило. Аналогично, если $\mathbf{P}(A) > 0$, то $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A)$. Отсюда вытекает ***формула умножения***:

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B).$$

События A и B называются ***независимыми***, если $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$. Последнее равенство эквивалентно равенству $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, когда $\mathbf{P}(B) > 0$, и равенству $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, когда $\mathbf{P}(A) > 0$. События $A_1, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если для любого числа m, $2 \le m \le n$, и любого набора индексов $k_1, \ldots, k_m$, $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le n$, справедливо равенство:

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{m} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{m} \mathbf{P}\left(A_{k_i}\right).$$

Задача 1.
Какова вероятность того, что в наудачу выбранном четырёхзначном числе нет повторяющихся цифр?

Задача 2.
В коробке лежат карандаши: двенадцать красных и восемь зеленых. Наудачу извлекают три. Какова вероятность того, что среди извлечённых будет хотя бы один красный карандаш?

Задача 3.
Цифры от 1 до 9 располагаются в случайном порядке. Какова вероятность того, что все нечётные цифры окажутся на нечётных местах?

Задача 4.
Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0.9, для второго – 0.8, для третьего – 0.85. Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

Задача 5.
Группа студентов состоит из восьми девушек и семи юношей. Для аттестации случайным образом отбирают троих. Какова вероятность того, что среди них будет ровно одна девушка?

Задача 6.
У распространителя имеется 18 билетов книжной лотереи, среди которых 5 выигрышных. Куплено 3 билета. Найти вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Задача 7.
Устройство секретного замка включает в себя четыре ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из пяти букв: A, B, C, D, E, в каждой из трёх остальных – одной из десяти цифр: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (цифры могут повторяться). Чему равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

Задача 8.
Студент подготовил к экзамену 25 вопросов из 30. Какова вероятность того, что среди трёх наудачу выбранных вопросов есть не меньше двух, подготовленных студентом?

Задача 9.
Три человека заходят в лифт девятиэтажного дома на первом этаже. Какова вероятность того, что, по крайней мере, двое выйдут на одном этаже, если выбор этажа для каждого случаен и не зависит от выбора других?

Задача 10.
Три баскетболиста делают по одному броску в кольцо. Вероятности попадания для каждого из них равны соответственно 3/5, 7/10, 9/10. Найти вероятность того, что хотя бы два броска окажутся точными.

Задача 11.
Из колоды в 52 карты по очереди наудачу извлекаются две. Какова вероят-

ность того, что первая бьёт вторую (учитывается только ранг карты, то есть, любая восьмёрка бьёт любую шестёрку, любой валет бьёт любую девятку и т. д.)?

Задача 12.

Команда из одиннадцати футболистов разного роста случайным образом выстроилась в шеренгу. Найти вероятность того, что они стоят по ранжиру (то есть самый высокий стоит первым, и далее футболисты упорядочены по росту).

Задача 13.

Обезьяна выкладывает карточки с буквами **К, Р, О, К, О, Д, И, Л** в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что у неё получится выложить слово **КРОКОДИЛ**?

Задача 14.

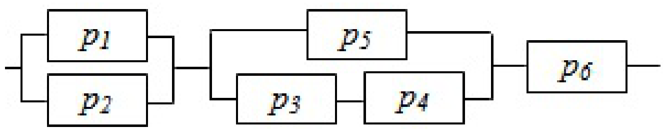
Игральный кубик бросают четыре раза. Какова вероятность того, что все результаты бросаний будут различны?

Задача 15.

При раздаче в покере игрок получает 5 карт (колода состоит из 52-х карт, без джокеров). Какова вероятность появления каре (то есть четырёх карт одного ранга, например, четырёх десяток)?

Задача 16.

Электрическая схема состоит из шести элементов:



Для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, число p_i – вероятность того, что i–й элемент не выйдет из строя (во время испытания). События "выход из строя i–го элемента" , $i = 1, 2, \ldots, 6$, независимы в совокупности. Какова вероятность того, что ток не пройдёт, если $p_1 = p_3 = p_6 = 0.6$, $p_2 = p_5 = 0.7$, $p_4 = 0.9$?

Задача 17.

Стрелок три раза стреляет по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно 1/2, 3/5, 4/5. Какова вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется ровно одна пробоина?

Задача 18.

В связке имеются пять различных ключей, из которых только одним можно отпереть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется. Найти вероятность того, что для отпирания двери будет использовано не более двух ключей.

Задача 19.

Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0.3, второй – 0.4, третий – 0.5. Найти вероятность того, что корреспондент услышит хотя бы один вызов радиста.

Задача 20.

В коробке лежит семьдесят фруктов, десять из которых испорчены. Наугад берутся четыре. Какова вероятность, что среди них есть и испорченные, и свежие?

Задача 21.

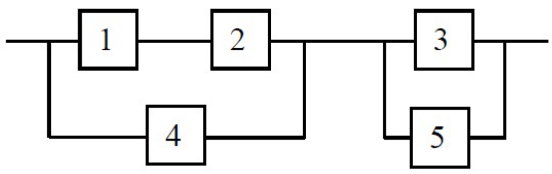
Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0.9, на второй – 0.85, на третьей – 0.7, на четвертой – 0.65. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

Задача 22.

Из игральной колоды в 36 карт случайно достают три карты. Найти вероятность того, что среди них окажется пиковая дама.

Задача 23.

Электрическая схема состоит из пяти элементов:



Для каждого i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, число p_i – вероятность того, что i–й элемент выйдет из строя (во время испытания). События "выход из строя i–го элемента" , $i = 1, 2, \ldots, 5$, независимы в совокупности. Какова вероятность того, что ток не пройдёт, если $p_1 = p_3 = 0.3$, $p_2 = p_5 = 0.1$, $p_4 = 0.25$?

Задача 24.

Из игральной колоды в 36 карт случайно достают четыре. Какова вероятность того, что среди них будут представлены все масти?

Задача 25.

Имеется коробка с двенадцатью новыми теннисными мячами. Для каждой игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. Мячи выбираются случайно, причём бывшие в употреблении от новых не отличаются. Какова вероятность того, что после четырёх игр в коробке не останется мячей, не побывавших в игре?

Задача 26.

Абонент забыл две последние цифры номера телефона, но помнит, что они разные. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в пять мест, если он набирает забытые цифры наугад.

Задача 27.

Какова вероятность того, что в наудачу выбранном четырёхзначном числе первая и третья цифры совпадают?

Задача 28.
Двое играют в шахматы. Игра проводится до выигрыша одним из игроков двух партий подряд. Вероятности выигрыша любой партии первым и вторым игроком соответственно равны 0.4 и 0.6 и не зависят от исхода предыдущих партий. Найти вероятность того, что игра окончится до четвертой партии.
Задача 29.
При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0.8. Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включать зажигание не более трех раз.
Задача 30.
Игральный кубик бросают пять раз. Какова вероятность того, что в результате появятся только два различных числа, причём одно появится дважды, другое – трижды?

Тема 2. Геометрические вероятности.

Пусть случайный эксперимент состоит в выборе точки в некоторой области Ω на прямой, плоскости или в пространстве. Выбор точки происходит случайно и является равновозможным для всякой точки этой области. Относительно Ω будем предполагать, что $\mu(\Omega) < \infty$. Здесь $\mu(\Omega)$ – мера Лебега области Ω: для прямой это длина, для плоскости – площадь, для пространства – объём. Поставим следующий вопрос. Какова вероятность того, что выбранная точка окажется лежащей внутри некоторой заданной области $A \subset \Omega$ (предполагается, что $\mu(A)$ существует)? Такие вероятности называются ***геометрическими*** и вычисляются по формуле:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}. \tag{2}$$

Пример 1. *Точка случайным образом бросается в квадрат $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$. Какова вероятность того, что она окажется ниже графика функции $y = \sin x$?*

Решение. Мера Лебега области Ω равна площади квадрата со стороной π: $\mu(\Omega) = \pi^2$. Та часть синусоиды, которая соответствует значениям $x \in [0, \pi]$, целиком лежит в квадрате Ω. Поэтому, обозначив интересующую нас область буквой A, напишем

$$\mu(A) = \int\limits_0^\pi \sin x \, dx = 2.$$

Согласно формуле (2), искомая вероятность $\mathbf{P}(A) = \mu(A)/\mu(\Omega) = 2/\pi^2$.

Задача 1.
Из промежутка $[0, 1]$ наугад выбрали два числа. Какова вероятность того,

что их сумма меньше или равна 1, а их произведение меньше или равно 2/9?

Задача 2.

Из промежутка $[-2,\, 2]$ наудачу выбраны два числа ξ_1 и ξ_2. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + \xi_1 x + \xi_2 = 0$ будет иметь вещественные корни.

Задача 3.

В центре стола, имеющего форму эллипса с полуосями a и b, расположен магнит. На стол случайным образом бросается булавка, которая притягивается магнитом, если расстояние между ними не превосходит числа r, $r < \min\{a,\, b\}$. Найти вероятность того, что булавка будет притянута.

Задача 4.

В равносторонний треугольник случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанной в треугольник окружности?

Задача 5.

В прямоугольнике $\Omega = \{(x,\, y) \,:\, 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 3\}$ наудачу выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется ниже графика функции $y = x^2$?

Задача 6.

На отрезке наудачу ставятся две точки, разбивающие его на три отрезка. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно составить треугольник?

Задача 7.

На отрезке AB наудачу ставятся две точки M и L. Найти вероятность того, что L будет ближе к точке A, чем к точке M.

Задача 8.

В квадрат $\Omega = \{(x,\, y) \,:\, |x| \le 1,\, |y| \le 1\}$ случайным образом бросается точка. Пусть $(\xi,\, \eta)$ – её координаты. Найти вероятность того, что многочлен $x^2 + \xi\, x + \eta$ не имеет действительных корней.

Задача 9.

В область, ограниченную кардиоидой, имеющей в полярных координатах уравнение $\rho = 2 - 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi < 2\pi$, случайным образом бросается точка. Найти вероятность того, что полярный угол этой точки не превосходит $2\pi/3$.

Задача 10.

Стержень длиной 1 метр наудачу ломается на три части. Найти вероятность того, что хотя бы одна из этих частей будет не больше 10 сантиметров.

Задача 11.

Два парохода должны подойти к одному причалу. Каждый из них может прийти в любое время в течение данных суток, причём время прихода одного не зависит от времени прихода другого. Какова вероятность того, что одному из них придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого

– один час, второго – три часа?

Задача 12.

В квадрат со стороной a случайным образом бросают точку. Найти вероятность того, что она удалена от ближайшей вершины квадрата на расстояние, не превосходящее $a/2$.

Задача 13.

В прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $\pi/6$, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что она окажется внутри вписанной в треугольник окружности?

Задача 14.

На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Какова вероятность того, что проекция точки на ось абсцисс находится от центра окружности на расстоянии, не превышающем $1/2$?

Задача 15.

Точка случайным образом выбирается из полукруга, заданного в полярных координатах неравенствами $\rho \leq 2\cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри полукруга $\rho \leq 2\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Задача 16.

В четверть круга $x^2+y^2 \leq 8$, расположенную в первом квадранте, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что она окажется ниже графика функции $y = \sqrt{2x}$?

Задача 17.

Даны две концентрические окружности радиусов R и $\sqrt{3}R$. На окружности большего радиуса наудачу ставятся две точки. Какова вероятность того, что хорда, проведённая через эти точки, пересечёт окружность меньшего радиуса?

