

фотокамерах имеется специальная шкала глубин, жестко связанная с индексом шкалы расстояний a . В малоформатных камерах можно пренебречь небольшим расстоянием от переднего фокуса объектива до входного зрачка и считать: $a = -x$, где x — расстояние от переднего фокуса до предмета (точнее, до плоскости наводки). По формуле Ньютона тогда найдем:

$$x' = -\frac{f'^2}{x} = \frac{f'^2}{a}, \quad (\text{II. 183})$$

где x' — величина перемещения объектива при наводке на расстояние a .

Поэтому формула (II. 183) может быть использована для расчета шкалы расстояний a , связанной с перемещающимся объективом.

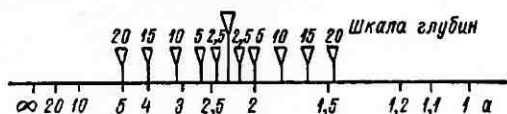


Рис. II. 34

Индекс этой шкалы укреплен на неподвижном корпусе камеры. Шкала получается неравномерной. На рис. II. 34 показан отсчет по индексу 2,3 м.

По той же шкале кроме расстояния a до плоскости наводки можно отсчитывать также расстояния a_1 и a_2 до переднего и заднего планов при помощи дополнительных индексов, нанесенных справа и слева от основного индекса. Для определения положения дополнительных индексов, составляющих шкалу глубин, помножим выражения (II. 174) и (II. 176) на f'^2 и введем обозначения

$$x'_1 = \frac{f'^2}{a_1}; \quad x'_2 = \frac{f'^2}{a_2}. \quad (\text{II. 184})$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x' + \frac{f'^2}{a_0}; \\ x'_2 &= x' - \frac{f'^2}{a_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 185})$$

Отсюда следует, что дополнительные индексы должны быть расположены по обе стороны от основного индекса на равных расстояниях $\pm z$, причем

$$z = \frac{f'^2}{a_0} = \frac{f'^2 \gamma}{D}. \quad (\text{II. 186})$$

Оцифровка дополнительных индексов обычно делается в относительных отверстиях. Если относительное отверстие $D/f' = 1 : R$, то для вычисления z служит формула

$$z = Rf'\gamma. \quad (\text{II. 187})$$

При расчете шкалы глубин, показанной на чертеже (рис. II. 34), принято: $f' = 50$ мм, $\gamma = 2'$. По чертежу можно найти, что при наводке на расстояние $a = 2,3$ м и при относительном отверстии $1 : 5$ передний план — на расстоянии $a_1 = 2,0$ м, а задний — на расстоянии $a_2 = 2,7$ м. При относительном отверстии $1 : 10$ имеем: $a_1 = 1,8$ м; $a_2 = 3,2$ м. Правильно применяя шкалу глубин, фотограф может легко и быстро решать все вопросы, связанные с учетом глубины резкости фотоаппарата.

§ 59. Глубина резкости лупы и микроскопа

Глубина резкости лупы и микроскопа требует специального рассмотрения. При этом воспользуемся формулой (II. 182) для глубины резкости T , подставив в нее значение a_0 по формуле (II. 175) и введя обычное обозначение $p = -a$,

$$T = \frac{2p^2\gamma}{D}. \quad (\text{II. 188})$$

Отношение диаметров D и D' входного и выходного зрачков есть линейное увеличение V_c в зрачках. Поэтому

$$D = \frac{D'}{V_c}. \quad (\text{II. 189})$$

Применим теперь известную формулу для отрезка p

$$p = \frac{n}{n'} f' \frac{V_c - V}{VV_c}. \quad (\text{II. 190})$$

В случае лупы и микроскопа $V = \infty$. Поэтому имеем вместо (II. 190)

$$p = -\frac{n}{n'} \frac{f'}{V_c}. \quad (\text{II. 191})$$

Вследствие (II. 189) и (II. 191) получаем из (II. 188)

$$T = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \frac{2f'^2\gamma}{V_c D'}. \quad (\text{II. 192})$$

На основании выражения (II. 171)

$$\gamma = \frac{\gamma'}{W_c}, \quad (\text{II. 193})$$

а потому из выражения (II. 192) следует

$$T = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \frac{2f'^2 \gamma'}{V_c W_c D'}. \quad (\text{II. 194})$$

Известно, что

$$V_c W_c = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}, \quad (\text{II. 195})$$

поэтому получим выражение для глубины резкости T

$$T = \frac{n}{n'} \frac{2f'^2 \gamma'}{D'}. \quad (\text{II. 196})$$

Это выражение справедливо как для лупы, так и для микроскопа. Имея теперь в виду только лупу, положим $n = n' = 1$ и исключим f' при помощи формулы (II. 143) для видимого увеличения Γ лупы:

$$T = \frac{2 \cdot 250^2 \gamma'}{\Gamma^2 D'}. \quad (\text{II. 197})$$

Диаметр D' , равный диаметру зрачка глаза, принимаем равным в среднем 3 мм. Предельный угол γ' разрешающей способности глаза равен $1' = 0,0003 \text{ рад}$. Поэтому формула для глубины резкости лупы приобретает окончательный вид

$$T = \frac{12,5}{\Gamma^2}. \quad (\text{II. 198})$$

Пусть, например, $\Gamma = 10\times$. Тогда находим: $T = 0,125 \text{ мм}$.

Для микроскопа мы также воспользуемся формулой (II. 196) и положим в ней $n' = 1$. Величина n может и не быть равной единице, если предмет находится в жидкости, а не в воздухе. Вместо диаметра D' выходного зрачка введем его радиус $\varrho = 1/2D'$. Тогда получим

$$T = \frac{n f'^2 \gamma'}{\varrho}. \quad (\text{II. 199})$$

Из теории микроскопа (§ 69) известна следующая формула для видимого увеличения микроскопа:

$$\Gamma = -\frac{250A}{\varrho'}, \quad (\text{II. 200})$$

где A — численная апертура, определяемая выражением

$$A = n \sin \alpha. \quad (\text{II. 201})$$

Кроме того, для микроскопа справедлива и известная формула

$$\Gamma = \frac{250}{f'}. \quad (\text{II. 202})$$

При помощи выражений (II. 200) и (II. 202) исключим величины q' и f' из формулы (II. 199). В результате получим

$$T = \frac{250n}{A\Gamma} \gamma'. \quad (\text{II. 203})$$

Пусть, например, $n = 1$; $A = 0,3$; $\Gamma = 200\times$, $\gamma' = 4'$. Предельный угол разрешающей способности глаза здесь принят таким большим потому, что диаметр выходного зрачка микроскопа значительно меньше диаметра зрачка глаза. Первый бывает порядка 0,5 мм, в то время как второй не может стать меньше 2 мм. Из-за этого в четыре раза уменьшается острота зрения глаза, вооруженного микроскопом.

Глубину резкости T находим по формуле (II. 203): $T = 5,0$ мкм.

Для другого примера принимаем: $A = 1,5$; $\Gamma = 1500\times$; $n = 1,5$; $\gamma' = 4' = 0,0012$ рад. Находим глубину резкости: $T = 0,2$ мкм. Понятно, что такая малая глубина резкости требует очень тонкого механизма наводки микроскопа на резкость.

Следует заметить, что формула (II. 203) дает несколько заниженные значения глубины резкости, так как при больших увеличениях микроскопа усиливается влияние дифракции на глубину резкости. Дифракционная глубина резкости T_d определяется формулой

$$T_d = \frac{n^2 \lambda}{2A^2}, \quad (\text{II. 204})$$

где λ — длина волны света.

При $\lambda = 0,5$ мкм получим для первого приведенного выше примера: $T_d = 2,8$ мкм, а для второго — $T_d = 0,25$ мкм. Во втором случае дифракционная глубина резкости больше геометрической. В первом приближении можно считать, что наблюдаемая полная глубина равна сумме глубин T и T_d .

В заключение нужно сказать, что в изложении вопроса о глубине резкости не учитывалось влияние аккомодации глаза. В фотоаппарате, где глаз аккомодирован однозначно на плоскость фотоснимка, глубина резкости ни в какой степени не зависит от аккомодации.

Иначе дело обстоит в случае лупы и микроскопа. Меняя свою аккомодацию от ближней точки до дальней, глаз наблюдателя может передвигать зону резкого изображения, и таким образом резко видеть по частям (не одновременно) значительно увеличенную по глубине область пространства. Глубина T_a аккомодации лупы определяется по легко выводимой формуле

$$T_a = \frac{f'^2}{1000} \text{ ккк}. \quad (\text{II. 205})$$

Здесь Akk — объем accommodation, который для эмметропического глаза составляет 8 дптр (расстояние от роговицы до ближней точки $a_B = 125$ мм). Поэтому глубину accommodation можно подсчитывать по формуле

$$T_a = 0,008f'^2, \quad (\text{II. 206})$$

где f' — фокусное расстояние линзы.

§ 60. Разрешающая способность оптических приборов, зависящая от остроты зрения

Острота зрения человеческого глаза может быть существенно повышена при помощи оптического прибора, помещенного между наблюдаемым предметом и глазом.

Предположим, что предмет y , расположенный у точки A (рис. II. 30), настолько мал, что он находится как раз на пределе разрешающей способности глаза, действующего совместно с оптическим прибором. В таком случае угол γ' , под которым наблюдатель видит изображение y' , должен быть равен предельному углу разрешающей способности глаза, в среднем составляющему $1'$. Считая поэтому угол γ' известным, найдем по чертежу величину y'

$$y' = k'\gamma'. \quad (\text{II. 207})$$

Далее нетрудно найти и величину y , так как y и y' связаны через линейное увеличение V ,

$$y = \frac{y'}{V}. \quad (\text{II. 208})$$

Отсюда вследствие (II. 207) получается выражение

$$y = -\frac{k'\gamma'}{V}. \quad (\text{II. 209})$$

Из формулы (II. 127) следует

$$\frac{k'}{V} = \frac{k}{\Gamma}. \quad (\text{II. 210})$$

Поэтому получаем из (II. 209)

$$y = -\frac{k}{\Gamma} \gamma'. \quad (\text{II. 211})$$

Если предмет находится далеко, то удобнее выражать разрешающую способность посредством угла β , который в этом случае служит предельным углом разрешающей способности системы, состоящей из прибора и глаза наблюдателя. По чертежу (рис. II. 30) находим угол β

$$\beta = -\frac{y}{p}. \quad (\text{II. 212})$$

Отсюда вследствие выражения (II. 211) находим

$$\beta = \frac{k}{\Gamma p} \gamma'. \quad (\text{II. 213})$$

Выше (§ 57) было выяснено, что в случае оптических приборов дальнего действия следует полагать: $k = p$. Из выражения (II. 213) следует поэтому простое и удобное выражение

$$\beta = \frac{\gamma'}{\Gamma}. \quad (\text{II. 214})$$

Определим, например, предельный угол β для призмного бинокля с увеличением $\Gamma = 8\times$. При $\gamma' = 60''$ найдем: $\beta = 7,5''$.

Остротой зрения S для глаза, вооруженного прибором, принято называть обратную величину предельного угла разрешающей способности в минутах. Полагая $\gamma' = 1'$, получим вследствие выражения (II. 214)

$$S = \frac{1}{\beta} = \Gamma. \quad (\text{II. 215})$$

Отсюда следует, что острота зрения глаза, вооруженного оптическим прибором дальнего действия, выражается числом, равным видимому увеличению прибора.

В приборах ближнего действия разрешающая способность может быть охарактеризована линейной величиной предмета y , лежащего на пределе разрешения, по формуле (II. 211). При этом нужно положить: $k = -250$ мм, благодаря чему формула приобретает вид

$$y = \frac{250}{\Gamma} \gamma'. \quad (\text{II. 216})$$

Иногда удобнее пользоваться другим выражением, получаемым из этой формулы, если применить выражение (II. 202), справедливое как для лупы, так и для микроскопа,

$$y = \gamma' f'. \quad (\text{II. 217})$$

Наконец, полагая в формуле (II. 216) $\gamma' = 0,0003$ рад и выражая y в мкм, получим еще одну очень удобную формулу

$$y = \frac{75}{\Gamma}. \quad (\text{II. 218})$$

Здесь величина y получается сразу в мкм. Так, например, для лупы десятикратного увеличения находим: $y = 7,5$ мкм.

В некоторых случаях разрешающую способность прибора ближнего действия бывает удобно охарактеризовать числом N линий, проходящихся на длину 1 мм, когда эти линии находятся

на пределе их различения. Полагая, что ширина одной такой линии равна y , получим, если ширина выражена в $\mu\text{м}$

$$N = \frac{1000}{y}. \quad (\text{II. 219})$$

Отсюда, учитывая выражение (II. 218), находим для N

$$N = \frac{40}{3} \Gamma = 13,3\Gamma. \quad (\text{II. 220})$$

Так, для лупы десятикратного увеличения N составит 133 линии на 1 мм .

Кроме остроты зрения глаза наблюдателя, на разрешающую способность оптического прибора влияет еще ряд факторов, которые могут быть разбиты на две группы: внешние и внутренние. К группе внешних факторов относятся условия наблюдения: яркость наблюдаемых предметов, их яркостный и цветовой контраст, состояние атмосферы (дымка, воздушная рефракция). На эти факторы конструктор прибора обычно воздействовать не может.

К группе внутренних факторов относятся некоторые свойства оптического прибора, которые в большинстве своем находятся во власти (или по крайней мере под контролем) конструктора.

1. Неоднородность стекла и других прозрачных материалов, из которых изготовлены оптические детали. Нарушение однородности может быть причиной ухудшения разрешающей способности прибора. Оно иногда обнаруживается в призмах с большой длиной хода лучей (например, в призмах Довэ, в пентапризмах и в призмах Пехана).

2. Местные дефекты преломляющих и отражающих поверхностей. Местные дефекты отражающих поверхностей влияют на разрешающую способность в четыре раза сильнее, чем местные дефекты преломляющих поверхностей.

3. Нарушение центрировки — дефект, оказывающий самое сильное влияние на разрешающую способность. Поэтому самая тщательная центрировка является необходимой предпосылкой успешной работы оптического завода.

4. Остаточные аберрации оптической системы. При внимательном и правильном расчете оптической системы они всегда могут быть удержаны в таких пределах, в которых их влияние на разрешающую способность незначительно.

5. Другие погрешности изготовления и сборки прибора. Их влияние на разрешающую способность вместе с влиянием факторов, указанных в пп. 1—4, может быть взаимно скомпенсировано в процессе регулировки.

Однако кроме этих факторов в оптических приборах действует всегда еще один внутренний фактор, бороться с которым мы еще

не в состоянии. Это — дифракция, вызванная ограничением пучков, проходящих через оптическую систему прибора.

Дифракция приводит к тому, что даже в случае строго гомоцентрического пучка лучей, покидающего выходной зрачок прибора, на плоскости изображений возникает пятно рассеяния конечных размеров (теоретически — даже бесконечно большое), внутри которого наблюдается своеобразное распределение световой энергии. Величина этого пятна рассеяния неизбежно ограничивает разрешающую способность оптических приборов.

Г. ДИФРАКЦИЯ В ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРАХ (КРОМЕ МИКРОСКОПА)

§ 61. Дифракция безабберационного объектива

Распределение освещенности в дифракционном пятне рассеяния в случае свободной от aberrаций оптической системы поддается математическому расчету на основании принципа Гюйгенса. Пусть из выходного зрачка оптического прибора исходит строго гомоцентрический пучок лучей, сходящихся в точке A_0 (рис. II. 35) и заполняющих небольшой апертурный угол α' . В пределах этого

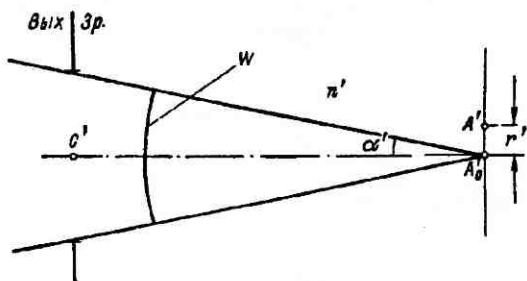


Рис. II. 35

пучка лучей мы выберем произвольную волновую поверхность W , достаточно далекую от точки A_0 . Она представляет собой сферическую поверхность с центром в точке A_0 .

По принципу Гюйгенса мы представляем себе волновую поверхность W как бы покрытой источниками когерентного излучения. Распределение освещенности в окрестности точки A_0 на плоскости изображения представляется как результат интерференции света, излучаемого этими источниками. Соответствующий расчет, который приводится в курсах физической оптики, но который мы здесь опускаем ввиду его громоздкости, приводит к следующим окончательным выражениям.

Освещенность E в точке A' , удаленной от центра A_0 пятна рассеяния на расстояние r' , выражается формулой

$$E = E_0 \left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2, \quad (\text{II. 221})$$

где E_0 — освещенность в точке A_0 (центр фигуры рассеяния).
Вспомогательная величина x связана с расстоянием r' формулой

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} n' \alpha' r', \quad (\text{II. 222})$$

где λ — длина волны света в пустоте;
 n' — показатель преломления в пространстве изображений;
 α' — задний апертурный угол (считаемый малым).

Величина x выражает отрезок r' в так называемых оптических единицах (безразмерных). Удобство применения оптических единиц заключается в том, что величина x , выраженная в этих единицах, сохраняет во всех промежуточных средах системы и в пространствах предметов и изображений постоянное численное значение вследствие инвариантности произведения $n' \alpha' r'$ (по инварианту Лагранжа—Гельмгольца).

Функция $J_1(x)$ есть бесселева функция первого рода и первого порядка, выражаемая, как известно, формулой

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \quad (\text{II. 223})$$

Расчет по этой формуле затруднителен, но можно пользоваться таблицами функций Бесселя для нахождения величины $J_1(x)$ (например, «Пятизначные математические таблицы» Б. И. Сегала и К. А. Семендяева, АН СССР, 1950). Вследствие формулы (II. 223) выражение (II. 221) может быть представлено в виде

$$\frac{E}{E_0} = G^2(x) = \left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2 = \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!(n+1)!} \right]^2. \quad (\text{II. 224})$$

В табл. II. 4 приведен ряд значений величины $100 E/E_0$ для разных значений аргумента x , а на рис. II. 36 эта зависимость представлена графически. Так как по формуле (II. 222) абсциссы точек этой кривой пропорциональны расстоянию r' , в то время как ординаты пропорциональны освещенности E , этот график выражает в некотором условном масштабе распределение освещенности в дифракционном пятне рассеяния. Представив себе результат вращения этого графика вокруг его вертикальной оси, мы видим, что пятно рассеяния состоит из центрального кружка,

в котором освещенность быстро убывает от центра к периферии, и из ряда колец, разделенных темными промежутками, в которых освещенность падает до нуля. Расчеты распределения освещенности в дифракционном пятне рассеяния впервые были выполнены Дж. Эри (1801—1892 гг.) в 1834 г. Центральный кружок дифракционной фигуры рассеяния называется кружком Эри. Его радиус, равный радиусу первого минимума, составляет 3,8317 оптических единиц.

