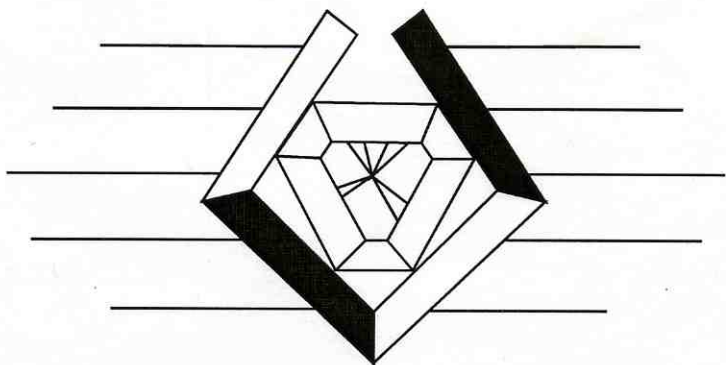


Выдающиеся ученые



ИТМО

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ ИТМО

*Серия монографий ученых
Санкт-Петербургского государственного
(бывшего Ленинградского)
института точной механики и оптики
(технического университета)*



Выпуск 8

Основана в 2000 году по решению
Ученого Совета университета
в ознаменование 100-летия со дня создания
в составе Ремесленного училища цесаревича Николая
Оптико-механического и часового отделения,
превращенного трудами нескольких
поколений профессоров и преподавателей
в один из ведущих технических
университетов России

Редакционная коллегия серии:

проф. В.Н. Васильев (председатель), проф. Г.Н. Дульнев,
проф. Ю.Л. Колесников, проф. С.П. Митрофанов, проф. Г.И. Новиков,
проф. М.И. Потеев (ученый секретарь)

Главный редактор серии – заслуженный деятель науки и техники РСФСР,
академик Академии естественных наук Российской Федерации,
профессор Г.Н. Дульнев

Э. И. СЛИВ

***Прикладная теория
инерциальной
навигации***

*Репринтное воспроизведение
издания 1972 года*

УДК 629.12.011.002; 621.983

Слив Э.И. Прикладная теория инерциальной навигации. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2002.-132 с.

Рассмотрены геометрические, аналитические и полуаналитические системы инерциальной навигации, используемые, в частности, в судостроительной промышленности. Представлены алгоритмы преобразования информации акселерометров и даны структурные схемы этих преобразований, позволяющие вычислять параметры движения судов. Описаны методы построения горизонтальных плоскостей, инвариантных к ускорениям движущихся судов и способы демпфирования собственных колебаний систем инерциальной навигации. Проанализированы результаты исследований инструментальных погрешностей этих систем.

Для инженеров, научных сотрудников, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Geometrical, analytical and semi-analytical systems of inertial navigation, used, in particular, in a shipbuilding industry, are considered. The algorithms of transformation of the information accelerometers are submitted, including block diagrams of these transformations giving out parameters of movement of courts. Methods of construction of horizontal platforms, invariant to acceleration of driven courts, ways of damping own fluctuations in systems of inertial navigation and researches of tool errors of these systems are described.

For the engineers, scientists, post-graduate students and students of the appropriate specialities.

ISBN 5-7577-0169-2

© Санкт-Петербургский
государственный институт
точной механики и оптики
(технический университет),
2002
© Издательство “ИВА”, 2002

Содержание

Из воспоминаний (С.С. Ривкин)	6
Прикладная теория инерциальной навигации	
<i>(репринтное воспроизведение издания 1972 года).....</i>	9
Предисловие	11
Введение	13
Глава I. Геометрические системы инерциальной навигации	22
Глава II. Аналитические системы инерциальной навигации	47
Глава III. Полуаналитические системы инерциальной навигации	76
Глава IV. Инструментальные погрешности систем инерциальной навигации	93
Литература.....	126
Оглавление	127
Основные даты жизни и научно-педагогической деятельности Э.И. Слива	129
Основные научные публикации Э.И. Слива	130

ИЗ ВОСПОМИНАНИЙ

Первое мое знакомство с Э.И. Сливом состоялось осенью 1934 года, когда я поступил учиться в Ленинградский институт точной механики и оптики (ЛИТМО) на факультет точной механики. На этом же факультете двумя курсами старше учился и Эля Израилевич. Среди студенческой молодежи он выделялся отличной успеваемостью в учебе, высокой общей культурой и активным участием в общественной жизни факультета.

Более близкое с ним знакомство состоялось летом 1936 года, когда наша группа после военной подготовки по артиллерийской звуковой разведке, осуществлявшейся преподавателями военной кафедры ЛИТМО, была направлена на лагерные сборы в артиллерийский полк, который располагался в поселке Струги Красные недалеко от города Луга. Э.И.Слив, закончивший к тому времени военную подготовку в институте, имел уже воинское звание младшего лейтенанта запаса. Военная кафедра института сочла целесообразным привлечь Элю Израилевича к руководству нашей боевой подготовкой во время этих сборов. Здесь мы ближе узнали Э.И. Слива, убедились в его хороших знаниях военной специальности, в умении руководить вверенным ему личным составом.

В 1937 году я вместе с большой группой студентов ЛИТМО был направлен по специальному набору ЦК ВЛКСМ на учебу в Военно-морскую академию (ВМА). Учеба в академии и последовавшая затем Великая Отечественная война на многие годы разлучили меня с Элем Израилевичем. Он в качестве армейского артиллериста принимал активное участие в войне, был награжден орденами и медалями.

В 1947 году при чтении в ВМА курса лекций по гироскопическим и стабилизационным устройствам корабельного вооружения мне понадобились сведения по некоторым типам гироскопических приборов. Удалось выяснить, что в одном из ленинградских научно-исследовательских институтов Министерства судостроительной промышленности имеются трофейные немецкие материалы и собственные теоретические исследования и инженерные разработки по интересовавшим меня типам приборов.

Получив направление в соответствующую лабораторию, я встретил в ней группу высококвалифицированных инженеров-исследователей в об-

ласти прикладной гироскопии, в которую входили Р.И. Чертков, Э.И. Слив, М.В. Смирнов, С.А. Бабушкин и др. Сотрудники этой группы и другие инженеры лаборатории оказали мне необходимую помощь в изучении интересовавших меня материалов.

К тому времени Э.И.Слив был уже кандидатом технических наук. Его диссертация, выполненная в процессе обучения в аспирантуре ЛИТМО, была посвящена в основном оригинальным исследованиям в области теории гироскопических компасов. Я подробно ознакомился с диссертацией, которая произвела на меня очень хорошее впечатление. У меня возникла мысль показать работу известному специалисту по теории и практике гирокомпасов профессору Б.И.Кудревичу, что я и сделал с разрешения Эли Израилевича. Борису Ивановичу эта диссертация понравилась, и он по своей инициативе написал положительный отзыв, который я и передал автору. С той поры у меня возникли общие научные интересы в области прикладной гироскопии с Э.И.Сливом и установились с ним дружеские отношения, которые длились в течение многих лет.

Одновременно с инженерной и научной деятельностью Эля Израилевич вел преподавание по гироскопическим приборам в Ленинградском электротехническом институте (ЛЭТИ), а позже в ЛИТМО. Широкую известность получили опубликованные им в периодических изданиях многочисленные научные статьи по гироскопии и инерциальной навигации, а также его доклады на различных научно-технических конференциях. При этом специалисты отмечали строгое научное освещение предмета исследования, ясный и четкий стиль изложения.

В 1961 году в издательстве Судпромгиз была опубликована книга П.И. Сайдова, Э.И. Слива, Р.И. Черткова “Вопросы прикладной теории гирокомпасов”. Написанные Элем Израилевичем главы: однороторный гирокомпас с маятником, двухроторный гирокомпас, гироскопы (совместно с П.И. Сайдовым), влияние упругих свойств гироскопических приборов на их движение – вызвали большой интерес у специалистов по гироскопическому приборостроению. Следует отметить полученное им одно из приближенных условий компенсации баллистических девиаций гирокомпаса, являющееся более точным, чем известное условие невозмущаемости М. Шулера.

В последующие годы Эля Израилевич много работал над вопросами теории инерциальных навигационных систем. Полученные им оригинальные результаты в этой области составили основу его докторской диссертации. Я присутствовал на ее защите на Ученом совете ЛЭТИ и был свидетелем того интереса, который работа вызвала у присутствовавших

специалистов, что также отмечалось в многочисленных отзывах, поступивших на диссертацию.

В ЛЭТИ Эля Израилевич читал курс, связанный с вопросами инерциальной навигации. Необходимость обеспечить учебный процесс соответствующим пособием, а также зарождавшийся тогда у специалистов приборостроительной промышленности интерес к инерциальным навигационным системам побудила его написать монографию, которая под названием “Прикладная теория инерциальной навигации” была опубликована издательством “Судостроение” в 1972 году.

В ней излагались оригинальные материалы по системам инерциальной навигации, которые в то время недостаточно освещались в отечественной литературе по прикладной гироскопии и навигации подвижных объектов, в частности, теория геометрических, аналитических и полуаналитических систем инерциальной навигации, а также инструментальные погрешности этих систем.

Сотрудники ЦНИИ “Электроприбор” оказывали автору посильную помощь при издании книги. Так, С.С. Ривкин и Я.Г. Остромухов выполнили рецензирование подготовленной автором рукописи, В.Г. Гордеев осуществил ее научное редактирование.

В настоящее время книга Э.И. Слива является библиографической редкостью. Несмотря на прошедшие 30 лет с момента ее опубликования, материалы книги не утратили интереса у работников гироскопического приборостроения и учащихся соответствующих специальностей. Поэтому можно приветствовать усилия Ученого совета Санкт-Петербургского государственного института точной механики и оптики (технического университета), направленные на переиздание книги Э.И. Слива.

7 марта 2002 года

*С.Ривкин, доктор технических наук,
профессор, заслуженный деятель
науки и техники РФСР*

Э. И. СЛИВ

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО „СУДОСТРОЕНИЕ“
ЛЕНИНГРАД 1972

Системы инерциальной навигации обладают многими замечательными свойствами, главнейшие из которых — автономность, помехозащищенность и скрытность. Можно без преувеличения сказать, что ни одно из современных средств навигации не обладает такими свойствами.

Наряду с решением основной задачи — определением координат судов и других подвижных объектов — системы инерциальной навигации выполняют следующие важные для навигации функции: выработку векторов скорости и ускорения, выработку вектора относительной (путевой) скорости, определение курса.

Отсюда понятен тот большой интерес, который вызывают к себе системы инерциальной навигации у специалистов, занимающихся разработкой систем навигации и управления движением судов и других подвижных объектов.

В настоящей работе основное место занимает исследование тех вопросов теории систем инерциальной навигации, которые, на наш взгляд, еще недостаточно полно освещены в литературе.

Книга состоит из введения и четырех глав.

В введении произведен выбор систем координат и получены кинематические соотношения, необходимые для дальнейшего изложения.

В гл. I рассмотрены геометрические системы инерциальной навигации. Глава начинается с изложения общих принципов работы таких систем, причем показано, что в геометрических системах реализуются методы астрономической навигации, используемые в практике судовождения. Далее изложены методы получения географических координат и построения трассы без промежуточного определения широты и долготы.

Значительное место в этой главе занимает исследование методов создания невозмущаемой горизонтальной площадки. Здесь показаны способы построения горизонтальной площадки по точному алгоритму, а также по приближенному алгоритму с последующим вводом корректур.

Наряду с классической схемой геометрической системы инерциальной навигации в главе рассмотрены еще две схемы подобных систем: геометрической системы со стабилизированным в азимуте построите-

лем вертикали и геометрической системы с акселерометрами, установленными на стабилизированной платформе.

Глава заканчивается описанием методов демпфирования собственных колебаний в геометрических системах.

Гл. II посвящена аналитическим системам инерциальной навигации. В главе показано, как вырабатываются параметры движения объекта, перемещающегося как по сфере, так и произвольным образом в пространстве.

Помимо классической схемы, использующей акселерометры, здесь рассмотрены аналитические системы инерциальной навигации с использованием интеграторов ускорений. В главе показано, что аналитические системы инерциальной навигации решают такие важные производные задачи, как выработка векторов скорости и ускорения, выработка вектора относительной (путевой) скорости, определение курса, определение углов атаки и скольжения для спокойной среды.

Здесь обоснована возможность материализации горизонтальной площадки на борту объекта, определены соответствующие алгоритмы преобразований для решения этой задачи, исследована устойчивость движения аналитической системы инерциальной навигации и рассмотрены методы демпфирования колебаний в таких системах.

Полуаналитические системы навигации исследуются в гл. III. Рассмотрены три вида систем: система с географической ориентацией карданова подвеса, системы с азимутальными гироскопами и система с передачей сигналов акселерометров на оси карданова подвеса. В результате анализа выведенных уравнений движения получены условия невозмущаемости систем, показаны методы выработки параметров движения и установлена возможность решения этими системами некоторых производных задач.

Анализу инструментальных погрешностей систем инерциальной навигации посвящена гл. IV. В ней рассмотрено влияние уходов стабилизированной платформы и неточности интегрирования на точность определения горизонта и местоположения движущегося объекта геометрической системы инерциальной навигации. Кроме того, в главе проведено исследование погрешностей аналитической системы инерциальной навигации, возникающих из-за уходов стабилизированной платформы, погрешностей акселерометров и интеграторов, а также из-за неточностей компенсации ускорения силы земного тяготения.

Автор выражает благодарность заслуженному деятелю науки и техники РСФСР докт. техн. наук проф. С. С. Ривкину и канд. техн. наук Я. Г. Остроухову за ряд ценных замечаний, высказанных ими при рецензировании этой работы, а также научному редактору книги докт. техн. наук В. Г. Гордееву.

Системы координат. Введем в рассмотрение сферические координаты λ, φ, R , оси которых обозначим через x, y, z и направим по касательным к соответствующим координатным линиям в сторону возрастания координат λ, φ, R (рис. 1).

Оси x и y будут лежать в плоскости геоцентрического горизонта и будут ориентированы соответственно по направлениям «восток» и «север», а ось z — направлена по геоцентрической вертикали.

Эту систему осей принято называть трехгранником Дарбу [3].

В дальнейшем условимся в отличие от геоцентрической вертикали называть истинной вертикалью или линией отвеса линию, совпадающую с равнодействующей, построенной на направлении ускорения силы земного тяготения и направлении центробежной силы инерции суточного вращения Земли. Плоскость, перпендикулярную истинной вертикали, будем называть плоскостью истинного горизонта в отличие от плоскости геоцентрического горизонта, под которой будем понимать плоскость, касательную к земной сфере в точке стояния.¹

Обозначим через u_1, u_2, u_3 проекции мгновенной угловой скорости трехгранника xuz на оси x, y, z .

Нетрудно видеть, что $u_1 = -\dot{\varphi}$; $u_2 = (\omega + \dot{\lambda}) \cos \varphi$; $u_3 = (\omega + \dot{\lambda}) \sin \varphi$, где ω — угловая скорость суточного вращения Земли; φ — геоцентрическая широта; $\dot{\lambda}$ — долгота.

Введем обозначение $\theta = \omega + \dot{\lambda}$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\dot{\varphi}; \\ u_2 &= \dot{\theta} \cos \varphi; \\ u_3 &= \dot{\theta} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если v_N и v_e — северная и восточная составляющие скорости движения объекта относительно Земли, то $\dot{\varphi} = v_N/R$; $\dot{\lambda} = v_e/R \cos \varphi$.

¹ Влияние аномалий гравитационного поля Земли не учитывается.

Соответственно

$$u_1 = -\frac{v_N}{R} = -\frac{V_N}{R}; \quad u_2 = \frac{R\omega \cos \varphi + v_e}{R} = \frac{V_e}{R};$$

$$u_3 = \frac{R\omega \cos \varphi + v_e}{R} \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_e}{R} \operatorname{tg} \varphi,$$

где $V_e = R\omega \cos \varphi + v_e = V_x$ и $V_N = v_N = V_y$ — восточная и северная составляющие абсолютной скорости движения объекта.

Введем координатную систему $x'y'z'$, образованную из системы осей сферических координат поворотом вокруг оси z на угол k — курс, под которым движется объект (см. рис. 1). Обычно принято курс отсчитывать от направления «север» по часовой стрелке. Оси x' и y' новой системы лежат в плоскости геоцентрического горизонта, причем ось y' направлена по касательной к трассе (под которой понимаем след траектории на поверхности Земли). Образованные таким образом оси иногда называют «ортодромическими».

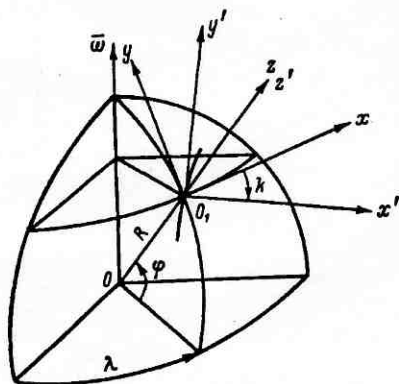


Рис. 1. Треугольники Дарбу

Для проекций мгновенной угловой скорости трехгранника Дарбу на оси x' , y' , z' сохраним те же обозначения u_1 , u_2 , u_3 . Перепроектируя угловые скорости, определяемые выражениями (1), на оси x' , y' , z' и имея в виду вращение

треугольника с угловой скоростью k вокруг оси z' , получим

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\dot{\varphi} \cos k - \dot{\theta} \cos \varphi \sin k; \\ u_2 &= -\dot{\varphi} \sin k + \dot{\theta} \cos \varphi \cos k; \\ u_3 &= \dot{\theta} \sin \varphi - k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

или

$$u_1 = -\omega \cos \varphi \sin k - \frac{v}{R} = -\frac{V_{y'}}{R};$$

$$u_2 = \omega \cos \varphi \cos k = \frac{V_{x'}}{R};$$

$$u_3 = \omega \sin \varphi + \frac{v \sin k}{R} \operatorname{tg} \varphi - k,$$

где $V_{x'} = R\omega \cos \varphi \cos k$ и $V_{y'} = R\omega \cos \varphi \sin k + v$ — проекции абсолютной скорости движения объекта соответственно на оси x' и y' .