Задача 18.

Из промежутка $[1,\ 2]$ наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что их сумма меньше 3, а произведение больше 2?

Задача 19.

На окружности радиуса R случайным образом выбирается точка, через которую проводится вертикальная хорда. Какова вероятность того, что длина этой хорды больше R?

Задача 20.

Из промежутка $[-1,\ 1]$ наудачу выбраны два числа ξ и η. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + \xi\, x + \eta = 0$ имеет положительные корни.

Задача 21.

Из отрезка $[0,\ 1]$ наудачу выбираются три числа. Какова вероятность того, что их сумма не будет превышать единицу?

Задача 22.
На кардиоиду, имеющую в полярных координатах уравнение $\rho = 2 - 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi < 2\pi$, случайным образом ставится точка. Найти вероятность того, что полярный угол этой точки не превосходит $2\pi/3$.
Задача 23.
Из промежутка $[0,\ 1]$ наудачу выбраны два числа. Какова вероятность того, что сумма их больше единицы, а сумма их квадратов меньше единицы?
Задача 24.
Каждый из двух пациентов приходит на приём к врачу в любое время между 11.00 и 11.40, причём время прихода каждого случайно и не зависит от времени прихода другого. Длительность приема одного пациента – пять минут, другого – десять минут. Найти вероятность того, что ни одному пациенту не придётся ожидать окончания приёма другого.
Задача 25.
На дугу параболы $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что угол, образованный радиус-вектором этой точки с положительным направлением оси абсцисс, не превосходит $\pi/3$.
Задача 26.
Точка случайным образом бросается внутрь квадрата со стороной 8. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней диагонали квадрата больше $\sqrt{2}$?
Задача 27.
На диаметре окружности радиуса R наудачу выбирается точка – середина хорды, перпендикулярной диаметру. Найти вероятность того, что длина этой хорды не превзойдёт $\sqrt{3}R$.
Задача 28.
На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до точки $(1,\ 0)$ больше единицы.
Задача 29.
Внутрь окружности, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$, случайным образом бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется лежащей внутри кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$?
Задача 30.
Из промежутка $[0,\ 1]$ наудачу выбираются два числа ξ и η. Какова вероятность того, что $\xi^2 < \eta < \sqrt{\xi}$?.

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пусть задано пространство элементарных событий Ω. Набор событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называется ***полной группой событий***, если они попарно несовместны, и их сумма достоверна: $H_i \cdot H_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа событий, $\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $A \subset \Omega$ – некоторое событие. Вероятность события A может быть вычислена с помощью ***формулы полной вероятности***:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i).$$

Поставим другой вопрос. Пусть известно, что в результате случайного эксперимента событие A наступило. Какова при этом вероятность того, что наступило одно из событий H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$? Ответ на этот вопрос даёт ***формула Байеса***. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа событий, $\mathbf{P}(H_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $A \subset \Omega$, $\mathbf{P}(A) > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i)}, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пример 1. *В коробке находится 4 новых и 3 старых теннисных мяча. Для первой игры случайным образом выбрали 2 мяча и после игры положили их обратно. Какова вероятность того, что 2 мяча, взятые для второй игры, оказались новыми? В предположении, что взятые для второй игры мячи оказались новыми, найти вероятность того, что для первой игры были также вытащены новые.*

Решение. Пусть H_i – событие, состоящее в том, что для первой игры было взято ровно i новых мячей, $i = 0, 1, 2$. События H_0, H_1, H_2, очевидно, составляют полную группу. Пусть A – событие, состоящее в том, что мячи, взятые для второй игры, оказались новыми. Вычислим соответствующие вероятности:

$$\mathbf{P}(H_0) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}, \ \mathbf{P}(H_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}, \ \mathbf{P}(H_2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7},$$

$$\mathbf{P}(A|H_0) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}, \ \mathbf{P}(A|H_1) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}, \ \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}.$$

Теперь, используя формулу полной вероятности, ответим на первый вопрос задачи:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{21} = \frac{20}{147}.$$

Ответ на второй вопрос даёт формула Байеса:

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\cdot\mathbf{P}(A|H_2)}{\sum\limits_{i=0}^{2}\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{21}}{\frac{20}{147}} = \frac{1}{10}.$$

Задача 1.
Два стрелка Иванов и Петров, имеющие по два заряда, поочерёдно стреляют в мишень. Вероятность попадания при одном выстреле равна 2/3 для Иванова и 5/6 для Петрова. Первый стрелок определяется по жребию. Для этого кидается монета. Если выпадает герб, то начинает Иванов, если цифра, то первым стреляет Петров. Выигрывает стрелок, попавший первым. Какова вероятность выигрыша для Петрова?

Задача 2.
Два стрелка A и B поочерёдно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном выстреле для A равна 0.8, для B – 0.6. Первый стрелок определяется по жребию. Для этого кидается игральный кубик. Если выпадает число, кратное трём, то начинает A, иначе первым стреляет B. В результате стрельбы выиграл стрелок B. Какова вероятность, что он стрелял первым?

Задача 3.
Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора первой мишени для них 0.5 и 2/3 соответственно, а вероятности попадания в первую мишень 0.8 для первого стрелка и 0.9 для второго стрелка, во вторую мишень соответственно 0.7 и 0.8. Какова вероятность хотя бы одного попадания в какую-либо мишень?

Задача 4.
Студент едет в университет на первом подошедшем виде транспорта. Автобус подходит первым с вероятностью 0.2, маршрутное такси – с вероятностью 0.5, для троллейбуса и трамвая эти вероятности одинаковы и равны 0.15. Вероятности застрять в пробке для них равны 0.4, 0.3, 0.4, 0.1 соответственно. Найти вероятность того, что студент не застрянет в пробке.

Задача 5.
В двух пакетах находятся конфеты. В первом пакете 16 штук сорта "Белочка" и 8 штук сорта "Жар-птица" , во втором – 15 штук сорта "Белочка" и 5 штук сорта "Жар-птица". Из первого пакета во второй переложили две наудачу выбранные конфеты, затем содержимое второго пакета перемешали и вытащили оттуда одну конфету, которая оказалась "Жар-птицей". Какова вероятность того, что из первого пакета во второй переложили одну "Белочку" и одну "Жар-птицу"?

Задача 6.
Берут две колоды карт по 52 карты и из первой во вторую перекладывают случайным образом 2 карты. Затем из второй колоды берётся одна карта. Какова вероятность, что она окажется дамой?
Задача 7.
Среди трёх игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестёрка появляется с вероятностью $1/3$. Бросили две случайно выбранные кости. Выпали две шестерки. Какова вероятность того, что среди брошенных костей была фальшивая?
Задача 8.
Ракета накрывает цель с вероятностью $2/3$. По цели выпущено две ракеты. Известно, что при одном попадании цель поражается с вероятностью $1/2$, а при двух с вероятностью $5/6$. Цель поражена. Какова вероятность, что в неё попала ровно одна ракета?
Задача 9.
Студент едет в университет на первом подошедшем виде транспорта. Автобус подходит первым с вероятностью 0.2, маршрутное такси – с вероятностью 0.5, для троллейбуса и трамвая эти вероятности одинаковы и равны 0.15. Вероятности застрять в пробке для них равны 0.4, 0.3, 0.4, 0.1 соответственно. Найти вероятность того, что первым подошёл троллейбус, если известно, что студент застрял в пробке.
Задача 10.
30% телевизоров поступает в магазин с первой фабрики, 20% – со второй, остальные – с третьей. Брак на этих фабриках составляет 5%, 3%, 4% соответственно. Купленный телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он поступил с третьей фабрики?
Задача 11.
Взяли две колоды по 52 карты и случайным образом переложили две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась картой пиковой масти. Какова вероятность того, что среди переложенных карт не было карт пиковой масти?
Задача 12.
Готовясь к экзамену, студент должен подготовить ответы на две серии вопросов, каждая из которых содержит по 10 вопросов. Студент выучил 9 вопросов первой серии и 8 вопросов второй серии. Экзаменатор случайно выбирает серию вопросов и два вопроса из нее, на оба из которых студент должен ответить. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?
Задача 13.
В трёх одинаковых урнах находятся шары: в первой – с номерами от 1 до 9, во второй – от 10 до 20, в третьей – от 21 до 30 включительно. Из случайно

выбранной урны берётся шар, и оказывается, что его номер делится на 5. Какова вероятность того, что этот шар взят из первой урны?

Задача 14.

В трёх одинаковых урнах находятся шары: в первой – с номерами от 10 до 25, во второй – от 26 до 32, в третьей – от 33 до 45 включительно. Из случайно выбранной урны берётся шар. Какова вероятность того, что его номер будет простым числом?

Задача 15.

Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В первой игре используется одна игральная кость, а в другой – две. Счёт в игре в первом случае равен количеству очков, выпавших на кости, а во втором – сумме очков, выпавших на обеих костях. Вы слышите, что выпало два очка. Какова вероятность, того, что играют в игру с одной костью?

Задача 16.

На трёх дочерей Аню, Катю и Анфису в семье возложена обязанность по мытью тарелок. Аня, как старшая, выполняет 40% всей работы, остальную работу Катя и Анфиса делят пополам. Вероятность того, что Аня разобьёт хотя бы одну тарелку равна 0.02, для Кати эта вероятность равна 0.03, для Анфисы – 0.02. Родители слышали звон разбитой посуды. Какова вероятность, что тарелки мыла Аня?

Задача 17.

Из урны, содержавшей 4 белых и 3 чёрных шара, переложили три наудачу выбранных шара в урну, содержавшую 5 белых и 3 чёрных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.

Задача 18.

Из урны, содержавшей 4 белых и 3 чёрных шара, переложили два наудачу выбранных шара в урну, содержавшую 5 белых и 3 чёрных шара. После этого из второй урны наудачу извлекли шар, который оказался чёрным. Найти вероятность того, что из первой урны переложили два разноцветных шара.

Задача 19.

Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике лежат 2 белых и 2 чёрных шара, во втором ящике – 3 чёрных, в третьем – 1 чёрный и 5 белых. Некто случайным образом выбирает ящик, потом наугад вынимает из него шар. Какова вероятность того, что шар окажется белым?

Задача 20.

На шахматную доску 4×4 ставят два коня. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 21.

На шахматную доску 4×4 ставят два ферзя. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 22.
На шахматную доску 4×4 ставят два слона. Какова вероятность того, что они бьют друг друга?
Задача 23.
Взяли две колоды по 52 карты и случайным образом переложили две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась королём. Какова вероятность того, что среди переложенных карт было два короля?
Задача 24.
В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятности выполнить квалификационную норму равны: 0.8 для лыжника, 0.9 для велосипедиста, 0.7 для бегуна. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит норму.
Задача 25.
На "жульнической" кости 5 и 6 очков выпадают с вероятностью 1/3, остальные грани выпадают с равными вероятностями. Какова вероятность выиграть этой костью против "честной" кости, если каждый игрок бросает свою кость один раз?
Задача 26.
Половина всех арбузов поступает в магазин с первой базы, треть – со второй базы, остальные – с третьей базы. Доли арбузов с повышенным содержанием нитратов равны 15%, 10%, 20% соответственно для первой, второй, третьей баз. Какова вероятность купить недоброкачественный арбуз?
Задача 27.
В группе спортсменов 10 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятности выполнить квалификационную норму равны: 0.8 для лыжника, 0.9 для велосипедиста, 0.7 для бегуна. Известно, что выбранный спортсмен выполнил норму. Какова вероятность того, что этот спортсмен – бегун?
Задача 28.
55% обучающихся на факультете – юноши. 75% студентов и 65% студенток имеют пригласительные билеты на студенческий бал. В деканат принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что он принадлежал девушке?
Задача 29.
В пяти одинаковых коробках упакованы ракеты для фейерверка. В трёх из них синий цвет дают 70% ракет, остальные дают оранжевый цвет. В двух других оранжевый цвет дают 60% ракет, остальные – синий. Пиротехник из случайной коробки взял случайную ракету. Какова вероятность того, что она даст синий цвет?