В настоящее время стали широко применяться зеркальные и

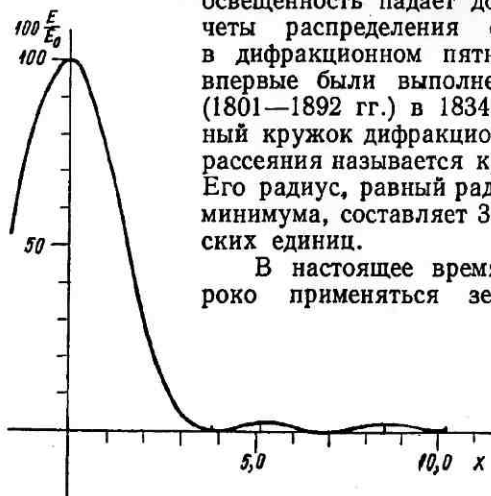


Рис. II. 36

зеркальнолинзовые оптические системы, у которых центральная часть зрачка экранирована (см., например, зеркальный объектив Кассегрена в § 83), и поэтому выходной зрачок имеет кольцеобраз-

Таблица II. 4

Распределение освещенности в дифракционном пятне рассеяния

x	$100 \frac{E}{E_0}$	x	$100 \frac{E}{E_0}$	Примечания
0,0	100,00	3,3	1,79	—
0,5	93,91	3,5	0,62	—
1,0	77,46	3,8317	0,00	Минимум
1,5	55,34	5,1356	1,75	Максимум
2,0	33,26	7,0156	0,00	Минимум
2,5	15,81	8,4172	0,42	Максимум
3,0	5,11	10,1735	0,00	Минимум
3,2	2,67	11,6200	0,16	Максимум

разную форму. Расчет распределения освещенности в пятне рассеяния в этом случае выражается формулой

$$E = \frac{E_0}{(1 - \eta^2)^2} \left[\frac{2J_1(x)}{x} - \eta^2 \frac{2J_1(x_1)}{x_1} \right]^2. \quad (\text{II. 225})$$

Здесь E_0 — освещенность в центре фигуры рассеяния.

Если E_D — освещенность в центре фигуры рассеяния при отсутствии центрального экранирования, то

$$E_0 = (1 - \eta^2)^2 E_D. \quad (\text{II. 226})$$

Входящая в эти формулы величина η есть коэффициент линейного экранирования и выражается формулой

$$\eta = \frac{D_1'}{D'}, \quad (\text{II. 227})$$

где D' — полный диаметр отверстия выходного зрачка;

D_1' — диаметр его центральной экранированной части.

Вспомогательная величина x_1 формулы (II. 225) определяется выражением

$$x_1 = \eta x. \quad (\text{II. 228})$$

При помощи таблиц бесселевых функций легко рассчитывается по формуле (II. 225) распределение освещенности при различных значениях η .

При этом обнаруживается, что при значениях η до 0,25 максимум освещенности в кружке Эри становится более острым, благодаря чему эффективный диаметр кружка уменьшается. Это благоприятно для четкости изображения, несмотря на то, что высота максимумов в кольцах несколько увеличивается. При $\eta = 0,30$ степень резкости изображения еще незначительно отличается от случая неэкранированного зрачка. Только при $\eta = 0,40$ наблюдается заметное, но во многих случаях еще допустимое ухудшение четкости изображения. Оптические системы с центральным экранированием применяются в настоящее время в качестве астрономических, фотографических и микроскопических объективов.

Возвращаясь к случаю неэкранированного зрачка, преобразуем формулу (II. 222), выполняя переход из пространства изображений в пространство предметов

$$x = \frac{2\pi}{\lambda} \text{паг}. \quad (\text{II. 229})$$

На чертеже (рис. II. 37) показан ход лучей в пространстве предметов. Из чертежа следует:

$$\alpha = \frac{D}{2\rho} \quad (\text{II. 230})$$

и, кроме того,

$$r = -\beta\rho. \quad (\text{II. 231})$$

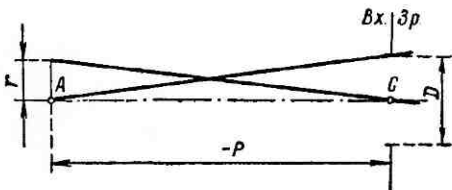


Рис. II. 37

Поэтому находим вместо (II. 229)

$$x = \frac{\pi}{\lambda} nD\beta. \quad (\text{II. 232})$$

(знак минус здесь отброшен). Решая это выражение относительно β , получим

$$\beta = \frac{\lambda x}{\pi nD}. \quad (\text{II. 233})$$

Это выражение служит основой для определения дифракционной разрешающей способности оптических приборов.

§ 62. Критерии разрешающей способности

Пусть на плоскости изображения некоторой оптической системы возникли изображения двух равно ярких точечных источников света. Пусть эти изображения расположены так близко один к другому, что их кружки Эри частично наложены друг на друга, как это показано на чертеже (рис. II. 38), где приведены также (сплошные линии) графики распределения освещенностей для каждого источника в отдельности. Учитывая, что источники света не когерентны (например, две звезды), мы можем получить результирующее распределение освещенности путем простого суммирования ординат двух графиков. Получаемый таким образом график (штриховая линия) напоминает гору с двумя вершинами, разделенными седловиной. Очевидно, что если впадина b недостаточно глубока по сравнению с высотой a вершин, то заметить ее невозможно, и два пятна рассеяния сольются в одно. В таком случае прибор не сможет разрешить эти два источника света.

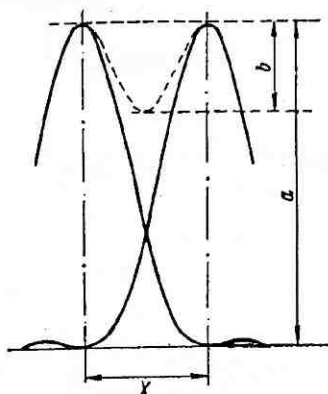


Рис. II. 38

Рассмотрение вопроса о необходимой глубине b седловины для разрешения двух светящихся точек привело к установлению правил, называемых критериями разрешающей способности. При этом применяется формула (II. 233), в которой под x подразумевается расстояние между центрами двух кружков Эри, выраженное в оптических единицах. В зависимости от различного выбора величины x при разных критериях, формула (II. 233) приводится к виду

$$\beta = \frac{k}{D}, \quad (\text{II. 234})$$

где коэффициент k имеет различные значения.

1. Первый критерий разрешающей способности был установлен английским физиком Релеем (Дж. Стратт, позднее лорд Релей, 1842—1919 гг.) в 1879 г. Не располагая в то время опытными данными, Релей установил критерий, носящий его имя, умозрительным путем. Он предложил считать два изображения светящихся точек лежащими на пределе разрешения в случае, если расстояние между центрами фигур рассеяния $x = 3,8317$, что соответствует такому расположению фигур, когда центральный максимум одной из них совпадает с первым минимумом второй. Это расположение показано на чертеже (рис. II. 38). Суммирование ординат кривых распределения освещенностей обнаруживает наличие у суммарной кривой глубокой седловины b , составляющей 22,5% от высоты a максимумов. Расчет по формуле (II. 233) при $n = 1$, $\lambda = 55 \cdot 10^{-6}$ мм и $x = 3,8317$ приводит к следующему результату: $\beta = 67,12 \cdot 10^{-6}/D$. Переходя от радиан к секундам путем умножения на множитель 206 265, получим выражение типа (II. 234)

$$\beta = \frac{138}{D}. \quad (\text{II. 235})$$

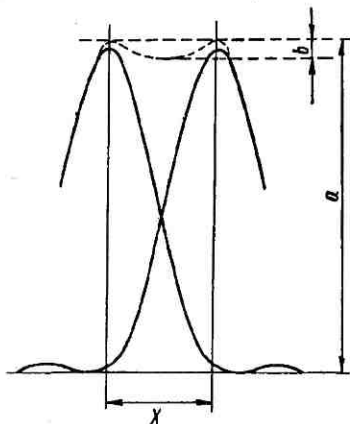


Рис. II. 39

Здесь D — в мм; β — в сек.

Формула показывает, что увеличение диаметра D входного зрачка прибора уменьшает угол β , а следовательно, повышает разрешающую способность прибора.

2. Накопленный астрономами к началу нашего столетия обширный материал по наблюдению двойных звезд при помощи разных телескопов позволил уточнить результат, полученный Релеем, и установить так называемый практический (астрономический) критерий разрешающей способности оптических приборов, основанный на положении, что глаз наблюдателя способен разрешить две светящиеся точки, если падение b освещенности в промежутке между двумя максимумами будет не менее 5% от максимума a (a не 22,5%, как получается при критерии Релея). Это позволяет различать светящиеся точки при меньшем расстоянии x между центрами кружков Эри, именно при $x = 3,3$. Такое расположение показано на чертеже (рис. II. 39). Расчет по формуле для β дает в этом случае (при той же длине волны света λ) $\beta = 57,77 \times 10^{-6}/D$ рад или, если β — в сек,

$$\beta = \frac{120}{D}. \quad (\text{II. 236})$$

Применяя эту формулу к глазу человека и полагая $D = 2$ мм, найдем: $\beta = 60''$, что действительно соответствует средней остроте зрения глаза.

3. Недостатком формулы (II. 236) является тот факт, что она связывает разрешающую способность оптических приборов со способностью глаза различать небольшие понижения освещенности: ведь глаз может быть заменен электронно-оптическим приемником, у которого эта способность окажется иной. Предусматривая такую возможность, проф. В. Е. Мурашкинский (Палата мер и весов, ныне ВНИИМ) уже около 1928 г. установил абсолютный критерий разрешающей способности оптических приборов.

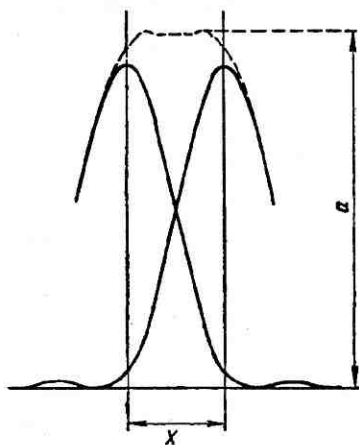


Рис. II. 40

Он нашел, что при некотором расстоянии x между центрами фигур рассеяния, достаточно малом, но не равном нулю, падение освещенности между обоими максимумами полностью исчезает. Поэтому абсолютный критерий характеризуется выражением $b = 0$. Путем подбора находим при этом условии величину x : $x = 3,0$. Получающееся при этом распределение освещенности показано на чертеже (рис. II. 40), из которого видно, что суммарный график в средней части очень близок к горизонтальной прямой. Из этого можно заключить, что, какой бы чувствительностью к падению освещенности между двумя максимумами ни обладал данный приемник световой энергии, он при $x = 3,0$ не сможет обнаружить наличия двух источников. Этим оправдывается введение абсолютного критерия. По формуле (II. 233) при $x = 3,0$ находится:

$\beta = 52,52 \cdot 10^{-5}/D$ рад или в сек:

$$\beta = \frac{108}{D}. \quad (\text{II. 237})$$

4. Формула (II. 236) практического критерия разрешающей способности получена на основании астрономических наблюдений. Но нужно не забывать, что астрономические телескопы, это — уникальные приборы, на изготовление, сборку и регулировку которых затрачиваются огромные средства, а их изготовление продолжается иногда много лет. Эти условия не соответствуют практике изготовления многих приборов, выпускаемых заводами в порядке серийного или даже массового изготовления. В таких приборах всегда остаются некоторые погрешности изготовления, сборки и регулировки, приводящие к заметному снижению их

разрешающей способности. Поэтому в 1934 г. по предложению Бюро стандартов США для оптических приборов серийного и массового изготовления введена формула для предельного угла β_d

$$\beta_d = \frac{140}{D}, \quad (\text{II. 238})$$

которая в сущности представляет собой возвращение к критерию Релея.

Определим по этой формуле предельный угол β_d дифракционной разрешающей способности призмного бинокля восьмикратного увеличения, для которого выше (§ 61) была определена разрешающая способность, зависящая от остроты зрения глаза наблюдателя. Полагая $D = 40$ мм, найдем $\beta_d = 3,5''$. Предельный угол глазной разрешающей способности был определен выше: $7,5''$. Это значит, что глаз наблюдателя не использует всю разрешающую способность прибора. Такой запас разрешающей способности следует признать целесообразным, учитывая, с одной стороны, что встречаются наблюдатели, обладающие повышенной остротой зрения, а с другой стороны, что при серийном изготовлении встречаются отдельные (и даже многочисленные) экземпляры прибора с пониженной разрешающей способностью. При наличии запаса разрешающей способности ни в том, ни в другом случае наблюдатель не обнаружит нерезкости изображения.

§ 63. Влияние aberrаций на разрешающую способность

В случае если выходящий из выходного зрачка пучок лучей, посылаемых осевой точкой предмета, негомоцентричен или, иными словами, оптическая система не свободна от сферической aberrации, распределение освещенности в дифракционном пятне рассеяния изменяется, а потому становится иной и разрешающая способность системы. При наличии сравнительно небольшой сферической aberrации положение максимумов и минимумов в дифракционной картине меняется незначительно, но часть световой энергии переходит из кружка Эри в кольца, вследствие чего центральный максимум понижается, а максимумы в кольцах становятся, наоборот, более высокими. В то же время падение освещенности в минимумах не достигает нуля. При большой сферической aberrации освещенность по площади значительно возрастает у краев пятна рассеяния выравнивается, кольца сливаются с кружком Эри и падение освещенности от центра к краю становится плавным, а иногда даже наблюдается падение освещенности в центре.

При сферической aberrации волновая поверхность W (рис. II. 35) приобретает несферическую форму, что сильно затрудняет расчет распределения освещенности E в окрестности точки A_0 . Поэтому понятно стремление исследователей упростить

задачу. Наиболее удобным оказалось применение критерия К. Штреля, предложенного в 1895 г. По утверждению Штреля, при малых aberrациях качество изображения достаточно характеризуется освещенностью E в центре кружка Эри. Если E_0 — освещенность в центре кружка Эри при отсутствии сферической aberrации, то отношение $m = E/E_0$, названное Штрелем *определяющей яркостью*, выражаемое в процентах, служит критерием резкости изображения: при m не менее 75% изображение почти не отличается от изображения безабберационной системы, при уменьшении m до 60% наблюдается ухудшение резкости изображения, считаемое обычно допустимым. При дальнейшем уменьшении величины m критерий Штреля становится недостаточным для суждения о степени резкости изображения, так как при постоянном значении освещенности в центре пятна, распределение энергии в кольцах может в этом случае оказаться различным.

Нахождение величины m требует предварительного определения волновых aberrаций l данной оптической системы, что производится по формулам, приведенным в § 98 настоящего курса. Коэффициент Штреля может быть рассчитан тогда по формуле

$$\frac{E}{E_0} = \frac{4}{\rho^4} \left[\left(\int_0^{\rho} y \cos \frac{2\pi l}{\lambda} dy \right)^2 + \left(\int_0^{\rho} y \sin \frac{2\pi l}{\lambda} dy \right)^2 \right], \quad (\text{II. 239})$$

где ρ — половина диаметра выходного зрачка системы: $\rho = \frac{1}{2}D'$.

Интегрирование входящих в эту формулу выражений может быть выполнено обычными методами вычисления определенных интегралов.

При наклонном ходе пучков лучей от внеосевой точки предмета вследствие влияния различных aberrаций форма волновых поверхностей может оказаться очень сложной и значительно отступить от симметрии относительно главного луча пучка. При исследовании распределения освещенности в пятне рассеяния необходимо различать макроструктуру и микроструктуру пятна рассеяния.

Макроструктура пятна рассеяния обусловлена наличием в нем фокальных линий и точек, в которых происходит сосредоточение световой энергии. Фокальные линии (а в частном случае — точки) возникают в результате пересечения каустики пучка экраном, воспринимающим изображение.

Микроструктура представляет собой полосатое строение отдельных участков пятна, обусловленное интерференцией, возникающей при наложении друг на друга частей светового потока, имеющих некоторую разность хода и когерентных благодаря общему происхождению (от одной точки источника света). Микроструктура накладывается на макроструктуру пятна рассеяния,

исчезая в наиболее ярких местах пятна (у фокальных линий и точек) и выявляясь более отчетливо в слабо освещенных участках пятна рассеяния.

§ 64. Разрешающая способность зрительных труб

Выше было показано, что предельный угол разрешающей способности приборов дальнего действия, обусловленный ограниченной остротой зрения глаза, выражается формулой (в сек)

$$\beta = \frac{60}{\Gamma}. \quad (\text{II. 240})$$

В то же время предельный угол дифракционной разрешающей способности (если не иметь в виду астрономических телескопов) определяется по стандартной формуле (в сек)

$$\beta_d = \frac{140}{D}. \quad (\text{II. 241})$$

Наибольшим предельно допустимым видимым увеличением будет то увеличение Γ , при котором $\beta = \beta_d$. Из формул (II. 240) и (II. 241) получаем: $\Gamma = \frac{3}{7} D = 0,429D$. Например, при $D = 40$ мм найдем: $\Gamma = 17,1\times$. Это в два с небольшим раза превосходит видимое увеличение восьмикратного призмного бинокля при том же диаметре входного зрачка. В литературных источниках определенное таким образом видимое увеличение иногда называют нормальным увеличением зрительной трубы. Это название крайне неудачно. Обычно увеличение зрительных труб бывает много меньше нормального, так как желательнее иметь некоторый запас дифракционной разрешающей способности по сравнению с глазной, о чем сказано выше (стр. 218). Только в случаях крайней необходимости при невозможности увеличить диаметр D до желаемой величины по эксплуатационным условиям приходится доходить до нормального увеличения, как это делается, например, в стереоскопических дальномерах.

Было бы более правильным назвать нормальным то видимое увеличение Γ , при котором угол β примерно в 2 раза превосходит угол β_d , например: $\beta = \frac{15}{7} \beta_d = 2,14\beta_d$. Для увеличения Γ получим в этом случае: $\Gamma = \frac{1}{6} D = 0,2D$. В этом случае восьмикратный бинокль имел бы нормальное увеличение.

Из теории зрительных труб (§ 78—80) известно, что диаметр D' выходного зрачка связан в зрительной трубе с диаметром D входного зрачка формулой

$$D' = \frac{D}{\Gamma}. \quad (\text{II. 242})$$

Поэтому получим в случае старого нормального увеличения $D' = \frac{1}{8} D = 5,0$ мм, а в случае нового нормального увеличения $D' = 5,0$ мм.

Следует, впрочем, заметить, что в зрительных трубах геодезических (а также и астрономических) инструментов иногда диаметр выходного зрачка уменьшается до 1,0 мм. С другой стороны, во многих приборах военного назначения D' делается больше 5 мм. Это повышает светосилу зрительной трубы при наблюдении в сумерках (так называемая ночезрительная труба, предложенная еще М. В. Ломоносовым). Кроме того, большой диаметр выходного зрачка обеспечивает удобство пользования оптическим прибором в условиях вибрации и тряски платформы, на которой установлен прибор.

Исследование разрешающей способности зрительных труб производится опытным путем при помощи миры. *Мирой* называется прозрачная стеклянная пластинка, разбитая на квадратики. В каждом квадратике содержится ряд параллельных штрихов, попеременно прозрачных и непрозрачных, равной ширины. Ширина штрихов меняется от квадратика к квадратику. Хорошо освещенная мира помещается в передней фокальной плоскости длиннофокусного объектива коллиматора, вслед за которым расположена испытываемая зрительная труба. Между окуляром трубы и глазом наблюдателя ставят еще дополнительную зрительную трубку обычно четырехкратного увеличения. Предельный угол разрешающей способности зрительной трубы определяется по формуле

$$\beta = 206\,000 \frac{l}{f'}, \quad (\text{II. 243})$$

где l — ширина линий в последнем квадратике, в котором линии еще различимы;

f' — фокусное расстояние объектива коллиматора.

Определение разрешающей способности зрительных труб хорошо производится путем рассматривания (и измерения) пятна рассеяния при настолько большом увеличении, чтобы хорошо была видна микроструктура этого пятна, получаемого при наблюдении искусственной (или естественной) звезды.