Если объект движется по дуге большого круга (ортодромии), то имеет место соотношение

$$\frac{v \sin k}{R} \operatorname{tg} \varphi = \dot{k}.$$

Это легко доказать, если воспользоваться теоремой Клеро, которую применительно к сфере можно сформулировать так: для дуги большого круга сферы произведение косинуса широты на синус, курса есть величина постоянная,¹ т. е. $\cos \varphi \sin k = \text{const.}$

Продифференцировав это выражение один раз, получим

$$-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin k + \dot{k} \cos \varphi \cos k = 0.$$

Замечая, что $\dot{\varphi} = v \cos k/R$, получаем сразу

$$\dot{k} = \frac{v \sin k}{R} \operatorname{tg} \varphi.$$

Соответственно $u_3 = \omega \sin \varphi$.

Таким образом, при движении объекта по ортодромии трехгранник $x'y'z'$ вращается вокруг оси z' со скоростью, равной вертикальной составляющей угловой скорости суточного вращения Земли.

Рассмотрим инерциальную ортогональную систему координат $\xi\eta\zeta$ началом в центре Земли.² Пусть взаимное расположение осей инерциальной системы координат и осей трехгранника Дарбу определяется направляющими косинусами углов, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

	ξ	η	ζ
x	a_1	b_1	c_1
y	a_2	b_2	c_2
z	a_3	b_3	c_3

Значения направляющих косинусов будут зависеть от ориентации осей инерциальной системы координат. Найдем выражения для направляющих косинусов в нескольких частных случаях ориентации осей.

Пусть оси инерциальной системы координат совпадают по направлению с осями трехгранника Дарбу в точке отправления. Оси ξ и η как оси инерциальной системы «запоминают» плоскость горизонта точки отправления. Указанную ориентацию осей инерциальной системы координат будем называть **г о р и з о н т н о й**.

¹ Теорема Клеро справедлива для любых тел вращения и формулируется так: для геодезической линии, лежащей на поверхности тела вращения, произведение косинуса широты на синус курса есть величина постоянная.

Для сферы геодезической линией является дуга большого круга.

² Движением Земли вокруг Солнца в плоскости эклиптики пренебрегаем.

Выберем вспомогательную инерциальную систему координат $x_0y_0z_0$ с началом в центре Земли, оси которой ориентированы следующим образом: ось y_0 — по оси мира, ось z_0 — по линии пересечения небесного меридиана точки отправления с плоскостью экватора, ось x_0 — перпендикулярно осям y_0 и z_0 (рис. 2).

Положение осей ξ, η, ζ относительно осей x_0, y_0, z_0 можно определить двумя поворотами: поворотом на угол φ_0 (называемый широтой

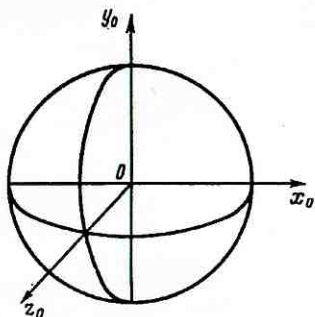


Рис. 2. Вспомогательная система координат

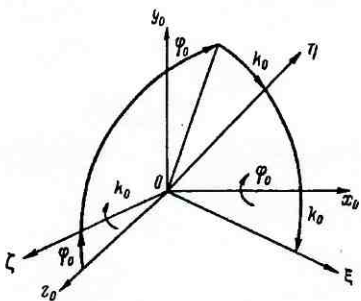


Рис. 3. Расположение осей инерциальной системы координат

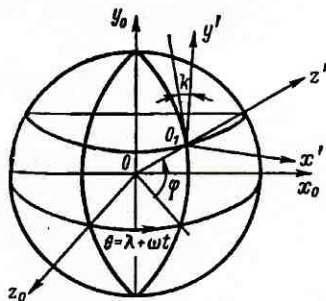


Рис. 4. Расположение осей трехгранника Дарбу относительно вспомогательных осей

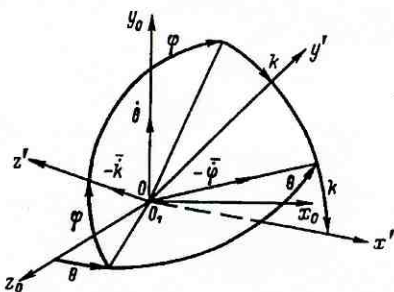


Рис. 5. Образование трехгранника Дарбу из вспомогательных осей

точки отправления) вокруг оси x_0 по часовой стрелке для северного полушария и поворотом на угол k_0 также по часовой стрелке (рис. 3). Так как по предположению оси инерциальной системы и оси трехгранника Дарбу совпадают, то угол k_0 можно считать начальным курсом.

Взаимное расположение осей ξ, η, ζ и x_0, y_0, z_0 определяет табл. 2 направляющих косинусов углов.

На рис. 4 показано взаимное расположение осей трехгранников $x_0y_0z_0$ и $x'y'z'$.

Координатную систему $x'y'z'$ можно образовать из системы $x_0y_0z_0$ тремя поворотами: поворотом на угол $\theta = \omega t + \lambda$ вокруг оси y_0 про-

	x_0	y_0	z_0
ξ	$\cos k_0$	$-\cos \varphi_0 \sin k_0$	$\sin \varphi_0 \sin k_0$
η	$\sin k_0$	$\cos \varphi_0 \cos k_0$	$-\sin \varphi_0 \cos k_0$
ζ	0	$\sin \varphi_0$	$\cos \varphi_0$

тив часовой стрелки, поворотом на угол φ вокруг линии узлов по часовой стрелке в северном полушарии и на угол k вокруг оси z' (рис. 5).

Значения направляющих косинусов углов, определяющих взаимное расположение упомянутых осей, представлены в табл. 3.

Используя табл. 2 и 3, составляем таблицу направляющих косинусов углов, которые определяют взаимное расположение осей инерциальной системы координат и осей трехгранника Дарбу (табл. 4).

Рассмотрим иной случай ориентации осей инерциальной системы координат. Пусть ось ξ направлена по оси мира, а оси η и ζ лежат в плоскости экватора, причем ось ζ лежит в плоскости небесного меридиана точки отправления, расположенной в плоскости рисунка (рис. 6). Такую ориентацию осей инерциальной системы координат будем называть *экваториальной*.

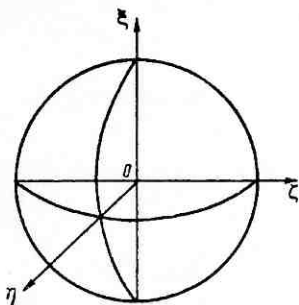


Рис. 6. Экваториальная ориентация осей

Предположим, что оси трехгранника Дарбу имеют географическую ориентацию.

Тогда интересующие нас значения направляющих косинусов можно получить из табл. 4, если положить $k = 0$, $\varphi_0 = 0$, $k_0 = -90^\circ$ (табл. 5).

Таблица 3

	x_0	y_0	z_0
x'	$\cos \theta \cos k + \sin \theta \sin k \sin \varphi$	$-\cos \varphi \sin k$	$-\sin \theta \cos k + \cos \theta \sin k \sin \varphi$
y'	$\cos \theta \sin k - \sin \theta \cos k \sin \varphi$	$\cos \varphi \cos k$	$-\sin \theta \sin k - \cos \theta \cos k \sin \varphi$
z'	$\cos \varphi \sin \theta$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi \cos \theta$

Проекция абсолютного ускорения на оси координат. Зададим положение начала O_1 трехгранника xyz радиусом-вектором $\bar{\rho}$ относительно центра Земли и разложим его по ортам: $\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орты осей соответственно x, y, z .

Так как ось z направлена по геоцентрической вертикали, то $x = y = 0$, $z = R$ и $\bar{\rho} = R\bar{k}$.

Таблица 4

	ξ	η	ζ
x'	$(\cos \theta \cos k + \sin \theta \sin k \sin \varphi) \times$ $\times \cos k_0 + \cos \varphi \sin k \cos \varphi_0 \sin k_0 +$ $+ (-\sin \theta \cos k + \cos \theta \sin k \sin \varphi) \times$ $\times \sin \varphi_0 \sin k_0$	$(\cos \theta \cos k + \sin \theta \sin k \sin \varphi) \times$ $\times \sin k_0 - \cos \varphi \sin k \cos \varphi_0 \cos k_0 -$ $- (-\sin \theta \cos k + \cos \theta \sin k \sin \varphi) \times$ $\times \sin \varphi_0 \cos k_0$	b_1 $-\cos \varphi \sin k \sin \varphi_0 +$ $+ (-\sin \theta \cos k +$ $+ \cos \theta \sin k \sin \varphi) \cos \varphi_0$
y'	$(\cos \theta \sin k - \sin \theta \cos k \sin \varphi) \times$ $\times \cos k_0 - \cos \varphi \cos k \cos \varphi_0 \sin k_0 -$ $- (\sin \theta \sin k +$ $+ \cos \theta \cos k \sin \varphi) \sin \varphi_0 \sin k_0$	$(\cos \theta \sin k - \sin \theta \cos k \sin \varphi) \times$ $\times \sin k_0 + \cos \varphi \cos k \cos \varphi_0 \cos k_0 +$ $+ (\sin \theta \sin k + \cos \theta \cos k \sin \varphi) \times$ $\times \sin \varphi_0 \cos k_0$	b_2 $\cos \varphi \cos k \sin \varphi_0 -$ $- (\sin \theta \sin k +$ $+ \cos \theta \cos k \sin \varphi) \cos \varphi_0$
z'	$\sin \theta \cos \varphi \cos k_0 -$ $- \sin \varphi \cos \varphi_0 \sin k_0 +$ $+ \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_0 \sin k_0$	$\sin \theta \cos \varphi \sin k_0 +$ $+ \sin \varphi \cos \varphi_0 \cos k_0 -$ $- \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos k_0$	b_3 $\sin \varphi \sin \varphi_0 +$ $+ \cos \theta \cos \varphi \cos \varphi_0$

Таблица 5

	ξ	η	ζ
x	0	$-\cos \theta$	b_1 $-\sin \theta$
y	$\cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	b_2 $-\cos \theta \sin \varphi$
z	$\sin \varphi$	$-\sin \theta \cos \varphi$	b_3 $\cos \theta \cos \varphi$

Дифференцируя это выражение один раз, получаем $\bar{v} = d\bar{\rho}/dt = \dot{R}\bar{k} + R\bar{u} \times \bar{k}$, где \bar{u} — мгновенная угловая скорость трехгранника xyz . Повторное дифференцирование определит ускорение

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \ddot{R}\bar{k} + 2\dot{R}\bar{u} \times \bar{k} + R\dot{\bar{u}} \times \bar{k} + R\bar{u} \times (\dot{\bar{u}} \times \bar{k}).$$

Представив

$$\bar{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}; \quad \dot{\bar{u}} = \dot{u}_1\bar{i} + \dot{u}_2\bar{j} + \dot{u}_3\bar{k},$$

разложив двойное векторное произведение по известной формуле алгебры и замечая далее, что $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$; $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$; $\bar{k} \times \bar{k} = 0$; $(\bar{u} \cdot \bar{k}) = u_3$; $(\bar{u} \cdot \bar{u}) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, можно представить

$$\begin{aligned} \bar{w} = R \left(\dot{u}_2 + u_1 u_2 + \frac{2\dot{R}}{R} u_2 \right) \bar{i} + R \left(-\dot{u}_1 + u_2 u_3 - \frac{2\dot{R}}{R} u_1 \right) \bar{j} + \\ + \left(\ddot{R} - R u_1^2 - R u_2^2 \right) \bar{k}. \end{aligned}$$

Проекции ускорения на оси x , y , z будут иметь следующий вид

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= R \left(\dot{u}_2 + u_1 u_2 + \frac{2\dot{R}}{R} u_2 \right); \\ w_2 &= R \left(-\dot{u}_1 + u_2 u_3 - \frac{2\dot{R}}{R} u_1 \right); \\ w_3 &= \ddot{R} - R (u_1^2 + u_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формулы (3) пригодны для географически ориентированных и для ортодромических осей. Если, например, подставить в формулы (3) значения u_1 , u_2 , u_3 , определяемые формулами (1), то можно получить выражения проекций ускорения на географически ориентированные оси

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= R (\ddot{\theta} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi) + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos \varphi; \\ w_2 &= R (\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi) + 2\dot{R}\dot{\varphi}; \\ w_3 &= \ddot{R} - R (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если в формулы (3) подставить значения u_1 , u_2 , u_3 , определяемые формулами (2), то можно получить выражения проекций ускорения на ортодромические оси

$$\begin{aligned} w_1 &= [R (\ddot{\theta} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi) + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos \varphi] \cos k - \\ &\quad - [R (\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi) + 2\dot{R}\dot{\varphi}] \sin k; \\ w_2 &= [R (\ddot{\theta} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi) + 2\dot{R}\dot{\theta} \cos \varphi] \sin k + \\ &\quad + [R (\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi) + 2\dot{R}\dot{\varphi}] \cos k; \\ w_3 &= \ddot{R} - R (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

При движении объекта по сфере ($\dot{R} = 0$) будем иметь:
для географически ориентированных осей

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= R (\ddot{\theta} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi); \\ \omega_2 &= R (\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi); \\ \omega_3 &= -R (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

для ортодромических осей

$$\begin{aligned} \omega_1 &= R (\ddot{\theta} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi) \cos k - R (\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi) \sin k; \\ \omega_2 &= R (\ddot{\theta} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi) \sin k + R (\ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi) \cos k; \\ \omega_3 &= -R (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Проекция ускорения движущегося объекта на оси инерциальной системы координат определяются следующими выражениями: $\omega_{\xi} = \ddot{\xi}$, $\omega_{\eta} = \ddot{\eta}$, $\omega_{\zeta} = \ddot{\zeta}$.

Замечая, что $\xi = Ra_3$, $\eta = Rb_3$, $\zeta = Rc_3$, можно представить проекции ускорения на оси инерциальной системы координат в другом виде:

$$\omega_{\xi} = \frac{d^2}{dt^2} (Ra_3), \quad \omega_{\eta} = \frac{d^2}{dt^2} (Rb_3), \quad \omega_{\zeta} = \frac{d^2}{dt^2} (Rc_3).$$

Введем термин кажущегося ускорения, под которым будем понимать геометрическую сумму ускорения движущегося объекта и ускорения силы земного тяготения.

Проекция кажущегося ускорения на оси инерциальной системы координат получим в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= \ddot{\xi} + \frac{g}{R} \xi; \\ a_{\eta} &= \ddot{\eta} + \frac{g}{R} \eta; \\ a_{\zeta} &= \ddot{\zeta} + \frac{g}{R} \zeta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= \frac{d^2}{dt^2} (Ra_3) + \frac{g}{R} Ra_3; \\ a_{\eta} &= \frac{d^2}{dt^2} (Rb_3) + \frac{g}{R} Rb_3; \\ a_{\zeta} &= \frac{d^2}{dt^2} (Rc_3) + \frac{g}{R} Rc_3. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если объект движется по сфере, то

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= R \left(\ddot{a}_3 + \frac{g}{R} a_3 \right); \\ a_{\eta} &= R \left(\ddot{b}_3 + \frac{g}{R} b_3 \right); \\ a_{\zeta} &= R \left(\ddot{c}_3 + \frac{g}{R} c_3 \right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где g — ускорение силы земного тяготения, направленное к центру Земли, которую считаем сферой радиусом R .

Получим необходимые в дальнейшем выражения производных от направляющих косинусов a_3, b_3, c_3 .

Проекции скорости движущегося объекта на оси инерциальной системы координат определим следующими выражениями:

$$V_{\xi} = \dot{\xi} = \frac{d}{dt} (R a_3); \quad V_{\eta} = \dot{\eta} = \frac{d}{dt} (R b_3); \quad V_{\zeta} = \dot{\zeta} = \frac{d}{dt} (R c_3).$$

С другой стороны,

$$V_{\xi} = V_x a_1 + V_y a_2 + V_z a_3; \quad V_{\eta} = V_x b_1 + V_y b_2 + V_z b_3;$$

$$V_{\zeta} = V_x c_1 + V_y c_2 + V_z c_3.$$

Отсюда находим

$$\frac{d}{dt} (R a_3) = V_x a_1 + V_y a_2 + V_z a_3;$$

$$\frac{d}{dt} (R b_3) = V_x b_1 + V_y b_2 + V_z b_3;$$

$$\frac{d}{dt} (R c_3) = V_x c_1 + V_y c_2 + V_z c_3.$$

Если объект движется по сфере ($R = \text{const}$), то

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_3 &= \frac{1}{R} (V_x a_1 + V_y a_2); \\ \dot{b}_3 &= \frac{1}{R} (V_x b_1 + V_y b_2); \\ \dot{c}_3 &= \frac{1}{R} (V_x c_1 + V_y c_2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ГЛАВА I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Геометрические системы инерциальной навигации используют главным образом для определения навигационных элементов относительно Земли. Чтобы решить эту задачу, необходимо располагать устройством, создающим направления, неизменные относительно инерциального пространства, и устройством, имитирующим направление текущей вертикали в течение всего времени движения.