Задача 30.
Из четырёх игральных костей одна фальшивая: на ней 6 очков выпадает с вероятностью 1/3. При бросании случайно выбранной кости выпала шестёрка. Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

Тема 4. Схема Бернулли.

Пусть проводятся n одинаковых независимых опытов (экспериментов), в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью p. ***Независимыми*** называются такие опыты, для которых любые возникающие в них события, взятые по одному из каждого опыта, независимы в совокупности. Событие A иногда называют успехом. Обозначим $q = 1-p$ – вероятность того, что событие А не наступает, $B_n(m)$ – событие, состоящее в том, что в n опытах событие A наступит ровно m раз, $m = 0,\, 1, \ldots,\, n$. Согласно ***формуле Бернулли***,

$$\mathbf{P}\left(B_n(m)\right) = C_n^m\, p^m\, q^{n-m},\ m = 0,\, 1, \ldots,\, n.$$

Отметим, что события $B_n(m)$, $m = 0,\, 1, \ldots,\, n$, попарно несовместны, поэтому, обозначив $P_n(m_1,\, m_2)$ – вероятность того, что событие A наступило не менее m_1 и не более m_2 раз, $0 \le m_1 \le m_2 \le n$, напишем

$$P_n(m_1,\, m_2) = \mathbf{P}\left(\sum_{m=m_1}^{m_2} B_n(m)\right) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \mathbf{P}\left(B_n(m)\right) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m\, p^m\, q^{n-m}. \quad (3)$$

Пример 1. *Пусть правильная монета бросается 5 раз. Какова вероятность, что появилось больше гербов, чем цифр?*

Решение. Здесь событие A – появление герба при одном подбрасывании монеты, $p = P(A) = 1/2$, $q = 1 - p = 1/2$, $n = 5$. Нас интересует величина $P_5(3,\, 5)$ – вероятность того, что число появившихся гербов заключено между тремя и пятью. Используя формулу (3), напишем

$$P_5(3,\, 5) = C_5^3\,(1/2)^3\,(1/2)^2 + C_5^4\,(1/2)^4\,(1/2)^1 + C_5^5\,(1/2)^5 = (10+5+1)/32 = 1/2.$$

Задача 1.
Производится испытание пяти приборов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что хотя бы два прибора выйдут из строя при испытании.

Задача 2.
Производится четыре выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле равна 2/3. Найти вероятность того, что в мишень попадут не менее двух раз.

Задача 3.
Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца равна 0.2. Найти вероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не более половины микросхем.
Задача 4.
Накопитель снабжает деталями 8 станков с ЧПУ. В течение 20 минут от каждого станка может поступить заявка на деталь с вероятностью 1/5. Найти вероятность того, что за 20 минут на накопитель поступит не более трех заявок.
Задача 5.
В ралли участвует десять однотипных машин. Вероятность выхода из строя за период соревнований каждой из них равна 1/20. Найти вероятность того, что к финишу придут не менее восьми машин.
Задача 6.
Имеется 7 партий деталей, каждая из которых содержит 10% бракованных. Из каждой партии извлекают по 1 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей не менее двух бракованных.
Задача 7.
Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого промежутка времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение этого промежутка времени.
Задача 8.
Прибор состоит из шести однотипных блоков, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее трех из них. За год работы каждый из блоков выходит из строя с вероятностью 0.3. Найти вероятность того, что за год работы прибор не выйдет из строя.
Задача 9.
В семье пять детей. Пусть вероятности появления на свет девочки и мальчика равны друг другу. Найти вероятность того, что в семье не более двух девочек.
Задача 10.
Обрабатывающий центр снабжается заготовками от 10 однотипных накопителей, выдающих при поступлении запроса по одной детали. Вероятность того, что на момент запроса в накопителе имеется заготовка, равна 0.9. Экономически достаточная загрузка центра обеспечивается одновременным поступлением по запросам не менее восьми деталей. Найти вероятность того, что при очередном запросе будет обеспечена достаточная загрузка.

Задача 11.
Вероятность поражения самолета средствами ПВО объекта равна 0.6. Найти вероятность того, что из 8 атакующих объект самолетов к нему прорвётся не более шести.

Задача 12.
Транспортные средства оптовой базы обеспечивают за день выполнение не более трех заявок. База обслуживает 7 магазинов. Вероятность заявки от каждого из них в течение дня равна 0.3. Найти вероятность того, что все поступившие на базу в течение дня заявки будут выполнены.

Задача 13.
Производится испытание на "самовозгорание" пяти телевизоров. Прогонка продолжается двое суток. За указанное время каждый из телевизоров перегревается и "самовозгорается" с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что на момент окончания испытаний сгорит не более двух телевизоров.

Задача 14.
Из урны, содержащей 20% белых и 80% черных шаров, наудачу с последующим возвращением извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет не менее четырех белых, если процедуру повторяют пять раз.

Задача 15.
На участке пять одинаковых станков. Вероятность того, что в произвольный момент каждый из них свободен и готов к обработке поступившей детали равна 1/5. На участок для обработки поступают три детали. Найти вероятность того, что хотя бы две из них будут сразу же приняты к обработке.

Задача 16.
Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно. Найти вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов не менее шести выйдут их него неповрежденными.

Задача 17.
Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0.1. Найти вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

Задача 18.
Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания равна 0.2. Найти вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с третью самолетов.

Задача 19.

Обрабатывающий участок состоит из пяти однотипных станков. Вероятность того, что станок исправен, равна 0.8. Плановое задание может быть выполнено, если исправно не менее трех станков. Найти вероятность того, что плановое задание не будет выполнено.

Задача 20.

Предварительный анализ показал, что для поражения военного объекта противника необходим прорыв к нему четырёх бомбардировщиков. Самолет поражается ПВО объекта с вероятностью 0.8. Атаку ведут восемь самолетов. Найти вероятность того, что объект будет поражен.

Задача 21.

Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 40-го размера, равна 0.4. В обувной отдел вошли пять покупателей. Найти вероятность того, что по крайней мере двум из них потребуется обувь 40-го размера.

Задача 22.

Тест состоит из 7 вопросов. На каждый вопрос дано три возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся правильно ответить по крайней мере на пять вопросов?

Задача 23.

Данные о состоянии погоды в некотором регионе сообщают семь автоматических метеостанций. Для получения уверенной информации для прогноза необходима исправная работа по крайней мере пяти из них. В течение года каждая из станций выходит из строя с вероятностью 0.1. Найти вероятность того, что в течение года центр обработки наблюдений будет получать достаточную для уверенного прогноза информацию.

Задача 24.

На ВЦ от каждого из десяти отделов предприятия в течение рабочего дня с вероятностью 0.2 может поступить заявка на выполнение однотипных расчетов. Расчеты ведутся в ночное время, причем до начала рабочего дня может быть выполнено не более 5 заказов. Найти вероятность того, что не все поступившие на ВЦ заказы будут выполнены.

Задача 25.

Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0.6. Для получения зачета достаточно трех попаданий. Найти вероятность получить зачет по стрельбе, если делается ровно 5 выстрелов.

Задача 26.

Контролёр ОТК проверяет 4 изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.8 для каждого изделия. Найти вероятность того, что более половины проверенных изделий стандартны.

Задача 27.
Девочка, имеющая 6 колец, бросает их на колышек по одному. Вероятность попадания при каждом броске равна 0.3. Найти вероятность того, что не менее четырёх колец попадут на колышек.
Задача 28.
Производится испытание четырёх изделий на надежность. Вероятность выдержать испытание для каждого изделия равна 0.7. Найти вероятность того, что испытание выдержат хотя бы два изделия.
Задача 29.
Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.3. Производится ровно семь независимых выстрелов. Для разрушения цели необходимо сделать по крайней мере четыре точных выстрела. Найти вероятность разрушения цели.
Задача 30.
Устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за год работы равна 0.15. Найти вероятность того, что за год работы откажут менее трех элементов.

Тема 5. Дискретные случайные величины.

Рассмотрим случайный эксперимент с конечным или счётным пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Функция $X = X(\omega)$, заданная на Ω, называется ***дискретной случайной величиной***. Область значений $\{x : x = X(\omega), \omega \in \Omega\}$ не более чем счётна. Пронумеруем все возможные значения случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots$. Пусть $p_i = \mathbf{P}\{X = x_i\} = \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. Отметим, что $\sum_i p_i = 1$. Соответствие, которое каждому значению x_i случайной величины X сопоставляет вероятность p_i, называется ***законом распределения*** случайной величины X. Этот закон удобно записывать в виде таблицы, которую называют также рядом распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$
$\mathbf{P}$	p_1	p_2	$\ldots$

Функция распределения случайной величины X определяется равенством: $F(t) = \mathbf{P}\{X < t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Для дискретной случайной величины функция распределения кусочно-постоянна:

$$F(t) = \sum_{i:\, x_i < t} p_i.$$

Математическим ожиданием (***средним значением***) дискретной случайной величины X, принимающей конечное число значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется число $\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X, принимающей счётное число значений $x_1, x_2, \ldots$, называется число $\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$, если последний рад сходится абсолютно; в противном случае математическое ожидание не существует. Если $h(t)$ – некоторая функция, то $h(X)$ – это случайная величина, математическое ожидание которой может быть вычислено по формуле: $\mathbf{E}h(X) = \sum_i h(x_i)\, p_i$ (при условии абсолютной сходимости последнего ряда, если случайная величина $h(X)$ принимает счётное число значений).

Дисперсией дискретной случайной величины X называется число $\mathbf{D}X = \mathbf{E}\left(X - \mathbf{E}X\right)^2$. Дисперсия характеризует средний квадратичный разброс случайной величины вокруг её математического ожидания. Для вычисления дисперсии может быть удобна формула: $\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2$. ***Средним квадратичным отклонением*** случайной величины X называется число $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

В приложениях часто используют такие характеристики случайной величины (распределения вероятностей случайной величины) как мода и медиана.

Обычно ***модой*** дискретной случайной величины X называют наиболее вероятное значение этой случайной величины, то есть $x_m = \mathrm{mod}(X)$, если $\mathbf{P}\{X = x_m\} = \max_i\{\mathbf{P}\{X = x_i\}\}$. Ясно, что дискретная случайная величина может иметь более одной моды.

Медианой случайной величины X (или распределения случайной величины X) называют такое число $x = \mathrm{med}(X)$, что $\mathbf{P}\{X \geq x\} \geq 1/2$ и $\mathbf{P}\{X \leq x\} \geq 1/2$.