Применение в зрительных трубах электронно-оптических преобразователей (эопов) позволяет вести наблюдение в инфракрасной области спектра. Эта возможность очень ценна, так как она позволяет видеть в тумане и ночью. Эопы во много раз расширяют спектральную область работы оптических приборов, повышая этим общее количество лучистой энергии, управляемой прибором и используемой им при образовании изображения. Это привело к значительному (почти десятикратному) повышению эффективности астрономических наблюдений при помощи эопов.

Нужно, однако, иметь в виду, что переход к большим длинам волн λ в инфракрасной области связан с потерей разрешающей способности. В соответствии с формулой (II. 233) при увеличении длины волны λ при прочих равных условиях во столько же раз

возрастает и предельный угол разрешающей способности. В общей формуле (II. 234) для β коэффициент k нужно при переходе в инфракрасную область помножить на отношение длин волны $\lambda_{\text{ИК}}/\lambda_{\text{в}}$ в инфракрасной и видимой областях спектра. Полагая $\lambda_{\text{в}} = 0,55 \text{ мкм}$, а $\lambda_{\text{ИК}}$ от 0,9 до 3,0 мкм, нужно считать это отношение лежащим в пределах

$$1,64 \leq \frac{\lambda_{\text{ИК}}}{\lambda_{\text{в}}} \leq 5,45.$$

При часто применяемом в настоящее время среднем значении $\lambda_{\text{ИК}} = 1,2 \text{ мкм}$ получаем: $\lambda_{\text{ИК}}/\lambda_{\text{в}} = 2,18$. Поэтому найдем в инфракрасной части спектра следующие формулы для предельного угла β дифракционной разрешающей способности. По практическому критерию (для астрономических приборов)

$$\beta = \frac{262}{D}; \quad (\text{II. 244})$$

по абсолютному критерию

$$\beta = \frac{236}{D}; \quad (\text{II. 245})$$

по стандартной формуле (или по критерию Релея)

$$\beta = \frac{300}{D}. \quad (\text{II. 246})$$

Нужно еще иметь в виду, что разрешающая способность современных инфракрасных приборов лимитируется ограниченной разрешающей способностью экранов эопов, составляющей примерно 25—30 линий на мм. Подробнее об этом сказано в § 86, где рассмотрено конструирование зрительных труб с эопами. В последнее время появляются эопы с более мелкозернистыми экранами.

§ 65. Разрешающая способность фотографических объективов

Фотографические объективы представляют собой группу оптических приборов, обладающих интересным свойством: их волновые aberrации в 4—5 раз превосходят установленную Релеем границу в одну четверть длины волны света для «хороших» оптических приборов, а в то же время они обладают нередко высоким качеством изображения. Это происходит потому, что все же очень тонкая разрешающая способность самого объектива огрубляется низкой разрешающей способностью фотографической пленки. Крупнозернистость современных сортов высокочувствительной фотопленки маскирует влияние aberrаций.

Предположим, что несмотря на более сильное влияние aberrаций предельный угол β разрешающей способности выражается формулой типа (II. 234)

$$\beta = \frac{k}{D}. \quad (\text{II. 247})$$

Это не противоречит опытным данным, но коэффициент k должен определяться с учетом влияния аберраций. Такие исследования неоднократно производились с применением волновых аберраций и с использованием характеристики Штреля. Они приводят, однако, к неоправданно сложным расчетам. Поэтому для практических целей удобнее пользоваться опытными данными.

Полагая, что в формуле (II. 247) угол β выражен в радианах, найдем, что величина δ' изображения, находящегося на пределе разрешения (при бесконечно далеком предмете), выразится так:

$$\delta' = k \frac{f'}{D}, \quad (\text{II. 248})$$

где f' — заднее фокусное расстояние объектива.

Тогда разрешающую способность N , выраженную числом разрешаемых линий на длине в 1 мм на плоскости изображения, можно представить формулой

$$N = \frac{1}{\delta'} = \frac{1}{k} \frac{D}{f'}. \quad (\text{II. 249})$$

По этой формуле разрешающая способность N фотографического объектива пропорциональна его относительному отверстию. Это справедливо для объективов с малым и средним относительным отверстием (примерно до 1 : 3,5), но фотографы, имеющие дело со светосильными объективами, знают, что уменьшение относительного отверстия иногда повышает разрешающую способность за счет уменьшения аберраций.

Коэффициент $1/k$ формулы (II. 249) может быть определен экспериментальным путем, но при этом получаются очень разные результаты в зависимости от способа измерения разрешающей способности. Последнюю можно измерять рассматривая изображение миры в плоскости изображения, пользуясь достаточно сильными микроскопом. Изображение миры при этом просто висит в воздухе. Но можно рассматривать также через микроскоп фотографическое негативное изображение миры на проявленной пленке. В первом случае мы обнаружим ту мелкую структуру или «высокую частоту» решетки (миры), которую способен разрешить сам объектив, независимо от способа регистрации (или фиксации) изображения. Во втором случае на эту картину накладывается влияние зернистого строения светочувствительного слоя фотопленки. Зернистость фотопленки огрубляет наблюдаемую картину или, если воспользоваться терминологией радиоэлектроники, приводит к срезанию высоких частот миры. Но влияние аберраций сказывается наиболее сильно именно на высоких частотах, лежащих вблизи предела разрешающей способности и становится малозаметным на остающихся низких частотах.

Если бы разрешающая способность фотографического объектива подчинялась стандартной формуле (II. 238), то

коэффициент $1/k$ формулы (II. 249) определен бы следующим образом: $1/k = 206\ 265 : 140 = 1475$. Формула (II. 249) приобретает вид

$$N_0 = 1475 \frac{D}{f'} \quad (\text{II. 250})$$

Опыт показывает, что разрешающая способность, измеренная первым способом, у лучших фотографических объективов значительно меньше N_0 . Так, например, для известного анастигмата «Индустар» при относительном отверстии 1 : 4,5 разрешающая способность составляет $N = 275$ линий на мм, вместо $N_0 = 328$ линий на мм. Для объектива «Плазмат» 1 : 4 испытание дает $N = 230$ линий на мм, вместо $N_0 = 369$ линий на мм.

Принимая разрешающую способность «Индустара» за образец, можно вычислить коэффициент формулы (II. 249), которая тогда приобретает вид

$$N_{\text{Инд}} = 1240 \frac{D}{f'} \quad (\text{II. 251})$$

Для современных анастигматов с относительным отверстием до 1 : 2 (например, объектив «Юпитер») более близкий результат дает формула

$$N_{\text{Юп}} = 560 \frac{D}{f'} \quad (\text{II. 252})$$

Совсем другая картина обнаруживается, если разрешающая способность определяется путем рассматривания через микроскоп проявленного негативного изображения миры на фотопленке. В качестве примера приводим здесь результаты для трехлинзового объектива «Эльмар» при разных относительных отверстиях, полученные на фотографической пленке «Изопан F» фирмы «Агфа» (ГДР), обладающей разрешающей способностью около 90 линий на 1 мм:

Относительное отверстие	Количество линий на 1 мм
1 : 3,5	49,2
1 : 4,5	55,0
1 : 6,3	66,7
1 : 9	68,9
1 : 12,5	70,6
1 : 18	60,6
1 : 25	47,7

Из этого сопоставления видно, что с уменьшением относительного отверстия разрешающая способность сначала повышается, достигает максимума вблизи относительного отверстия 1 : 12,5, а затем только начинает понижаться, как того требует теоретическая формула (II. 249).

§ 66. Разрешающая способность оптических приборов с электронными приемниками лучистой энергии

Применение фотографических объективов в качестве оптических датчиков в телевизионных, а в особенности в кибернетических, устройствах заставляет нас взглянуть на разрешающую способность оптических систем с новой точки зрения: получения по данному оптическому и электронному каналу необходимого количества информации. Определение этого количества информации требует знания величины разрешающей способности фотографического объектива в зависимости от двух факторов: от частоты N (в линиях на мм), передаваемой структуры изображения и от контраста K , определяемого по формуле

$$K = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}, \quad (\text{II. 253})$$

где E_{\max} и E_{\min} — наибольшая освещенность светлых линий и наименьшая освещенность темных линий передаваемой структуры.

Рассмотрение этого вопроса приводит к установлению понятия о *частотно-контрастных характеристиках* оптических систем. Однако исследование этой проблемы еще нельзя считать законченным.

Мы рассмотрим здесь лишь некоторые вопросы, наиболее нужные конструктору.

Если изображение, получаемое от какого-либо предмета, принимается приемным экраном телевизионной трубки, то необходимо иметь в виду, что по стандарту, принятому в СССР и в ряде зарубежных стран, это изображение разлагается на 625 строк по высоте. Можно показать, что разложение изображения в строки приводит к ограничению поля зрения телевизионных камер.

Пусть угол поля зрения прибора, измеренный в вертикальной плоскости, будет $2\beta_v$, фокусное расстояние объектива камеры — f' и высота экрана приемной трубки — h . Имеем очевидную зависимость, связывающую эти три величины,

$$h = 2f' \operatorname{tg} \beta_v. \quad (\text{II. 254})$$

Если γ — малый угол, под которым в пространстве предметов представляется ширина одной строки, находим

$$\gamma = \frac{h}{625f'}. \quad (\text{II. 255})$$

При помощи выражения (II. 254) отсюда исключаем h и f' и, решив уравнение относительно $\operatorname{tg} \beta_v$, находим

$$\operatorname{tg} \beta_v = 312,5\gamma. \quad (\text{II. 256})$$

Угол 2γ можно считать предельным углом разрешающей способности телевизионной камеры (в вертикальной плоскости), так

как разрешаются два элемента, между которыми есть по крайней мере одна пустая строка.

Рассматривание изображения на экране телевизора с целью получения художественного эффекта следует осуществлять при условии естественного впечатления, при котором предельный угол γ' разрешающей способности со стороны глаза принимается равным углу 2γ (см. § 57). Если при этом поставить условие, чтобы разбивка экрана на строки была едва ощутима для зрителя, следует положить: $\gamma' = 2\gamma = 2' = 0,00058$. Из выражения (II. 256) получим: $\text{tg } \beta_V = 0,0906$, а потому $2\beta_V = 10^\circ 22'$. Столь малый угол поля зрения чрезвычайно затрудняет работу режиссеров и операторов при съемке телевизионных постановок. Поэтому принято считать, что, во-первых, обычно при рассматривании изображения на экране телевизора условие естественного впечатления нарушается и, во-вторых, допускается некоторая видимость строк на экране. Это позволяет довести угол γ примерно до $3'$, положив $\gamma = 0,001 \text{ рад}$. По формуле (II. 256) находим: $\text{tg } \beta_V = 0,3125$, откуда следует: $2 \text{tg } \beta_V = 34^\circ 42'$. Принимая, что отношение горизонтального размера (ширины) l экрана к его высоте h определяется обычно принятой величиной

$$\frac{l}{h} = \frac{18}{13} = 1,385, \quad (\text{II. 257})$$

найдем для горизонтального угла поля зрения $2\beta_H$: $\text{tg } \beta_H = 1,385$ и для вертикального угла $2\beta_V$: $\text{tg } \beta_V = 0,4327$, а потому $2\beta_H = 46^\circ 46'$. Для угла $2\beta_D$ по диагонали экрана при этом находим: $2\beta_D = 56^\circ 8'$. Это примерно соответствует обычному полю зрения современных светосильных анастигматов, но делает недопустимым применение широкоугольных объективов в телевидении.

Ограниченная разрешающая способность современных эопов имеет совершенно иное физическое происхождение, нежели зернистость фотопленки, так как дисперсность флуоресцирующих слоев, наносимых на экраны эопов, может быть очень высокой. Разрешающая способность эопов ограничивается в основном абберациями электронных пучков, так как в целях придания эопам компактности апертура электронных пучков делается сравнительно высокой.

Однако по своему влиянию на структуру изображения эопы не отличаются от зернистых фотопленок: структура также огрубляется вследствие срезания высоких частот. Вопрос о том, каким образом учитывается разрешающая способность эопов в расчете зрительных труб с эопами, подробно изложен ниже (см. § 86).

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

А. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРИНЦИПОВ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

§ 95. Основы учения об эйконе

Для решения многих вопросов, возникающих при создании новых оптических приборов, оказывается достаточным упрощенное представление о распространении света, не учитывающее его волновые свойства. Но в тех случаях, когда речь идет о тонкой структуре изображения, упрощенное представление оказывается несостоятельным и возникает необходимость рассмотреть влияние волнового строения света на свойства оптического изображения. Так, при рассмотрении вопросов, связанных с разрешающей способностью оптических приборов, в предыдущих разделах учебника не раз приходилось учитывать действие дифракции и интерференции света, возникающих на его пути внутри оптических приборов. В настоящем разделе, посвященном изучению процесса образования оптического изображения, учет волновой структуры света совершенно необходим.

На первый взгляд может показаться, что переход от понятий лучевой оптики к понятиям волновой оптики носит чисто формальный характер и сводится к переводу с языка геометрической оптики на язык волновой оптики: вместо «луч» говорим «нормаль к волновой поверхности», вместо «пучок параллельных лучей» говорим «плоская волна света». Но кроме такого формального перехода здесь возникает существенная новая связь, накладываемая на явления распространения света. Это происходит вследствие того, что световые волны, являясь энергетическими поверхностями уровня светового поля, не могут прерываться. Эта связь выражается при помощи особой функции, так называемого *эйконала*, и приводит к возможности установления ряда общих закономерностей, которым подчиняются различные оптические

системы и которые управляют образованием оптического изображения. К числу этих закономерностей относятся, например, условие образования точечного изображения и закон синусов.

Основанием для вывода таких закономерностей служит известное из волновой теории света выражение для световых колебаний в случае, когда световая волна имеет произвольную форму

$$s = a \sin \omega \left(t - \frac{E}{c} \right). \quad (V. 1)$$

Здесь s — величина светового (электрического) вектора;

a — амплитуда колебаний этого вектора, зависящая от координат точки пространства, в которой наблюдаются эти колебания, но не зависящая от времени t ;

ω — угловая частота колебаний (постоянная величина);

t — время, протекающее от некоторого начального момента;

c — скорость света в пустоте (постоянная величина);

E — функция от координат точки (не зависящая от времени t), определяющая характер распространения света и форму волновых поверхностей.

В случае плоских световых волн, если распространение света протекает вдоль оси x , формула (V. 1) приобретает вид

$$s = a \sin \omega \left(t - \frac{nx}{c} \right). \quad (V. 2)$$

Теперь амплитуда a постоянна (не зависит ни от координат, ни от времени). Характеристическая функция E имеет в этом случае простое выражение.

Если координаты некоторой точки пространства постоянны, то выражение (V. 1) описывает колебательный световой процесс, происходящий в этой точке (s представляется функцией от t). Если же зафиксирован некоторый момент времени t ($t = \text{const}$), то выражение (V. 1) представляет распределение различных значений светового вектора s в пространстве. Величина φ

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{E}{c} \right) \quad (V. 3)$$

называется фазой колебания. Известно, что волновая поверхность есть поверхность постоянного значения фазы φ . Если поэтому мы в выражении (V. 3) будем считать φ постоянным, то оно представит нам процесс изменения во времени формы и положения световой волны. Если же, кроме того, зафиксируем некоторый момент времени, т. е. положим

$$\varphi = \text{const}; \quad t = \text{const}, \quad (V. 4)$$

то выражение (V. 3), связывающее теперь пространственные координаты, является уравнением волновой поверхности при данных значениях величин φ и t . Так как при этом входящие в это

уравнение величины φ , ω , t и c постоянны, то и характеристическая функция E тоже должна быть постоянной: $E = \text{const}$. Отсюда следует вывод: на фиксированной волновой поверхности характеристическая функция E имеет постоянное значение. *Фиксированная* волновая поверхность — поверхность, рассматриваемая в некоторый фиксированный момент времени t , а потому неподвижная.

Мы видим, таким образом, что функция от координат E определяет собой форму и положение световой волны в пространстве. Но отступление волновой поверхности от шаровой формы или, говоря языком геометрической оптики, отступление от гомоцентричности светового пучка, приводит к неточечному, нерезкому

изображению. Отсюда становится понятным, что функция E определяет также качество изображения, создаваемого оптической системой. Поэтому характеристическую функцию E называют эйконалом (в переводе с греческого языка — изобразитель).

Обратимся теперь к выяснению некоторых свойств эйконала E . Считая в формуле (V. 3) φ постоянным, путем дифференцирования находим

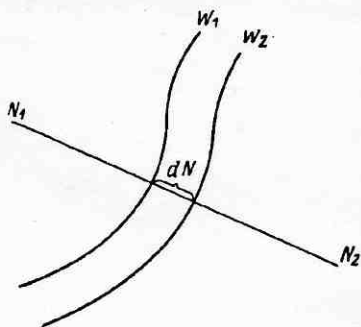


Рис. V. 1

$$dE = c dt. \quad (V. 5)$$

На чертеже (рис. V. 1) показано положение световой волны W_1 в некоторый момент времени t . В момент времени $t + dt$ волновая поверхность, переместившись в пространстве, займет положение W_2 . Распространение света происходит вдоль нормалей к волновым поверхностям. Пусть прямая N_1N_2 представляет собой одну из таких нормалей к волновым поверхностям W_1 и W_2 . С точки зрения геометрической оптики прямая N_1N_2 есть луч света. Обозначим через dN бесконечно малый путь, пройденный светом между волновыми поверхностями W_1 и W_2 за промежуток времени dt . Тогда скорость v распространения света можно представить в виде выражения

$$v = \frac{dN}{dt}. \quad (V. 6)$$

Из физической оптики известно, что скорость v распространения света в среде с показателем преломления n выражается через скорость c света в пустоте формулой

$$v = \frac{c}{n}. \quad (V. 7)$$

Исключив v из (V. 6) и (V. 7), получим

$$cdt = n dN. \quad (\text{V. 8})$$

Наконец, сравнивая (V. 5) и (V. 8), найдем выражение

$$dE = ndN. \quad (\text{V. 9})$$

Формула (V. 9) есть написанное в общем виде дифференциальное уравнение эйконала.

Для практического применения этого уравнения нам необходимо перейти к некоторой системе декартовых координат x , y , z . Воспользуемся известным положением теории функций. Пусть нам дана некоторая функция $F(x, y, z)$ от координат; дано также и некоторое направление N в пространстве, т. е. даны направляющие косинусы углов, образованных направлением N с осями координат: $\cos(N, x)$, $\cos(N, y)$ и $\cos(N, z)$. Тогда частные производные функции F по координатам выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{dF}{dN} \cos(N, x); \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{dF}{dN} \cos(N, y); \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{dF}{dN} \cos(N, z). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 10})$$

Применив эти формулы к эйконалу E , получим, учитывая выражение (V. 9),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{dE}{dN} \cos(N, x) = n \cos(N, x); \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= \frac{dE}{dN} \cos(N, y) = n \cos(N, y); \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{dE}{dN} \cos(N, z) = n \cos(N, z). \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 11})$$

Формулы (V. 11) позволяют выяснить очень важное свойство эйконала E : его частные производные по координатам (при известном показателе преломления n) определяют направляющие косинусы луча, проходящего через точку с координатами x , y и z .

Резюмируя изложенное, можно утверждать, что эйконал E есть характеристическая функция координат, имеющая постоянное значение на фиксированной волновой поверхности, а его частные производные по координатам определяют направляющие косинусы луча света, проходящего через заданную точку пространства.