Неизменные относительно неподвижного пространства направления создаются различными гироскопическими устройствами. Вертикаль создается построителем вертикали.

В астрономической навигации, применяемой в практике судовождения, также используют неизменные направления в неподвижном пространстве (направления на небесные светила) и направление текущей вертикали. Таким образом, в геометрических системах инерциальной навигации для определения навигационных параметров используют методы астрономической навигации.

Дадим краткие сведения о методе астрономической навигации и покажем, как он реализуется в геометрических системах инерциальной навигации. В основу астрономической навигации, применяемой в практике судовождения и самолетовождения, положены различные модификации метода Сомнера.

Сущность метода Сомнера сводится к следующему. Пусть нам известна высота определенного светила в данный момент времени. Геометрическое место точек, из которых данное светило в этот момент времени видно под найденной высотой, представляет собой круг, лежащий на земной сфере. Этот круг называют кругом равных высот.

Очевидно, что объект, откуда произведено измерение высоты светила, лежит на круге равных высот. Измерив в тот же момент времени высоту другого светила, легко построить еще один круг равных высот, и тогда истинное положение объекта совпадает с одной из точек пересечения кругов равных высот.

Таким образом, для определения местоположения объекта надо иметь возможность наблюдать горизонт или иметь на объекте устройство для имитации плоскости горизонта и располагать устройством для измерения высоты светил.

В практике судовождения местоположение движущегося объекта определяется эпизодически по мере надобности. Чтобы устройство выдавало значение географических координат непрерывно, оно должно непрерывно осуществлять слежение за светилами, измерять высоты светил и подавать их на вход счетно-решающего устройства, с выхода которого можно снять непрерывные значения координат движущегося объекта.

На практике не всегда удается осуществлять наблюдение за све-

тилами из-за неблагоприятных метеорологических условий либо из-за иных обстоятельств.

Тогда на помощь могут прийти различные устройства, которые создают неизменные направления в инерциальном пространстве, имитирующие направления на неподвижные небесные светила. Такими устройствами служат свободные гироскопы, оси которых сохраняют свои направления неподвижными в пространстве, или трехосный гироскопический стабилизатор, платформа которого сохраняет неизменное положение в инерциальном пространстве.

Эта платформа (в дальнейшем будем ее называть стабилизированной платформой) способна имитировать весь небесный купол с его

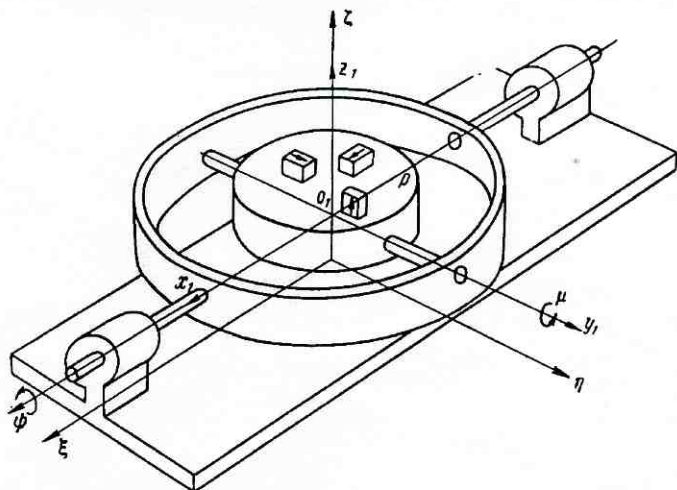


Рис. 7. Схема геометрической системы инерциальной навигации

бесчисленным множеством звезд, так как любая прямая, связанная с ней, сохраняет свое направление неизменным.

Следовательно, навигацию можно осуществлять не только по естественным светилам, но и по любым направлениям, связанным со стабилизированной платформой, при наличии устройства, имитирующего плоскость горизонта.

Указанный принцип и положен в основу геометрической системы инерциальной навигации, хотя реализуется несколько своеобразно.

Схема геометрической системы инерциальной навигации изображена на рис. 7. На стабилизированной в инерциальном пространстве платформе, ориентацию которой пока считаем произвольной, установлен двухосный карданов подвес, несущий площадку P . На этой площадке установлено три акселерометра, оси чувствительности которых образуют ортогональную систему координат. Площадка P разворачивается относительно стабилизированной платформы в соответствии с алгоритмом, вид которого показан ниже.

§ 1. Соотношение между высотами направлений, связанных со стабилизированной платформой, и географическими координатами

Свяжем со стабилизированной платформой ортогональную систему координат $\xi\eta\zeta$ и будем считать, что оси этой системы в течение всего времени движения параллельны осям инерциальной системы координат. Тогда положение этих осей можно задать астрономическими координатами, подобно тому как задаются положения небесных светил.

Определим положение оси η склонением δ и часовым углом φ , а положение оси ξ — склонением δ_1 и часовым углом φ_1 . Пусть осям η и ξ будут соответствовать высоты h_η и h_ξ и азимуты A и A_1 (рис. 8, где показаны углы, относящиеся только к оси η).

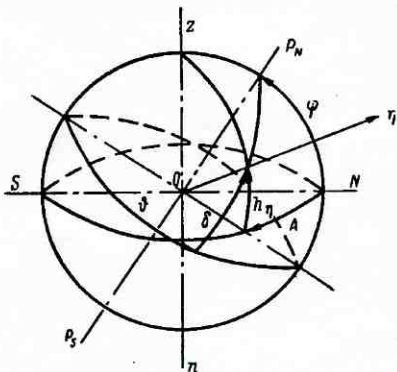


Рис. 8. Астрономические координаты оси η

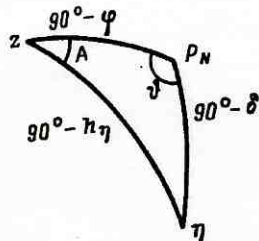


Рис. 9. Параллактический треугольник

Рассмотрим так называемый параллактический треугольник $P_N z \eta$ (рис. 9).

По теореме косинусов находим

$$\sin h_\eta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \vartheta. \quad (10)$$

Теорема синусов дает

$$\sin \vartheta = \sin A \frac{\cos h_\eta}{\cos \delta}. \quad (11)$$

Выразим склонение и часового угла через известные величины. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что склонение неподвижных звезд не зависит от перемены места наблюдателя на Земле. Отсюда следует, что в течение всего времени движения склонение будет сохранять значение, заданное в начальный момент.

Для простоты рассмотрим случай, когда в начальный момент оси инерциальной системы координат $\xi\eta\zeta$ по направлению совпадают с осями трехгранника Дарбу $x y z$, т. е. оси ξ и η лежат в горизонтальной плоскости, а ось ζ направлена по геоцентрической вертикали.

Для оси η в начальный момент имеем $h_\eta = 0$; $A = k_0$; $\vartheta = \vartheta_0$; $\varphi = \varphi_0$, где k_0 — начальный азимут оси η ; ϑ_0 — начальный часовой угол или, употребляя астрономическую терминологию, прямое восхождение оси η ; φ_0 — широта точки отправления.

Для начального момента времени формулы (10) и (11) примут вид

$$\sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos \vartheta_0 = 0; \quad \sin \vartheta_0 = \sin k_0 / \cos \delta.$$

Решив совместно эти уравнения, получим

$$\sin \delta = -\cos k_0 \cos \varphi_0; \quad \cos \delta = \sqrt{1 - \cos^2 k_0 \cos^2 \varphi_0};$$

$$\sin \vartheta_0 = \frac{\sin k_0}{\cos \delta}; \quad \cos \vartheta_0 = \frac{\cos k_0 \sin \varphi_0}{\cos \delta}.$$

Выражение для часового угла имеет следующий вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega t + \lambda = \vartheta_0 + \theta,$$

где λ — долгота, отсчитанная от меридиана точки отправления.

Подставив значения углов δ и ϑ в формулу (10), получим

$$\sin h_\eta = -\sin \varphi \cos \varphi_0 \cos k_0 + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos k_0 - \sin \theta \cos \varphi \sin k_0.$$

Выражение для высоты оси ξ можно получить аналогично, но учитывая, что азимут оси ξ отличается от азимута оси η на 90° .

Получим

$$\sin h_\xi = -\sin \varphi \cos \varphi_0 \sin k_0 + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_0 \sin k_0 + \sin \theta \cos \varphi \cos k_0.$$

По табл. 4 находим

$$\sin h_\eta = -b_3; \quad \sin h_\xi = a_3. \quad (12)$$

Так как направляющие косинусы a_3 и b_3 являются функциями географических координат, то уравнения (12) устанавливают связь между высотами осей ξ и η и указанными координатами.

Эти уравнения показывают, что навигацию движущегося объекта можно осуществлять не по высотам осей, а по значениям направляющих косинусов углов, определяющих положение геоцентрической вертикали относительно инерциальной системы координат.

Итак, геометрическая система инерциальной навигации должна выработать значения направляющих косинусов, определяющих положение геоцентрической вертикали относительно инерциальной системы координат, — этого оказывается достаточно для выработки тех значений географических координат движущегося объекта.

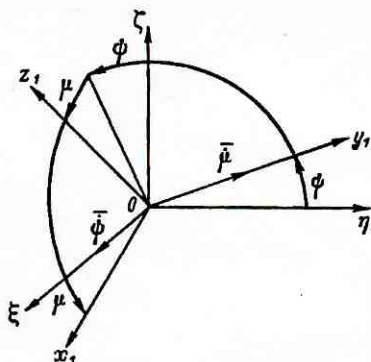
§ 2. Выработка географических координат. Построение трассы без промежуточного определения широты и долготы

Представим себе горизонтальную площадку P , подвешенную в двухосном кардановом подвесе, опоры внешнего кольца которого установлены на стабилизированной в пространстве платформе. Эта стабилизированная платформа движется вместе с подвижным объектом (см. рис. 7).

Со стабилизированной платформой свяжем ортогональную систему осей $\xi\eta\zeta$, предположив, что в течение всего времени движения они остаются параллельными осям инерциальной системы координат. Горизонтальную площадку ориентируем относительно стабилизированной платформы так, чтобы ось вращения внешнего кольца кардана подвеса была параллельна оси ξ .

С горизонтальной площадкой свяжем оси x_1, y_1, z_1 и сориентируем их так, как показано на рис. 7.

Определим положение горизонтальной площадки относительно стабилизированной платформы углом ψ поворота ее вокруг оси ξ и углом μ поворота ее вокруг оси y_1 (рис. 10).



Составим таблицу направляющих косинусов, определяющих взаимное положение осей ξ, η, ζ и x_1, y_1, z_1 .

Найдем закон изменения углов ψ и μ в предположении, что объект движется по произвольной трассе, площадка P находится точно в

Рис. 10. Расположение осей, скрепленных с построителем вертикали относительно инерциальных осей

плоскости геоцентрического горизонта, а стабилизированная платформа сохраняет свое положение неизменным относительно инерциального пространства. При сделанных предположениях ось z_1 , направленная перпендикулярно площадке P , совпадает с направлением вертикальной оси z . Тогда

$$\cos(z, \hat{\xi}) = \cos(z_1, \hat{\xi}); \quad \cos(z, \hat{\eta}) = \cos(z_1, \hat{\eta}); \quad \cos(z, \hat{\zeta}) = \cos(z_1, \hat{\zeta}).$$

Сравним соответствующие косинусы табл. 1 и 6:

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu &= a_3; \\ \sin \psi \cos \mu &= -b_3; \\ \cos \psi \cos \mu &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь третье соотношение является следствием остальных двух.

Таблица 6

	ξ	η	ζ
x_1	$\cos \mu$	$\sin \psi \sin \mu$	$-\cos \psi \sin \mu$
y_1	0	$\cos \psi$	$\sin \psi$
z_1	$\sin \mu$	$-\sin \psi \cos \mu$	$\cos \psi \cos \mu$

Так как направляющие косинусы a_3, b_3, c_3 — это функции элементов трассы, то соотношения (13) устанавливают связь между углами ψ и μ , списываемыми с осей карданова подвеса, и элементами трассы. Указанные соотношения позволяют определить текущие значения широты и долготы или построить трассу без промежуточного определения широты и долготы.

Итак, было показано, что геометрическая система дает возможность выработать значения направляющих косинусов углов a_3, b_3, c_3 , определяющих положение геоцентрической вертикали относительно инерциального пространства.

Для определения широты и долготы удобнее всего инерциальной системе координат и соответственно стабилизированной платформе придать экваториальную ориентацию. Тогда ось ξ будет направлена по оси мира, а оси η и ζ будут лежать в плоскости экватора.

В этом случае $a_3 = \sin \varphi$; $b_3 = -\sin \theta \cos \varphi$; $c_3 = \cos \theta \cos \varphi$ (см. табл. 5). Соотношения (13) примут следующий вид:

$$\sin \mu = \sin \varphi; \quad \sin \psi \cos \mu = \sin \theta \cos \varphi; \quad \cos \psi \cos \mu = \cos \theta \cos \varphi.$$

Отсюда получаем $\mu = \varphi$, $\psi = \theta = \lambda + \omega t$.

Таким образом, при данной ориентации стабилизированной платформы с осей карданова подвеса можно непосредственно списать значения широты и часового угла, из которого после отработки угла ωt можно получить значение долготы λ .

В рассматриваемом случае горизонтальная площадка P имеет географическую ориентацию, т. е. она представляет собой так называемый азимут-горизонт и дает возможность определять кроме широты и долготы курс движущегося объекта относительно стран света. Для подтверждения этого докажем, что ось x_1 направлена на север.

Вычислим косинус угла, определяющий взаимное положение оси x_1 и оси y трехгранника Дарбу, направленной на север:

$$\begin{aligned} \cos(x_1, y) &= \cos(x_1, \xi) \cos(y, \xi) + \cos(x_1, \eta) \cos(y, \eta) + \\ &+ \cos(x_1, \zeta) \cos(y, \zeta). \end{aligned}$$

Используя значения направляющих косинусов из табл. 5 и 6, получаем

$$\begin{aligned} \cos(x_1, y) &= \cos \varphi \cos \mu + \sin \theta \sin \varphi \sin \psi \sin \mu + \\ &+ \cos \theta \sin \varphi \cos \psi \sin \mu. \end{aligned}$$

Заметив, что $\mu = \varphi$ и $\psi = \theta$, получим $\cos(x_1, y) = 1$.

Следовательно, ось x_1 будет направлена на север, а ось y_1 — на восток.

Придадим стабилизированной платформе горизонтную ориентацию, когда осуществляется запоминание плоскости горизонта точки отправления.

Направляющие косинусы a_3 и b_3 можно всегда рассчитать для определенной трассы и запрограммировать программирующим устрой-

ством. Сравнивая программные значения направляющих косинусов с текущими значениями $\sin \mu$ и $\sin \psi \cos \mu$, легко получим алгоритмы, необходимые для построения трассы.

Очевидно, что при движении объекта по заданной трассе справедливо соотношение

$$\sin \mu - a_{зп} = 0; \quad \sin \psi \cos \mu + b_{зп} = 0,$$

где $a_{зп}$, $b_{зп}$ — программные значения направляющих косинусов a_3 и b_3 .

Проиллюстрируем это примером.

Пусть угол μ весь период движения равен нулю. Принятый закон изменения угла μ освобождает от необходимости применять программирующее устройство, так как программное значение направляющего косинуса $a_{зп} = 0$ в течение всего времени движения.

Легко видеть, что при непрерывной обработке угла на нуль объект будет двигаться по ортодромии, лежащей на неподвижной небесной сфере. Действительно, при $\mu = 0$ ось ξ весь период движения должна лежать в плоскости геоцентрического горизонта. Следовательно, ее высота h будет равна нулю. Так как кругом нулевых высот является ортодромия, лежащая на неподвижной небесной сфере, то объект будет двигаться по этой ортодромии.

Уравнение такой трассы будет иметь вид $a_3 = 0$, так как $\sin \mu = a_3$. Взяв значение направляющего косинуса a_3 из табл. 4, получим

$$\sin \theta \cos \varphi \cos k_0 - \sin \varphi \cos \varphi_0 \sin k_0 + \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_0 \sin k_0 = 0.$$

Величину $\theta = \lambda + \omega t$ можно рассматривать как долготу, отсчитанную от неподвижного небесного меридиана, совпадающего в начальный момент с меридианом точки отправления.

§ 3. Основные принципы построения вертикали

В предыдущем параграфе было установлено, что система, состоящая из стабилизированной в пространстве платформы и горизонтальной площадки, решает задачу навигации подвижных объектов.

Рассмотрение основных принципов построения горизонтальных площадок начнем с простого случая, когда объект движется по дуге большого круга (ортодромии) невращающейся сферы.

На рис. 11 показана площадка 1, несущая акселерометр 2 и способная поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка, относительно стабилизированной платформы 3.

Площадка 1 связана со стабилизированной платформой кинематической связью, которая разворачивает ее относительно этой платформы на угол, пропорциональный двойному интегралу от показаний акселерометра.¹ Для этого предусмотрены интеграторы И.

¹ Этот принцип был предложен впервые советским ученым Е. Б. Левенталем.