Пример 1. *Некий находящийся в поисках работы гражданин послал резюме в три различные организации. Вероятность получить приглашение на собеседование (то есть положительный ответ) от первой компании равна* 0.4*, от второй –* 0.6*, от третьей –* 0.7*. Найти среднее значение, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа компаний, давших положительный ответ.*

Решение. Число положительно ответивших компаний X – это случайная величина, принимающая значения 0, 1, 2, 3. Найдём соответствующие вероятности:

$$p_0 = \mathbf{P}\{X = 0\} = (1 - 0.4) \cdot (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.7) = 0.072,$$

$$p_1 = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.7 = 0.324,$$

$$p_2 = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.436,$$

$$p_3 = 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 0.168.$$

Сумма полученных вероятностей равна единице. Закон распределения случайной величины X выглядит следующим образом:

X	0	1	2	3
$\mathbf{P}$	0.072	0.324	0.436	0.168

Математическое ожидание случайной величины X:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{3} i p_i = 0 \cdot 0.072 + 1 \cdot 0.324 + 2 \cdot 0.436 + 3 \cdot 0.168 = 1,7.$$

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \sum_{i=0}^{3} i^2 p_i = 0 \cdot 0.072 + 1 \cdot 0.324 + 4 \cdot 0.436 + 9 \cdot 0.168 = 3,58.$$

Дисперсия случайной величины X:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}\left(X^2\right) - (\mathbf{E}X)^2 = 3,58 - 2,89 = 0.69.$$

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X} = \sqrt{0.69} \approx 0.83.$$

Мода и медиана случайной величины (распределения случайной величины) X: обратившись к закону (ряду) распределения, видим, что наиболее вероятным значением нашей случайной величины является $x = 2$. То есть $\mathrm{mod}(X) = 2$. Кроме того, $P(X \geq 2) = 0,604$; $P(X \leq 2) = 0,832$. Следовательно, $\mathrm{med}(X) = \mathrm{mod}(X) = 2$.

Приведём ещё формулы для нахождения числовых характеристик ***биномиального распределения***, то есть распределения числа успехов в схеме Бернулли. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, если $\mathbf{P}\{\xi = m\} = C_n^m\, p^m\, q^{n-m}$, $m = 0,\ 1, \ldots,\ n$, где $q = 1 - p$. Тогда математическое ожидание $\mathbf{E}\xi = np$, дисперсия $\mathbf{D}\xi = npq$, среднее квадратичное отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{npq}$.

Задача 1.

Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью $p = 0.9$. Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа препятствий, преодолённых спортсменом. Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет:

а) не более двух препятствий;

б) более трёх препятствий.

Задача 2.

Из коробки, в которой находятся 2 зелёных, 2 чёрных и 6 красных стержней для шариковой руки, случайным образом извлекаются 4 стержня. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа извлечённых стержней красного цвета. Найти вероятность того, что при этом красных стержней будет:

а) не менее трёх;

б) хотя бы один.

Задача 3.

База снабжает 6 магазинов. От каждого из них может поступить заявка на данный день с вероятностью 1/3. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа заявок на базу на данный день. Найти вероятность того, что их будет более пяти.

Задача 4.

Наблюдение за районом осуществляется тремя радиолокационными станциями. В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой радиолокационной станцией с вероятностью 0.2. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа радиостанций, обнаруживших объект. Найти вероятность того, что их будет не менее двух.

Задача 5.

Опыт состоит из четырёх независимых подбрасываний двух правильных монет, то есть для каждой монеты выпадение герба и выпадение цифры – равновозможные события. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа одновременного выпадения двух цифр. Найти вероятность того, что это событие произойдёт не менее трёх раз.

Задача 6.

Автоматизированную линию обслуживают 5 манипуляторов. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0.3. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа манипуляторов, проверенных до остановки линии или до окончания планового осмотра. Найти вероятность того, что до остановки линии будет проверено:

а) не более двух манипуляторов;

б) более трёх манипуляторов.

Задача 7.

Спортсмен, имеющий 4 заряда, стреляет по мишени. Стрельба прекращается сразу после попадания, либо после того, как закончатся заряды. Вероятность сделать меткий выстрел при первой попытке $p_1 = 0.4$, при второй – $p_2 = 0.6$, при третьей и четвёртой – $p_3 = p_4 = 0.7$. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа использованных зарядов. Найти вероятность того, что будет использовано более половины зарядов.

Задача 8.

Производятся 4 независимых опыта. Вероятность наступления события A первом опыте $p_1 = 0.2$, во втором – $p_2 = 0.4$, в третьем – $p_3 = 0.6$, в четвертом $p_4 = 0.8$. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа появлений события A. Найти вероятность того, что событие A произойдёт не менее чем в половине опытов.

Задача 9.

В коробке имеются 8 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 4 карандаша. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа красных карандашей в выборке. Найти вероятность того, что в выборке будет:

а) хотя бы один красный карандаш;

б) менее двух красных карандашей.

Задача 10.

Стрелок, имеющий 4 патрона, стреляет последовательно по двум мишеням, до поражения обеих мишеней или пока не израсходует все 4 патрона. При попадании в первую мишень стрельба по ней прекращается, и стрелок начинает стрелять по второй мишени. Вероятность попадания при любом выстреле 0.8. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа поражённых мишеней. Найти вероятность того, что будет поражена хотя бы одна мишень.

Задача 11.

Из ящика, содержащего 4 годных и 3 бракованных детали, наугад извлекают 4 детали. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа вынутых годных деталей. Найти вероятность того, что годных деталей будет:

а) менее трех;

б) хотя бы одна.

Задача 12.

Имеется набор из четырех карточек, на каждой из которых написана одна из цифр: 1, 2, 3, 4. Из набора наугад извлекают карточку, затем ее возвращают обратно, после чего наудачу извлекают вторую карточку. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану случайной величины, равной сумме чисел, написанных на вынутых карточках. Найти вероятность того, что эта сумма:

а) не превзойдет числа 4;

б) будет не менее 6.

Задача 13.

Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания каждым стрелком в цель равна 0.6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа попаданий, если каждый стрелок делает только один выстрел. Найти вероятность того, что:

а) будет хотя бы одно попадание;

б) будет не более одного попадания.

Задача 14.

Три стрелка независимо друг от друга стреляют каждый по своей мишени один раз. Вероятности попадания при одном выстреле у стрелков равны соответственно $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.7$. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа пораженных мишеней. Найти вероятность того, что пораженных мишеней будет:

а) хотя бы одна; б) менее двух.

Задача 15.

Опыт состоит из трёх независимых подбрасываний одновременно трех монет, каждая из которых с одинаковой вероятностью падает гербом или цифрой вверх. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа одновременного выпадения ровно двух гербов. Найти вероятность того, что ровно два герба одновременно выпадут хотя бы один раз.

Задача 16.

На пути автомобиля 5 светофоров, каждый из них автомобиль проезжает без

остановки с вероятностью 0.6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа светофоров, которые автомобиль проезжает, не делая ни одной остановки. Найти вероятность того, что до первой остановки автомобиль проедет:
а) хотя бы один светофор;
б) более трех светофоров.

Задача 17.

Из урны, в которой было 4 белых и 2 черных шара, переложен один шар в другую урну, в которой находилось 5 черных шара и два белых. После перемешивания из последней урны вынимают 4 шара. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа черных шаров, вынутых из второй урны. Найти вероятность того, что из нее будет извлечено:
а) по крайней мере, два шара;
б) не более двух шаров.

Задача 18.

Стрелок стреляет по мишени до трех попаданий или до тех пор, пока не израсходует все патроны, после чего прекращает стрельбу. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа выстрелов, произведённых стрелком, если у стрелка имеется 5 патронов. Найти вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, четыре выстрела.

Задача 19.

Ракетная установка обстреливает две удаленные цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.6. Цель при попадании в нее уничтожается. Запуск ракет прекращается после уничтожения обеих целей или после использования имеющихся пяти ракет. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа запущенных ракет. Найти вероятность того, что при этом будет запущено:
а) не более трех ракет;
б) от двух до четырех ракет.

Задача 20.

Три ракетные установки стреляют каждая по своей цели независимо друг от друга до первого попадания, затем прекращают стрельбу. Каждая ракетная установка имеет две ракеты. Вероятность попадания одной ракеты для первой установки – 0.4, для второй – 0.5, для третьей – 0.6. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа ракетных установок, у которых осталась неизрасходованная ракета. Найти вероятность того, что будет хотя бы одна такая установка.

Задача 21.

Батарея состоит из четырех орудий. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0.9 для первого орудия, для второго такая вероятность равна 0.8, для третьего и четвёртого – 0.6. Наугад выбирают три орудия, и каждое из них стреляет один раз. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа попаданий в мишень. Найти вероятность:

а) хотя бы одного попадания в мишень;

б) хотя бы одного непопадания в мишень.

Задача 22.

Группа студентов состоит из пяти "отличников" , пяти "четвёрочников" и десяти "троечников". Вероятности правильного ответа на один вопрос экзаменационной программы равны 0.9 для "отличника" , 0.7 для "четвёрочника" и 0.6 для "троечника". Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа правильных ответов на два вопроса наугад выбранного билета одним случайно выбранным студентом данной группы. Найти вероятность того, что правильным будет ответ хотя бы на один вопрос.

Задача 23.

С вероятностью попадания при одном выстреле 0.7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа промахов. Найти вероятность того, что промахов будет:

а) менее двух;

б) не менее трех.

Задача 24.

Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятности того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, равны 0.7 для первого станка, для второго – 0.75, для третьего – 0.8, для четвертого – 0.9. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа станков, которые потребуют внимания рабочего. Найти вероятность того, что таких станков будет не более половины.

Задача 25.

Монету подбрасывают 6 раз. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану разности числа появлений герба и числа появлений цифры. Найти вероятность того, что эта разность будет менее двух.

Задача 26.

В кошельке лежат пять монет по одному рублю, две монеты по два рубля и три монеты по пять рублей. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа рублей, извлеченных из кошелька, если из него извлекают наугад две монеты. Найти вероятность того, что извлеченных рублей будет:

а) не менее четырех;

б) более семи.

Задача 27.

Производится по два последовательных выстрела по каждой из трех целей. Вероятность попадания при одном выстреле в любую цель равна 0.7. При попадании в цель стрельба по ней прекращается, неизрасходованный патрон при стрельбе по другим целям не используется. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа пораженных целей. Найти вероятность того, что будет поражено хотя бы две цели.

Задача 28.

Для контроля четырёх партий деталей выбираются случайным образом две партии, и из них берут наугад по одной детали. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа бракованных деталей среди этих двух, если в первой партии $2/3$ недоброкачественных деталей, во второй – $1/3$, в третьей – $1/6$, в четвёртой бракованных деталей нет. Найти вероятность того, что среди этих двух деталей будет хотя бы одна доброкачественная.

Задача 29.

Имеются два одинаковых ящика с деталями. В первом ящике содержатся 8 деталей, из них 3 бракованных, во втором – 4 детали, из них 2 бракованных. Из одного наудачу выбранного ящика вынимают 3 детали. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа бракованных деталей среди трех вынутых. Найти вероятность того, что будет вынуто не более двух бракованных деталей.

Задача 30.

Два студента сдают экзамен, отвечая на два вопроса программы, независимо друг от друга. Вероятность правильного ответа на любой вопрос программы для первого студента равна 0.6, для второго эта вероятность равна 0.8.

При неправильном ответе на вопрос экзамен прекращается. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа студентов, пытавшихся ответить на оба вопроса. Найти вероятность того, что будет хотя бы один такой студент.