Из аналитической геометрии известно положение

$$\cos^2(N, x) + \cos^2(N, y) + \cos^2(N, z) = 1. \quad (V. 12)$$

Возводя в квадрат и складывая формулы (V. 11), вследствие выражения (V. 12) находим выражение

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2 = n^2. \quad (V. 13)$$

Это выражение есть дифференциальное уравнение эйконала в частных производных. В общем случае показатель преломления n является функцией от координат. Поэтому интегрирование уравнения (V. 13) представляет, вообще говоря, значительные труд-

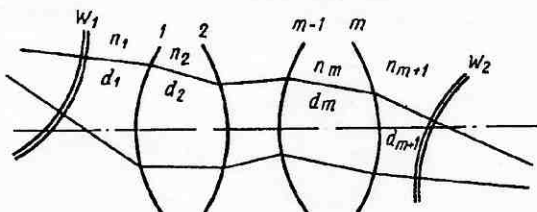


Рис. V. 2

ности и было практически выполнено только для нескольких особенно простых частных случаев.

Можно, однако, исходя из дифференциального уравнения (V. 9), определить геометрический смысл эйконала E . Для этого рассмотрим сначала случай, когда n постоянно, т. е. когда распространение света происходит в среде с постоянным показателем преломления. В этом случае выражение (V. 9) интегрируется просто

$$E_2 - E_1 = n \int dN. \quad (V. 14)$$

В левой части получается разность значений эйконала E на двух фиксированных волновых поверхностях W_1 и W_2 . В правой части постоянная величина n выносится за знак интеграла, а интеграл в правой части есть, очевидно, длина d пути, пройденного светом вдоль луча между волновыми поверхностями. Поэтому из выражения (V. 14) следует

$$E_2 - E_1 = nd. \quad (V. 15)$$

Если свет проходит через оптическую систему, состоящую из m преломляющих поверхностей, то n уже не будет постоянным. Показатель преломления n в этом случае меняется скачкообразно при переходе светового луча через каждую преломляющую поверхность, как это показано на чертеже (рис. V. 2), где указаны

и необходимые обозначения. Путь луча света между двумя фиксированными волновыми поверхностями W_1 и W_2 представляется в виде ломаной прямой, состоящей из $m + 1$ прямолинейного отрезка, имеющих длины d_1, d_2, \dots, d_{m+1} .

Дифференцируя снова формулу (V. 9), имеем

$$E_2 - E_1 = \int n dN. \quad (\text{V. 16})$$

Интеграл в правой части этого выражения можно представить в виде суммы интегралов, из которых каждый охватывает путь света на одном прямолинейном участке

$$E_2 - E_1 = \sum_{s=1}^{s=m+1} \int n_s dN_s. \quad (\text{V. 17})$$

Так как в пределах каждого прямолинейного участка светового пути показатель преломления n_s постоянен, он может быть вынесен за знак интеграла

$$E_2 - E_1 = \sum_{s=1}^{s=m+1} n_s \int dN_s. \quad (\text{V. 18})$$

Отсюда, действуя аналогично формуле (V. 15), находим окончательное выражение

$$E_2 - E_1 = \sum_{s=1}^{s=m+1} n_s d_s. \quad (\text{V. 19})$$

Сумму в правой части этого выражения называют оптической длиной хода светового луча. Таким образом выясняется геометрический смысл эйконала E : разность значений эйконала E на двух фиксированных волновых поверхностях W_1 и W_2 равна оптической длине хода светового луча между этими волновыми поверхностями.

§ 96. Принцип таутохронизма

Представим себе, что фиксированные волновые поверхности W_1 и W_2 (рис. V. 2) связаны друг с другом множеством световых лучей, проходящих на своем пути через оптическую систему. Тогда выражение (V. 19) может быть составлено для каждого луча. В правой части этого выражения отрезки d_s разных лучей, лежащие в одной и той же среде, а потому имеющие один номер s , не будут, конечно, равны друг другу. Однако левые части всех таких уравнений равны между собой, так как значение эйконала E на каждой волновой поверхности постоянно, а потому постоянна и разность $E_2 - E_1$ значений эйконала на двух

фиксированных поверхностях. Следовательно, должны быть равны и правые части этих выражений, и можно поэтому написать

$$\sum_{s=1}^{s=m+1} n_s d_s = \text{const.} \quad (\text{V. 20})$$

Это выражение называется *законом таутохронизма* и может быть сформулировано так: оптическая длина хода всех световых лучей, идущих между двумя фиксированными волновыми поверхностями, постоянна.

Закон таутохронизма представляет собой точный закон природы, всегда строго выполняемый при распространении световых волн, независимо от свойств оптической системы, расположенной в ходе лучей между фиксированными волновыми поверхностями. Благодаря этому следует считать его наиболее общей и универсальной закономерностью, характеризующей распространение света при прохождении его через любые оптические системы.

Физический смысл этого закона можно установить посредством следующих преобразований. Применяя формулу (V. 7) к s -й среде оптической системы, находим скорость v_s распространения света в этой среде

$$v_s = \frac{c}{n_s}. \quad (\text{V. 21})$$

Время τ_s , затрачиваемое светом на прохождение пути d_s , можно выразить формулой

$$\tau_s = \frac{d_s}{v_s}. \quad (\text{V. 22})$$

Отсюда получим с учетом выражения (V. 21)

$$\tau_s = \frac{n_s d_s}{c}. \quad (\text{V. 23})$$

Время T , затрачиваемое светом на прохождение всего пути вдоль луча, соединяющего фиксированные волновые поверхности W_1 и W_2 , составляет, очевидно, сумму отрезков времени τ_s . Вследствие (V. 23) получим

$$T = \sum_{s=1}^{s=m+1} \tau_s = \frac{1}{c} \sum_{s=1}^{s=m+1} n_s d_s. \quad (\text{V. 24})$$

В правой части этого выражения получена сумма, представляющая собой оптическую длину хода лучей между двумя фиксированными волновыми поверхностями, постоянство которой вдоль всех лучей установлено законом таутохронизма. Поэтому постоянным должно быть и время T прохождения светом пути между двумя фиксированными волновыми поверхностями вдоль любого

луча. Отсюда следует, что свет, покидающий в некоторый момент времени различные участки волновой поверхности W_1 , одновременно достигает второй волновой поверхности W_2 . Основываясь на этой физической интерпретации закона, его называют законом таутохронизма (законом одновременности).

В дальнейшем изложении для сокращения письма вводится следующее условное обозначение:

$$[W_1 W_2] = \sum_{s=1}^{s=m+1} n_s d_s. \quad (\text{V. 25})$$

При этом в квадратные скобки заключаются обозначения тех геометрических величин (волновых поверхностей, точек и т. п.), между которыми определяется данная величина оптической длины хода лучей.

Известный закон преломления, найденный Снеллиусом в 1618 г., может быть получен как следствие закона таутохронизма. Заметим предварительно, что в приведенном выше выводе закона таутохронизма нигде не участвует закон преломления. Представим себе плоскую поверхность $P_1 P_2$ (рис. V. 3), разделяющую две среды с показателями преломления n и n' . Луч $M_1 P_1$, падающий на преломляющую плоскость, образует угол падения $\omega = M_1 P_1 N_1$. Преломленный луч $P_1 L_2$ образует угол преломления $\omega' = L_2 P_1 N_2$. При этом $N_1 N_2$ — нормаль к плоскости $P_1 P_2$ в точке P_1 . Падающий луч $L_1 P_2$ параллелен лучу $M_1 P_1$, а преломленный луч $P_2 M_2$ параллелен лучу $P_1 L_2$. Плоскость $M_1 P_2$ является плоской волновой поверхностью, перпендикулярной к лучам $M_1 P_1$ и $L_1 P_2$ (падающая волна W_1). Таким же образом плоская волновая поверхность $P_1 M_2$ перпендикулярна к преломленным лучам $P_1 L_2$ и $P_2 M_2$ (преломленная волна W_2).

На основании закона таутохронизма оптическая длина хода лучей между волновыми поверхностями W_1 и W_2 должна быть постоянной как вдоль луча $L_1 P_2 M_2$, так и вдоль луча $M_1 P_1 L_2$. Поэтому

$$n M_1 P_1 = n' P_2 M_2. \quad (\text{V. 26})$$

По чертежу находим

$$\angle M_1 P_2 P_1 = \omega; \quad \angle M_2 P_1 P_2 = \omega'. \quad (\text{V. 27})$$

Поэтому из треугольника $M_1 P_2 P_1$ определяется отрезок $M_1 P_1$

$$M_1 P_1 = P_1 P_2 \sin \omega. \quad (\text{V. 28})$$

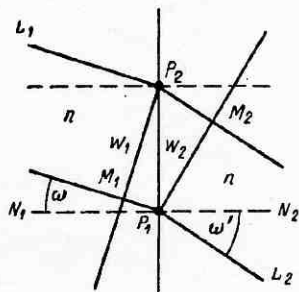


Рис. V. 3

Таким же образом получим из треугольника $M_2P_2P_1$

$$P_2M_2 = P_1P_2 \sin \omega'. \quad (V. 29)$$

Подставив значения отрезков M_1P_1 и P_2M_2 из выражений (V. 28) и (V. 29) в формулу (V. 26), найдем после сокращения на величину P_1P_2

$$n \sin \omega = n' \sin \omega', \quad (V. 30)$$

а это и есть закон преломления.

В свою очередь, из закона преломления может быть получен так называемый *принцип Ферма* (1601—1665 гг.), который утверждает, что оптическая длина хода луча, соединяющая две несопряженные точки, имеет всегда экстремальное значение по сравнению с другими путями, близкими к истинному пути луча. Покажем здесь справедливость этого принципа в случае преломления света через одну преломляющую поверхность (рис. V. 4), разделяющую две среды с показателями преломления n и n' . Преломляющая поверхность может иметь любую форму.

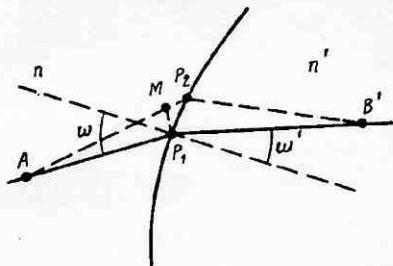


Рис. V. 4

Пусть имеется луч AP_1B' , соединяющий несопряженные точки A и B' и образующий углы ω и ω' с нормалью в точке падения P_1 . Выберем на преломляющей поверхности точку P_2 , бесконечно близкую к точке P_1 , так что отрезок $P_1P_2 = ds$ есть величина первого порядка малости. Соединив точку P_2 с точками A и B' , получим путь AP_2B' , соседний с лучом AP_1B' .

Оптическая длина хода луча AP_1B' может быть представлена в виде

$$[AB'] = nl + n'l', \quad (V. 31)$$

где $l = AP_1$ и $l' = P_1B'$.

При переходе от луча AP_1B' к соседнему пути AP_2B' оптическая длина хода луча получит приращение $d[AB']$

$$d[AB'] = ndl + n'dl'. \quad (V. 32)$$

Чтобы определить величину этого приращения, восстановим в точке P_1 перпендикуляр P_1M к лучу AP_1 . Из-за малости угла P_1AP_2 можно считать $AM = AP_1$. Поэтому отрезок MP_2 можно рассматривать как приращение dl отрезка $AP_1 = l$ при переходе от луча AP_1B' к соседнему пути AP_2B' . Пренебрегая величинами порядка малости выше первого, найдем из треугольника MP_1P_2

$$dl = ds \sin \omega. \quad (V. 33)$$

Аналогично находится

$$dl' = -ds \sin \omega'. \quad (V. 34)$$

Вследствие двух последних выражений получим из (V. 32)

$$d [AB'] = (n \sin \omega - n' \sin \omega') ds. \quad (V. 35)$$

Учитывая закон преломления (V. 30), заметим, что величина в скобках в правой части выражения (V. 35) обращается в нуль. Тем самым доказано, что приращение $d [AB']$ равно нулю; это свидетельствует о том, что сама величина $[AB']$ имеет экстремальное значение: либо максимум, либо минимум, что и утверждается принципом Ферма.

Три закономерности, о которых здесь идет речь, — закон таутохронизма, закон преломления и принцип Ферма — взаимосвязаны таким образом, что если одну из них считать данной, то две другие вытекают из нее.

§ 97. Условие образования точечного изображения

Общий характер рассмотренного выше закона таутохронизма, его применимость к всевозможным оптическим системам, независимо от специфических особенностей их устройства и действия, делают его ценным орудием при теоретических исследованиях оптических систем.

Конструктора оптических приборов особенно интересуют оптические системы, осуществляющие точечное изображение, или так называемые стигматические оптические системы. Под этим термином подразумеваются такие системы, которые заставляют все лучи света, исходящие из некоторой точки A предмета, после их прохождения через оптический прибор вновь пересечься в одной точке A' изображения, сопряженной с точкой A . При осуществлении этого требования изображение точки A будет наиболее резким, а размер пятна рассеяния будет зависеть только от действия дифракции, вызываемой ограничением пучков лучей в данном оптическом приборе. Поэтому понятно, что для создания оптических приборов, отличающихся высоким качеством изображения, одним из важнейших условий должно быть образование точечного изображения.

Такое условие действительно может быть получено путем применения закона таутохронизма. На чертеже (рис. V. 5) представлен гомоцентрический пучок лучей, исходящих из некоторой точки A предмета, помещенного в среду с показателем преломления n . В таком случае волновые поверхности в пространстве предметов должны, как известно, иметь форму шаров с центром в точке A . Пусть шаровая поверхность W представляет одну из этих волновых поверхностей и имеет радиус r . Эту волновую поверхность будем считать фиксированной.

После прохождения через оптическую систему (не показанную на чертеже) излучаемый точкой A пучок лучей выходит в пространство изображений, где находится среда с показателем преломления n' . Здесь тоже образуется последовательный ряд волновых поверхностей, имеющих, вообще говоря, не шаровую форму. Вследствие этого лучи света, представляющие собой нормали к волновым поверхностям, не будут пересекаться в одной точке, и оптическая система не даст поэтому точечного изображения точки A . На экране, поставленном в узком месте пучка, получится нерезкое изображение в виде пятна рассеяния, размеры которого зависят не только от явлений дифракции и места поло-

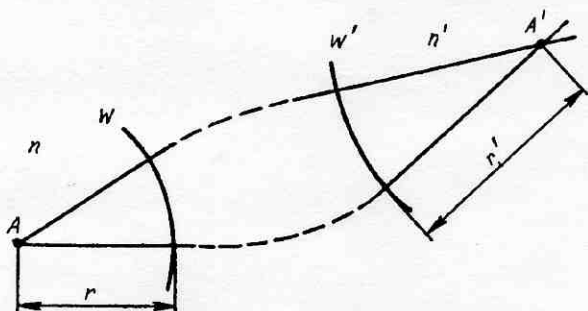


Рис. V. 5

жения экрана, но также и от специфических свойств оптической системы, создающей волновые поверхности не шаровой формы.

Только в том случае, если волновые поверхности в пространстве изображений будут шаровыми, лучи вышедшего в это пространство светового пучка пересекутся в одной точке A' , лежащей в общем центре всех этих волновых поверхностей, где и возникает точечное изображение точки A . Следовательно, для получения точечного изображения необходимо, чтобы волновые поверхности в пространстве изображений имели шаровую форму. При этом гомоцентрический пучок световых лучей, исходящих из точки A , преобразуется оптическим прибором тоже в гомоцентрический пучок световых лучей, сходящихся в точке A' , и оптическая система становится стигматичной.

Этот случай и представлен на рис. V. 5. Пусть W' — шаровая волновая поверхность, зафиксированная в пространстве изображений и имеющая радиус r' . На основании закона таутохронизма можно написать выражение

$$[WW'] = \text{const}, \quad (\text{V. 36})$$

так как оптическая длина хода всех лучей между двумя фиксированными волновыми поверхностями W и W' постоянна при любом устройстве оптической системы.

К левой части выражения (V. 36) можно прибавить произведение nr , не нарушив постоянства этого выражения, так как ввиду заведомо сферической формы волновой поверхности W расстояние от точки A до волновой поверхности вдоль всех лучей исходящего из A пучка постоянно и равно r . Таким образом, напишем теперь вместо (V. 36)

$$nr + [WW'] = \text{const.} \quad (\text{V. 37})$$

Константа правой части выражения (V. 37) отличается, понятно, от константы правой части выражения (V. 36) на величину nr , но это не имеет значения для данного вывода.

Теперь возникает вопрос, можно ли, не нарушая постоянства, прибавить к левой части формулы (V. 37) еще произведение $n'r'$. Нетрудно понять, что это можно сделать только в том случае, если волновая поверхность W' является шаровой с центром в точке A' . При всякой иной форме волновой поверхности W' расстояние от точки A' до этой поверхности не будет постоянным. Поэтому выражение

$$nr + [WW'] + n'r' = \text{const} \quad (\text{V. 38})$$

справедливо только при условии, если волновые поверхности W и W' имеют шаровую форму, а следовательно, изображение точки A точечное. Отсюда вытекает, что выражение (V. 38) есть условие, при выполнении которого данная оптическая система дает точечное изображение точки A предмета.

Рассматривая выражение (V. 38), легко можно обнаружить, что оно распространяет понятие оптической длины хода лучей на весь проходимый светом путь от точки A предмета до сопряженной точки A' изображения. Поэтому можно придать формуле (V. 38) более простой вид

$$[AA'] = \text{const.} \quad (\text{V. 39})$$

Это и есть условие образования точечного изображения, которое можно сформулировать следующими словами: для получения посредством оптической системы точечного изображения некоторой точки A предмета необходимо, чтобы оптическая длина хода всех лучей, соединяющих точку A с сопряженной с ней точкой A' , была постоянной.

В отличие от закона таутохронизма, которому подчиняются все оптические системы без исключения, условие (V. 39) отнюдь не выполняется всеми оптическими системами. Для того чтобы условие точечного изображения удовлетворялось некоторой оптической системой, она должна быть соответственным образом рассчитана. Следует заметить, что это редко удается сделать с полной точностью. Обычно условие (V. 39) оказывается выполненным только с известным приближением. Во всяком случае понятно стремление конструкторов оптических приборов удовлетворить

в них условию (V. 39) с той точностью, какая только может быть достигнута в данной конкретной оптической системе.

Отдельная преломляющая или отражающая поверхность, строго выполняющая условие (V. 39) и дающая поэтому точечное изображение некоторой точки A предмета, называется *анаберрационной поверхностью*. Такие поверхности применяются со времен Ньютона и Декарта в астрономических зеркальных объективах. Они имеют асферическую форму, и их точное изготовление является очень трудной технологической задачей. В начале нашего столетия анаберрационные поверхности стали применяться в различных осветительных приборах (прожекторы, конденсаторы для диапроекторов и кинопроекторов), где не ставятся высокие требования к точности изготовления этих поверхностей, обычно имеющих тоже асферическую форму. В настоящее время асферические поверхности начинают применять в составе сложных оптических систем, например, в фотографических и проекционных объективах, в окулярах зрительных труб и т. п., где они позволяют существенно повысить характеристики оптических приборов и в то же время упростить их оптическое устройство (применить меньшее число линз), обеспечивая при этом высокое качество изображения.

Изготовление асферических поверхностей встречает ряд технологических трудностей, так как нормальная технология изготовления оптических деталей предусматривает только сферические (и плоские) поверхности. Особенно крупные затруднения вызывает контроль формы изготавливаемых асферических поверхностей. Однако в настоящее время как в Советском Союзе, так и в ряде зарубежных стран интенсивно ведется разработка методов, станков и приспособлений для изготовления асферических поверхностей с точностью, необходимой для их применения в случаях, когда к качеству изображения предъявляются высокие требования.