Если объект перемещается из точки A в точку B , то в соответствии с принципом работы устройства весь период движения будет выполняться соотношением

$$\varphi + \alpha = M \int_0^t dt \int_0^t a dt, \quad (14)$$

где φ — угловое расстояние, пройденное объектом; α — угол отклонения площадки от плоскости горизонта; M — масштаб устройства; a — показание акселерометра. Кажущееся ускорение, измеряемое акселерометром, равно $a = R \ddot{\varphi} \cos \alpha - (g - R\dot{\varphi}^2) \sin \alpha$ или (при малых углах α отклонения площадки от плоскости горизонта)

$$a = R \ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2) \alpha.$$

Соответственно получим

$$\varphi + \alpha = M \int_0^t dt \int_0^t [R \ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2) \alpha] dt.$$

Продифференцировав это уравнение дважды, получим

$$\ddot{\alpha} + M(g - R\dot{\varphi}^2) \alpha = (MR - 1) \ddot{\varphi}.$$

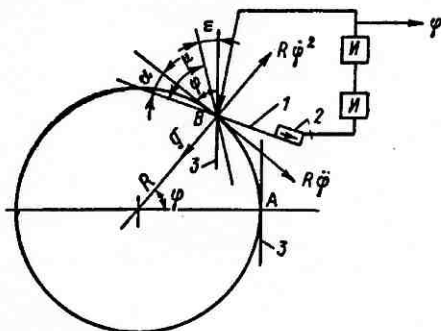


Рис. 11. К построению горизонтальной площадки

Если масштаб устройства подобран так, что $M = 1/R$, то последнее уравнение превращается в однородное:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = 0.$$

Независимо от характера изменения скорости движения объекта решением уравнения при нулевых начальных условиях будет $\alpha = 0$. Из этого следует, что площадка 1 в течение всего периода движения будет разворачиваться относительно стабилизированной платформы на угол φ , оставаясь в плоскости горизонта. При каком-либо случайном возмущении площадка станет совершать незатухающие колебания около плоскости горизонта. Если объект неподвижен, то период этих колебаний будет равен периоду M . Шулера $T = 2\pi \sqrt{R/g} = 84,4$ мин.

Плоскость горизонта здесь как бы непрерывно строится относительно стабилизированной платформы. Поэтому рассмотренное устройство часто называют **п о с т р о и т е л е м в е р т и к а л и**.

Значение угла φ , определяющего положение объекта на дуге большого круга, можно снять с выхода вторичного интегратора.

Путь S , пройденный объектом вдоль дуги, можно представить в виде

$$S = R\varphi = RM \int_0^t dt \int_0^t [R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha] dt. \quad (14a)$$

Если $M = 1/R$ и $\alpha = 0$, то путь $S = R\varphi$.

Значение угла φ можно также получить путем измерения угла μ между построителем вертикали и стабилизированной платформой. Для этого надо установить датчик угла на оси вращения построителя вертикали относительно стабилизированной платформы.

§ 4. Построение вертикали при произвольном движении объекта

Выведем алгоритмы преобразования информации акселерометров, реализация которых обеспечит непрерывное построение вертикали в течение всего времени движения объекта. Предполагаем, что объект движется в пространстве произвольным образом.

Для написания алгоритма необходимо найти проекции ускорения на оси чувствительности акселерометров, которые образуют ортогональную систему координат $x_1 y_1 z_1$ (см. рис. 7).

Углы ψ и μ , определяющие положение построителя вертикали относительно стабилизированной платформы, можно рассматривать как сферические координаты оси z_1 . Поэтому оси x_1, y_1, z_1 будут осями системы сферических координат, и, чтобы выразить проекции ускорения на эти оси, можно воспользоваться выражениями (3).

Заменим u_1 на ω_{x_1} , u_2 на ω_{y_1} , u_3 на ω_{z_1} и получим

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= R \left(\dot{\omega}_{y_1} + \omega_{x_1} \omega_{z_1} + \frac{2\dot{R}}{R} \omega_{y_1} \right); \\ a_{y_1} &= R \left(-\dot{\omega}_{x_1} + \omega_{y_1} \omega_{z_1} - \frac{2\dot{R}}{R} \omega_{x_1} \right); \\ a_{z_1} &= \ddot{R} - R (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2). \end{aligned}$$

В соответствии с рис. 10 получаем $\omega_{x_1} = \dot{\psi} \cos \mu$; $\omega_{y_1} = \dot{\mu}$; $\omega_{z_1} = \dot{\psi} \sin \mu$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_{x_1} &= R \left(\ddot{\mu} + \dot{\psi}^2 \sin \mu \cos \mu + \frac{2\dot{R}}{R} \dot{\mu} \right); \\ a_{y_1} &= -R \left(\ddot{\psi} \cos \mu - 2\dot{\mu} \dot{\psi} \sin \mu + \frac{2\dot{R}}{R} \dot{\psi} \cos \mu \right); \\ a_{z_1} &= \ddot{R} - R (\dot{\mu}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \mu). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если объект, на котором установлена система инерциальной навигации, движется по сфере радиусом R , то

$$\left. \begin{aligned} a_{x_1} &= R(\ddot{\mu} + \dot{\psi}^2 \sin \mu \cos \mu); \\ a_{y_1} &= -R(\ddot{\psi} \cos \mu - 2\dot{\mu}\dot{\psi} \sin \mu); \\ a_{z_1} &= -R(\dot{\mu}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \mu). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) выведены в предположении, что построитель вертикали находится точно в плоскости горизонта. Отсюда следует обратное заключение: если углы μ и ψ , списываемые с осей карданова

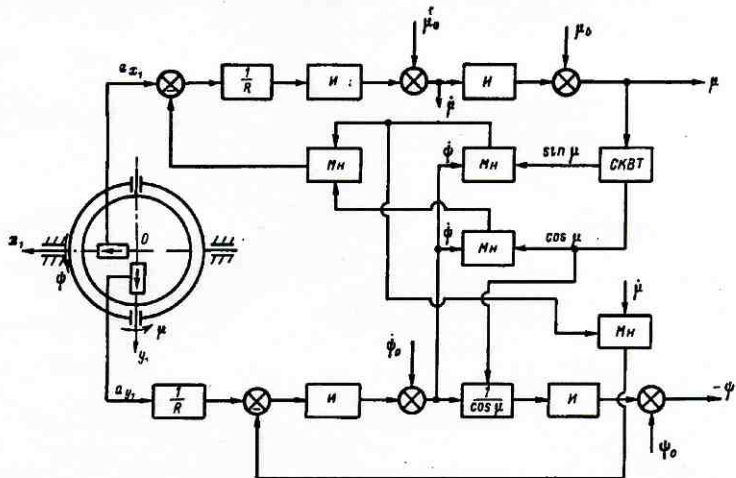


Рис. 12. Структурная схема построителя вертикали

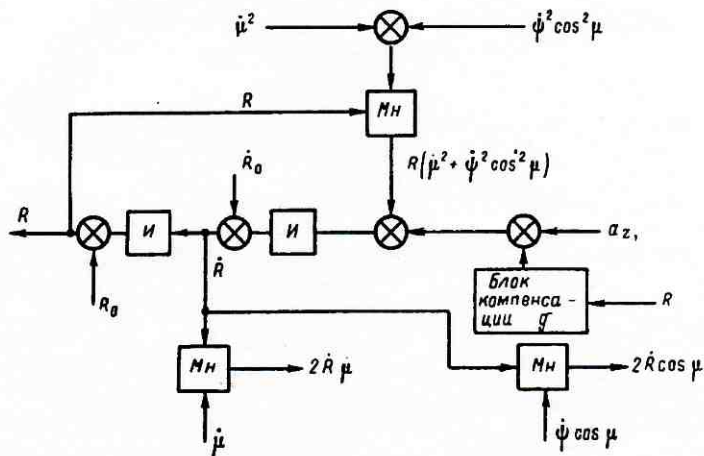


Рис. 13. Структурная схема выработки R

подвеса, удовлетворяют уравнениям (15) и (16), то построитель вертикали находится в плоскости горизонта.

Таким образом, уравнения (15) и (16) можно рассматривать как алгоритмы преобразования информации акселерометров.

На рис. 12 показана структурная схема построителя вертикали, реализующая алгоритм (15), который для удобства приведен к виду

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t (a_{x_1} - \psi^2 \sin \mu \cos \mu) dt; \\ \psi &= -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{dt_i}{\cos \mu} \int_0^t (a_{y_1} - \dot{\psi} \mu \sin \mu) dt. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

На рис. 13 изображена структурная схема выработки R при произвольном движении объекта в пространстве. (На построителе вертикали установлено три акселерометра.) В этом случае должен быть реализован алгоритм (15).

§ 5. Построение вертикали по приближенному алгоритму

Как видно из предыдущего параграфа, для построения вертикали необходимо реализовать сравнительно сложный алгоритм. Поэтому во многих работах по инерциальной навигации предлагается реализовать приближенный алгоритм, а возникающие при этом погрешности компенсировать введением соответствующих корректур.

Для того чтобы выбрать приближенный алгоритм, представим уравнения (17) в следующем виде:¹

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t a_{x_1} dt - \int_0^t dt \int_0^t \psi^2 \sin \mu \cos \mu dt; \\ \psi &= -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{dt}{\cos \mu} \int_0^t a_{y_1} dt + \int_0^t \frac{dt}{\cos \mu} \int_0^t \dot{\mu} \psi \sin \mu dt. \end{aligned}$$

Наберем в счетно-решающем устройстве приближенный алгоритм вида

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t a_{x_1} dt; \\ \psi &= -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{dt}{\cos \mu} \int_0^t a_{y_1} dt. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Этот приближенный алгоритм поддается простой интерпретации: построитель вертикали разворачивается так, что угол μ его разворота

¹ Имеется в виду движение объекта по сфере.

относительно внешнего кольца пропорционален двойному интегралу от показаний акселерометра. Здесь, по существу, реализуется та же идея, что и при движении объекта по ортодромии, лежащей на невращающейся сфере. Введение после первого интегрирования в уравнения (18) величины $1/\cos \mu$ учитывает особенности карданова подвеса.

При реализации приближенного алгоритма (18) необходимо ввести корректуры по формулам

$$\left. \begin{aligned} f_{\mu} &= - \int_0^t dt \int_0^t \dot{\psi}^2 \sin \mu \cos \mu dt; \\ f_{\psi} &= \int_0^t \frac{dt}{\cos \mu} \int_0^t \dot{\mu} \dot{\psi} \sin \mu dt. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

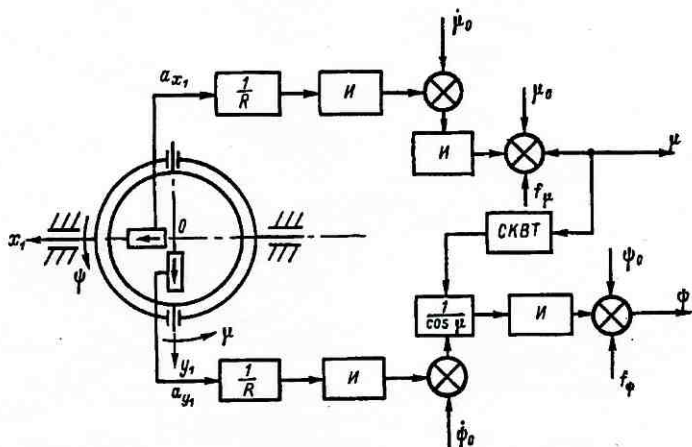


Рис. 14. Структурная схема построителя вертикали, реализующая приближенный алгоритм

Эти корректуры принято называть корректурами на кориолисово ускорение. Величины f_{μ} и f_{ψ} будем называть корректирующими функциями.

На рис. 14 представлена структурная схема построителя вертикали, реализующая приближенный алгоритм (18). Корректирующие функции вырабатываются либо по данным от внешнего источника информации, либо (что наиболее вероятно) по программным значениям параметров движения объекта и вводятся механически в канал μ и канал ψ .

Корректирующие функции определяются различными выражениями в зависимости от ориентации стабилизированной платформы.

Рассмотрим два случая:

а) стабилизированная платформа имеет экваториальную ориентацию. В этом случае $\dot{\mu} = \dot{\phi}$, $\dot{\psi} = \dot{\lambda} + \omega$.

В соответствии с выражениями (11) получим

$$\dot{f}_\mu = - \int_0^t dt \int_0^t (\dot{\lambda} + \omega)^2 \sin \varphi \cos \varphi dt;$$

$$f_\psi = \int_0^t \frac{dt}{\cos \varphi} \int_0^t (\dot{\lambda} + \omega) \dot{\varphi} \sin \varphi dt.$$

Так как $\dot{\varphi} = v_N/R$, $\dot{\lambda} = v_e/R \cos \varphi$, то

$$\dot{f}_\mu = - \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{v_e}{R \cos \varphi} + \omega \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi dt;$$

$$f_\psi = \int_0^t \frac{dt}{\cos \varphi} \int_0^t \left(\frac{v_e}{R \cos \varphi} + \omega \right) \frac{v_N}{R} \sin \varphi dt,$$

и окончательно

$$\dot{f}_\mu = - \frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{v_e^2}{R} \operatorname{tg} \varphi + 2v_e \omega \sin \varphi + R \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \right) dt;$$

$$f_\psi = \frac{1}{R} \int_0^t \frac{dt}{\cos \varphi} \int_0^t \left(\frac{v_N v_e}{R} \operatorname{tg} \varphi + v_N \omega \sin \varphi \right) dt.$$

Слагаемое $2v_e \omega \sin \varphi$ и дало, по-видимому, повод назвать эти корректуры корректурами на кориолисово ускорение;

б) стабилизированная платформа имеет горизонтальную ориентацию.

Используем соотношения (13):

$$\sin \mu = a_3; \quad \sin \psi \cos \mu = -b_3; \quad \cos \psi \cos \mu = c_3 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \psi = -b_3/c_3.$$

Находим

$$\dot{\mu} \cos \mu = \dot{a}_3; \quad \frac{\dot{\psi}}{\cos^2 \psi} = \frac{b_3 \dot{c}_3 - \dot{b}_3 c_3}{c_3^2},$$

и далее

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{a}_3}{\sqrt{1-a_3^2}}; \quad \dot{\psi} = \frac{b_3 \dot{c}_3 - \dot{b}_3 c_3}{1-a_3^2}.$$

Подставим значения $\dot{\mu}$ и $\dot{\psi}$ в выражения (19):

$$\dot{f}_\mu = - \int_0^t dt \int_0^t a_3 \frac{b_3 \dot{c}_3 - \dot{b}_3 c_3}{(1-a_3^2)^{3/2}} dt;$$

$$f_\psi = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-a_3^2}} \int_0^t a_3 \frac{\dot{a}_3 (b_3 \dot{c}_3 - \dot{b}_3 c_3)}{(1-a_3^2)^{3/2}} dt.$$

Используя выражения (9), получаем окончательно

$$f_{\mu} = -\frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t a_3 \frac{(V_x a_2 - V_y a_1)^2}{(1 - a_3^2)^{3/2}} dt;$$

$$f_{\psi} = -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - a_3^2}} \int_0^t a_3 \frac{(V_x a_1 + V_y a_2)(V_x a_2 - V_y a_1)}{(1 - a_3^2)^{3/2}} dt.$$

Значения направляющих косинусов надо взять из табл. 4.

Для того чтобы определить, когда приближенный алгоритм станет точным, надо найти условия, при которых корректирующие функции обратятся в нуль. Это возможно в двух случаях: 1) $V_x a_2 - V_y a_1 = 0$; 2) $a_3 = 0$.

Первый случай определяет особый вид движения объекта и не представляет практического интереса.

Второй случай определяет движение объекта по ортодромии, лежащей на невращающейся сфере (см. § 2). Таким образом, при движении объекта по ортодромии, лежащей на невращающейся сфере, приближенный алгоритм становится точным.

§ 6. Геометрическая система инерциальной навигации со стабилизированным в азимуте построителем вертикали

В ранее рассмотренной системе построитель вертикали представлял собой площадку, подвешенную в двухосном кардановом подвесе.

Рассмотрим теперь геометрическую систему инерциальной навигации, построитель вертикали которой подвешен в трехосном кардановом подвесе. Третья степень свободы дает возможность стабилизировать построитель вертикали в азимуте, что позволяет, как будет показано ниже, несколько упростить алгоритм.

Идея стабилизации горизонтальной площадки в азимуте относительно неподвижного пространства была рассмотрена А. Ю. Ишлинским применительно к полуаналитической системе навигации [7].

Система инерциальной навигации, у которой построитель вертикали имеет три степени свободы, изображена на рис. 15.

На построителе вертикали установлены два интегратора ускорений,¹ оси чувствительности которых совпадают с осями x' и y' системы координат $x'y'z_1$, связанной с построителем вертикали. Интеграторы ускорений выдают интеграл от проекций кажущегося ускорения на оси x' и y' .

С кольцом 1, охватывающим построитель вертикали, связан трехгранник $x_1 y_1 z_1$, оси x_1 и y_1 которого ориентированы так, как показано на рисунке, а ось z_1 — перпендикулярно плоскости чертежа в сторону наблюдателя. Трехгранник, связанный с охватывающим коль-

¹ Имеется в виду движение объекта по сфере.

цом, представляет собой тот же трехгранник, который мы ранее связали с построителем вертикали.