Тема 6. Непрерывные случайные величины.

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если существует такая неотрицательная функция $f(t)$, что при любом $x \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \tag{4}$$

где $F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$ – функция распределения случайной величины X. Функция $f(t)$ называется ***плотностью*** распределения вероятностей случайной величины X.

Из формулы (4) следует, что $F(x)$ является непрерывной функцией, и вероятность $\mathbf{P}\{X = x\} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Напомним, что функция распределения является неубывающей функцией, и

$$0 \le F(x) \le 1,\ \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to\infty} F(x) = 1,\ \mathbf{P}\{a \le X < b\} = F(b) - F(a).$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1;\ f(x) = F'(x), \text{ если производная } F'(x) \text{ существует.}$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}\{a \le X \le b\} = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

В последней формуле любой из знаков (или оба сразу) "$\le$" может быть заменён на $<$.

Математическим ожиданием (***средним значением***) непрерывной случайной величины X, имеющей плотность $f(x)$, называется число $\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$, если последний интеграл сходится абсолютно; в противном случае математическое ожидание не существует. Если $h(t)$ – некоторая функция, то $h(X)$ – это случайная величина, математическое ожидание которой может быть вычислено по формуле: $\mathbf{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx$ (при условии абсолютной сходимости последнего интеграла).

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется число $\mathbf{D}X = \mathbf{E}\,(X - \mathbf{E}X)^2$. Дисперсия характеризует средний квадратичный разброс случайной величины вокруг её математического ожидания. Для вычисления дисперсии может быть удобна формула: $\mathbf{D}X = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2$. ***Средним квадратичным отклонением*** случайной величины X называется число $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

Модой (главным значением моды) называют точку $\mathrm{mod}(X)$, в которой достигается абсолютный максимум плотности.

Медианой непрерывной случайной величины X называют такое значение аргумента $x = \mathrm{med}(X)$ функции распределения $F(x)$, для которого выполнено равенство $F(\mathrm{med}(X)) = 1/2$. Если множество таких значений аргумента образует интервал, то часто в качестве медианы выбирают середину этого интервала.

Для непрерывной случайной величины X кроме медианы (квантили порядка $1/2$ функции распределения $F(x)$) рассматривают квантили функции распределения порядка $p \in (0, 1)$.

Квантилью порядка p функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X называют такое значение аргумента $x = x_p$ функции распределения $F(x)$, для которого выполнено равенство $F(x_p) = p$.

Пример 1. *Плотность распределения случайной величины X имеет вид:*

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in (-1, 1); \\ ax - 4/3, & x \in (2, 3); \\ 0, & x < -1,\ x \in (1, 2),\ x > 3. \end{cases}$$

Найти постоянную a, математическое ожидание $\mathbf{E}X$, функцию распределения $F(x)$ и медиану распределения.

Решение. Для нахождения постоянной a используем свойство нормировки плотности распределения вероятностей:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{3}\,dx + \int\limits_{2}^{3} \left(ax - \frac{4}{3}\right)\,dx = \frac{2}{3} + \frac{5a}{2} - \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $a = 2/3$. Теперь найдём математическое ожидание случайной величины X:

$$\mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{3}\,dx + \frac{2}{3}\int\limits_{2}^{3} (x^2 - 2x)\,dx = \frac{1}{6} - \frac{(-1)^2}{6} + \frac{8}{9} = \frac{8}{9}.$$

Функция распределения вероятностей случайной величины X равна

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{dt}{3}=\frac{x+1}{3}, & -1<x\le 1;\\ 2/3, & 1<x\le 2;\\ \displaystyle\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\int_{2}^{x}(t-2)\,dt=\frac{2}{3}+\frac{(x-2)^2}{3}, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Чтобы найти медиану распределения достаточно найти решение уравнения $F(x)=1/2$. В рассматриваемом примере нас интересует корень уравнения

$$\frac{x+1}{3}=\frac{1}{2},\quad \text{так как } F(1)=\frac{2}{3}.\ \text{Следовательно, } \mathrm{med}(X)=\frac{1}{2}.$$

Тест-проверка: $F'(x)=f(x)$, если существует производная функции распределения; найденная функция распределения $F(x)$ является непрерывной и монотонно не убывает; $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim_{x\to+\infty}F(x)=1$. Следовательно, найденная функция является функцией распределения вероятностей распределения с заданной плотностью.

Задача 1.
Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=ax^2e^{-kx} \text{ где } \ k>0,\ 0\le x<\infty.$$

Найти: а) коэффициент a и моду $\mathrm{mod}(X)$;
б) функцию распределения случайной величины X;
в) $\mathbf{P}\{X\in(0,\,1/k)\}$.

Задача 2.
Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^2/16, & 0<x\le 2;\\ x-7/4, & 2<x\le 11/4;\\ 1, & x>11/4.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;
в) $\mathbf{P}\{X\in[1;\,1,5]\}$.

Задача 3.
Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид: $F(x)=A+B\,\mathrm{arctg}x,\ -\infty<x<\infty$.

Найти: а) постоянные A и B;

б) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$ распределения;

г) выяснить, существует ли $\mathbf{E}X$.

Задача 4.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ A/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;

б) функцию распределения $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

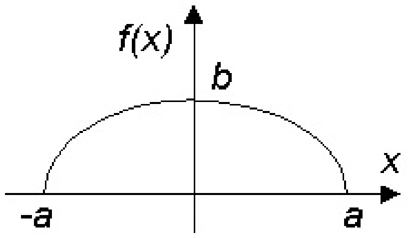
в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2, 3)$;

д) вероятность того, что при четырёх независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадёт на отрезок $[2, 3]$.

Задача 5.

График плотности распределения случайной величины X при $|x| \le a$ представляет собой полуэллипс с большей полуосью a (a известно).



Найти: а) полуось b;

б) аналитическое задание $f(x)$;

в) моменты $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{a/2 < X < a\}$.

Задача 6.

Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ A + B\arcsin x, & -1 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

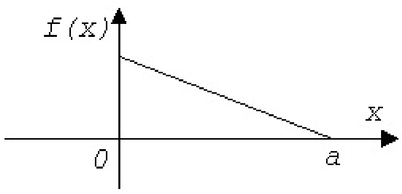
Найти: а) коэффициенты A и B, медиану $\mathrm{med}(X)$;

б) функцию плотности $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$.

Задача 7.

Случайная величина X распределена по закону прямоугольного треугольника, в интервале $(0, a)$.



Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;

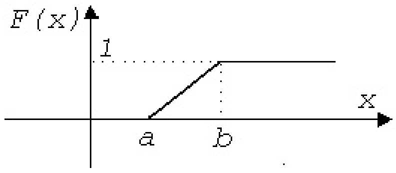
б) функцию распределения $F(x)$, медиану $\mathrm{med}(X)$;

в) вероятность $\mathbf{P}\{a/2 \leq X < a\}$;

г) моменты $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$.

Задача 8.

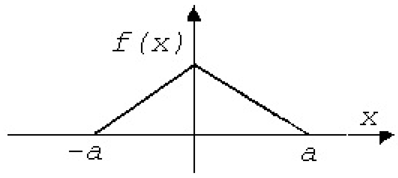
Функция распределения случайной величины X задана графиком



Найти математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 9.

Случайная величина X подчинена закону равнобедренного треугольника на участке $[-a; a]$.



Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность $\mathbf{P}\{a/2 \leq X < a\}$;

г) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 10.

Случайная величина имеет распределение Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad \text{при } -\infty < x < \infty.$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{X \in [-1,\, 1]\}$;

д) выяснить, существует ли $\mathbf{E}X$.

Задача 11.

Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром

$\lambda > 0$, то есть распределение с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность $\mathbf{P}\{X < \mathbf{E}X\}$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 12.

Случайная величина X имеет распределение с плотностью $f(x) = a\,e^{-|x-\beta|\alpha}$, где $\alpha > 0$ и β– фиксированные параметры (распределение Лапласа).

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 13.

Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^3}{x^3}, & x \geq x_0; \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

где x_0 – некоторое заданное положительное число. Найти математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 14.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & x \in (-a,\, a); \\ 0, & x \notin (-a,\, a), \end{cases}$$

где a – известное положительное число. Найти математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, медиану $\mathrm{med}(X)$ и вероятность $\mathbf{P}\{0 < X < 2a\}$.

Задача 15.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & x \in (-\pi/2,\, \pi/2); \\ 0, & x \notin (-\pi/2,\, \pi/2). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{0 \leq X < 3\pi/4\}$.

Задача 16.
Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} A, & x \le 0; \\ B\sin^2(x/2), & x \in (0,\, \pi]; \\ C, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты A, B, C;
б) плотность распределения $f(x)$;
в) вероятность $\mathbf{P}\{0 \le X < \pi/2\}$;
г) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 17.
Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ A/\cos^2 x, & x \in (0,\, \pi/4); \\ 0, & x \ge \pi/4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;
б) функцию распределения $F(x)$;
в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;
г) вероятность $\mathbf{P}\{\pi/8 \le X < \pi/4\}$.

Задача 18.
Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \lambda(3x - x^2), & x \in (0,\, 3); \\ 0, & x \ge 3. \end{cases}$$

Найти: а) при каком λ функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 19.
Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \alpha(x - x^2/3), & x \in (0,\, 3); \\ 0, & x \ge 3. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент α ;
б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 20.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} a/x^3, & x \in (1,\, 4); \\ 0, & x \notin (1,\, 4). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $P\{3 \le X < 5\}$.

Задача 21.

Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}.$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность $\mathbf{P}\{X \ge 0\}$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 22.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & x \in (0,\, \pi); \\ 0, & x \notin (0,\, \pi). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{\pi/2 \le X < 3\pi/2\}$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 23.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2/4 + 6x - 45/4, & x \in (3,\, 5); \\ 0 & x \notin (3,\, 5). \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 24.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}, & x \in (-3,\, 3); \\ 0, & \text{при } x \notin (-3,\, 3). \end{cases}$$

Найти моменты $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$. Какое событие вероятнее: $\{X < 1\}$ или $\{X > 1\}$?

Задача 25.

Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ax^3, & x \in (0,\, 1]; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) плотность распределения случайной величины $f(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $\mathbf{P}\{X \in (0.2,\, 0.8)\}$.

Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 26.

Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} A(4x - x^2), & x \in (0,\, 4); \\ 0, & x \notin (0,\, 4). \end{cases}$$

Найти коэффициент A, функцию распределения $F(x)$, вероятность $\mathbf{P}\{-2 \le X \le 3\}$, математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 27.

Случайная величина R имеет распределение Рэлея, то есть распределение с плотностью

$$f(r) = \begin{cases} Are^{-h^2r^2}, & r \ge 0; \\ 0, & r < 0, \end{cases}$$

где h – известное положительное число. Найти коэффициент A, математическое ожидание $\mathbf{E}R$, дисперсию $\mathbf{D}R$, моду $\mathrm{mod}(R)$ и медиану $\mathrm{med}(R)$.

Задача 28.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c/x, & x \in (1/\mathrm{e},\, \mathrm{e}); \\ 0, & x \notin (1/\mathrm{e},\, \mathrm{e}). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

г) вероятность $P\{\mathrm{e}/2 \le X < 3\mathrm{e}/2\}$.

Задача 29.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c\,\mathrm{arctg} x, & x \in (0,\,1); \\ 0, & x \notin (0,\,1). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}X$ и медиану $\mathrm{med}(X)$.