Ввиду значительного успеха, достигнутого в области изготовления асферических поверхностей, проблемы их расчета приобретают с каждым годом более высокую практическую актуальность. Поэтому необходимо на этих страницах уделить некоторое внимание задачам расчета анаберрационных поверхностей, являющихся наиболее простым и во многих случаях удобным видом асферических поверхностей.

Рассмотрим сначала анаберрационную отражающую поверхность (рис. V. 6). Пусть дуга PS является меридиональным сечением отражающей поверхности. Вследствие симметрии вокруг оптической оси центрированной системы эта поверхность есть поверхность вращения с осью, совпадающей с оптической осью системы. Требуется придать этой поверхности такую форму, чтобы все лучи, исходящие из точки A , лежащей на оптической оси AS , после отражения от зеркальной поверхности PS , собрались в точке A' . Луч APA' — один из этих лучей. Положение

точек A и A' на оптической оси задано отрезками s и s' (на рис. V. 6 оба отрезка отрицательные).

Для соблюдения поставленного требования необходимо выполнить условие (V. 39) точечного изображения. Применяя его к данной отражающей поверхности и учитывая, что лучи AP и PA' лежат оба в одной среде, получим

$$AP + PA' = \text{const.} \quad (\text{V. 40})$$

Константа в правой части этого выражения легко определится, если, уменьшая до нуля угол PAS , перейти к лучу ASA' , совпадающему с оптической осью:

$$AS + SA' = -(s + s') = \text{const.} \quad (\text{V. 41})$$

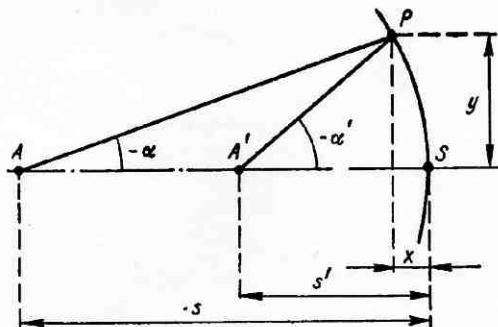


Рис. V. 6

В выражениях (V. 40) и (V. 41) константа в правой части имеет одно значение. Поэтому, исключая ее, находим

$$AP + PA' = -(s + s'). \quad (\text{V. 42})$$

Для определения формы меридиональной кривой PS введем декартовы координаты x и y точки P , лежащей на этой кривой, выбрав начало координат в точке S , в вершине кривой. По чертежу определяем

$$\left. \begin{aligned} AP &= \sqrt{y^2 + (s-x)^2}; \\ PA' &= \sqrt{y^2 + (s'-x)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 43})$$

Вследствие этого получим вместо (V. 42)

$$\sqrt{y^2 + (s-x)^2} + \sqrt{y^2 + (s'-x)^2} = -(s + s'). \quad (\text{V. 44})$$

Это уравнение, связывающее координаты x и y точек, лежащих на кривой PS , есть искомое уравнение этой кривой. Его можно, однако, существенно упростить.

Для этой цели получим из (V. 42)

$$AP + s + s' = -PA'. \quad (\text{V. 45})$$

Возводя это выражение в квадрат и учитывая формулы (V. 43), находим

$$(s - x)^2 + 2(s + s')AP + (s + s')^2 = (s' - x)^2. \quad (\text{V. 46})$$

Определяя отсюда AP , найдем после ряда упрощений

$$AP = \frac{s - s'}{s + s'} x - s. \quad (\text{V. 47})$$

Возводя формулу (V. 47) еще раз в квадрат, получим после дальнейших упрощающих преобразований

$$\frac{x^2}{(s + s')^2} - \frac{x}{s + s'} + \frac{y^2}{4ss'} = 0. \quad (\text{V. 48})$$

Это уравнение кривой второго порядка, причем оптическая ось совпадает с осью симметрии кривой. Поэтому центр этой кривой должен находиться на оптической оси. Положив в (V. 48) $y = 0$, найдем абсциссы x_1 и x_2 двух точек пересечения кривой с оптической осью

$$x_1 = 0; \quad x_2 = s + s'. \quad (\text{V. 49})$$

Как известно, центр кривой второго порядка делит пополам расстояние между ее вершинами, определяемыми абсциссами x_1 и x_2 . Поэтому абсцисса x_c центра кривой выражается формулой

$$x_c = \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \quad (\text{V. 50})$$

Вследствие (V. 49) находим отсюда

$$x_c = \frac{1}{2}(s + s'). \quad (\text{V. 51})$$

Перенесем теперь начало координат в центр кривой, чтобы привести ее уравнение (V. 48) к нормальному виду. Проведем соответствующие выкладки, получим:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{s + s'}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{ss'} = 1. \quad (\text{V. 52})$$

Если оба отрезка s и s' имеют один и тот же знак, то уравнение представляет собой уравнение эллипса. Его полуось a равняется арифметической средней отрезков s и s'

$$a = \frac{s + s'}{2}. \quad (\text{V. 53})$$

Полуось b эллипса — геометрическая средняя отрезков s и s' :

$$b = \sqrt{ss'} \quad (\text{V. 54})$$

Если же отрезки s и s' имеют разные знаки, то уравнение (V. 52) становится уравнением гиперболы, полуось a которой определяется также формулой (V. 53), а полуось b вычисляется по формуле

$$b = \sqrt{-ss'} \quad (\text{V. 55})$$

На чертежах (рис. V. 7 и V. 8) представлены оба эти случая. В случае эллиптической отражающей поверхности точки A и A' совпадают с фокусами эллипса. По известному свойству эллипса

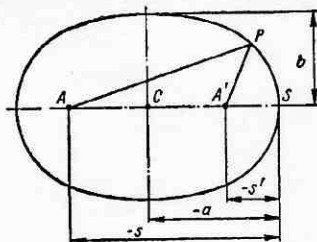


Рис. V. 7

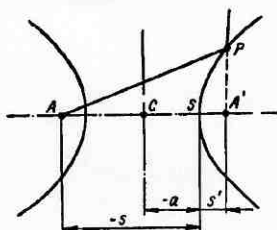


Рис. V. 8

сумма радиусов векторов AP и PA' постоянна и равна удвоенной большей полуоси a эллипса. Этим гарантируется выполнение условия (V. 40) образования точечного изображения. В случае гиперболы точки A и A' также совпадают с фокусами гиперболы. При этом либо предмет действительный, а изображение мнимое (как показано на рис. V. 8), либо наоборот.

Разберем случай, когда предмет находится на бесконечности $s = \infty$; $s' = f'$. Уравнению (V. 48) можно придать вид

$$\frac{x^2}{s \left(1 + \frac{s'}{s}\right)^2} - \frac{x}{1 + \frac{s'}{s}} + \frac{y^2}{4s'} = 0. \quad (\text{V. 56})$$

При рассматриваемых условиях отсюда вытекает уравнение

$$y^2 = 4f'x. \quad (\text{V. 57})$$

Это уравнение параболы. Параболическое вогнутое зеркало получило широкое применение в астрономических приборах благодаря его способности создавать точечное изображение далекого предмета.

Выведенные здесь формулы для анаберрационных зеркал использованы при расчете астрономического зеркального объектива Кассегрена, приведенном в § 83.

Анаберрационные отражающие поверхности имеют, таким образом, форму эллипсоида, парабооида или гиперboloида. Анаберрационные преломляющие поверхности несколько сложнее по форме. Пусть на чертеже (рис. V. 9) дуга PS есть меридиальная кривая преломляющей поверхности, разделяющей две среды с показателями преломления n и n' . Лучи, исходящие из точки A , должны после преломления снова собраться в точке A' . Для этого необходимо выполнить условие (V. 39) точечного изображения, которое в рассматриваемом случае приобретает вид

$$nAP + n'PA' = -ns + n's'. \quad (V. 58)$$

Правая часть этого выражения — константа, значение которой определено по ходу луча ASA' , совпадающего с оптической осью.

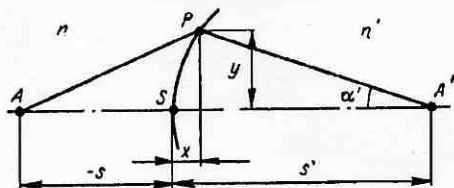


Рис. V. 9

Введем декартовы координаты x и y точки P меридиональной кривой (начало координат — в ее вершине S).

Пользуясь чертежом, найдем:

$$\left. \begin{aligned} AP &= \sqrt{y^2 + (s-x)^2}; \\ PA' &= \sqrt{y^2 + (s'+x)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (V. 59)$$

Вследствие этого получим вместо выражения (V. 58)

$$n \sqrt{y^2 + (s-x)^2} + n' \sqrt{y^2 + (s'+x)^2} = n's' - ns. \quad (V. 60)$$

После двукратного возведения в квадрат для устранения квадратных корней найдем из формулы (V. 60)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{n'^2 - n^2}{2} (y^2 + x^2) - (n'^2 s' - n^2 s) x \right]^2 = \\ & = nn' (n's' - ns) [(ns' - n's) (y^2 + x^2) + 2(n' - n) ss' x]. \end{aligned} \quad (V. 61)$$

Это уравнение четвертой степени относительно координат x и y есть уравнение меридиональной кривой анаберрационной преломляющей поверхности. Такие кривые называются *овалами Декарта*. Ввиду трудности изготовления преломляющих поверхностей такой довольно сложной формы, они не получили практического применения в оптическом приборостроении, за исключе-

нием частного случая, при котором преломляющая поверхность приобретает более простую форму.

Этот частный случай наблюдается тогда, когда предмет находится на бесконечности: $s = \infty$; $s' = f'$, где f' — заднее фокусное расстояние этой преломляющей поверхности. Раньше чем ввести это условие, приведем уравнение (V. 61) к следующему виду:

$$\left[\frac{n'^2 - n^2}{2s} \frac{y^2 + x^2}{n' \frac{s'}{s} - n} - \frac{n'^2 \frac{s'}{s} - n^2}{n' \frac{s'}{s} - n} x \right]^2 =$$

$$= nn' \left[\frac{n \frac{s'}{s} - n'}{n' \frac{s'}{s} - n} (y^2 + x^2) + 2(n' - n) \frac{s'x}{n' \frac{s'}{s} - n} \right]. \quad (\text{V. 62})$$

Вводя теперь условия $s = \infty$; $s' = f'$, заметим, что уравнение (V. 62) существенно упрощается:

$$(n'^2 - n^2) x^2 + n'^2 y^2 - 2n'(n' - n) f' x = 0. \quad (\text{V. 63})$$

Теперь это уравнение кривой второго порядка. Исследуя его, замечаем, что при $y = 0$ получаются два значения абсциссы x , соответствующие двум вершинам исследуемой кривой:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2n'f'}{n' + n}.$$

Абсцисса x центра этой кривой, лежащего посередине между ее вершинами, определится поэтому выражением

$$x_c = \frac{n'f'}{n' + n}. \quad (\text{V. 64})$$

Перенося затем начало координат в центр кривой, получим из (V. 63) после упрощающих преобразований уравнение кривой в нормальном виде

$$\frac{x^2}{\left(\frac{n'f'}{n' + n}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{n' - n}{n' + n} f'^2} = 1. \quad (\text{V. 65})$$

Рассматривая это уравнение, устанавливаем, что необходимо различать два случая. Первый случай $n' > n$, т. е. свет, пересекая преломляющую поверхность, проходит из среды оптически менее плотной в более плотную. В этом случае уравнение (V. 65) представляет эллипс с полуосями:

$$a = \frac{n'f'}{n' + n}; \quad b = f' \sqrt{\frac{n' - n}{n' + n}}. \quad (\text{V. 66})$$

Например, если свет проходит из воздуха в стекло с показателем преломления n , имеем

$$a = \frac{nf'}{n+1}; \quad b = f' \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}. \quad (\text{V. 67})$$

Второй случай имеет место, когда свет пересекает преломляющую поверхность, проходя из более плотной среды в менее плотную: $n' < n$. Теперь уравнение (V. 65) выражает гиперболу с полуосями

$$a = \frac{n'f'}{n'+n}; \quad b = f' \sqrt{\frac{n-n'}{n'+n}}. \quad (\text{V. 68})$$

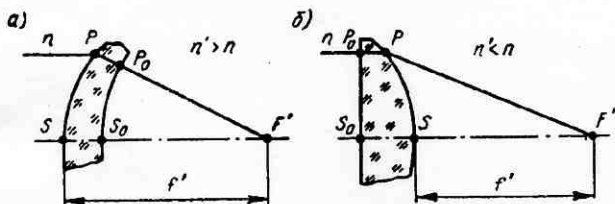


Рис. V. 10

Если свет проходит из стекла с показателем преломления n в воздух, получим

$$a = \frac{f'}{n+1}; \quad b = f' \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}. \quad (\text{V. 69})$$

На рис. V. 10, а и б представлены оба эти случая. Если параллельный ход лучей осуществлен в воздухе (рис. V. 10, а) и $n' > n$, меридиональная кривая PS преломляющей поверхности — эллипс. Задний фокус F' поверхности совпадает при этом с фокусом эллипса, более отдаленным от вершины S поверхности. Проверить это утверждение нетрудно: если это так, то заднее фокусное расстояние f' должно определяться выражением

$$f' = a + \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (\text{V. 70})$$

Подстановка значений полуосей a и b из формул (V. 66) убеждает в справедливости формулы (V. 70).

Если параллельный ход лучей осуществлен внутри стекла (рис. V. 10, б) и $n' < n$, меридиональная кривая PS становится гиперболой. Как и в предыдущем случае, задний фокус F' поверхности совпадает с одним из фокусов гиперболы. Практическое применение полученных здесь результатов требует дополнения рассчитанной анаберрационной поверхности до целой линзы; но

вводимая при этом другая поверхность линзы не должна нарушать точечности изображения. В случае эллипса (рис. V. 10, а) анаберрационная поверхность PS служит первой преломляющей поверхностью. Вторая поверхность P_0S_0 — сфера с центром в точке F' . Поэтому все лучи, направляющиеся после преломления в поверхности PS в точку F' , проходят сферическую поверхность P_0S_0 вдоль нормалей к ней, так что все углы падения и преломления этих лучей равны нулю. Поэтому вводимая поверхность P_0S_0 не нарушает гомоцентричности проходящего через нее пучка лучей.

В случае гиперболы (рис. V. 10, б) анаберрационная поверхность PS используется в качестве второй поверхности линзы. Первая же преломляющая поверхность P_0S_0 — плоскость, перпендикулярная к лучам падающего на линзу параллельного пучка лучей. Она также не отклоняет проходящих через нее лучей, а потому и не нарушает точечности изображения. Полученные таким образом анаберрационные линзы применяются в осветительных системах.

Если условие точечного изображения (V. 39) применяется к одной отдельно взятой преломляющей (или отражающей) поверхности, то выполнение этого условия обеспечивает также и соблюдение закона преломления (или отражения) проходящими через поверхность лучами. Если же это условие применяется к оптической системе, содержащей две или более поверхностей, то выполнение его не гарантирует соблюдения закона преломления (или отражения) на всех поверхностях системы.

Условие образования точечного изображения можно представить в виде

$$[AA'] = [AA']_0. \quad (V. 71)$$

Здесь величина $[AA']_0$ — оптическая длина хода луча, совпадающего с оптической осью. Если условие (V. 71) в данной оптической системе нарушено, то возникает разность δ :

$$\delta = [AA'] - [AA']_0. \quad (V. 72)$$

Рассмотрим расчет разности δ в оптической системе, состоящей из m преломляющих поверхностей.

На чертеже (рис. V. 11) показан ход луча $A_1P_sP_{s+1}$ через две последовательные поверхности этой системы. Пользуясь введенными на этом чертеже обозначениями, можно составить следующее выражение для оптической длины хода луча, исходящего под углом α_1 к оси из осевой точки A_1 предмета и после выхода из системы пересекающего оптическую ось в точке A_{m+1}

$$[A_1A_{m+1}] = -n_1l_1 + \sum_{s=1}^{s=m-1} n_{s+1}(l'_s - l_{s+1}) + n_{m+1}l'_m. \quad (V. 73)$$

Если же угол α_1 равен нулю и рассматриваемый луч совпадает с оптической осью, выражение (V. 73) преобразуется:

$$[A_1 A_{m+1}]_0 = -n_1 s_1 + \sum_{s=1}^{s=m-1} n_{s+1} (s'_s - s_{s+1}) + n_{m+1} s'_m. \quad (\text{V. 74})$$

На основании двух последних формул из выражения (V. 72) после соответствующих перегруппировок входящих в эти формулы сумм получим

$$\delta = \sum_{s=1}^{s=m} [n_{s+1} (l'_s - s'_s) - n_s (l_s - s_s)]. \quad (\text{V. 75})$$

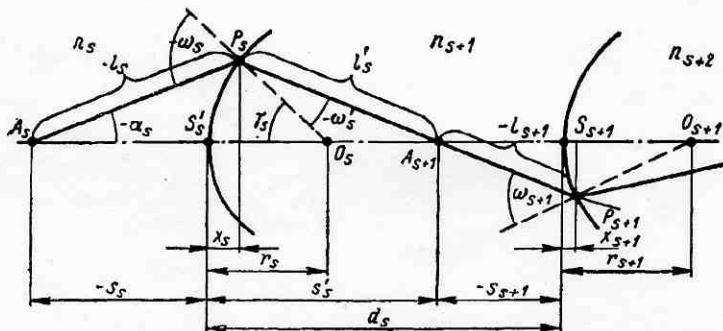


Рис. V. 11

Обратившись к чертежу, находим

$$l_s - s_s = h_s \frac{1 - \cos \alpha_s}{\sin \alpha_s} - x_s = h_s \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_s - x_s.$$

Аналогично

$$l'_s - s'_s = h_s \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{s+1} - x_s.$$

Вследствие этих выражений вместо (V. 75) получим

$$\delta = \sum_{s=1}^{s=m} \left[h_s \left(n_{s+1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_{s+1} - n_s \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha_s \right) - (n_{s+1} - n_s) x_s \right]. \quad (\text{V. 76})$$

Выражение (V. 76) справедливо как для сферических, так и для асферических поверхностей.

Для сферических поверхностей, кроме того, можно написать следующие выражения:

$$x_s = h_s \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma_s;$$

$$\gamma_s = \alpha_s - \omega_s = \alpha_{s+1} - \omega'_s.$$

Вследствие этого получается после некоторых преобразований вместо выражения (V. 76)

$$\delta = \sum_{s=1}^{s=m} \frac{h_s}{\cos \frac{1}{2} \gamma_s} \left(n_{s+1} \frac{\sin \frac{1}{2} \omega'_s}{\cos \frac{1}{2} \alpha_{s+1}} - n_s \frac{\sin \frac{1}{2} \omega_s}{\cos \frac{1}{2} \alpha_s} \right). \quad (\text{V. 77})$$

По чертежу находим

$$h_s = r_s \sin \gamma_s,$$

в результате чего выражение (V. 77) переходит в окончательную формулу, справедливую для сферических поверхностей,

$$\delta = \sum_{s=1}^{s=m} g_s, \quad (\text{V. 78})$$

где для упрощения письма принято обозначение

$$g_s = 2r_s \sin \frac{1}{2} \gamma_s \left(n_{s+1} \frac{\sin \frac{1}{2} \omega'_s}{\cos \frac{1}{2} \alpha_{s+1}} - n_s \frac{\sin \frac{1}{2} \omega_s}{\cos \frac{1}{2} \alpha_s} \right). \quad (\text{V. 79})$$

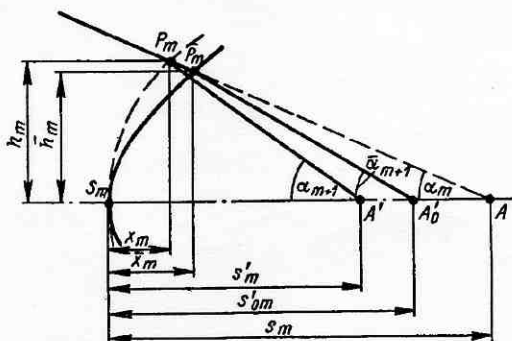


Рис. V. 12

Величина δ обращается в нуль в случае, если луч проходит через осевую точку A_{0m+1} гауссовского изображения.