Положение построителя вертикали или, что то же самое, трехгранника $x'y'z_1$ относительно стабилизированной платформы определим тремя углами: прежними углами ψ и μ поворота вокруг оси ξ и линии узлов y , а также углом γ поворота вокруг оси z_1 (рис. 16).

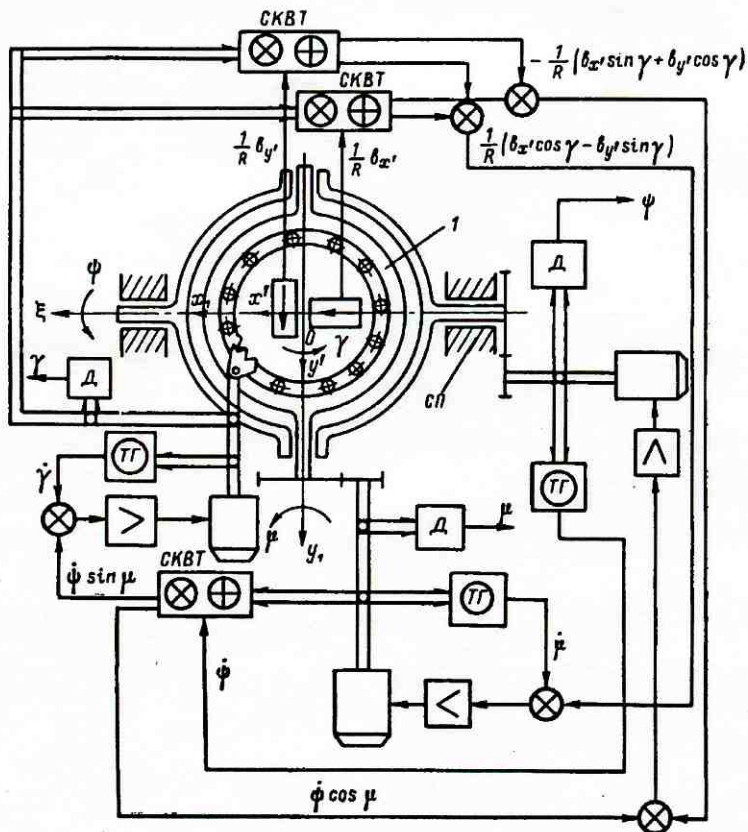


Рис. 15. Схема счетно-решающего устройства стабилизированного построителя вертикали

Найдем проекции мгновенной угловой скорости трехгранника $x'y'z_1$ на оси x' , y' , z_1 :

$$\omega_{x'} = \dot{\mu} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \mu \cos \gamma;$$

$$\omega_{y'} = \dot{\mu} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \mu \sin \gamma;$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \mu.$$

Счетно-решающее устройство рассматриваемой системы инерциальной навигации реализует следующий алгоритм:

$$\omega_{x'} = -\frac{1}{R} b_{y'}; \quad \omega_{y'} = -\frac{1}{R} b_{x'}; \quad \omega_{z_1} = 0,$$

где $b_{x'} = \int_0^t a_{x'} dt$; $b_{y'} = \int_0^t a_{y'} dt$ (здесь $a_{x'}$ и $a_{y'}$ — проекции кажущегося ускорения на оси x' и y' , связанные с построителем вертикали).

Вводя значения $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ и ω_{z_1} , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \mu \cos \gamma &= -\frac{1}{R} b_{y'}; \\ \dot{\mu} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \mu \sin \gamma &= \frac{1}{R} b_{x'}; \\ \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

Последнее уравнение системы (19a) устанавливает тот факт, что построитель вертикали стабилизирован в азимуте относительно неподвижного пространства. Это следует из равенства нулю проекции мгновенной угловой скорости трехгранника $x'y'z_1$ на ось z_1 .

Чтобы реализовать уравнения (19a) в счетно-решающем устрой-

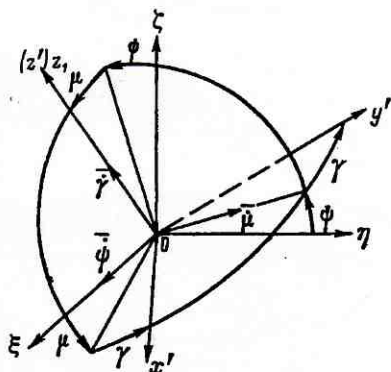


Рис. 16. Взаимное расположение осей, связанных с построителем вертикали и стабилизированной платформой

стве, разрешим их относительно первых производных:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu} &= \frac{1}{R} (b_{x'} \cos \gamma - b_{y'} \sin \gamma); \\ \dot{\psi} &= -\frac{1}{R} \cdot \frac{b_{x'} \sin \gamma + b_{y'} \cos \gamma}{\cos \mu}; \\ \dot{\gamma} &= -\dot{\psi} \sin \mu. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

На рис. 15 показана схема счетно-решающего устройства, реализующего алгоритм (20). В качестве входных величин в счетно-решающее устройство подаются показания интеграторов ускорения в масштабе $1/R$. Выходными сигналами являются углы ψ , μ и γ , на которые разворачивается построитель вертикали вокруг соответствующих осей подвеса при помощи двигателей.

Покажем, что построитель вертикали при самом общем характере движения объекта по поверхности Земли будет лежать в плоскости

горизонта в течение всего времени движения, если углы ψ , μ и γ преобразуются в соответствии с алгоритмом (20).

Обозначим через a_{x_1} и a_{y_1} проекции ускорения на оси x_1 и y_1 , скрепленные с охватывающим кольцом. Тогда для них получим следующие выражения:

$$a_{x'} = a_{x_1} \cos \gamma + a_{y_1} \sin \gamma; \quad a_{y'} = -a_{x_1} \sin \gamma + a_{y_1} \cos \gamma.$$

Отсюда

$$b_{x'} = \int_0^t (a_{x_1} \cos \gamma + a_{y_1} \sin \gamma) dt; \quad b_{y'} = \int_0^t (-a_{x_1} \sin \gamma + a_{y_1} \cos \gamma) dt.$$

Первые два уравнения системы (19а) можно представить в виде

$$\ddot{\mu} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \mu \cos \gamma = \frac{1}{R} \int_0^t (a_{x_1} \sin \gamma - a_{y_1} \cos \gamma) dt;$$

$$\ddot{\mu} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \mu \sin \gamma = \frac{1}{R} \int_0^t (a_{x_1} \cos \gamma + a_{y_1} \sin \gamma) dt.$$

Продифференцируем эти уравнения и сгруппируем члены, содержащие $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$:

$$\begin{aligned} (\ddot{\mu} - \dot{\psi} \dot{\gamma} \cos \mu) \sin \gamma + (\ddot{\psi} \cos \mu - \dot{\psi} \dot{\mu} \sin \mu + \dot{\mu} \dot{\gamma}) \cos \gamma = \\ = \frac{1}{R} (a_{x_1} \sin \gamma - a_{y_1} \cos \gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\ddot{\mu} - \dot{\psi} \dot{\gamma} \cos \mu) \cos \gamma - (\ddot{\psi} \cos \mu - \dot{\psi} \dot{\mu} \sin \mu + \dot{\mu} \dot{\gamma}) \sin \gamma = \\ = \frac{1}{R} (a_{x_1} \cos \gamma + a_{y_1} \sin \gamma). \end{aligned}$$

Эти выражения приведем к виду

$$\ddot{\mu} - \dot{\psi} \dot{\gamma} \cos \mu = \frac{1}{R} a_{x_1}; \quad \ddot{\psi} \cos \mu - \dot{\psi} \dot{\mu} \sin \mu + \dot{\mu} \dot{\gamma} = -\frac{1}{R} a_{y_1}.$$

Использував третье уравнение системы (19а), можно написать

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mu} + \psi^2 \sin \mu \cos \mu &= \frac{1}{R} a_{x_1}; \\ \ddot{\psi} \cos \mu - 2\dot{\psi} \dot{\mu} \sin \mu &= -\frac{1}{R} a_{y_1}. \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

Последние уравнения аналогичны первым двум уравнениям системы (16), которые, как известно, выведены в предположении, что построитель вертикали находится в плоскости горизонта. Так как уравнения (20а) получены из уравнений (19а), то можно сделать вывод, что уравнения (19а) описывают движение построителя вертикали, находящегося в плоскости горизонта.

Таким образом, это является доказательством, что построенные вертикали, реализующий алгоритм (20), будет в течение всего времени движения находиться в плоскости горизонта при самом общем характере движения объекта по поверхности Земли.

Координаты движущегося объекта можно вычислить, как и ранее, по значениям углов ψ и μ .

Если стабилизированная платформа имеет экваториальную ориентацию, то рассмотренная здесь система инерциальной навигации дает возможность кроме прочих величин определить величину и направление вектора скорости объекта относительно Земли, т. е. определить относительную скорость и курс движения объекта.

Действительно, при экваториальной ориентации стабилизированной платформы $\dot{\mu} = \dot{\varphi}$, $\dot{\psi} = \dot{\lambda} + \omega$. Тогда первые два уравнения системы (20) примут вид

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{R} (b_x \cos \gamma - b_y \sin \gamma);$$

$$\dot{\lambda} + \omega = -\frac{1}{R \cos \varphi} (b_x \sin \gamma + b_y \cos \gamma).$$

Так как $\dot{\varphi} = \frac{v \cos k}{R}$, а $\dot{\lambda} = \frac{v \sin k}{R \cos \varphi}$ (где v — скорость объекта относительно Земли; k — курс, определяющий положение вектора скорости относительно направления «север—юг»), то

$$v \cos k = b_x \cos \gamma - b_y \sin \gamma;$$

$$v \sin k = -(b_x \sin \gamma + b_y \cos \gamma + R \omega \cos \varphi).$$

Эти два уравнения дают

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + 2R\omega (b_x \sin \gamma + b_y \cos \gamma) \cos \varphi + R^2 \omega^2 \cos^2 \varphi}; \\ \operatorname{tg} k &= -\frac{b_x \sin \gamma + b_y \cos \gamma + R \omega \cos \varphi}{b_x \cos \gamma - b_y \sin \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Вторую формулу (21) применительно к полуаналитической системе навигации получил впервые А. Ю. Ишлинский [7].

§ 7. Геометрическая система инерциальной навигации с акселерометрами, установленными на стабилизированной платформе

Предполагая, что объект движется по сфере, установим на стабилизированной платформе два акселерометра, оси чувствительности которых параллельны осям ξ и η , скрепленным со стабилизированной платформой (рис. 17).

Акселерометры выдают в некотором масштабе величины, соответствующие уравнениям (8),

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= R\ddot{a}_3 + ga_3; \\ a_{\eta} &= R\ddot{b}_3 + gb_3. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Если построитель вертикали находится точно в плоскости горизонта, то должны выполняться соотношения (13): $\sin \mu = a_3$; $\sin \psi \cos \mu = -b_3$.

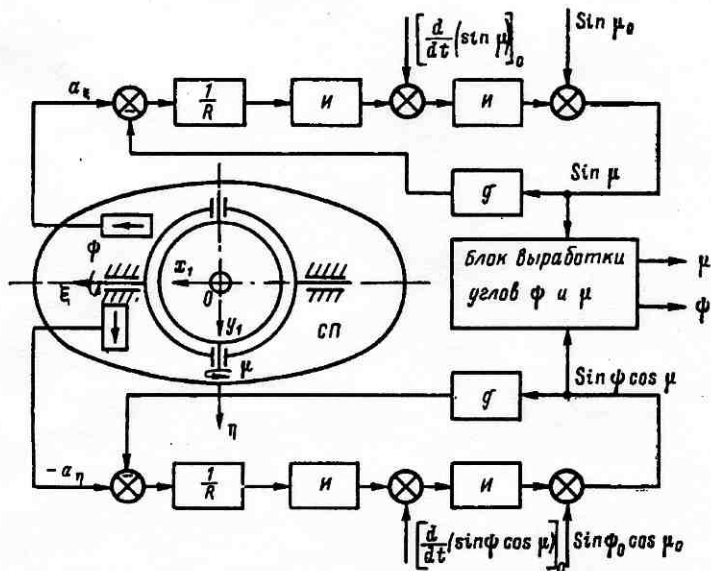


Рис. 17. Структурная схема построителя вертикали с акселерометрами на стабилизированной платформе

Построим теперь уравнения, которые имели бы ту же структуру, что и уравнения (22), но заменим величины a_3 , b_3 и их производные величинами $\sin \mu$, $\sin \psi \cos \mu$ и их производными. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\sin \mu) + \frac{g}{R} \sin \mu &= \frac{1}{R} a_{\xi}; \\ \frac{d^2}{dt^2} (\sin \psi \cos \mu) + \frac{g}{R} \sin \psi \cos \mu &= -\frac{1}{R} a_{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Эти уравнения и представляют собой тот алгоритм, который нужно реализовать в счетно-решающем устройстве, для того чтобы построитель вертикали в течение всего времени движения находился в плоскости горизонта. На рис. 17 показана структурная схема, реализую-

щая алгоритм (23), который для удобства реализации переписан в виде

$$\sin \mu = \frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t (a_{\xi} - g \sin \mu) dt;$$

$$\sin \psi \cos \mu = -\frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t (a_{\eta} + g \sin \psi \cos \mu) dt.$$

Найдем свободное движение строителя вертикали. Предположим, что строитель вертикали в силу каких-либо причин отклонился от плоскости горизонта. Тогда будут иметь место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sin \mu &= a_3 + \alpha; \\ \sin \psi \cos \mu &= -b_3 + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где α и β — отклонения строителя вертикали от плоскости горизонта.

Введем соотношения (24) в уравнения (23). С учетом выражений (22) получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + v^2 \alpha &= 0; \\ \ddot{\beta} + v^2 \beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

где $v^2 = g/R$.

Если строитель вертикали находится точно в плоскости горизонта и не испытывает никаких случайных возмущений, то эти уравнения имеют решения $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Отсюда следует, что строитель в течение всего времени движения будет находиться в плоскости горизонта и не будет возмущаться ускорением движущегося объекта.

Пусть теперь строитель вертикали отклонен от плоскости горизонта, а затем отпущен без толчка. Это соответствует начальным условиям: при $t = 0$ $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = 0$.

Уравнения (24a) при этих начальных условиях имеют решения $\alpha = \alpha_0 \cos vt$ и $\beta = \beta_0 \cos vt$.

Строитель вертикали, выведенный по какой-нибудь случайной причине из плоскости горизонта, будет совершать колебания около плоскости горизонта, как около положения равновесия с периодом М. Шулера $T = 2\pi \sqrt{R/g} = 84,4$ мин.

Рассмотрим геометрическую систему инерциальной навигации с установленными на стабилизированной платформе акселерометрами, реализующую приближенный алгоритм, который получается из алгоритма (23) заменой $\sin \psi$ и $\sin \mu$ их углами ($\cos \mu$ принят равным единице).

Реализуем следующий алгоритм:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mu} + \frac{g}{R} \mu &= \frac{1}{R} a_{\xi}; \\ \ddot{\psi} + \frac{g}{R} \psi &= -\frac{1}{R} a_{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Структурная схема, реализующая этот алгоритм, показана на рис. 18.

Установим те случаи, когда приближенный алгоритм (25) может дать приемлемые результаты.

Замечая, что по системе (22)

$$a_{\xi} = (\ddot{a}_3 + v^2 a_3) R; \quad a_{\eta} = (\ddot{b}_3 + v^2 b_3) R,$$

представим уравнения (25) в виде

$$\ddot{\mu} + v^2 \mu = \ddot{a}_3 + v^2 a_3; \quad \ddot{\psi} + v^2 \psi = -(\ddot{b}_3 + v^2 b_3).$$

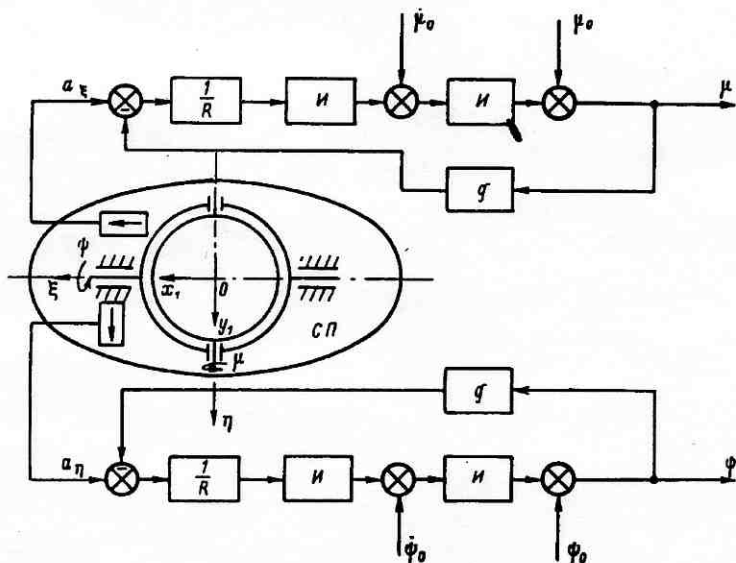


Рис. 18. Структурная схема построителя вертикали с акселерометрами на стабилизированной платформе (приближенный алгоритм)

Эти уравнения имеют следующие решения при общем характере функций $a_3(t)$ и $b_3(t)$:

$$\begin{aligned} \mu &= C_1 \cos vt + C_2 \sin vt + a_3; \\ \psi &= C_3 \cos vt + C_4 \sin vt - b_3. \end{aligned}$$

Пусть при $t = 0$ $\mu = \mu_0$, $\dot{\mu} = \dot{\mu}_0$, $\psi = \psi_0$, $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$. Тогда решения запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \mu &= [\mu_0 - a_3(0)] \cos vt + \frac{1}{v} [\dot{\mu}_0 - \dot{a}_3(0)] \sin vt + a_3; \\ \psi &= [\psi_0 + b_3(0)] \cos vt + \frac{1}{v} [\dot{\psi}_0 + \dot{b}_3(0)] \sin vt - b_3. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из полученных решений видно, что построитель вертикали, помещенный в начальный момент времени в плоскость горизонта, при про-

извольной ориентации стабилизированной платформы совершает незатухающие колебания с периодом M . Шулера около $\mu^* = a_3$ и $\psi^* = -b_3$, т. е. около плоскости горизонта.