Задача 30.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x, & |x| \le \pi/2; \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) математическое ожидание $\mathbf{E}X$, моду $\mathrm{mod}(X)$ и медиану $\mathrm{med}(X)$;

в) вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина X примет значения больше $\pi/4$.

Тема 7. Функции случайных величин.

Пусть X – случайная величина, а $g = g(x)$ – борелевская (например, непрерывная) функция, определенная при любом значении x случайной величины X. Обозначим через $Y = g(X)$ функцию от случайной величины X. Нас будет интересовать закон распределения случайной величины Y при условии, что закон распределения X и функция $g = g(x)$ известны. Мы приведем некоторые общие сведения и рассмотрим примеры нахождения закона распределения при условии, что X – непрерывная случайная величина, а $g = g(x)$ – почти везде дифференцируемая функция. Пусть $F_X(u)$ и $f_X(u)$ – функция распределения и плотность распределения случайной величины X, а $F_Y(v)$ и $f_Y(v)$ – функция распределения и плотность распределения случайной величины Y. По определению $F_Y(v) = \mathbf{P}\{Y < v\}$. Если функция $y = g(x)$ монотонно возрастает и $x = g^{-1}(y)$ – обратная функция, то

$$F_Y(v) = \mathbf{P}\{Y < v\} = \mathbf{P}\{X < g^{-1}(v)\} = F_X(g^{-1}(v)).$$

В общем случае обозначим через D_v множество значений "x" случайной величины X, для которых $y = g(x) < v$: $D_v = \{x: \ y = g(x) < v\}$. Тогда

$$F_Y(v) = \mathbf{P}\{Y < v\} = \mathbf{P}\{X \in D_v\} = \int\limits_{D_v} f_X(t)\,dt.$$

Пример 1. *Пусть X – непрерывная случайная величина. Найти функцию распределения $F_Y(v)$ и плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины $Y = X^2$.*

Решение. Если $v \le 0$, то множество D_v пусто: $D_v = \{x : \ x^2 < v\} = \emptyset$. Следовательно, $F_Y(v) = \mathbf{P}\{Y \in D_v\} = 0$, $f_Y(v) = F'_Y(v) = 0$ при $v \le 0$. При $v > 0$ множество D_v имеет вид:

$$D_v = \{x : \ x^2 < v\} = \{x : \ -\sqrt{v} < x < \sqrt{v}\}.$$

Отсюда при $v > 0$ получаем, что

$$F_Y(v) = \mathbf{P}\{X^2 < v\} = \mathbf{P}\{-\sqrt{v} < X < \sqrt{v}\} = F_X(\sqrt{v}) - F_X(-\sqrt{v}),$$

и, дифференцируя по v, получим выражение для плотности распределения случайной величины Y через плотность случайной величины X:

$$f_Y(v) = \frac{dF_Y(v)}{dv} = \frac{d}{dv}\left(F_X(\sqrt{v}) - F_X(-\sqrt{v})\right) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\left(f_X(\sqrt{v}) + f_X(-\sqrt{v})\right).$$

Пример 2. *Пусть случайная величина X равномерно распределена на промежутке* $[2, 6]$. *Найти функцию распределения $F_Y(v)$ и плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины $Y = |3 - X|$.*

Решение. При $v \le 0$ множество D_v пусто: $D_v = \{x : \ |3 - x| < v\} = \emptyset$. Следовательно, $F_Y(v) = \mathbf{P}\{Y \in D_v\} = 0$, $f_Y(v) = F'_Y(v) = 0$ при $v \le 0$. При $v > 0$ множество D_v имеет вид:

$$D_v = \{x : \ |3 - x| < v\} = \{x : \ 3 - v < x < 3 + v\}.$$

Отсюда при $v > 0$

$$F_Y(v) = \mathbf{P}\{|3 - X| < v\} = \mathbf{P}\{3 - v < X < 3 + v\} = F_X(3 + v) - F_X(3 - v).$$

По условию случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2, 6]$, а значит её функция распределения имеет вид:

$$F_X(u) = \begin{cases} 0, & u \le 2; \\ (u-2)/4, & u \in (2, 6]; \\ 1, & u > 6. \end{cases}$$

Заметим, что $2 < 3 - v < 3$, когда $0 < v < 1$, и $3 - v \le 2$, когда $v \ge 1$. Следовательно,

$$F_X(3 - v) = \begin{cases} 0, & v \ge 1; \\ (1-v)/4, & 0 < v < 1. \end{cases}$$

Аналогично,

$$F_X(3+v) = \begin{cases} (1+v)/4, & 0 < v < 3; \\ 1, & v \geq 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$F_Y(v) = \begin{cases} 0, & v \leq 0; \\ v/2, & v \in (0,\, 1]; \\ (v+1)/4, & v \in (1,\, 3]; \\ 1, & v > 3, \end{cases} \quad f_Y(v) = \begin{cases} 0, & v < 0 \text{ или } v > 3; \\ 1/2, & v \in (0,\, 1); \\ 1/4, & v \in (1,\, 3). \end{cases}$$

Для нахождения моментов случайной величины $Y = g(X)$ – функции от непрерывной случайной величины X – можно пользоваться следующими формулами для нахождения математического ожидания $\mathbf{E}Y$:

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u) f_X(u)\, du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v f_Y(v)\, dv, \tag{5}$$

а также определением и свойствами моментов. В задачах этой темы требуется вычислять вторые начальные $\mathbf{E}(XY)$ и центральные $\mathbf{cov}(X,Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y))$ смешанные моменты. Второй центральный смешанный момент $\mathbf{cov}(X,Y)$ называется ковариацией. В общем случае для нахождения этих моментов необходимо знать совместное распределение случайных величин X и Y, то есть распределение случайного вектора (X,Y). В случае функциональной зависимости $Y = g(X)$ достаточно знать распределение случайной величины X. Если X – непрерывная случайная величина, то

$$\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X \cdot g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, g(x) f_X(x)\, dx.$$

Следующие формулы справедливы при условии, что все входящие в них моменты существуют, то есть соответствующие интегралы абсолютно сходятся. Для вычисления моментов можно пользоваться линейностью математического ожидания: $\mathbf{E}(aX+bY+c) = a\,\mathbf{E}X + b\,\mathbf{E}Y + c$ для любых случайных величин X, Y и произвольных вещественных чисел a, b, c.
Удобно использовать следующие свойства моментов:

$$\mathbf{D}(aX+b) = a^2\,\mathbf{D}X,\ \forall\, a,\, b \in \mathbb{R};\ \mathbf{cov}(X,\, Y) = \mathbf{cov}(Y,\, X) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y.$$

Отсюда

$$\mathbf{cov}(aX+b,\, cY+d) = ac\,\mathbf{cov}(X,Y),\ \forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R};\ \mathbf{cov}(X,X) = \mathbf{D}X.$$

Пример 3. *Предположим, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2, $\sigma > 0$. Пусть $Y = -3X^2$, $Z = 3X - 2Y + 5$, $T = 2X + 3$. Найти $\mathbf{E}Z$ и $\mathbf{cov}(X,\, T)$.*

Решение. Напомним, что $\mathbf{E}X = a$, $\mathbf{D}X = \sigma^2$. В силу линейности математического ожидания имеем

$$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}(3X - 2Y + 5) = 3\mathbf{E}X - 2\mathbf{E}Y + 5 = 3a + 6\mathbf{E}(X^2) + 5.$$

Поскольку $\sigma^2 = \mathbf{D}X = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2$, то $\mathbf{E}(X^2) = \sigma^2 + a^2$, откуда

$$\mathbf{E}Z = 3a + 6\sigma^2 + 6a^2 + 5.$$

Далее, используя свойства ковариации, получим

$$\mathbf{cov}(X,\, T) = \mathbf{cov}(X,\, 2X + 3) = 2\mathbf{cov}(X,\, X) = 2\mathbf{D}X = 2\sigma^2.$$

Пример 4. *В условиях предыдущего примера при $a = -1$, $\sigma^2 = 2$ найти $\mathbf{E}|X + 1|$.*

Решение. Плотность распределения случайной величины $X \sim \mathcal{N}(-1,\, 2)$ имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(t+1)^2}{4}\right).$$

Для нахождения математического ожидания воспользуемся первой частью формулы (5):

$$\mathbf{E}|X + 1| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t + 1| \exp(-(t+1)^2/4)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-1} (t+1) \exp(-(t+1)^2/4)\, dt + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-1}^{\infty} (t+1) \exp(-(t+1)^2/4)\, dt.$$

Сделав в каждом из интегралов замену переменной $y = (t+1)/\sqrt{2}$, получим

$$\mathbf{E}|X + 1| = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} y \exp(-y^2/2)\, dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} y \exp(-y^2/2)\, dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \exp(-y^2/2)\, d(y^2/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Задача 1.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-2t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = 2/X$ и $Z = 2X + 5$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(v)$ и плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 2.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = -3X + 2$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 3.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-3t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = 2X + 1$ и $Z = -2X^2 - Y^2 - 9XY + 2X - 1$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 4.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-2t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = 1 - \exp(-2X)$ и $Z = X^2 + 2Y^2 - 2XY + 3Y - 1$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 5.

Случайная величина имеет стандартное нормальное распределение. Случайные величины $Y = -X^2$ и $Z = -X^2 + 2Y^2 - 3XY + 2X + 3$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 6.
Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1$, $\sigma = 2$. Случайные величины $Y = (1-X)/2$ и $Z = 3X^2 - 2Y^2 + XY - X + 4$ являются функциями случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 7.
Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = -X^2 + 2Y^2 + 2XY + Y + 1$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 8.
Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = -1$, $\sigma = 3$. Случайные величины $Y = |X+1|$ и $Z = -X^2 + 2Y^2/3 - X + 2Y + 1$ являются функциями случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 9.
Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет вид (равномерное на промежутке $[1, 4]$ распределение):

$$f_X(t) = \begin{cases} 1/3, & t \in [1,\ 4], \\ 0, & t \notin [1,\ 4]. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = F_X(X)$, где $F_X(t)$ - функция распределения случайной величины X, и $Z = -2X^2 + Y^2 - 2XY + Y - 1$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 10.
Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид (равномерное на промежутке $[-2, 3]$ распределение):

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/5, & x \in (-2,\ 3), \\ 0, & x \notin (-2,\ 3). \end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = -2X + 4$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 11.

Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид (равномерное на промежутке $[-1, 2]$ распределение):

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in (-1,\, 2), \\ 0, & x \notin (-1,\, 2). \end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = 5X - 3$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 12.

Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид (равномерное на промежутке $[-2, 4]$ распределение):

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in [-2, 4], \\ 0, & x \notin [-2, 4]. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = -3X + 2$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(y)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 13.

Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} a \sin x, & x \in (0,\, \pi), \\ 0, & x \notin (0,\, \pi). \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \cos X - 2$ и $Z = -X + 1$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) постоянную a;
б) функцию распределения $F_Y(x)$ случайной величины Y;
в) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 14.

Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} a/x^4, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \ln X$ и $Z = 2X + 3$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) постоянную a;
б) плотность распределения $f_Y(x)$ случайной величины Y;
в) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 15.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-3t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \sqrt{X}$ и $Z = -2X + 3$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 16.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-4t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \ln(X/2)$ и $Z = 2X - 4X^2 + 3\exp X + 1$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 17.
Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(t) = \begin{cases} 2\exp(-2t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \exp(-2X)$ и $Z = 3X - 2$ являются функциями от случайной величины X.
Найти: а) функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y;
б) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$, $\mathbf{cov}(X, Z)$.