Полученные здесь формулы (V. 76) и (V. 79) могут быть использованы для решения практически очень важной задачи: получения точечного изображения посредством замены последней m -й сферической поверхности асферической. На рис. V. 12 отдельно показана последняя преломляющая поверхность. Предположим, что эта поверхность $P_m S_m$ была первоначально сферической, а преломленный ею луч $P_m A'$ проходил через точку A' , не совпадающую с гауссовским изображением A'_0 осевой точки

предмета. Пусть для оптической системы со сферической последней поверхностью вычислена разность δ по формуле (V. 78). Заменим сферическую поверхность $P_m S_m$ асферической поверхностью $\bar{P}_m S_m$ с таким расчетом, чтобы преломленный луч $P_m A'_0$ проходил через гауссовскую точку A'_0 . Критерием получения точечного изображения, а следовательно, и устранения сферической aberrации послужит при этом равенство нулю величины δ_1 — разности оптических длин хода внеосевого и осевого лучей, рассчитанной для системы с асферической последней поверхностью.

Составив выражение для m -й поверхности по формуле (V. 76), для всех остальных поверхностей — по формуле (V. 78) и пользуясь обозначениями, введенными на чертеже, можно написать для δ_1

$$\delta_1 = \sum_{s=1}^{s=m-1} g_s + \bar{h}_m \left(n_{m+1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{m+1} - n_m \operatorname{tg} \frac{1}{2} \bar{\alpha}_m \right) - (n_{m+1} - n_1) \bar{x}_m = 0. \quad (\text{V. 80})$$

Вследствие формулы (V. 78) получим отсюда

$$\bar{h}_m \left(n_{m+1} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{m+1} - n_m \operatorname{tg} \frac{1}{2} \bar{\alpha}_m \right) - (n_{m+1} - n_m) \bar{x}_m = g_m - \delta. \quad (\text{V. 81})$$

В формулах (V. 80) и (V. 81) верхней чертой отмечены три величины, изменившиеся при замене сферической поверхности асферической: \bar{h}_m , \bar{x}_m и $\bar{\alpha}_{m+1}$.

Благодаря тому, что точка \bar{P}_m лежит на падающем луче, а преломленный луч проходит через точку A'_0 (положение которой предполагается известным), две из этих трех величин могут быть исключены. Наиболее удобно исключить \bar{h}_m и \bar{x}_m . Тогда выражение (V. 81) послужит для вычисления величины $\bar{\alpha}_{m+1}$. Выполнив соответствующие выкладки, приводим выражение (V. 81) к виду

$$M \sin \bar{\alpha}_{m+1} - N \cos \bar{\alpha}_{m+1} = P. \quad (\text{V. 82})$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} M &= n_{m+1} (s_m - s'_0 m) + \\ &+ (g_m - \delta + n_{m+1} s'_0 m - n_m s_m) \cos \alpha_m; \\ N &= (g_m - \delta + n_{m+1} s'_0 m - n_m s_m) \sin \alpha_m; \\ P &= n_{m+1} (s_m - s'_0 m) \sin \alpha_m. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 83})$$

Для решения выражения (V. 82) относительно единственной оставшейся в нем неизвестной $\bar{\alpha}_{m+1}$ целесообразно применить тригонометрический метод, введя вспомогательный угол ε :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{N}{M}. \quad (\text{V. 84})$$

Тогда угол $\bar{\alpha}_{m+1}$ вычислится при помощи формулы

$$\sin (\bar{\alpha}_{m+1} - \varepsilon) = \frac{P}{N} \sin \varepsilon. \quad (\text{V. 85})$$

После нахождения угла $\bar{\alpha}_{m+1}$ вычисляются координаты \bar{h}_m и \bar{x}_m точки P_m , лежащей на искомой асферической поверхности. Для этого служат формулы

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}_m &= \frac{(s_m - s'_0 m) \sin \alpha_m \sin \bar{\alpha}_{m+1}}{\sin (\bar{\alpha}_{m+1} - \alpha_m)}; \\ \bar{x}_m &= s_m - \frac{\bar{h}_m}{\operatorname{tg} \alpha_m}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 86})$$

Следует еще заметить, что для вычисления входящей в эти формулы величины s_m можно применить приведенную к удобному для логарифмирования виду формулу

$$s_m = 2r_m \frac{\cos \left(\alpha_m - \frac{1}{2} \gamma_m \right) \sin \frac{1}{2} \gamma_m}{\sin \alpha_m}. \quad (\text{V. 87})$$

Выполнив расчет по формулам (V. 78), (V. 79), (V. 83)—(V. 87) для ряда значений угла α_1 луча с осью, найдем координаты \bar{h}_m и \bar{x}_m ряда точек, лежащих на меридиональной кривой асферической m -й преломляющей поверхности, которая делает данную систему свободной от сферической аберрации.

Способ устранения сферической аберрации фотографического объектива посредством придания асферической формы его последней преломляющей поверхности известен давно, с того времени, когда А. Зоннефельд, применив деформацию (т. е. отклонение от сферической формы) последней поверхности, достиг отличной коррекции сферической аберрации в астрофотографических триплетах по Тейлору (около 1903 г.). Несколько позднее А. Зоннефельдом была рассчитана серия четырехлинзовых фотографических объективов для астрографов, в которых для коррекции сферической аберрации был применен тот же способ. Эти объективы были изготовлены фирмой «К. Цейсс» при относительном отверстии 1 : 5 и при диаметре линз до 400 мм. Несмотря на современное развитие зеркальнолинзовых объективов, четырехлинзовые объективы А. Зоннефельда успешно применяются во многих

обсерваториях мира и фирма «К. Цейсс» планирует в ближайшем времени выпуск такого объектива с диаметром линз более 500 мм.

Несмотря на практическую ценность этого способа, он не был разработан в специальной литературе. Как А. Зоннефельд, так и другие оптики, применявшие этот способ, отыскивали наиболее подходящую форму асферической поверхности методом проб и интерполяцией, в лучшем случае прибегая к нахождению приближенного решения в области аббераций третьего порядка.

Изложенный здесь способ позволяет решить эту задачу совершенно точно. Трудоемкость этого способа, развитого автором настоящей книги, существенно уменьшается при применении электронной вычислительной машины.

При помощи уравнения (V. 62) можно исследовать различные случаи овалов Декарта. Так, например, при условии

$$\frac{s'}{s} = \frac{n'}{n} \quad (\text{V. 88})$$

получим анаберрационную поверхность, радиус кривизны которой в вершине равен бесконечности и которая поэтому в области оптики Гаусса не отличается от плоской преломляющей поверхности. Но в отличие от последней она дает точечное изображение. Такую поверхность назовем *планоидом*. Пользуясь условием (V. 88), получим из выражения (V. 62) уравнение планоида

$$y^2 = \frac{2s}{n(n'+n)} [(n'^2 + nn' + n^2)x \pm n' \sqrt{2n(n'+n)sx}] - x^2. \quad (\text{V. 89})$$

Следует заметить, что x должен иметь тот же знак, что и s , в противном случае в этой формуле возникнет мнимость. Приближенное уравнение планоида в области аббераций третьего порядка имеет следующий вид:

$$x = \frac{1}{8} \frac{n(n'+n)}{n'^2} \cdot \frac{y^4}{s^3}. \quad (\text{V. 90})$$

С другим частным случаем овала Декарта мы еще встретимся в § 101.

§ 98. Волновые абберации

Для оценки качества изображения, создаваемого оптической системой, недостаточно знать геометрические размеры пятна рассеяния лучей света на плоскости изображения, исходящих из одной точки предмета. Необходимо еще представлять себе распределение освещенности в пределах этого пятна рассеяния. При этом следует различать макроструктуру и микроструктуру пятна рассеяния. Макроструктура пятна рассеяния определяется расположением в нем фокальных ядер и фокальных линий, возникающих вследствие пересечения экраном, улавливающим изображение, каустических поверхностей, на которых происходит сосредоточе-

ние световой энергии (см. § 30). Микроструктура пятна рассеяния состоит из чередующихся светлых и темных полос или колец и является результатом дифракции и интерференции света внутри пятна рассеяния.

Хорошим критерием качества изображения (для осевой точки предмета) может служить освещенность в центре фигуры рассеяния. Вследствие действия aberrаций эта освещенность уменьшается и часть световой энергии переходит из центральной части дифракционной фигуры рассеяния в окружающие ее кольца.

В свою очередь, освещенность в центре пятна рассеяния зависит от волновых aberrаций оптической системы. *Волновой aberrацией*

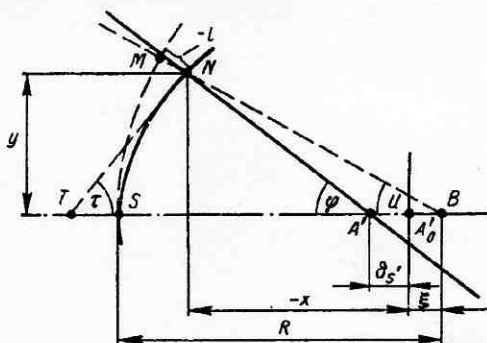


Рис. V. 13

цией l называют линейную величину отклонения истинной формы волновой поверхности (в пространстве изображений) от ближайшей сферы. По известному критерию Релея в случае, если волновые aberrации не превосходят $\frac{1}{4}$ длины волны света λ , т. е. если

$$l \leq \frac{1}{4} \lambda, \quad (\text{V. 91})$$

то изображение данной точки по резкости не будет практически отличаться от изображения, создаваемого оптической системой, дающей строго точечное изображение. Таким образом, волновые aberrации могут быть использованы для оценки качества изображения рассчитываемой оптической системы.

Рассмотрим здесь некоторые способы расчета волновых aberrаций оптических систем. На чертеже (рис. V. 13) показано меридиональное сечение волновой поверхности в пространстве изображений в виде кривой SN. Дуга SM есть меридиональное сечение сферы сравнения с вершиной S, совпадающей с вершиной волновой поверхности, и с центром в точке B, находящейся на малом расстоянии ξ от гауссовской осевой точки изображения. Луч NA', нормальный к волновой поверхности в точке N, пересекает

оптическую ось системы в точке A' . Отрезок $A_0A' = \delta s'$ есть продольная сферическая aberrация системы. Кроме того, $SB = MB = R$ — радиус сферы сравнения; $MN = -l$ — волновая aberrация. При этом радиус R очень велик по сравнению с величинами l , δ_s и ξ .

Введем систему декартовых координат с началом координат в точке A_0 : x и y — координаты точки N волновой поверхности. Точка N лежит также и на луче NA' . Уравнение этого луча

$$y = -(x - \delta s') \operatorname{tg} \varphi, \quad (\text{V. 92})$$

где φ — угол, образованный этим лучом с оптической осью.

Обозначим буквой τ угол, образованный с оптической осью касательной TN к волновой поверхности в точке N .

Из чертежа следует

$$\varphi = 90^\circ - \tau. \quad (\text{V. 93})$$

Поэтому из (V. 92) имеем

$$x - \delta s' = -y \operatorname{tg} \tau. \quad (\text{V. 94})$$

Из аналитической геометрии известно, что

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}. \quad (\text{V. 95})$$

Поэтому вместо (V. 94) находим

$$\delta s' = x + y \frac{dy}{dx} = \frac{x dx + y dy}{dx}. \quad (\text{V. 96})$$

Отсюда следует

$$\delta s' = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{dx}. \quad (\text{V. 97})$$

Из чертежа вытекает

$$(x - \xi)^2 + y^2 = (R + l)^2, \quad (\text{V. 98})$$

откуда получаем

$$x^2 + y^2 = (R + l)^2 + 2\xi x - \xi^2. \quad (\text{V. 99})$$

Дифференцируя это выражение (R и ξ — постоянные), находим

$$d(x^2 + y^2) = 2(R + l) dl + 2\xi dx. \quad (\text{V. 100})$$

Из чертежа следует также

$$x - \xi = -(R + l) \cos u, \quad (\text{V. 101})$$

где u — угол, образованный с оптической осью радиусом MB .

Дифференцируя (V. 101), имеем

$$dx = (R + l) \sin u du - \cos u dl. \quad (\text{V. 102})$$

Вследствие (V. 100) и (V. 102) получим вместо выражения (V. 97)

$$\delta s' = \frac{(R+l) dl}{(R+l) \sin u du - \cos u dl} + \xi. \quad (\text{V. 103})$$

Это выражение может быть написано в такой форме:

$$\frac{1}{\delta s' - \xi} + \frac{\cos u}{R+l} = \frac{\sin u du}{dl}. \quad (\text{V. 104})$$

Так как R велико по сравнению с величинами $\delta s'$ и ξ , вторая дробь левой части этого выражения мала по сравнению с первой и может быть поэтому отброшена. Тогда из (V. 104) получим

$$dl = (\delta s' - \xi) \sin u du. \quad (\text{V. 105})$$

Это выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение волновой aberrации. Интегрируя его в пределах от нуля до некоторого значения угла u , получим

$$l = \int_0^u (\delta s' - \xi) \sin u du \quad (\text{V. 106})$$

и окончательно

$$l = -\xi(1 - \cos u) + \int_0^u \delta s' \sin u du. \quad (\text{V. 107})$$

Это и есть общее выражение для волновой aberrации l .

Для решения выражения (V. 107) можно применить различные способы. Очень удобное решение получается при введении новой переменной p , связанной с апертурным углом u соотношением

$$p = 1 - \cos u. \quad (\text{V. 108})$$

Дифференцируя это соотношение, находим

$$dp = \sin u du. \quad (\text{V. 109})$$

Вместо формулы (V. 107) получается тогда более простое выражение

$$l = -p\xi + \int_0^p \delta s' dp. \quad (\text{V. 110})$$

На чертеже (рис. V. 14) представлен график сферической aberrации некоторой оптической системы. По абсциссе этого графика отложена сферическая aberrация $\delta s'$, по ординате — величина p по формуле (V. 108). Тогда величина интеграла в формуле (V. 110)

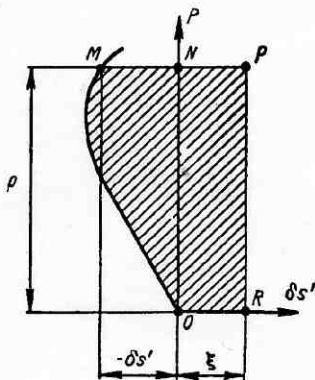


Рис. V. 14

на чертеже представляется площадью фигуры MNO , слева ограниченной кривой MO графика. Первое же слагаемое правой части формулы (V. 110) представлено на чертеже в виде прямоугольника $ONPR$, основание которого равно ξ , а высота p . Поэтому, учитывая отрицательные значения $\delta s'$ на чертеже, а потому и отрицательное значение площади фигуры MNO , можно утверждать, что вся заштрихованная на чертеже площадь $MPRO$ выражает собой величину волновой аберрации l (со знаком минус) при $p = NO$.

Для определения площади MNO во многих случаях целесообразно применение приближенных методов интегрирования (правило Симпсона и др.). Сферическая аберрация $\delta s'$ оптической системы может быть представлена в виде известного ряда четных степеней апертурного угла u

$$\delta s' = a_2 u^2 + a_4 u^4. \quad (\text{V. 111})$$

Б. ТЕОРИЯ АПЛАНАТИЗМА

§ 99. Закон косинусов и его следствия

Практическое применение анаберрационных поверхностей показало, что соблюдение условия образования точечного изображения для одной пары сопряженных точек ни в какой мере не гарантирует точечного изображения ни для одной другой пары сопряженных точек, хотя бы и лежащих в ближайшем соседстве с первой парой. Это положение можно наглядно иллюстрировать на примере вогнутого параболического зеркала: оно дает точечное изображение осевой точки бесконечно далекого предмета, но с удалением точки предмета от оптической оси ее изображение сразу же становится нерезким. Об этом свидетельствует эмпирическое правило, установленное А. Зоннефельдом для астрономических параболических зеркал: полезное поле зрения 2β в минутах равно обратной величине относительного отверстия параболического зеркала. Например:

Относительное отверстие	1 : 10	1 : 5	1 : 3
Полезное поле зрения	10'	5'	3'

Столь малое поле зрения явилось серьезным препятствием на пути широкого применения анаберрационных поверхностей и заставило исследователей изыскивать возможность распространения точечности изображения с одной единственной точки предмета на целую область, хотя бы и небольшую. Общее условие, при выполнении которого достигается точечное изображение не одной точки, а целого элементарного отрезка предмета, называется законом косинусов и было впервые сформулировано А. Конради в 1905 г. Некоторые практически важные частные случаи этой закономерности были, однако, открыты много раньше.

Обращаясь к выводу закона косинусов, представим себе (рис. V. 15), что в пространстве предметов, в среде с показателем преломления n , как угодно расположен элемент линии $dl = AA_1$, а в пространстве изображений, в среде с показателем преломления n' , находится элемент линии $dl' = A'A'_1$, сопряженный с элементом dl . Необходимо уточнить: здесь речь идет о сопряжении в смысле оптики Гаусса; при этом точечного изображения каждой точки элемента dl в соответствующей точке элемента dl' может и не быть. Только для сопряженных точек A и A' мы предположим условие точечного изображения выполненным, вследствие чего должно быть справедливо выражение

$$[AA'] = \text{const}_1. \quad (\text{V. 112})$$

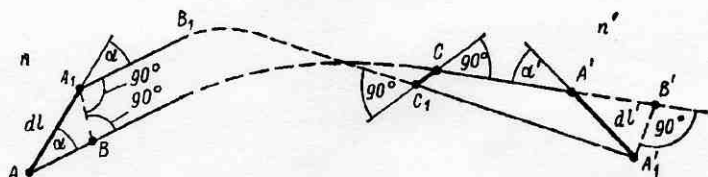


Рис. V. 15

Мы предполагаем, следовательно, что оптическая длина пути постоянна вдоль всех лучей, соединяющих точки A и A' . Наша задача заключается в том, чтобы точечное изображение распространилось на все точки элемента dl , а следовательно, и на точку A_1 .

Представим себе далее один из лучей, связывающих по условию (V. 112) точки A и A' , например луч $ABCA'$, проходящий на своем пути через оптическую систему (не показанную на чертеже) и образующий с элементом dl угол α , а с элементом dl' — угол α' . Проведем через точку A_1 луч $A_1B_1C_1A'_1$, параллельный лучу AB в пространстве предметов. В пространстве изображения лучи CA' и $C_1A'_1$ не параллельны друг другу, а скрещиваются, не пересекаясь (в частном случае они могут, конечно, и пересекаться).