В системе инерциальной навигации, реализующей точный алгоритм, построитель вертикали переходил в новое положение равновесия относительно стабилизированной платформы аperiodически, не совершая свободных колебаний и оставаясь все время в плоскости горизонта.

Если реализуется приближенный алгоритм, то аperiodический переход отсутствует — построитель вертикали будет совершать незатухающие колебания, что затрудняет использование этой системы. Однако в том случае, когда стабилизированная платформа примет горизонтную ориентацию, рассмотренная система не будет совершать нежелательных колебаний. В этом случае углы ψ и μ и их производные, а также и направляющие косинусы и их производные в начальный момент равны нулю, и решения (26) примут вид $\mu = a_3$ и $\psi = -b_3$.

Построитель вертикали уже не будет совершать колебаний, но в плоскости горизонта он останется до тех пор, пока значения углов μ и ψ достаточно малы.

Основная задача системы — выдавать значения направляющих косинусов a_3 и b_3 — будет выполнена. Навигация подвижного объекта при помощи такой системы осуществима.

§ 8. Демпфирование колебаний

Системы инерциальной навигации, представляющие собой колебательные системы, при длительной работе могут нуждаться в демпфирующем устройстве.

В отличие от обычных колебательных систем в системах инерциальной навигации для демпфирования колебаний используют особые приемы — охват элементов систем прямыми или обратными связями. Покажем сначала, как это выполняется в геометрических системах.

Рассмотрим принципы демпфирования колебаний в системах, установленных на объектах, совершающих простейшее движение по дуге большого круга невращающейся сферы.

Охватим первичный интегратор прямой связью (рис. 19).¹ (В рассматриваемом способе демпфирования датчик угла $DУ$, показанный на рисунке, не участвует.)

В отличие от уравнения (14) в уравнение, описывающее движение системы инерциальной навигации, входит член, пропорциональный интегралу от показаний акселерометра:

$$\varphi + \alpha = M \int_0^t dt \int_0^t a dt + N \int_0^t a dt,$$

где N — коэффициент пропорциональности, представляющий собой произведение коэффициента C обратной связи на масштаб первичного интегратора.

¹ На возможность осуществления демпфирования подобным образом указал впервые советский ученый Е. Б. Левенталь.

Показания акселерометра имеют вид $a = R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha$. Тогда

$$\varphi + \alpha = M \int_0^t dt \int_0^t [R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha] dt + \\ + N \int_0^t [R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha] dt.$$

Продифференцировав это уравнение дважды, получим

$$\ddot{\alpha} + N(g - R\dot{\varphi}^2)\dot{\alpha} + [M(g - R\dot{\varphi}^2) + 2NR\dot{\varphi}\ddot{\varphi}]\alpha = (MR - 1)\ddot{\varphi} + NR\ddot{\varphi}.$$

Пусть, как и раньше, выполняется условие $M = 1/R$. Тогда уравнение примет вид

$$\ddot{\alpha} + N(g - R\dot{\varphi}^2)\dot{\alpha} + \left[\frac{g}{R} \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g} \right) + 2NR\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \right] \alpha = NR\ddot{\varphi}. \quad (27)$$

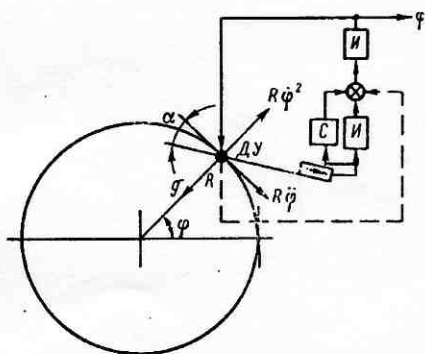


Рис. 19. Метод демпфирования колебаний в простейшей системе инерциальной навигации

Как видно, уравнение, описывающее движение построителя вертикали, уже не однородно. Отсюда следует, что при введении демпфирования построитель вертикали становится возмущае-

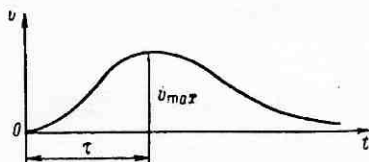


Рис. 20. График изменения ускорения

мым. При движении объекта построитель вертикали отклоняется от плоскости горизонта. Это обстоятельство вызывает погрешности всей системы инерциальной навигации.

В рассматриваемом случае погрешность системы зависит от третьей производной от угла φ или от производной от ускорения. При использовании других методов, как показано ниже, погрешности будут зависеть от скорости.

Однако нельзя утверждать, что введение демпфирования неизбежно вызывает погрешности системы. Пока еще нет общего доказательства этого положения.

Пусть $g \gg R\dot{\varphi}^2$. Кроме того, будем считать $2NR\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$ величиной малой по сравнению с g/R . Тогда вместо уравнения (27) приближенное уравнение можно представить в виде

$$\ddot{\alpha} + 2h\dot{\alpha} + v^2\alpha = \frac{2h}{g} R\ddot{\varphi}, \quad \text{где } v^2 = g/R; \quad 2h = Ng.$$

Замечая, что $v = \varphi R$, можно написать

$$\ddot{\alpha} + 2h\dot{\alpha} + v^2\alpha = \frac{2h}{g} \ddot{v}. \quad (28)$$

Из этого уравнения видно, что демпфирование принятым методом не вызовет погрешностей системы инерциальной навигации при движении объекта с постоянной скоростью или с постоянным ускорением.

Определим погрешность системы из-за демпфирования при определенном характере движения объекта.

Пусть объект движется так, что его ускорение возрастает от нуля, достигая максимального значения при $t = \tau$. Затем ускорение убывает асимптотически до нуля (рис. 20). Математически такой закон изменения ускорения можно записать в виде $\dot{v} = Ate^{-at}$. Неизвестные A и a определяем, учитывая, что при $t = \tau$ $\dot{v} = \dot{v}_{\max}$. Тогда $\dot{v}_{\max} = A\tau e^{-a\tau}$. Отсюда

$$A = \frac{\dot{v}_{\max}}{\tau} e^{a\tau}.$$

Взяв производную от \dot{v} , приравняв ее к нулю и имея в виду, что максимум \dot{v} наступает в момент $t = \tau$, получим, что $a = 1/\tau$.

Итак, $\dot{v} = \frac{\dot{v}_{\max}}{\tau} ete^{-t/\tau}$, или

$$\dot{v} = Ate^{-at}, \quad (29)$$

где

$$A = \dot{v}_{\max} a e; \quad a = 1/\tau. \quad (30)$$

Уравнение (28) примет вид

$$\ddot{\alpha} + 2h\dot{\alpha} + v^2\alpha = \frac{2h}{g} A (1 - at) e^{-at}.$$

Решением этого уравнения будет

$$\alpha = Le^{-ht} \sin(qt + \lambda) + \frac{2hA}{g} (P + Qt) e^{-at},$$

где $q^2 = v^2 - h^2$ при $v^2 > h^2$; $P = \frac{v^2 - a^2}{(a^2 - 2ha + v^2)^2}$; $Q = -\frac{a}{a^2 - 2ha + v^2}$; L и λ — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Пусть в начальный момент времени построитель вертикали лежал в плоскости горизонта и не имел никаких возмущений, т. е. при $t = 0$ $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$.

Тогда после простых преобразований находим

$$L = \frac{2hA}{gq} \sqrt{P^2q^2 + [P(a-h) + Q]^2};$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{Pq}{P(a-h) + Q}.$$

Если время t достаточно продолжительно, то члены, содержащие экспоненциальные функции e^{-at} , быстро «затухнут». Поэтому можно принять, что

$$\alpha = Le^{-ht} \sin(qt + \lambda). \quad (31)$$

Выражения для L и $\operatorname{tg} \lambda$ после подстановки туда значений P и Q приведем к виду

$$L = \frac{2hAv}{gq(a^2 - 2ha + v^2)}; \quad (32)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{(a^2 - v^2)q}{v^2(2a - h) - a^2h}.$$

Из выражения (31) видно, что построитель вертикали в результате введения демпфирования путем охвата интегратора прямой связью совершает затухающие колебания с периодом $T = 2\pi/q = 2\pi/\sqrt{v^2 - h^2}$ и с амплитудой L около плоскости горизонта, как около положения равновесия.

Рассмотренный метод демпфирования колебаний геометрической системы инерциальной навигации не является единственным. Можно осуществить демпфирование следующим образом. На оси поворота построителя вертикали устанавливают датчик угла DY , который измеряет угол $\alpha + \varphi$. Показания DY подаются на вход вторичного интегратора (см. рис. 19, показано пунктиром). Здесь сигнал DY суммируется с выходным сигналом первичного интегратора, и далее эта сумма проходит по обычному каналу.

Следовательно, уравнение (14) должно измениться следующим образом:

$$\alpha + \varphi = M \int_0^t dt \int_0^t a dt - A \int_0^t (\alpha + \varphi) dt,$$

где A — коэффициент пропорциональности, представляющий собой произведение масштабов датчика угла и вторичного интегратора.

Так как $a = R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha$, то после двукратного дифференцирования получаем

$$\ddot{\alpha} + A\dot{\alpha} + M(g - R\dot{\varphi}^2)\alpha = (MR - 1)\ddot{\varphi} - A\dot{\varphi}.$$

Если выполняется условие $M = 1/R$, то уравнение принимает вид

$$\ddot{\alpha} + A\dot{\alpha} + v^2 \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = -A\dot{\varphi}.$$

Замечая, что $\dot{\varphi} = v/R$, можно написать

$$\ddot{\alpha} + A\dot{\alpha} + v^2 \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = -\frac{A}{R} v. \quad (33)$$

Как видно, это уравнение уже не является однородным. Присутствие в его левой части члена с первой производной от угла α указывает на то, что построитель вертикали, испытывающий какое-либо возмущение, будет совершать затухающие колебания. Наличие свободного члена в правой части уравнения указывает на то, что построитель вер-

тикали уже не будет невозмущаемым, — он будет возмущаться скоростью движущегося объекта.

Не решая уравнения (33), можно сразу сказать, что в отличие от предыдущего случая построитель вертикали будет совершать колебания не около плоскости горизонта, а около нового положения равновесия, определяемого постоянной составляющей скорости. В этом смысле первый метод демпфирования колебаний предпочтительнее второго.

Однако погрешность построителя вертикали можно уменьшить при втором методе демпфирования, если использовать информацию о скорости, вырабатываемую автономным источником или использовать программное значение скорости для ввода соответствующих корректур. В этом случае погрешность построителя вертикали будет тем меньше, чем ближе информация о скорости или программное значение скорости к ее истинному значению.

Если время работы системы не больше периода М. Шулера, то можно не применять демпфирующих устройств.

ГЛАВА II. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Аналитическая система инерциальной навигации состоит из стабилизированной платформы с установленными на ней тремя акселерометрами, оси чувствительности которых образуют ортогональную систему координат $\xi\eta\zeta$. Информация от акселерометров поступает в бортовое вычислительное устройство, которое обрабатывает эту информацию и решает все поставленные перед ним задачи. В аналитической системе инерциальной навигации в отличие от геометрической отсутствует построитель вертикали, и вертикаль здесь, как правило, не материализуется, а при необходимости «строится» аналитически, как показано ниже.

Основной принцип работы аналитических систем инерциальной навигации весьма прост.

Допустим, что акселерометры, установленные на стабилизированной платформе, измеряют только ускорение движущегося объекта относительно инерциального пространства. Тогда определение координат его сводится к выработке двойного интеграла от ускорения.

Если, например, акселерометр, ось чувствительности которого направлена вдоль оси ξ , измеряет в единичном масштабе проекцию ускорения на ось ξ , то координаты этой оси определяются как двойной интеграл от показания акселерометра, т. е.

$$\xi = \int_0^t dt \int_0^t \omega_{\xi} dt.$$

Аналогичным образом можно определить две остальные координаты.

В действительности же акселерометры измеряют не ускорение движущегося объекта, а кажущееся ускорение. Поэтому процесс определения координат сводится к более сложным операциям, чем простое интегрирование. Здесь требуется выполнение таких операций, которые позволяют отделить истинное ускорение движущегося объекта от ускорения силы земного тяготения.

Для удобства изложения покажем сначала, как это осуществляется при движении объекта по сфере.

§ 9. Определение параметров движения объекта, перемещающегося по сфере

В рассматриваемом случае проекции кажущегося ускорения определяются из выражения (6):

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= \ddot{\xi} + \frac{g}{R} \xi; \\ a_{\eta} &= \ddot{\eta} + \frac{g}{R} \eta; \\ a_{\zeta} &= \ddot{\zeta} + \frac{g}{R} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Эти выражения, которые можно рассматривать как линейные неоднородные дифференциальные уравнения относительно ξ , η , ζ , прием в качестве алгоритма преобразования информации акселерометров счетно-решающим устройством. Если на вход счетно-решающего устройства подать показания акселерометров, то с выхода можно снять значения координат ξ , η , ζ .

Структурная схема, реализующая первое уравнение (34), показана на рис. 21. Здесь f — выходной сигнал счетно-решающего устройства; $M_1(p)$, $M_2(p)$ и $C(p)$ — передаточные функции соответственно акселерометра, интеграторов и обратной связи; B и A — величины, учитывающие начальные значения ξ и $\dot{\xi}$.

В этой схеме благодаря введению обратной связи осуществляется автокомпенсация ускорения силы земного тяготения.

В соответствии со структурной схемой можно написать

$$F(p) = \frac{M_1(p) M_2^2(p)}{1 + C(p) M_2^2(p)} a_{\xi}(p) + \frac{M_2(p) \dot{\xi}}{1 + C(p) M_2^2(p)} A + \frac{B}{1 + C(p) M_2^2(p)}, \quad (35)$$

где $F(p)$ — изображение выходного сигнала $f(t)$.

Предположим, что элементы структурной схемы безынерционны. Тогда $M_1(p) = M_1$, $M_2(p) = M_2/p$, $C(p) = C$, где M_1 и M_2 — масштабы акселерометра и интеграторов соответственно; C — коэффициент обратной связи.

Уравнение (35) запишется в виде

$$F(p) = \frac{M_1 M_2^2}{p^3 + C M_2^2} a_{\xi}(p) + \frac{M_2 p}{p^3 + C M_2^2} A + \frac{p^2}{p^3 + C M_2^2} B. \quad (35a)$$

Пусть $\xi(p)$ — изображение функции $\xi(t)$. Тогда

$$\dot{\xi}(t) \leftarrow p^2 \left[\xi(p) - \xi(0) - \frac{\dot{\xi}(0)}{p} \right].$$

Соответственно этому

$$a_{\xi}(p) = p^2 \left[\xi(p) - \xi(0) - \frac{\dot{\xi}(0)}{p} \right] + \frac{g}{R} \xi(p). \quad (36)$$

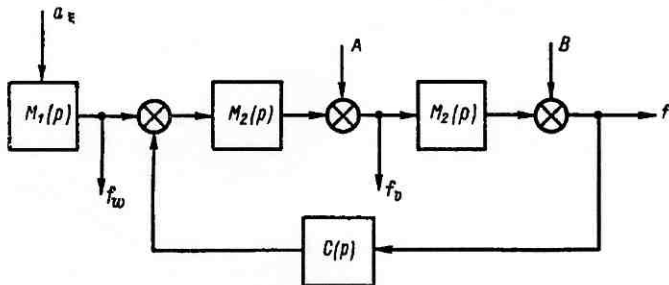


Рис. 21. Структурная схема одноканальной аналитической системы инерциальной навигации

Следовательно,

$$F(p) = M_1 M_2^2 \frac{p^2 + g/R}{p^3 + C M_2^2} \xi(p) + \frac{[M_2 A - M_1 M_2^2 \dot{\xi}(0)] p}{p^3 + C M_2^2} + \frac{[B - M_1 M_2^2 \xi(0)] p^2}{p^3 + C M_2^2}. \quad (37)$$

Если подобрать коэффициент обратной связи C и постоянные A и B так, чтобы выполнялись равенства

$$C = \frac{g}{R M_2^2}; \quad A = M_1 M_2 \dot{\xi}(0); \quad B = M_1 M_2^2 \xi(0), \quad (38)$$

то из уравнения (37) можно получить $F(p) = M_1 M_2^2 \xi(p)$. Переходя к оригиналам, получим $f(t) = M_1 M_2^2 \xi(t)$.

Таким образом, на выходе счетно-решающего устройства, реализующего первое уравнение системы (34), получаем значение координаты ξ в масштабе $M_1 M_2^2$.