Задача 18.
Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-3t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = \exp(X)$ и $Z = X^2 - XY + 3Y - 1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 19.

Плотность распределения $f_X(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(x) = \frac{c}{1+x^2}.$$

Случайные величины $Y = 1/X$ и $Z = \mathrm{arctg} X$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) постоянную c;

б) функцию распределения $F_Y(y)$ и плотность распределения $f_Y(v)$ случайной величины Y;

в) моменты $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$.

Задача 20.

Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(t) = \begin{cases} at^2, & t \in [-1,\, 2], \\ 0, & t \notin [-1,\, 2]. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = 2X - 3Y^2 - 2XY + 4$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y;

в) математическое ожидание $\mathbf{E}Z$.

Задача 21.

Плотность распределения $f_{X,Y}(x,\, y)$ системы случайных величин $(X,\, Y)$ имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \exp(-3x), & \text{если } x \geq 0 \text{ и } y \in [1,\, 4], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случайные величины $Z = |2Y - 1|$ и $T = 2X - Y/3 + 2$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(z)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $\mathbf{D}T$.

Задача 22.

Плотность распределения $f_{X,Y}(x,\, y)$ системы случайных величин $(X,\, Y)$ имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6\, \exp(-2x - 3y), & \text{если } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случайные величины $Z = |2Y + 1|$ и $T = -3X + 2Y - 1$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(z)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $\mathbf{D}T$.

Задача 23.

Плотность распределения $f_{X,Y}(x,\, y)$ системы случайных величин $(X,\, Y)$ имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-3)^2}{2} - 2y\right), & \text{если } y \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случайные величины $Z = |X - 3|$ и $T = -3X + Y/2$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(z)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $\mathbf{D}T$.

Задача 24.

Плотность распределения $f_{X,Y}(x,\, y)$ системы случайных величин $(X,\, Y)$ имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{3\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-1)^2}{3} - 3y\right), & \text{если } y \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случайные величины $Z = |Y - 2|$ и $T = 2X + Y - 5$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) функцию распределения $F_Z(z)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $\mathbf{D}T$.

Задача 25.

Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределение Бернулли, задаваемые рядами распределения:

X_1	0	1
P	1/2	1/2

и

X_2	0	1
P	2/3	1/3

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$;

b) математическое ожидание $\mathbf{E}(2X_1^2 - X_2^2 + 2X_1X_2 + 4X_2 - 3)$.

Задача 26.

Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют экспоненциальное распределение, задаваемое плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 3\exp(-3x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$;

б) математическое ожидание $\mathbf{E}(X_1^2 - 4X_1X_2 + 2X_2 - 2)$.

Задача 27.
Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ соответственно.
Найти: а) закон распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$,
б) математическое ожидание $\mathbf{E}(2X_1^2 - 3X_1X_2 + 2X_2 - 1)$.
Напомним, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если $\mathbf{P}\{X = m\} = \exp(-\lambda)\,\lambda^m/m!$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.
Задача 28.
Случайные величины X и Y независимы и имеют стандартное нормальное распределение.
Найти: а) закон распределения случайной величины $Z = X + Y$;
б) математическое ожидание $\mathbf{E}(-3X^2 + Y^2 + 3XY + 1)$.

Задача 29.
Определить функции распределения случайных величин $Z_1 = \max(X, Y)$ и $Z_2 = \min(X, Y)$, где X и Y – независимые случайные величины, имеющие функции распределения $F_X(t)$ и $F_Y(t)$ соответственно.
Задача 30.
Плотность распределения $f_{X,Y}(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Найти: а) закон распределения полярных координат точки (X, Y);
б) дисперсию $\mathbf{D}(-3X + Y)$.

Математическая статистика.

Методические указания

Задачи математической состоят в построении вероятностной модели соответствующей наблюдениям, полученным в результате статистического эксперимента. В предлагаемых далее задачах мы предполагаем, что наблюдения получены в результате независимых реализаций (измерений) неизвестной случайной величины X. Все необходимые теоретические сведения могут быть найдены в следующих книгах: учебное пособие под редакцией Смирнова В. П. "Элементы теории вероятностей и математической статистике" , СПбГИТМО, 2008 год , электронный вариант на сайте кафедры высшей математики , Бородин А. Н. "Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики" , издательство "Лань" , 2011 год , Чернова Н. И. "Математическая статистика" , СибГУТИ, 2009 год. Мы же ограничимся рассмотрением примера, аналогичного предлагаемым заданиям.

Пример

Дана группированная выборка из стандартного нормального распределения:

-2.378 -1.862	-1.862 -1.345	-1.345 -0.829	-0.829 -0.312	-0.312 0.204	0.204 0.721	0.721 1.237	1.237 1.754	1.754 2.270	2.270 2.787
7	14	19	36	37	42	17	14	9	5

Построить точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности, при надёжности $\gamma = 0.95$ построить соответствующие доверительные интервалы и, используя χ^2-критерий Пирсона асимптотического уровня значимости $\alpha = 0.05$, проверить гипотезу о нормальности оценок. В первой строке таблицы указаны $X_i,\ i = 1, ..., 10$ – левые границы интервалов группировки, во второй строке указаны $X_{i+1},\ i = 1, ..., 10$ – правые границы. В третьей строке указано количество элементов выборки, попавших на данный интервал. Например, на первый интервал $(-2.378,\ -1.862)$ попало 7 элементов выборки.

Решение. В качестве оценки математического ожидания генеральной совокупности X обычно рассматривают статистику (то есть измеримую функцию выборки) $\bar{X}_n = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$ – выборочное среднее. Как следует из закона больших чисел, если математическое ожидание $\mathbf{E}X$ существует, то выборочное среднее является состоятельной, несмещённой оценкой математического ожидания случайной величины X. Можно убедиться в этом и непосредственно, найдя математическое ожидание и дисперсию $\bar{X}_n$. По центральной предельной теореме $\bar{X}_n$ является асимптотически нормальной оценкой $\mathbf{E}X$ с асимптотической дисперсией $\Delta_E^2 = \mathbf{D}X$. Неизвестную дисперсию генеральной совокупности заменим её состоятельной, несмещенной, асимптотически нормальной (с асимптотической дисперсией $\Delta_D^2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4 - \mathbf{D}^2(X))$ оценкой S_n^2. Приведём оценку S_n^2 и выборочную оценку дисперсии σ_n^2:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Приведённая в задании группированная выборка построена по выборке из нормального распределения с параметрами $a = \mathbf{E}X = 0,\ \sigma^2 = \mathbf{D}X = 1$ объёма $n = 200$, и вычисления показали, что $\bar{X}_n = 0.0406,\ S_n^2 = 1.104$. Для нахождения асимптотического доверительного интервала для параметра $a = \mathbf{E}X$ используем формулу:

$$P_{n,a}(a \in (\bar{X}_n - t_{(1+\gamma)/2}\Delta_E/\sqrt{n},\ \bar{X}_n + t_{(1+\gamma)/2}\Delta_E/\sqrt{n}) \approx \gamma, \tag{6}$$

где t_β – β-квантиль функции распределения стандартного нормального закона, то есть такое значение аргумента, что $\Phi(t_\beta) = \beta, \Phi(t) = (\int_{-\infty}^t \exp(-x^2/2)dx)/\sqrt{2\pi}$ – функция распределения стандартного нормального закона. Решения уравнений вида $\Phi(t) = \beta$ найдём с помощью таблицы значений функции $\Phi(t)$. Если, например, надёжность $\gamma = 0.95$, то $t_{(1+\gamma)/2} = 1.96$, откуда получим, что асимптотический доверительный интервал для реального значения $a = \mathbf{E}X$ имеет вид $I_{n,E} = (-0.1050,\ 0.1863)$. Исходное значение $\mathbf{E}X = 0$ в этот доверительный интервал попадает.

Аналогично, заменяя величину $\Delta_D^2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4 - (\mathbf{D}X)^2$ статистикой $\Delta_n^2 = (\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^4)/n - \sigma_n^4$ (дополнительные вычисления показали, что $\Delta_n^2 = 2.1688$), получим асимптотический доверительный интервал надёжности 0.95 для дисперсии:

$$I_{n,D} = (S_n^2 - t_{(1+\gamma)/2}\Delta_n/\sqrt{n},\ S_n^2 + t_{(1+\gamma)/2}\Delta_n/\sqrt{n}) = (0.8999,\ 1.3081).$$

Реальное значение дисперсии $\mathbf{D}X = 1$ в этот доверительный интервал попадает.

Чтобы получить аналогичные оценки по группированой выборке нужно составить вспомогательную таблицу. В первой строке новой таблицы стоят X_i^* - середины интервалов группировки, во второй частоты $\hat{p}_i = d_i/200$, где d_i - количество элементов выборки, попавших в соответствующий интервал группировки. Вспомогательная таблица, составленная по приведённой в примере группированной выборке, имеет вид

-2.12	-1.603	-1.087	-0.57	-0.054	0.463	0.979	1.496	2.012	2.529
0.035	0.07	0.095	0.18	0.185	0.21	0.085	0.07	0.045	0.025

Затем нужно использовать следующие формулы для нахождения оценок математического ожидания, дисперсии и асимптотической дисперсии $\Delta^2_{n,gr}$, необходимой для нахождения асимптотического доверительного интервала для дисперсии.

$$\bar{X}_{n,gr} = \sum_{i=1}^{10} X_i^* \hat{p}_i; \qquad S^2_{n,gr} = \sum_{i=1}^{10} (X_i^*)^2 \hat{p}_i - (\bar{X}_{n,gr})^2$$

$$\Delta^2_{n,gr} = \sum_{i=1}^{10} (X_i^*)^4 \hat{p}_i - 4\left(\sum_{i=1}^{10} (X_i^*)^3 \hat{p}_i\right)\bar{X}_{n,gr} + 8\left(\sum_{i=1}^{10} (X_i^*)^2 \hat{p}_i\right)(\bar{X}_{n,gr})^2 -$$
$$-4(\bar{X}_{n,gr})^4 - \left(\sum_{i=1}^{10} (X_i^*)^2 \hat{p}_i\right)^2,$$

здесь 10 - количество интервалов группировки. Используя приведённые формулы и формулу (6), получим

$$\bar{X}_{n,gr} = 0.037,\ S^2_{n,gr} = 1.132,\ I_{n,E,gr} = (-0.111,\ 0.184),\ I_{n,D,gr} = (0.927,\ 1.337).$$

Видим, что оценки, построенные по группированной выборке достаточно близки к оценкам, построенным по исходной выборке.

Для проверки гипотезы H_0, состоящей в том, что генеральная совокупность X имеет нормальное распределение против альтернативы H_1 - распределение случайной величины X не является нормальным используем критерий хи-квадрат асимптотического уровня значимости $\alpha = 0.05$ (то есть асимптотическая ошибка первого рода критерия не превосходит $\alpha = 0.05$). Свойства этого критерия следуют из теоремы Пирсона. См. "Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики", автор: Бородин А. Н., издательство Лань, С.-Пб., 2011 год, стр. 188-192. Для группированной выборки строим статистику критерия

$$\chi^2_{n,k-3} = \sum_{i=1}^{10} n\frac{(p_i - p_{i0})^2}{p_{i0}}, \text{ где } p_{i0} = \Phi\left(\frac{X_i - \bar{X}_n}{S_n}\right) - \Phi\left(\frac{X_{i-1} - \bar{X}_n}{S_n}\right). \quad (7)$$

Затем находим порог критерия хи-квадрат $t = t_{k-3,1-\alpha}$ - $1-\alpha$ квантиль хи-квадрат распределения с $k-3$ степенями свободы.