В пространстве предметов опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1B на луч AB . Оба луча AB и A_1B_1 нормальны к отрезку A_1B . Поэтому последний можно рассматривать как элементарный отрезок, лежащий на некоторой фиксированной волновой поверхности. Пусть далее в пространстве изображений отрезок CC_1 представляет кратчайшее расстояние между скрещенными лучами CA' и $C_1A'_1$. По известной теореме стереометрии можно утверждать, что оба луча CA' и $C_1A'_1$ нормальны к кратчайшему расстоянию CC_1 между ними. Поэтому и элементарный отрезок CC_1 можно считать лежащим на фиксированной волновой

поверхности, нормальными к которой служат лучи CA и C_1A_1 . По закону таутохронизма оптическая длина хода лучей между волновыми поверхностями A_1B и CC_1 постоянна. Поэтому

$$[BC] = [A_1C_1]. \quad (V. 113)$$

Мы хотим, чтобы изображение точки A_1 было точечным. В таком случае по условию образования точечного изображения должно выполняться следующее выражение:

$$[A_1A_1'] = \text{const}_2. \quad (V. 114)$$

Здесь справа стоит константа, отличная от константы формулы (V. 112). Пользуясь чертежом, можно написать вместо (V. 114)

$$[A_1C_1] + n'C_1A_1' = \text{const}_2. \quad (V. 115)$$

Формулу (V. 112) также можно представить в виде выражения

$$nAB + [BC] + n'CA' = \text{const}_1. \quad (V. 116)$$

Из точки A' опустим перпендикуляр $A_1'B'$ на луч CA' . Отрезок CA' можно представить как разность отрезков CB' и $A'B_1$. Поэтому получим вместо (V. 116)

$$nAB + [BC] + n'CB' - n'A'B' = \text{const}_1. \quad (V. 117)$$

Отрезок CB' есть расстояние между концами перпендикуляров, опущенных из концов отрезка C_1A_1' на луч CB' . Поэтому отрезок CB' есть ортогональная проекция отрезка C_1A_1' на луч CB' и выражается формулой

$$CB' = C_1A_1' \cos d\gamma = C_1A_1'. \quad (V. 118)$$

Здесь $d\gamma$ — бесконечно малый угол между лучами CA' и C_1A_1' , косинус которого отличается от единицы на пренебрежимо малую величину высшего порядка.

Вследствие (V. 113) и (V. 118) выражение (V. 117) напишется так:

$$nAB + [A_1C_1] + n'C_1A_1' - n'A'B' = \text{const}_1. \quad (V. 119)$$

Вычитая теперь из выражения (V. 119) выражение (V. 115), находим

$$nAB - n'A'B' = dc. \quad (V. 120)$$

Здесь dc — константа, отличная от предыдущих.

Из треугольников ABA_1 и $A'B'A_1'$ можно получить выражения:

$$\left. \begin{aligned} AB &= dl \cos \alpha; \\ A'B' &= dl' \cos \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (V. 121)$$

Вследствие этого найдем из формулы (V. 120)

$$n dl \cos \alpha - n' dl' \cos \alpha' = dc. \quad (\text{V. 122})$$

Это и есть закон косинусов, впервые полученный А. Конради. Однако в такой форме эта закономерность мало годится для практического применения, во-первых, потому, что в ней присутствуют бесконечно малые отрезки dl и dl' , и, во-вторых, потому, что в ней имеется неопределенная постоянная dc .

Устранить из выражения (V. 122) бесконечно малые величины можно почленным делением его на dl . При этом следует учесть, что dl'/dl есть линейное увеличение V оптической системы, а dc/dl — некоторая неопределенная, но конечная константа C . Таким образом, получим второй вид закона косинусов

$$n \cos \alpha - n' V \cos \alpha' = C. \quad (\text{V. 123})$$

Исключение неопределенной постоянной C требует введения начальных условий. Пусть среди множества лучей, соединяющих точки A и A' , имеется один луч, для которого нам заранее известны углы α_0 и α'_0 , образованные этим лучом с элементарными отрезками dl и dl' . Такой луч мы назовем начальным лучом. Для начального луча из выражения (V. 123) следует

$$n \cos \alpha_0 - n' V \cos \alpha'_0 = C. \quad (\text{V. 124})$$

Исключая из выражений (V. 123) и (V. 124) величину C , найдем

$$n (\cos \alpha - \cos \alpha_0) - n' V (\cos \alpha' - \cos \alpha'_0) = 0. \quad (\text{V. 125})$$

Для придания закону косинусов более симметричной и легче запоминающейся формы решим это уравнение относительно V

$$V = \frac{n \cos \alpha - \cos \alpha_0}{n' \cos \alpha' - \cos \alpha'_0}. \quad (\text{V. 126})$$

Это выражение закона косинусов в наиболее удобном для практического применения виде.

Закону косинусов, а также и другим, получаемым из него закономерностям, присуще одно особое свойство, которое здесь следует подчеркнуть. Раньше всего заметим, что закон косинусов выполняется в том случае, если, подставляя в формулу (V. 126) всевозможные пары значений углов α и α' в пределах действующего отверстия данной оптической системы, мы по этой формуле получим всегда одно и то же значение линейного увеличения V . Нам приходится оперировать только лучами, соединяющими точки A и A' . Но при этом закон косинусов позволяет судить о качестве изображения точки A_1 , лежащей на другом конце отрезка dl , в стороне от хода лучей, соединяющих точки A и A' : если закон косинусов выполнен, то в точке A_1 будет достигнуто

точечное изображение точки A_1 , в противном случае — не будет. Возможность судить о коррекции aberrаций в точках, не лежащих на лучах, ход которых через оптическую систему рассчитан, позволяет уменьшить объем вычислительной работы, затрачиваемой при расчете новых оптических систем. Хотя применение электронных вычислительных машин позволяет теперь не бояться сложных и кропотливых вычислений, упрощение работы, вносимое законом косинусов (и его частными случаями), остается очень ценным для оптика-конструктора.

Следует напомнить, что предпосылкой вывода закона косинусов служит выполнение условия образования точечного изображения для одной пары сопряженных точек A и A' . Соблюдение

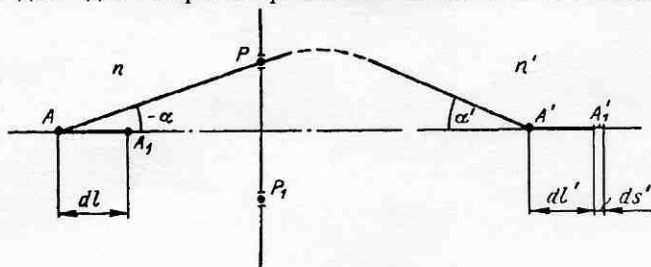


Рис. V. 16

закона косинусов распространяет точечность изображения на целые сопряженные линейные элементы dl и dl' . Если же указанная предпосылка в оптической системе не выполнена, то закон косинусов теряет смысл.

Рассмотрим здесь два частных случая, отличающихся расположением элементов dl и dl' . Первый частный случай открыл в 1821 г. Джон Гершель, сын знаменитого английского астронома Виллиама Гершеля. Этот частный случай закона косинусов известен поэтому под названием условия Гершеля. На чертеже (рис. V. 16) представлены линейные элементы dl и dl' , лежащие на самой оптической оси системы (не показанной на чертеже). Для сопряженных концов A и A' элементов dl и dl' предполагается выполненным условие образования точечного изображения. Это значит, что все лучи света, исходящие из точки A , проходят через точку A' . Требуется, чтобы для другого конца A_1 элемента dl также осуществлялось точечное изображение, иными словами, чтобы сферическая aberrация, устраненная для сопряженных точек A и A' , не возникала при малых перемещениях точки A вдоль оптической оси. Выполнение этого требования было бы желательным во многих группах оптических приборов: в геодезических инструментах, фотографических объективах и микроскопах.

Для выполнения поставленного требования можно воспользоваться законом косинусов по формуле (V. 126). При этом целе-

сообразно выбрать начальный луч так, чтобы он совпал с оптической осью. В таком случае углы α_0 и α'_0 , очевидно, становятся равными нулю. Кроме того, нужно учесть, что отношение малых отрезков dl' и dl является не линейным, а продольным увеличением q для бесконечно малых отрезков (см. § 14). Поэтому для рассматриваемого здесь случая формула (V. 126) приобретает вид

$$q = \frac{n}{n'} \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha'} \quad (\text{V. 127})$$

или иначе

$$q = \frac{n \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{n' \sin^2 \frac{1}{2} \alpha'} \quad (\text{V. 128})$$

Формула (V. 128) и есть условие Гершеля, выполнение которого позволяет сделать коррекцию сферической аберрации устойчивой, т. е. неизменяющейся при малых перемещениях предмета вдоль оптической оси.

Для выяснения того, каким образом действует условие Гершеля, сделаем следующий мысленный эксперимент: вообразим себе, что перед оптической системой поставлена диафрагма PP_1 , имеющая вид бесконечно узкой кольцевой щели. Центр кольца лежит на оптической оси. Эта диафрагма выделяет из множества световых лучей, исходящих из точки A , все лучи, образующие с осью постоянный угол α . Прошедшие через диафрагму лучи сходятся в точке A' (система удовлетворяет условию образования точечного изображения для точек A и A') и образуют с осью постоянный угол α' . Таким образом, для всех лучей, исходящих из точки A и пропускаемых кольцевой диафрагмой PP_1 , значения углов α и α' постоянны, а потому по формуле (V. 128) постоянно и продольное увеличение q . Но мы имеем по определению понятия о продольном увеличении q

$$dl' = qdl. \quad (\text{V. 129})$$

Определив по формуле (V. 128) q , можно по формуле (V. 129) найти величину отрезка dl' , также постоянную при наличии диафрагмы PP_1 . Представим себе, что найденный таким образом отрезок dl' нанесен на чертеже (рис. V. 16). Теперь изменим диаметр вообразяемой кольцевой диафрагмы PP_1 . При этом изменятся углы α и α' , а если при расчете данной оптической системы не приняты специальные меры, изменится и продольное увеличение q , находимое по формуле (V. 128). Поэтому изменится и величина отрезка dl' , определяемого по формуле (V. 129). Мы можем и новое значение отрезка dl' нанести на чертеж; при этом левый его конец должен лежать в постоянной точке A' (так как в точке имеется точечное изображение левого конца A отрезка dl).

Представим себе далее, что диаметр кольцевой диафрагмы меняется от нуля до некоторого максимального значения, зависящего от апертуры данной оптической системы. Мы получим тогда на чертеже (рис. V. 16) множество изображений dl' отрезка dl . Левые концы этих отрезков совпадают в точке A' , а правые их концы не совпадают и располагаются в пределах некоторого малого отрезка ds' . Если мы теперь уберем совсем воображаемую диафрагму PP_1 , то все изображения dl' возникнут одновременно, накладываясь друг на друга. Так как левые концы их совпадают в точке A' , то в этой точке получится резкое (точечное) изображение точки A . Но правые концы этих отрезков не совпадают друг с другом, и потому мы получим нерезкое изображение точки A_1 в виде отрезка ds' , представляющего собой, очевидно, величину сферической аберрации для лучей, исходящих из точки A_1 . Здесь сказывается упомянутое выше удивительное свойство закона косинусов: не рассчитывая хода лучей, идущих из точки A_1 , мы можем определить величину ds' создаваемой ими сферической аберрации. Для этого из всех значений, принимаемых величиной q при изменении углов α и α' в пределах апертуры системы, выберем наименьшее и наибольшее. По формуле (V. 129) наибольшему значению q соответствует и наибольшее значение dl'_{\max} величины dl' , а наименьшему значению q — наименьшая величина dl'_{\min} . Но очевидно, что отрезок ds' определяется формулой

$$ds' = dl'_{\max} - dl'_{\min}. \quad (\text{V. 130})$$

На основании формулы (V. 129) отсюда находится

$$ds' = (q_{\max} - q_{\min}) dl. \quad (\text{V. 131})$$

По этой формуле можно вычислить величину сферической аберрации для правого конца отрезка dl .

Теперь поставим требование, чтобы сферическая аберрация ds' отсутствовала. Из выражения (V. 131) следует, что в таком случае должно выполняться условие

$$q_{\max} - q_{\min} = 0, \quad (\text{V. 132})$$

а оно выполнимо только в случае, если q постоянно в пределах апертуры данной оптической системы. Мы приходим таким образом к требованию соблюдения условия Гершеля. При выполнении условия Гершеля q должно быть постоянно для всех значений углов α и α' (в пределах апертуры системы), в том числе и для бесконечно малых их значений, т. е. в параксиальной области. Вследствие этого величина q в левой части формулы (V. 128) есть продольное увеличение для параксиальной зоны и определяется по формуле оптики Гаусса

$$q = -\frac{f'}{f} \cdot V^2 = \frac{n'}{n} V^2, \quad (\text{V. 133})$$

где V — линейное увеличение в точках A и A' .

При подстановке этого значения q в формулу (V. 128) находим после извлечения квадратного корня

$$V = \frac{n \sin \frac{1}{2} \alpha}{n' \sin \frac{1}{2} \alpha'}. \quad (\text{V. 134})$$

Это второй вид условия Гершеля.

Условие Гершеля, очень важное для развития некоторых общих положений теории образования оптического изображения, имеет, однако, малое практическое применение, так как оно, как будет показано ниже (§ 104), противоречит другому, практически более важному требованию — закону синусов.

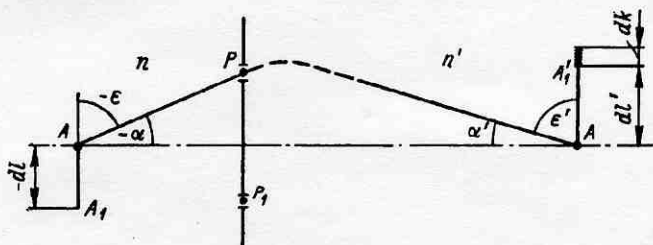


Рис. V. 17

Закон синусов есть также частный случай закона косинусов при расположении элементарных отрезков dl и dl' , показанный на чертеже (рис. V. 17): концевые точки A и A' этих отрезков (для этих точек выполнено условие образования точечного изображения) лежат на оптической оси системы, а сами отрезки dl и dl' перпендикулярны к оптической оси. Чтобы достичь точечного изображения также и для внеосевых концов A_1 и A'_1 этих отрезков, необходимо выполнение закона косинусов (V. 126). Так как на чертеже углы, образованные лучами с отрезками dl и dl' , обозначены буквой ϵ , и учитывая, что отношение dl'/dl в этом случае действительно есть линейное увеличение оптической системы, получим вместо (V. 126)

$$V = \frac{n}{n'} \frac{\cos \epsilon - \cos \epsilon_0}{\cos \epsilon' - \cos \epsilon'_0}. \quad (\text{V. 135})$$

По чертежу видно, что углы ϵ и ϵ' дополняют углы α и α' до 90° . Поэтому из выражения (V. 135) следует

$$V = \frac{n}{n'} \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{\sin \alpha' - \sin \alpha'_0}. \quad (\text{V. 136})$$

Для определения углов α_0 и α'_0 выберем начальный луч так, чтобы он совпадал с оптической осью. Тогда оба угла α_0 и α'_0 становятся равными нулю, и выражение (V. 136) упрощается:

$$V = \frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'}. \quad (\text{V. 137})$$

Это и есть известная формулировка закона синусов, выведенного Э. Аббе в 1879 г. более элементарным путем. Соблюдение закона синусов обуславливает точечное изображение не только одного элементарного отрезка dl , но целой элементарной площадки с радиусом dl , перпендикулярной к оптической оси и окружающей точку A . Это вытекает из симметрии оптической системы относительно оптической оси.

Как и при исследовании условия Гершеля, вообразим себе кольцевую, бесконечно узкую диафрагму с центром кольцевой щели на оптической оси, поставленную перед оптической системой (не показанной на чертеже). Эта диафрагма выделяет из множества лучей, исходящих из точки A , лучи, образующие постоянный угол α с осью, а в пространстве изображений — постоянный угол α' с осью системы. Все эти лучи проходят через точку A' , так как для точек A и A' предполагается выполненным условие образования точечного изображения. Поэтому для лучей, пропускаемых диафрагмой PP_1 , будет постоянным и линейное увеличение V , вычисляемое по формуле (V. 137). Величина изображения dl' элемента dl , определяемая формулой

$$dl' = V dl, \quad (\text{V. 138})$$

тоже, очевидно, будет постоянной. Эту величину dl' нанесем на чертеж так, чтобы осевой конец отрезка dl' совпадал с точкой A' .

Если изменится диаметр воображаемой кольцевой диафрагмы PP_1 , то изменятся и углы α и α' , а это повлечет за собой и изменение линейного увеличения V_1 , находимого по формуле (V. 137), если только при расчете данной системы не приняты особые меры. Поэтому изменится и величина отрезка dl' , определяемая по формуле (V. 138). При нанесении и этого второго отрезка dl' на чертеж осевые концы отрезков совпадут в точке A' (этого требует точечность изображения в этой точке), а их внеосевые концы не совпадут. Если проделать такое построение, меняя угол α в пределах от нуля до наибольшего значения, допускаемого апертурой оптической системы, то внеосевые концы отрезков dl' расположатся в пределах малого отрезка dk .

Если теперь отказаться от применения кольцевой диафрагмы PP_1 , то все эти отрезки dl' появятся одновременно, накладываясь друг на друга. Их совпадающие осевые концы дадут резкое (точечное) изображение точки A предмета, а несовпадающие внеосевые концы заполнят собой отрезок dk , который и дает величину нерезкости изображения точки A_1 . И здесь мы имеем

возможность вычислить величину нерезкости dk , оперируя только лучами, исходящими из точки A и не имея в своем распоряжении расчета хода ни одного луча, исходящего из точки A_1 . Мы имеем

$$dk = dl'_{\max} - dl'_{\min}, \quad (V. 139)$$

где dl'_{\max} и dl'_{\min} — наибольшее и наименьшее значения dl' в пределах апертуры оптической системы.

По формуле (V. 138) следует

$$dk = (V_{\max} - V_{\min}) dl. \quad (V. 140)$$

Здесь V_{\max} и V_{\min} — наибольшее и наименьшее значения величины V , определяемой по формуле (V. 137) в пределах апертуры системы.

Возникает естественный вопрос: какой aberrацией системы вызывается нерезкость dk изображения точки A_1 ? Это не может быть сферическая aberrация, так как выполнение условия точечного изображения устраняет сферическую aberrацию для малого поля изображения.

На чертеже (рис. V. 18) показан ход лучей в пространстве изображений при отсутствии сферической aberrации и при наличии комы у оптической системы. Главный луч $C'A_1$ пучка лучей, исходящих из одной точки предмета, отсекает на плоскости изображений отрезок dl'_0 , считаемый малым. Верхний и нижний крайние лучи $P'A_1$ и $R'A_1$ вследствие отсутствия сферической aberrации встречаются в одной точке A_1 на плоскости изображения, удаленной от оси на малое расстояние dl' . Отрезки dl' и dl'_0 являются наибольшим и наименьшим изображениями некоторого отрезка, получаемыми через разные зоны оптической системы. Поэтому их разность представляет собой величину dk нерезкости изображения, определяемую формулой (V. 139).

При изложении понятия о коме (см. § 32) приведена следующая формула для величины k , являющейся мерой комы,

$$k = \frac{1}{2} (y'_s + y'_n) - y'_{2s}. \quad (V. 141)$$

Величины y'_s , y'_n и y'_{2s} — отрезки, засекаемые на плоскости изображений верхним и нижним крайними лучами и главным лучом пучка, исходящего из внеосевой точки предмета. В нашем случае имеем:

$$y'_s = y'_n = dl'; \quad y'_{2s} = dl'_0.$$

Получаем из (V. 141)

$$k = dl' - dl'_0 = dk. \quad (V. 142)$$

Отсюда следует, что нерезкость dk обусловлена влиянием комы оптической системы.