Для определения второй координаты надо создать еще один канал, куда вводится величина a_{η} . Третья координата определится из соотношения $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Предположим, что начальные условия введены недостаточно точно, так, что

$$A = M_1 M_2 [\dot{\xi}(0) - \Delta \dot{\xi}(0)]; \quad B = M_1 M_2^2 [\xi(0) - \Delta \xi(0)].$$

Тогда уравнение (37) примет вид

$$F(p) = M_1 M_2^2 \ddot{\xi}(p) + M_1 M_2 \frac{\Delta \dot{\xi}(0) p}{p^2 + \nu^2} + M_1 M_2^2 \frac{\Delta \xi(0) p^2}{p^2 + \nu^2},$$

где $\nu = \sqrt{g/R}$ — частота М. Шулера. Переходя к оригиналам, получаем

$$f(t) = M_1 M_2^2 \left[\ddot{\xi}(t) + \frac{\Delta \dot{\xi}(0)}{\nu M_2} \sin \nu t + \Delta \xi(0) \cos \nu t \right].$$

Из полученного выражения видно, что на значение координаты $\xi(t)$ будут накладываться колебания, совершающиеся с периодом М. Шулера.

Итак, для того чтобы исключить влияние ускорения силы тяготения, возникла необходимость заменить процесс двойного интегрирования процессом интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Для этого потребовалось построить колебательный контур, период колебаний которого равен периоду М. Шулера.

Сказанное здесь дает возможность сформулировать теорему М. Шулера следующим образом: настройка контура на период М. Шулера позволяет отделить истинное ускорение движущегося объекта от ускорения силы земного тяготения.

Аналитическая система инерциальной навигации позволяет также определить скорость объекта относительно инерциального пространства, т. е. получить значения производных от координат.

Покажем, что сигнал $f_v(t)$ пропорционален производной от координаты ξ (рис. 21). Пусть $F_v(p)$ — изображение функции $f_v(t)$. Тогда

$$F_v(p) = \frac{F(p) - B}{M_2(p)} = \frac{p}{M_2} F(p) - \frac{p}{M_2} B.$$

Используя выражения (35а), можно написать

$$F_v(p) = \frac{M_1 M_2 p}{p^2 + CM_2^2} a_{\xi}(p) + \frac{Ap^2}{p^2 + CM_2^2} + \frac{p^2}{M_2(p^2 + CM_2^2)} B - \frac{p}{M_2} B.$$

Используя уравнения (36) и (38), получаем $F(p) = M_1 M_2 p [\dot{\xi}(p) - \dot{\xi}(0)]$.

Перейдя к оригиналу, получим следующее выражение:

$$f_v(t) = M_1 M_2 \dot{\xi}(t) = M_1 M_2 V_{\xi}.$$

Таким образом, сигнал $f_v(t)$ пропорционален производной от координаты или пропорционален проекции скорости на ось ξ . Чтобы определить проекции скорости на другие оси, надо использовать вто-

рой канал, подобно тому, как это делается при определении координат.

Аналогичным образом можно показать, что сигнал $f_w(t)$ пропорционален проекции ускорения на ось ξ , т. е.

$$f_w(t) = M_1 \ddot{\xi} = M_1 w_{\xi}.$$

§ 10. Определение параметров произвольного движения объекта в пространстве

Если объект движется произвольным образом в пространстве, то расстояние R от центра Земли до центра масс объекта, так же как и ускорение силы земного тяготения, является величиной переменной и зависящей от координат движущегося объекта.

Ускорение силы земного тяготения, как известно, обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли до центра масс объекта, т. е. $g = g' R_3^2 / R^2$, где R_3 — расстояние от центра Земли до той точки пространства, где ускорение силы земного тяготения равно g' . В частности, если R_3 — радиус Земли, то g' представляет собой ускорение силы земного тяготения на поверхности Земли.

В данном случае уравнения (34) примут вид

$$a_{\xi} = \ddot{\xi} + \frac{k}{R^3} \xi; \quad a_{\eta} = \ddot{\eta} + \frac{k}{R^3} \eta; \quad a_{\zeta} = \ddot{\zeta} + \frac{k}{R^3} \zeta,$$

где $k = g' R_3^2$, но $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_{\xi} &= \ddot{\xi} + \frac{k\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}; \\ a_{\eta} &= \ddot{\eta} + \frac{k\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}; \\ a_{\zeta} &= \ddot{\zeta} + \frac{k\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Уравнения (39) в отличие от уравнений (34) представляют собой систему нелинейных уравнений и для их реализации надо создать более сложное счетно-решающее устройство, использующее информацию не двух, а трех акселерометров, установленных на стабилизированной платформе.

Структурная схема, реализующая систему уравнений (39), показана на рис. 22.

На этой схеме сигналы f_1, f_2, f_3 снимаются с выхода счетно-решающего блока СРБ, который формирует функции

$$F_1 = \frac{f_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}; \quad F_2 = \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}; \quad F_3 = \frac{f_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}.$$

Эти функции вводятся в суммирующие устройства в качестве обратных связей с коэффициентом обратной связи C . Величины $A_1,$

A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 учитывают начальные значения координат ξ, η, ζ и их производных.

В соответствии со структурной схемой

$$f_1 = M_1 M_2^2 \int_0^t dt \int_0^t a_{\xi} dt - CM_2^2 \int_0^t dt \int_0^t \frac{f_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} dt + M_2 A_1 t + B_1;$$

$$f_2 = M_1 M_2^2 \int_0^t dt \int_0^t a_{\eta} dt - CM_2^2 \int_0^t dt \int_0^t \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} dt + M_2 A_2 t + B_2;$$

$$f_3 = M_1 M_2^2 \int_0^t dt \int_0^t a_{\zeta} dt - CM_2^2 \int_0^t dt \int_0^t \frac{f_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} dt + M_2 A_3 t + B_3,$$

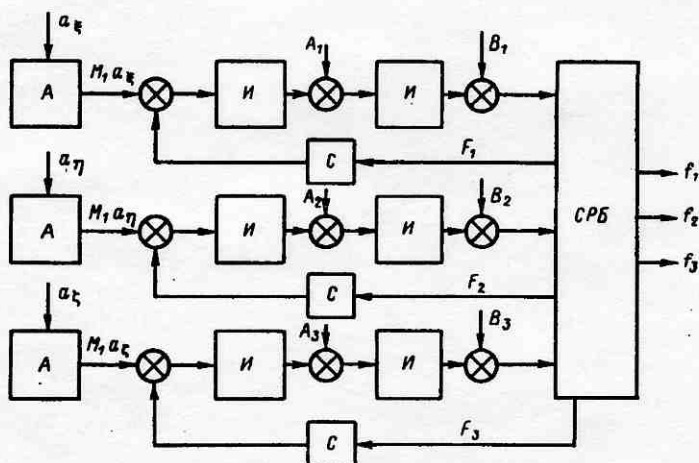


Рис. 22. Структурная схема аналитической системы инерциальной навигации

где M_1 и M_2 — масштабы акселерометров A и интеграторов $И$.

После двукратного дифференцирования последних уравнений с учетом системы (39) получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{f}_1 + CM_2^2 \frac{f_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} &= M_1 M_2^2 \left[\ddot{\xi} + k \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right]; \\ \ddot{f}_2 + CM_2^2 \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} &= M_1 M_2^2 \left[\ddot{\eta} + k \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right]; \\ \ddot{f}_3 + CM_2^2 \frac{f_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} &= M_1 M_2^2 \left[\ddot{\zeta} + k \frac{\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Если подобрать масштабы устройства так, что $CM_2^2 = k (M_1M_2^2)^3$, то уравнения (40) будут иметь частные решения

$$f_1 = M_1M_2^2\xi; \quad f_2 = M_1M_2^2\eta; \quad f_3 = M_1M_2^2\zeta.$$

Таким образом, с выхода счетно-решающего блока можно снять в масштабе $M_1M_2^2$ значения координат движущегося объекта относительно инерциального пространства. С выхода первичных интеграторов можно снять значения производных от координат в масштабе $M_1M_2^2$, а с выхода акселерометров — значения вторых производных от координат в масштабе M_1 , как это сделано ранее.

Чтобы перейти от инерциальных координат к «земным» или чтобы построить трассу, надо определить направление вертикали.

В аналитических системах инерциальной навигации, как указано выше, вертикаль не материализуется, а «строится» аналитически путем выработки значений направляющих косинусов a_3, b_3, c_3 , определяющих положение вертикали относительно инерциальной системы координат.

Выражения для этих направляющих косинусов имеют следующий вид:

$$a_3 = \frac{\xi}{R} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}; \quad b_3 = \frac{\eta}{R} = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}; \\ c_3 = \frac{\zeta}{R} = \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}.$$

Отсюда следует, что для выработки направляющих косинусов a_3, b_3, c_3 надо предусмотреть счетно-решающий блок, формирующий функции

$$a_3 = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}; \quad b_3 = \frac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}; \quad c_3 = \frac{f_3}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}. \quad (41)$$

По значениям направляющих косинусов можно выработать значения широты и долготы. Если, например, стабилизированная платформа имеет экваториальную ориентацию, то

$$a_3 = \sin \varphi; \quad b_3 = -\sin \theta \cos \varphi; \quad c_3 = \cos \theta \cos \varphi,$$

и тогда

$$\varphi = \arcsin \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}}; \quad \lambda = -\arctg \frac{f_2}{f_3} - \omega t.$$

Высоту полета над поверхностью Земли определяет выражение

$$h = \frac{1}{M_1M_2^2} \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} - R_3.$$

§ 11. Аналитическая система инерциальной навигации с использованием интеграторов ускорений

В ряде случаев рационально вместо акселерометров использовать в системах инерциальной навигации интеграторы ускорений. В качестве интегратора ускорений часто применяют гироскопические интеграторы.

Структурная схема одноканальной системы инерциальной навигации с использованием интегратора ускорений показана на рис. 23.

Предполагается, что интегратор ускорений установлен на стабилизированной относительно неподвижного пространства платформе. В отличие от системы, использующей акселерометры, здесь для ком-

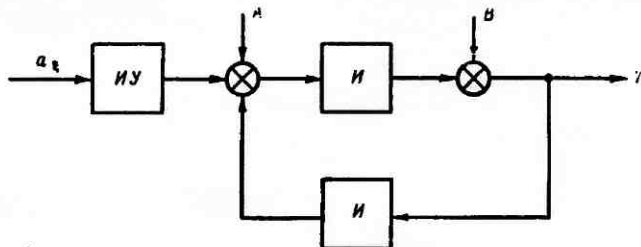


Рис. 23. Структурная схема одноканальной системы инерциальной навигации с интегратором ускорений

пенсации действия силы земного тяготения вводят обратную интегральную связь. Величины B и A учитывают соответственно начальные значения координаты и ее производной.

Пусть $F(p)$ — изображение выходного сигнала $f(t)$. Тогда в соответствии со структурной схемой получим выражение

$$F(p) = \frac{M_1 M_2}{p^2} a_{\xi}(p) - \frac{M_2^2}{p^2} F(p) + \frac{M_2}{p} A + B,$$

где M_1 — масштаб интегратора ускорений; M_2 — масштаб остальных интеграторов.

Разрешив это уравнение относительно $F(p)$, получим

$$F(p) = \frac{M_1 M_2}{p^2 + M_2^2} a_{\xi}(p) + \frac{A M_2 p}{p^2 + M_2^2} + \frac{B p^2}{p^2 + M_2^2}.$$

Так как $a_{\xi}(p) = p^2 \left[\xi(p) - \xi(0) - \frac{\dot{\xi}(0)}{p} \right] + v^2 \xi(p)$, то

$$F(p) = \frac{M_1 M_2 (p^2 + v^2)}{p^2 + M_2^2} \xi(p) + \frac{M_2 [A - M_1 \dot{\xi}(0)] p}{p^2 + M_2^2} + \frac{[B - M_1 M_2^2 \xi(0)] p^2}{p^2 + M_2^2}.$$

Если подобрать масштабы интеграторов и величины A и B так, чтобы выполнялись равенства $M_2^2 = g/R = v^2$; $A = M_1 \dot{\xi}(0)$; $B = M_1 M_2 \xi(0)$, то $F(p) = M_1 M_2 \xi(p)$.

Перейдя к оригиналам, получим $f(t) = M_1 M_2 \xi(t)$.

Таким образом, выходной сигнал $f(t)$ равен значению координаты в масштабе $M_1 M_2$.

Для объекта, движущегося в пространстве, систему строят в соответствии со структурной схемой, изображенной на рис. 24.

В счетно-решающем блоке СРБ формируются функции

$$F_1 = \frac{f_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}; \quad F_2 = \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}; \quad F_3 = \frac{f_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}}.$$

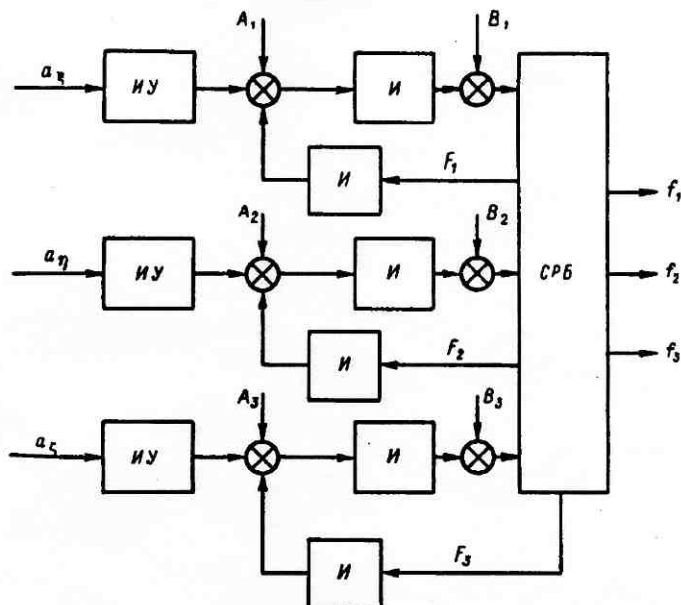


Рис. 24. Структурная схема аналитической системы инерциальной навигации с интеграторами ускорений

Эти функции заводятся на вход интеграторов И, осуществляющих интегральную обратную связь.

Величины B_1, B_2, B_3 и A_1, A_2, A_3 учитывают соответственно начальные значения координат ξ, η, ζ и их производных.

В этой структурной схеме выходные сигналы имеют следующий вид:

$$f_1 = M_1 M_2 \int_0^t dt \int_0^t a_x dt - M_2^2 \int_0^t dt \int_0^t \frac{f_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} dt + M_2 A_1 t + B_1;$$

$$f_2 = M_1 M_2 \int_0^t dt \int_0^t a_y dt - M_2^2 \int_0^t dt \int_0^t \frac{f_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} dt + M_2 A_2 t + B_2;$$

$$f_3 = M_1 M_2 \int_0^t dt \int_0^t a_{\xi} dt - M_2^2 \int_0^t dt \int_0^t \frac{\dot{f}_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} dt + M_2 A_3 t + B_3,$$

где M_1 — масштаб интеграторов ускорений ИУ; M_2 — масштаб остальных интеграторов И.

После двукратного дифференцирования

$$\ddot{f}_1 + M_2^2 \frac{\dot{f}_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} = M_1 M_2 a_{\xi};$$

$$\ddot{f}_2 + M_2^2 \frac{\dot{f}_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} = M_1 M_2 a_{\eta};$$

$$\ddot{f}_3 + M_2^2 \frac{\dot{f}_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} = M_1 M_2 a_{\zeta}.$$

Подставляя сюда значения a_{ξ} , a_{η} , a_{ζ} , получим

$$\ddot{f}_1 + M_2^2 \frac{\dot{f}_1}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} = M_1 M_2 \left[\ddot{\xi} + k \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right];$$

$$\ddot{f}_2 + M_2^2 \frac{\dot{f}_2}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} = M_1 M_2 \left[\ddot{\eta} + k \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right];$$

$$\ddot{f}_3 + M_2^2 \frac{\dot{f}_3}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{3/2}} = M_1 M_2 \left[\ddot{\zeta} + k \frac{\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \right].$$

Если подобрать масштабы устройства так, чтобы выполнялось соотношение $M_2^2 = k (M_1 M_2)^3$, то частные решения этих уравнений примут вид $f_1 = M_1 M_2 \xi$; $f_2 = M_1 M_2 \eta$; $f_3 = M_1 M_2 \zeta$.

С выхода счетно-решающего блока снимаются значения координат движущегося объекта в масштабе $M_1 M_2$.

§ 12. О возможности материализации вертикали в аналитических системах инерциальной навигации

Часто возникает необходимость иметь на борту объекта материальную горизонтальную площадку. Покажем, как можно построить такую площадку на борту объекта, имеющего аналитическую систему инерциальной навигации.

Представим себе площадку, установленную в двухосном кардановом подвесе, опоры внешнего кольца которого укреплены на борту объекта (рис. 25). Скрепим с объектом оси x' , y' , z' , а с площадкой — оси x_1 , y_1 , z_1 .

Определим положение площадки относительно объекта двумя углами: углом α поворота ее вокруг оси y' и углом β поворота ее вокруг оси x_1 (рис. 26). Можно считать, что α и β — это углы, на которые

надо развернуть площадку относительно объекта, чтобы она находилась в плоскости горизонта.

Направляющие косинусы углов, определяющих положение осей x_1, y_1, z_1 относительно осей x', y', z' , представлены в табл. 7.

Положение осей x', y', z' , связанных с объектом, относительно осей инерциальной системы координат ξ, η, ζ определим тремя углами Эйлера $\chi, \vartheta, \varepsilon$ (рис. 27).