Хи-квадрат критерием асимптотического уровня значимости α для проверки гипотезы нормальности называют последовательность тестов (отображений) множества наблюдений в множество $\{0, 1\}$ следующего вида

$$\varphi_n(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi^2_{n,k-3} \geq t_{k-3,1-\alpha}, \\ 0, & \text{если } \chi^2_{n,k-3} < t_{k-3,1-\alpha}. \end{cases}$$

Если $\varphi_n(X_1, \dots, X_n) = 0$, то принимается основная гипотеза H_0 - генеральная совокупность X имеет нормальное распределение. Если $\varphi_n(X_1, \dots, X_n) = 1$, то принимается альтернатива H_1 - распределение генеральной совокупности нормальным не является. При этом предел вероятности ошибки первого рода (то есть, вероятности отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она верна) не превосходит асимптотического уровня значимости α:

$$\lim_{n\to\infty} P_{H_0}(\varphi_n(X_1, \dots, X_n) = 1) \leq \alpha.$$

В нашем примере $\chi^2_{n,k-3} = 12.39,\ t = t_{7,0.95} = 14.07$. Следовательно, принимается гипотеза H_0 - генеральная совокупность X, из которой произведена выборка, имеет нормальное распределение.

Задание и варианты

Дана группированная выборка. Построить точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности, при надёжности $\gamma = 0.95$ построить соответствующие доверительные интервалы и, используя χ^2 - критерий Пирсона асимптотического уровня значимости $\alpha = 0.05$, проверить гипотезу о нормальности оценок.

В первой строке таблицы указаны $X_i,\ i = 1, ..., 10$ - левые границы десяти интервалов группировки, во второй строке $X_i,\ i = 2, ..., 11$ - правые границы. В третьей строке указано количество элементов выборки, попавших на данный интервал.

Вариант 1.

-2.202	-1.764	-1.325	-0.887	-0.448	-0.01	0.429	0.868	1.306	1.745
-1.764	-1.325	-0.887	-0.448	-0.01	0.429	0.868	1.306	1.745	2.183
4	11	28	22	38	33	32	17	11	4

Вариант 2.

-2.449	-1.967	-1.485	-1.003	-0.520	-0.038	0.444	0.926	1.408	1.891
-1.967	-1.485	-1.003	-0.520	-0.038	0.444	0.926	1.408	1.891	2.373
6	7	21	32	36	40	23	21	9	5

Вариант 3.

-3.029 -2.406	-2.406 -1.783	-1.783 -1.16	-1.16 -0.537	-0.537 0.087	0.087 0.71	0.71 1.333	1.333 1.956	1.956 2.579	2.579 3.203
3	9	20	32	43	45	28	13	5	2

Вариант 4.

-3.503 -2.882	-2.882 -2.261	-2.261 -1.641	-1.641 -1.02	-1.02 -0.399	-0.399 0.222	0.222 0.842	0.842 1.463	1.463 2.084	2.084 2.704
1	2	4	23	33	53	40	28	12	4

Вариант 5.

-3.285 -2.743	-2.743 -2.201	-2.201 -1.659	-1.659 -1.117	-1.117 -0.575	-0.575 -0.033	-0.033 0.509	0.509 1.051	1.051 1.593	1.593 2.135
1	5	6	16	37	28	44	33	23	7

Вариант 6.

-2.203 -1.764	-1.764 -1.325	-1.325 -0.887	-0.887 -0.448	-0.448 -0.01	-0.01 0.429	0.429 0.868	0.868 1.306	1.306 1.745	1.745 2.183
4	11	28	22	38	33	32	17	11	4

Вариант 7.

-2.449 -1.967	-1.967 -1.485	-1.485 -1.003	-1.003 -0.520	-0.520 -0.038	-0.038 0.444	0.444 0.926	0.926 1.408	1.408 1.891	1.891 2.373
6	7	21	32	36	40	23	21	9	5

Вариант 8.

-2.202 -1.764	-1.764 -1.325	-1.325 -0.887	-0.887 -0.448	-0.448 -0.01	-0.01 0.429	0.429 0.868	0.868 1.306	1.306 1.745	1.745 2.183
4	11	28	22	38	33	32	17	11	4

Вариант 9.

-2.449 -1.967	-1.967 -1.485	-1.485 -1.003	-1.003 -0.520	-0.520 -0.038	-0.038 0.444	0.444 0.926	0.926 1.408	1.408 1.891	1.891 2.373
6	7	21	32	36	40	23	21	9	5

Вариант 10.

-2.635 -2.103	-2.103 -1.570	-1.570 -1.038	-1.038 -0.505	-0.505 0.028	0.028 0.560	0.560 1.093	1.093 1.625	1.625 2.158	2.158 2.690
6	4	23	32	44	42	28	14	5	2

Вариант 11.

-2.642 -2.107	-2.107 -1.569	-1.569 -1.032	-1.032 -0.494	-0.494 0.044	0.044 0.581	0.581 1.119	1.119 1.657	1.657 2.194	2.194 2.732
2	11	14	36	36	46	34	15	4	2

Вариант 12.

-2.277 -1.800	-1.800 -1.323	-1.323 -0.846	-0.846 -0.368	-0.368 0.109	0.109 0.586	0.586 1.064	1.064 1.541	1.541 2.018	2.018 2.495
4	18	18	31	30	44	32	18	3	2

Вариант 13.

-3.029 -2.406	-2.406 -1.783	-1.783 -1.160	-1.160 -0.537	-0.537 0.087	0.087 0.710	0.710 1.333	1.333 1.956	1.956 2.580	2.580 3.203
3	9	20	32	43	45	28	13	5	2

Вариант 14.

-2.378 -1.862	-1.862 -1.345	-1.345 -0.829	-0.829 -0.312	-0.312 0.204	0.204 0.721	0.721 1.237	1.237 1.754	1.754 2.270	2.270 2.787
7	14	19	36	37	42	17	14	9	5

Вариант 15.

-3.074	-2.496	-1.919	-1.341	-0.764	-0.186	0.392	0.969	1.547	2.124
-2.496 1	-1.919 4	-1.341 9	-0.764 17	-0.186 39	0.392 52	0.969 37	1.547 26	2.124 11	2.702 4

Вариант 16.

-2.600 -2.048	-2.048 -1.496	-1.496 -0.944	-0.944 -0.392	-0.392 0.160	0.160 0.712	0.712 1.264	1.264 1.816	1.816 2.368	2.368 2.920
3	11	20	28	47	42	25	15	4	5

Вариант 17.

-2.843 -2.315	-2.315 -1.788	-1.788 -1.260	-1.260 -0.733	-0.733 -0.206	-0.206 0.322	0.322 0.849	0.849 1.377	1.377 1.904	1.904 2.432
3	5	8	25	41	40	34	24	14	6

Вариант 18.

-2.202 -1.764	-1.764 -1.325	-1.325 -0.887	-0.887 -0.448	-0.448 0.010	0.010 0.429	0.429 0.868	0.868 1.306	1.306 1.745	1.745 2.183
4	11	28	22	38	33	32	17	11	4

Вариант 19.

-2.449 -1.969	-1.969 -1.485	-1.485 -1.003	-1.003 -0.520	-0.520 -0.038	-0.038 0.444	0.444 0.926	0.926 1.408	1.408 1.891	1.891 2.373
6	7	21	32	36	40	23	21	9	5

Вариант 20.

-2,635 -2.103	-2.103 -1.570	-1.570 -1.037	-1.037 -0.505	-0.505 0.028	0.028 0.560	0.560 1.093	1.093 1.625	1.625 2.158	2.158 2.690
6	4	23	32	44	42	28	14	5	2

Вариант 21.

-2.277 -1.800	-1.800 -1.323	-1.323 -0.846	-0.846 -0.368	-0.368 0.109	0.109 0.586	0.586 1.064	1.064 1.541	1.541 2.018	2.018 2.495
4	18	18	31	30	44	32	18	3	2

Вариант 22.

-3.029 -2.406	-2.406 -1.783	-1.783 -1.160	-1.160 -0.537	-0.537 0.087	0.087 0.710	0.710 1.333	1.333 1.956	1.956 2.580	2.580 3.203
3	9	20	32	43	45	28	13	5	2

Вариант 23.

-2.378 -1.862	-1.862 -1.345	-1.345 -0.829	-0.829 -0.312	-0.312 0.204	0.204 0.721	0.721 1.237	1.237 1.754	1.754 2.270	2.270 2.787
7	14	19	36	37	42	17	14	9	5

Вариант 24.

-3.074 -2.496	-2.496 -1.919	-1.919 -1.341	-1.341 -0.764	-0.764 -0.186	-0.186 0.392	0.392 0.969	0.969 1.547	1.547 2.124	2.124 2.702
1	4	9	17	39	52	37	26	11	4

Вариант 25.

-2.600 -2.048	-2.048 -1.496	-1.496 -0.944	-0.944 -0.392	-0.392 0.160	0.160 0.712	0.712 1.264	1.264 1.816	1.816 2.368	2.368 2.920
3	11	20	28	47	42	25	15	4	5

Вариант 26.

-2.843 -2.315	-2.315 -1.788	-1.788 -1.261	-1.261 -0.733	-0.733 -0.206	-0.206 0.322	0.322 0.849	0.849 1.377	1.377 1.904	1.904 2.432
3	5	8	25	41	40	34	24	14	6

Вариант 27.

-2.977 -2.415	-2.415 -1.852	-1.852 -1.290	-1.290 -0.728	-0.728 -0.165	-0.165 0.397	0.397 0.960	0.960 1.522	1.522 2.084	2.084 2.647
4	4	12	21	40	47	31	22	11	8

Вариант 28.

-2.370 -1.792	-1.792 -1.214	-1.214 -0.635	-0.635 -0.057	-0.057 0.521	0.521 1.100	1.100 1.678	1.678 2.256	2.256 2.835	2.835 3.413
7	15	25	42	46	33	17	11	2	2

Вариант 29.

-3.503 -2.882	-2.882 -2.261	-2.261 -1.641	-1.641 -1.020	-1.020 -0.399	-0.399 0.222	0.222 0.842	0.842 1.463	1.463 2.084	2.084 2.704
1	2	4	23	33	53	40	28	12	4

Вариант 30.

-3.285 -2.743	-2.743 -2.201	-2.201 -1.659	-1.659 -1.117	-1.117 -0.575	-0.575 -0.033	-0.033 0.509	0.509 1.051	1.051 1.593	1.593 2.135
1	5	6	16	37	28	44	33	23	7

Оглавление.

Теория вероятностей.

Тема 1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей 3

Тема 2. Геометрические вероятности 9

Тема 3. Формула полной вероятности. Формула Байеса 12

Тема 4. Схема Бернулли 18

Тема 5. Дискретные случайные величины 22

Тема 6. Непрерывные случайные величины 31

Тема 7. Функции случайных величин 40

Математическая статистика.

Методические указания 51

Пример 51

Задание и варианты 54