Для устранения нерезкости dk , а следовательно, и для устранения комы при малом поле зрения необходимо, пользуясь формулой (V. 140), выполнить условие

$$V_{\max} - V_{\min} = 0, \quad (\text{V. 143})$$

что равносильно требованию

$$V = \text{const.} \quad (\text{V. 144})$$

Это привело нас к требованию выполнения закона синусов, представленного формулой (V. 137). Таким образом, можно утверждать, что если в оптической системе устранена сферическая

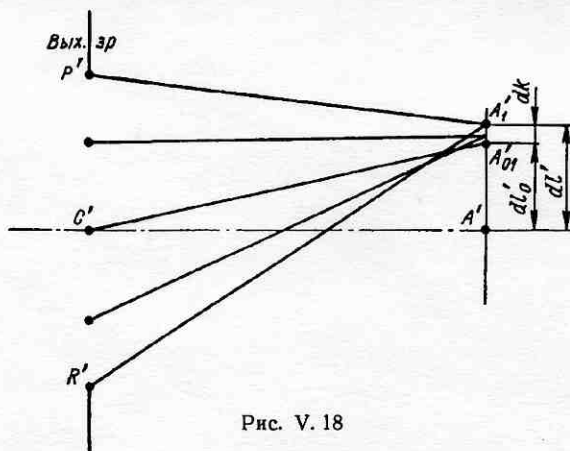


Рис. V. 18

абберация (или выполнено условие образования точечного изображения для осевой точки предмета), то соблюдение закона синусов гарантирует устранение комы для малого поля зрения, что влечет за собой распространение точечного изображения на бесконечно малую площадку, окружающую осевую точку предмета.

Приведенная здесь формулировка связи закона синусов с комой может вызвать у читающего эти строки сомнение: велики ли выигрыш, достигаемый при выполнении закона синусов. Мы покажем, что выигрыш при этом получается существенный. Из выражения (V. 140) при условии (V. 143) следует

$$\frac{dk}{dl} = 0. \quad (\text{V. 145})$$

Из малости входящих сюда величин, строго говоря, еще не следует, что dk равно нулю, а следует только, что dk — величина более высокого порядка малости, чем dl . Например, если dl

первого порядка малости, то dk — по крайней мере второго порядка. Если же dl «нулевого порядка малости», иными словами — конечная величина, то dk должно быть величиной первого порядка малости, т. е. величиной малой по сравнению с dl . Это наблюдается на самом деле: в системах с выполненным законом синусов и устраненной сферической аберрацией и малым полем зрения кома не отсутствует полностью, но она обычно настолько мала, что не вносит практически заметного ухудшения качества изображения. При возрастании угла поля зрения может потребоваться при выполнении закона синусов еще дополнительная коррекция комы.

Если перейти к малым апертурным углам α и α' , синусы которых можно заменить дугами, закон синусов (V. 137) переходит в выражение

$$V = \frac{n\alpha}{n'\alpha'} = \frac{y'}{y}. \quad (\text{V. 146})$$

Это выражение есть следствие инварианта Лагранжа — Гельмгольца, поэтому оно строго выполняется всеми оптическими системами и отпадает необходимость принимать какие-либо меры к устранению комы. Но чем больше становится апертура оптической системы, тем более важное значение приобретает выполнение закона синусов. При большой апертуре даже малые отступления от закона синусов приводят к резкому ухудшению качества изображения.

§ 100. Свойства апланатических систем

Сопряженные осевые точки A и A' , если для хода лучей между ними выполнены условие точечного изображения и закон синусов, называются *апланатическими точками*. В пределах бесконечно малой площадки, окружающей точку A' , в изображении устранены при этом сферическая аберрация и кома. Оптическая система, обладающая по крайней мере одной парой апланатических точек, называется апланатом. Устранение сферической аберрации и комы называется апланатической коррекцией оптической системы. Наконец, для обозначения совокупности свойств апланатов пользуются термином *апланатизм*.

Для исследования свойств апланатов удобно ввести понятие о главных сферах апланатов. Для этого преобразуем выражение (V. 137), применяя формулу оптики Гаусса,

$$V = \frac{ns'}{n's}. \quad (\text{V. 147})$$

Так как выражение (V. 137) справедливо также и в случае малых углов, левая его часть представляет собой линейное увеличение

по формулам оптики Гаусса и может быть заменено выражением (V. 147). Отсюда получается выражение типа инварианта

$$s \sin \alpha = s' \sin \alpha'. \quad (\text{V. 148})$$

Отрезки s и s' считаются от соответствующих главных точек B и B' оптической системы до осевых точек A и A' предмета и изображения (рис V. 19). Формулу (V. 148) можно применить для построения хода лучей в случае апланатической системы. Для этого из точки A как из центра опишем дугу DB радиусом $AB = -s$, а из точки A' опишем как из центра дугу $D'B'$ радиусом $B'A' = s'$. Из точек D и D' пересечения лучей AD и $A'D'$ с про.

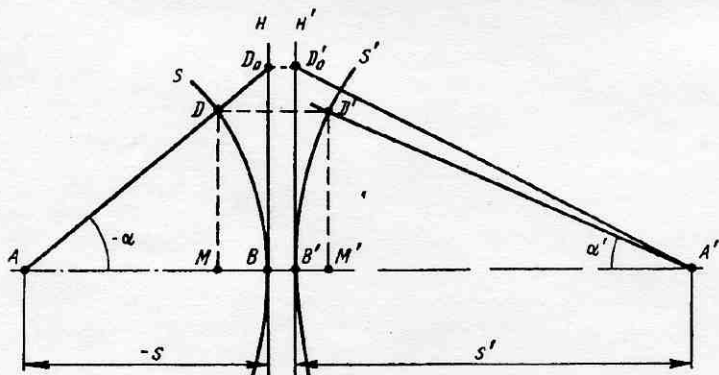


Рис. V. 19

веденными дугами опустим на оптическую ось перпендикуляры DM и $D'M'$. По чертежу находим

$$\left. \begin{aligned} DM &= s \sin \alpha; \\ D'M' &= s' \sin \alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 149})$$

Поэтому выражение (V. 148) требует, чтобы перпендикуляры DM и $D'M'$ имели равную длину.

Перенося эти представления в пространство, мы вводим две сферические поверхности S и S' , описанные из точек A и A' как из центров и касающиеся главных плоскостей H и H' оптической системы в главных точках B и B' . При построении хода лучей (не нулевых, а реальных) в апланатах главные сферы S и S' играют такую же роль, какую играют главные плоскости при построении хода нулевых лучей. На чертеже (рис. V. 19) проделаны оба построения. Для построения нулевого луча через точку D_0 пересечения падающего на систему луча AD_0 с передней главной плоскостью H проводится прямая $D_0D'_0$ параллельно оптической оси; через точку D'_0 пересечения этой прямой с задней главной

плоскостью H' и через осевую точку A' изображении проводится выходящий из системы нулевой луч D_0A' . В случае апланата при построении хода реального луча через точку D пересечения падающего луча AD_0 с передней главной сферой S проводится прямая DD' , параллельная оптической оси системы; через точку D' пересечения прямой DD' с задней главной сферой S' и через точку A' проводится реальный луч $D'A'$, выходящий из апланата. Как видно из чертежа, лучи D_0A' и $D'A'$ не совпадают; при больших апертурах и линейном увеличении, сильно отличающемся от минуса единицы, это расхождение может стать значительным.

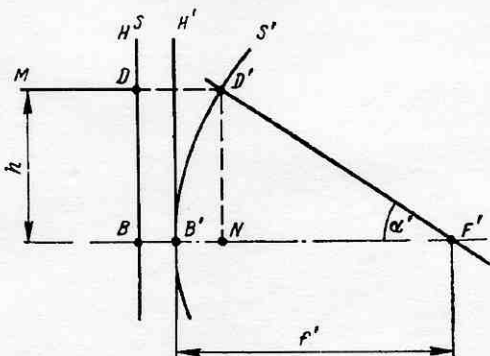


Рис. V. 20

В таких случаях (например, при построении хода лучей в объективе микроскопа) следует совсем отказаться от построения нулевых лучей во избежание грубых ошибок.

Понятие о главных сферах апланата позволяет упростить решение ряда задач. Закон синусов (V. 137) или (V. 148) приобретает неопределенную форму в случае, когда предмет находится на бесконечности. В этом случае $s = \infty$; $\alpha_1 = 0$; $V = 0$; $s' = f'$. Раскрытие неопределенности можно просто выполнить геометрически, пользуясь понятием о главных сферах. Пусть на чертеже (рис. V. 20) даны главные плоскости H и H' апланата и его заднее фокусное расстояние $f' = B'F'$. Его передняя апланатическая точка пусть находится на бесконечности, а задняя — в заднем фокусе F' . Радиус передней главной сферы, равный переднему отрезку s , в этом случае становится равным бесконечности, вследствие чего передняя главная сфера S превращается в плоскость, совпадающую с передней главной плоскостью H апланата. Задняя главная сфера S' имеет радиус, равный f' .

Продолжим луч MD , идущий из бесконечно удаленной осевой точки предмета параллельно оптической оси на высоте h от нее, до пересечения с задней главной сферой S' в точке D' .

Через точки D' и F' следует провести ход этого луча после выхода его из оптической системы. С оптической осью он образует угол α' . Из треугольника $ND'F'$ находим

$$f' = \frac{h}{\sin \alpha'}. \quad (\text{V. 150})$$

Эта формула и есть выражение закона синусов в случае, когда передняя апланатическая точка оптической системы находится на бесконечности.

Формула (V. 150) требует, чтобы при всех значениях h в пределах отверстия системы величина f' , вычисляемая по этой формуле, была постоянной и равной заднему фокусному расстоянию системы, полученному по формулам оптики Гаусса. Но при практическом расчете апланатов часто не удается строго выполнить это требование. В таком случае величина $\delta f'$, определяемая по формуле

$$\delta f' = \frac{h}{\sin \alpha'} - f', \quad (\text{V. 151})$$

выражает величину ошибки закона синусов данной оптической системы.

Формула (V. 150) дает возможность установить теоретический предел относительного отверстия апланатически исправленных оптических систем. Пусть луч MD (рис V. 20) проходит через край входного зрачка оптической системы. Тогда

$$h = \frac{1}{2} D, \quad (\text{V. 152})$$

где D — диаметр входного зрачка апланата.

В таком случае из формулы (V. 150) следует

$$\frac{D}{f'} = 2 \sin \alpha'. \quad (\text{V. 153})$$

Из формулы (V. 153) видно, что относительное отверстие D/f' оптической системы достигнет максимального значения в случае, когда $\sin \alpha$ станет равным единице. При этом получим

$$\left(\frac{D}{f'} \right)_{\max} = 2 = 1 : 0,5, \quad (\text{V. 154})$$

что представляет собой теоретический предел относительного отверстия апланатов.

Выражение закона синусов (V. 137) приобретает неопределенную форму и в случае телескопического апланата, если предмет и изображение находятся на бесконечности, так как при этом углы α и α' становятся равными нулю. На чертеже (рис. V. 21) представлены пространства предметов и изображений любой (не обязательно телескопической) апланатически исправленной

оптической системы. Из точек A и A' как из центров описаны сферические поверхности с радиусами ρ и ρ' . Вершины этих сфер лежат в центрах C и C' входного и выходного зрачков оптической системы. Из точек D и D' пересечения с этими сферами некоторого луча, соединяющего апланатические точки A и A' , на оптическую ось опущены перпендикуляры h_c и h'_c . Из чертежа находится

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{\rho}; \quad \sin \alpha' = \frac{h'_c}{\rho'}. \quad (\text{V. 155})$$

Поэтому из формулы (V. 137) закона синусов следует

$$V = \frac{nh_c\rho'}{n'h'_c\rho}. \quad (\text{V. 156})$$

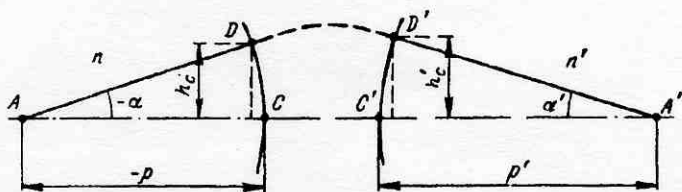


Рис. V. 21

Отношение отрезков ρ' и ρ есть продольное увеличение Q системы

$$V = \frac{nh_c}{n'h'_c} Q. \quad (\text{V. 157})$$

Для телескопической системы справедливы следующие выражения (IV. 9, 1 и 3-я формулы):

$$V = \frac{n}{n'\Gamma}; \quad Q = \frac{n}{n'\Gamma^2}.$$

Вследствие этого легко получаем из формулы (V. 157)

$$\Gamma = \frac{nh_c}{n'h'_c}. \quad (\text{V. 158})$$

Эта формула справедлива для апланатической телескопической системы при любом положении предмета. Если же предмет находится на бесконечности, то лучи AD и $D'A'$ становятся параллельными оптической оси. Поэтому $h_c = h$; $h'_c = h'$, где h и h' — высоты этих лучей на первой и последней преломляющих поверхностях системы. Окончательное выражение для закона синусов в этом случае имеет вид

$$\Gamma = \frac{nh}{n'h'}. \quad (\text{V. 159})$$

Если предмет находится на бесконечности, но в данной телескопической системе не устранена сферическая аберрация, нельзя заменить высоту h'_c луча на плоскости выходного зрачка высотой h' на последней поверхности системы. Поэтому ошибка $\delta\Gamma$ закона синусов выражается в этом случае формулой

$$\delta\Gamma = \frac{nh}{n'h'_c} - \Gamma. \quad (\text{V. 160})$$

При этом величина h'_c вычисляется по формуле

$$h'_c = h' - t' \operatorname{tg} \alpha'. \quad (\text{V. 161})$$

В этой формуле t' — расстояние от вершины последней поверхности до центра выходного зрачка, а α' — угол, образованный с осью в пространстве изображений лучом, который в пространстве предметов проходит параллельно оптической оси на высоте h .

Поставим такой вопрос: можно ли при помощи оптической системы получить точечное изображение пространственного элемента? Для решения этого вопроса представим себе такой элемент, окружающий некоторую точку A (V. 22), лежащую на оптической

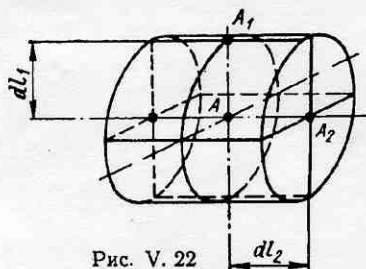


Рис. V. 22

оси системы. Пусть этот пространственный элемент имеет форму цилиндра, соосного с оптической системой, причем диаметр основания цилиндра $2dl_1$, а высота его $2dl_2$. Для получения резкого изображения всех точек, лежащих внутри (и на поверхности) цилиндра, очевидно, необходимо, чтобы изображение точки A было резким, т. е. чтобы для точки A было выполнено условие точечного изображения (V. 39). Для того чтобы в то же время и изображение точки A_1 было точечным, нужно, кроме того, выполнить закон синусов для точки A . А для получения точечного изображения от точки A_2 необходимо соблюдение условия Гершеля для точки A . Таким образом, для осуществления точечного изображения всего пространственного элемента, окружающего точку A , необходимо для этой точки одновременно выполнить три требования: условие точечного изображения, закон синусов и условие Гершеля. Обратим внимание на два последних требования. Закон синусов (V. 137) и условие Гершеля (V. 134) являются, вообще говоря, несовместимыми требованиями, так как при постоянном отношении синусов углов α и α' (что диктуется законом синусов) отношение синусов половин этих углов не будет постоянным (хотя это и требует условие Гершеля). Отсюда вытекает общее правило: в оптической системе невозможно получить точеч-

ное изображение пространственного элемента. Иначе это положение можно формулировать так: в оптической системе, как общее правило, либо совсем нет апланатических точек, либо имеется одна пара сопряженных апланатических точек, чего можно достичь выполнением условия точечного изображения и соблюдением закона синусов в этой паре точек.

Однако из этого общего правила возможны исключения. В этом можно убедиться, приравняв правые части выражений (V. 134) и (V. 137), что необходимо для одновременного соблюдения условия Гершеля и закона синусов. При этом получаем

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}. \quad (\text{V. 162})$$

Переходя в правой части этого выражения к половинным углам, найдем после сокращения:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha'} = 1, \quad (\text{V. 163})$$

откуда следует

$$\alpha' = \pm \alpha. \quad (\text{V. 164})$$

Условие (V. 164) выполняется, если угловое увеличение W в апланатической паре точек равно либо единице (положительные узловые точки), либо минус единице (отрицательные узловые точки). Это условие удовлетворяется также в случае, если система телескопическая, и обе апланатические точки лежат на бесконечности. В этом случае $\alpha' = \alpha = 0$.

Можно, следовательно, утверждать, что в виде исключения из приведенного выше общего правила получения точечного изображения элементарного объема, окружающего переднюю апланатическую точку A , возможно в следующих случаях: если пара апланатических точек совпадает либо с положительными, либо с отрицательными узловыми точками системы, или в случае телескопической системы, если обе апланатические точки лежат на бесконечности. Иначе можно сказать: если одна пара апланатических точек совпадает с положительными или отрицательными узловыми точками или если в телескопической системе апланатические точки находятся на бесконечности, то у данной оптической системы возможно существование более одной пары апланатических точек.

Исследование в области аббераций третьего порядка, не приведенное здесь ввиду его сложности, показывает, что в случае выполнения условия (V. 164) возможно в оптической системе существование трех пар апланатических точек, удаленных друг

от друга на конечное расстояние. В § 101 мы встретимся с оптической системой, обладающей действительно тремя парами апланатических точек.

Но и у приведенного здесь исключения из общего правила возможно существование исключения. Такое «исключение из исключения» возможно в телескопической системе, угловое увеличение W которой удовлетворяет условию

$$W = \pm 1. \quad (V. 165)$$

Как нетрудно понять, в такой системе любая пара сопряженных точек является узловыми точками (положительными или отрицательными). Исследование такой системы приводит к выводу, что она может иметь бесконечно большое число апланатических точек или, иначе говоря, она может давать точечное изображение любой точки пространства предметов. Линейное увеличение такой системы

$$V = \pm \frac{n}{n'}, \quad (V. 166)$$

что свидетельствует об ограниченном практическом значении таких систем, называемых узловыми системами.

Широко распространенным примером оптической системы, дающей точечное изображение всего пространства предметов, служит плоское зеркало. Из построения хода луча APM , показанного на чертеже (рис. V. 23), видно, что условие $\alpha' = -\alpha$ выполняется для любой пары сопряженных точек A и A' . Сюда же относится и описываемая ниже система, предложенная М. Ланге в 1919 г.

Рассмотрим еще одну теорему, имеющую принципиальное значение для теории образования оптического изображения, но выходящую за рамки теории апланатизма. Докажем, что коррекция всех монохроматических aberrаций (а не только сферической aberrации и комы) возможна лишь в одной паре сопряженных плоскостей, перпендикулярных к оптической оси.

Доказательство этой теоремы поведем от противного. Поэтому предположим, что в двух парах сопряженных плоскостей E_1 и E'_1 , E_2 и E'_2 устранены все aberrации (рис. V. 24). Осевые точки A и A' плоскостей E_1 и E'_1 являются, очевидно, апланатическими точками. Поэтому в этих точках должен выполняться закон синусов (V. 137). Отсюда следует

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n}{n'V_{1i}} = \text{const.} \quad (V. 167)$$