Значения углов $\chi, \vartheta, \varepsilon$ можно списать при помощи датчиков углов с осей карданова подвеса стабилизированной платформы.

Направляющие косинусы углов, определяющих взаимное положение осей ξ, η, ζ и x', y', z' , представлены в табл. 8.

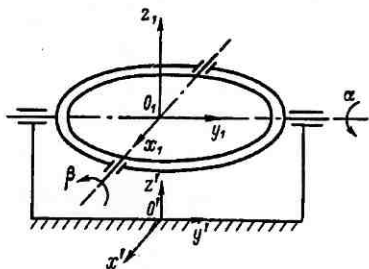


Рис. 25. К построению горизонтальной площадки на борту объекта

Вместе с табл. 7 и 8 используем последнюю строку табл. 1.

Направляющие косинусы a_3, b_3, c_3 вырабатывает система инерциальной навигации в соответствии с алгоритмами (41).

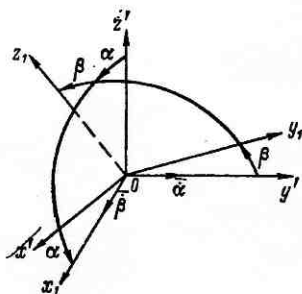


Рис. 26. Углы, определяющие положение площадки относительно объекта

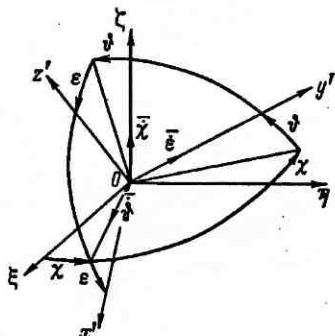


Рис. 27. Углы, определяющие положение объекта относительно инерциальной системы координат

Таблица 7

	x_1	y_1	z_1
x'	$\cos \alpha$	$\sin \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha \cos \beta$
y'	0	$\cos \beta$	$-\sin \beta$
z'	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

	ξ		η		ζ	
x'	$\cos \chi \cos \varepsilon -$ $-\sin \chi \sin \varepsilon \sin \theta$	α_1	$\sin \chi \cos \varepsilon +$ $+\cos \chi \sin \varepsilon \sin \theta$	β_1	$-\sin \varepsilon \cos \theta$	γ_1
y'	$-\sin \chi \cos \theta$	α_2	$\cos \chi \cos \theta$	β_2	$\sin \theta$	γ_2
z'	$\cos \chi \sin \varepsilon +$ $+\sin \chi \cos \varepsilon \sin \theta$	α_3	$\sin \chi \sin \varepsilon -$ $-\cos \chi \cos \varepsilon \sin \theta$	β_3	$\cos \varepsilon \cos \theta$	γ_3

Найдем следующие направляющие косинусы:

$$\left. \begin{aligned} a &= \cos(x', z) = \alpha_1 a_3 + \beta_1 b_3 + \gamma_1 c_3; \\ b &= \cos(y', z) = \alpha_2 a_3 + \beta_2 b_3 + \gamma_2 c_3; \\ c &= \cos(z', z) = \alpha_3 a_3 + \beta_3 b_3 + \gamma_3 c_3. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Известно, что ось z — это ось трехгранника Дарбу, направленная вертикально вверх.

Площадка будет лежать в плоскости горизонта, если ось z_1 , перпендикулярная к плоскости этой площадки, будет параллельна оси z трехгранника Дарбу. Следовательно, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} \cos(x', z) &= \cos(x', z_1); & \cos(y', z) &= \cos(y', z_1); \\ \cos(z', z) &= \cos(z', z_1). \end{aligned}$$

Приравняв соответствующие направляющие косинусы, получим

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta &= \alpha_1 a_3 + \beta_1 b_3 + \gamma_1 c_3; \\ \sin \beta &= -(\alpha_2 a_3 + \beta_2 b_3 + \gamma_2 c_3); \\ \cos \alpha \cos \beta &= \alpha_3 a_3 + \beta_3 b_3 + \gamma_3 c_3. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Равенства (43) не являются независимыми — каждое из них есть следствие двух остальных.

Из системы (43) получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{\alpha_1 a_3 + \beta_1 b_3 + \gamma_1 c_3}{\alpha_3 a_3 + \beta_3 b_3 + \gamma_3 c_3}; \\ \beta &= -\operatorname{arcsin}(\alpha_2 a_3 + \beta_2 b_3 + \gamma_2 c_3). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Итак, если площадку разворачивать относительно объекта на углы α и β в соответствии с алгоритмами (44), то она в течение всего времени движения будет находиться в плоскости горизонта.

Блок-схема, реализующая алгоритмы (44), показана на рис. 28. С карданова подвеса стабилизированной платформы СП снимаются углы χ , θ и ε , которые подаются в преобразователь координат ПКІ. С выхода ПКІ снимаются направляющие косинусы α_i , β_i и γ_i , ко-

торые подаются в преобразователь координат *ПК II*. Туда же подаются выработанные системой инерциальной навигации *СИН* направляющие косинусы a_3 , b_3 и c_3 . В *ПК II* формируются направляющие косинусы a , b и c в соответствии с алгоритмами (42). В счетно-решающем блоке *СРБ* эти косинусы преобразуются соответственно алгоритмам (44).

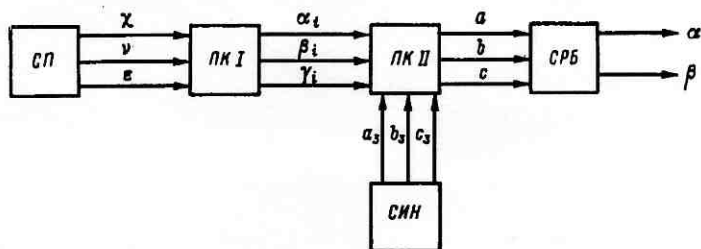


Рис. 28. Блок-схема построения горизонтальной площадки на борту объекта

и окончательно вырабатываются значения углов α и β . Эти углы, трансформируемые в электрические сигналы, подаются на соответствующие приводы, которые и разворачивают площадку относительно объекта.

§ 13. Аналитическая система инерциальной навигации с использованием двойных интеграторов ускорений. Уравнения движения

В системах инерциальной навигации необходимо осуществлять двойное интегрирование показаний акселерометра. Поэтому для измерения ускорения и последующего двойного интегрирования приходится использовать три устройства — акселерометр и два интегратора. Но целесообразней объединить эти три устройства в одно и применить для построения системы инерциальной навигации двойные интеграторы ускорений.

На рис. 29 показана одноканальная система инерциальной навигации, использующая двойной интегратор ускорений. Этот интегратор часто называют интегратором компенсационного типа или интегратором Байкова, по имени его изобретателя.

Тяжелый ротор 5 может вращаться относительно статора 2, который в свою

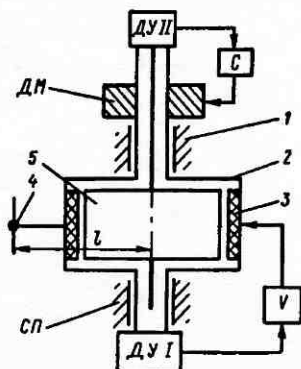


Рис. 29. Схема двойного интегратора ускорений

очередь может поворачиваться относительно стабилизированной платформы с установленным на ней двойным интегратором. Грузик массой m смещает центр тяжести статора от оси его вращения.

В элементарном изложении система работает следующим образом. Действие на грузик 4 силы инерции переносного движения вызывает момент вокруг оси статора 2, под влиянием которого статор повернется. При этом заводятся датчик угла $ДУ I$, установленный на статоре. Сигнал, снимаемый с $ДУ I$, после усиления подается на обмотку возбуждения 3 интегрирующего двигателя. Ротор двигателя 5 начинает раскручиваться. Возникающий реактивный момент, который действует вокруг оси статора, уравнивает момент сил инерции движущегося основания.

Чтобы компенсировать действие силы земного тяготения, которые испытывает двойной интегратор ускорения, установленный на стабилизированной платформе I , на ось ротора крепят датчик угла $ДУ II$. Показания $ДУ II$ в виде обратной связи заводятся в датчик момента $ДМ$, установленный на оси статора.

Если подобрать коэффициент обратной связи особым образом, то угол поворота ротора относительно статора будет пропорционален двойному интегралу от ускорения движущегося объекта.

В действительности работа интегратора сложнее и многообразней. Составим уравнения движения интегратора. Пусть α — угол поворота статора относительно стабилизированной платформы, а β — угол поворота ротора относительно статора.

Воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (\text{здесь } s = 1, 2).$$

Обобщенными координатами считаем углы α и β . Кинетическая энергия интегратора

$$T = \frac{1}{2} I_c \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_p (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2,$$

где I_c и I_p — моменты инерции статора и ротора вокруг их осей вращения.

Напишем выражение элементарной работы, необходимое для определения обобщенных сил: $\delta A = M_c \delta \alpha + M_p \delta \beta$, где M_c и M_p — моменты, действующие вокруг осей статора и ротора соответственно.

Вокруг оси статора действуют момент сил инерции $m l a_{\xi}^1$ и момент $c\beta$, развиваемый датчиком моментов $ДМ$ и пропорциональный углу β поворота ротора относительно статора. Вокруг оси ротора действует момент $k\alpha$, пропорциональный углу поворота статора относительно стабилизированной платформы.

Следовательно, $\delta A = (m l a_{\xi}^1 - c\beta) \delta \alpha + k\alpha \delta \beta$. Обобщенные силы определяются выражениями $Q_{\alpha} = m l a_{\xi}^1 - c\beta$; $Q_{\beta} = k\alpha$.

¹ Предполагаем, что ось чувствительности интегратора совпадает с осью ξ .

Выполнив операции дифференцирования, получим уравнения движения интегратора в виде

$$I_p (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + I_c \ddot{\alpha} + c\beta = mla_{\xi};$$

$$I_p (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) - k\alpha = 0.$$

Рассмотрим вначале случай, когда объект движется по сфере. Тогда $a_{\xi} = \ddot{\xi} + \frac{g}{R} \xi$, и уравнения движения примут вид

$$I_p (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + I_c \ddot{\alpha} + c\beta = ml \left(\ddot{\xi} + \frac{g}{R} \xi \right);$$

$$I_p (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) - k\alpha = 0.$$

§ 14. Анализ уравнений движения

Введем новую переменную γ уравнением

$$\beta = \frac{ml}{I_p} \xi + \gamma.$$

Перейдя к новой переменной γ в уравнениях движения, получим

$$(I_p + I_c) \ddot{\alpha} + I_p \ddot{\gamma} + c\gamma = ml \left(\frac{g}{R} - \frac{c}{I_p} \right) \xi;$$

$$I_p \ddot{\alpha} + I_p \ddot{\gamma} - k\alpha = -ml\ddot{\xi}.$$

Пусть выполняется условие $c/I_p = g/R = v^2$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\left. \begin{aligned} (I_p + I_c) \ddot{\alpha} + I_p \ddot{\gamma} + I_p v^2 \gamma &= 0; \\ I_p \ddot{\alpha} + I_p \ddot{\gamma} - k\alpha &= -ml\ddot{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Найдем решения этих уравнений. Пусть $\alpha(p)$, $\gamma(p)$, $\ddot{\xi}(p)$ — изображения функций $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, $\ddot{\xi}(t)$. Тогда уравнения (45) в операторной форме запишутся следующим образом:

$$(I_p + I_c) p^2 \alpha(p) + I_p (p^2 + v^2) \gamma(p) = 0;$$

$$(I_p p^2 - k) \alpha(p) + I_p p^2 \gamma(p) = -ml \ddot{\xi}(p).$$

Решив эту систему уравнений относительно $\alpha(p)$ и $\gamma(p)$, найдем

$$\alpha(p) = \frac{ml}{I_p} \frac{p^2 + v^2}{p^4 + \left(\frac{k}{I_c} - \frac{I_p}{I_c} v^2 \right) p^2 + \frac{kv^2}{I_c}} \ddot{\xi}(p);$$

$$\gamma(p) = - \frac{ml(I_p + I_c)}{I_p I_c} \cdot \frac{p^2}{p^4 + \left(\frac{k}{I_c} - \frac{I_p}{I_c} v^2 \right) p^2 + \frac{kv^2}{I_c}} \ddot{\xi}(p).$$

Характеристическое уравнение $p^4 + \left(\frac{k}{I_c} - \frac{I_p v^2}{I_c}\right) p^2 + \frac{kv^2}{I_c} = 0$ имеет корни

$$p^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_p v^2}{I_c} - \frac{k}{I_c} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I_p v^2}{I_c} - \frac{k}{I_c} \right)^2 - \frac{kv^2}{I_c}}.$$

Обычно в реальных системах

$$\frac{1}{4} \left(\frac{I_p v^2}{I_c} - \frac{k}{I_c} \right)^2 \gg \frac{kv^2}{I_c}.$$

Поэтому можно разложить радикал в ряд и удержать два первых члена разложения. Тогда

$$p_1^2 = \frac{I_p v^2 - k}{I_c} - \frac{kv^2}{I_p v^2 - k};$$

$$p_2^2 = \frac{kv^2}{I_p v^2 - k}.$$

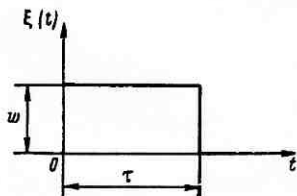


Рис. 30. Характер изменения ускорения

Считая v^2 весьма малой величиной, можно после упрощений приблизительно принять $p_1^2 \approx -k/I_c$, $p_2^2 = -v^2$.

Таким образом, можно считать, что характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней. Следовательно,

$$\alpha(p) = \frac{ml}{I_c} \cdot \frac{\xi(p)}{p^2 + a^2};$$

$$\gamma(p) = -\frac{ml(I_p + I_c)}{I_p I_c} \cdot \frac{p^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + v^2)} \xi(p),$$

где $a^2 = k/I_c$.

Представим функцию $\xi(t)$ в виде прямоугольника, изображенного на рис. 30.

Такое представление предполагает, что объект в течение времени $t = \tau$ (участок набора скорости) движется с постоянным ускорением w . Если $t > \tau$, то объект начинает двигаться с постоянной скоростью.

Математически закон изменения функции $\xi(t)$ можно записать в виде

$$\xi(t) = \begin{cases} w & \text{при } t < \tau; \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Изображение такой функции имеет вид $\xi(p) = w(1 - e^{-p\tau})$. Изображения $\alpha(p)$ и $\gamma(p)$ примут следующий вид:

$$\alpha(p) = \frac{ml}{I_c} \cdot \frac{w}{p^2 + a^2} (1 - e^{-p\tau});$$

$$\gamma(p) = -\frac{ml(I_p + I_c)w}{I_p I_c} \cdot \frac{p^2(1 - e^{-p\tau})}{(p^2 + a^2)(p^2 + v^2)}.$$

Чтобы построить оригиналы, воспользуемся теоремой запаздывания [9]:

$$\alpha(t)_{t < \tau} = \frac{ml}{I_c a^2} \omega (1 - \cos at);$$

$$\alpha(t)_{t > \tau} = \frac{ml}{I_c a^2} \omega [\cos a(t - \tau) - \cos at];$$

$$\gamma(t)_{t < \tau} = \frac{ml(I_p + I_c)\omega}{I_p I_c (v^2 - a^2)} (\cos vt - \cos \nu t);$$

$$\gamma(t)_{t > \tau} = \frac{ml(I_p + I_c)\omega}{I_p I_c (v^2 - a^2)} [\cos at - \cos a(t - \tau) - \cos \nu t + \cos \nu(t - \tau)].$$

Из полученных решений видно, что:

— статор, отклонение которого определяется углом α , совершает колебания с частотой $a = \sqrt{k/I_c}$ около угла $\alpha_r = ml\omega/k$, как около положения равновесия во время набора скорости ($t < \tau$) и около $\alpha_r = 0$ после действия ускорения ($t > \tau$);

— угол γ изменяется по сложному закону, определяющему колебания с частотой a и колебания с частотой M . Шулера.

Частота колебаний a значительно больше частоты ν . Поэтому величиной ν^2 можно пренебречь, как малой по сравнению с a^2 , и принять, что колебания, совершающиеся с частотой a , быстро затухнут. Следовательно, приближенные выражения для углов α и γ будут иметь вид

$$\alpha(t)_{t < \tau} = \frac{ml}{k} \omega; \quad \alpha(t)_{t > \tau} = 0;$$

$$\gamma(t)_{t < \tau} = \frac{ml(I_p + I_c)\omega}{I_p I_c a^2} \cos \nu t;$$

$$\gamma(t)_{t > \tau} = \frac{ml(I_p + I_c)\omega}{I_p I_c a^2} [\cos \nu t - \cos \nu(t - \tau)].$$

Угол отклонения статора относительно стабилизированной платформы, как видно, пропорционален ускорению движущегося объекта. Таким образом, двойной интегратор дает возможность измерить истинное ускорение.

Перейдем к переменной β . Получим

$$\left. \begin{aligned} \beta_{t < \tau} &= \frac{ml}{I_p} \xi + \frac{ml(I_p + I_c)\omega}{I_p I_c a^2} \cos \nu t; \\ \beta_{t > \tau} &= \frac{ml}{I_p} \xi + \frac{ml(I_p + I_c)\omega}{I_p I_c a^2} [\cos \nu t - \cos \nu(t - \tau)]. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Из выражений (46) видно, что в рассматриваемой системе инерциальной навигации угол поворота ротора относительно статора пропорционален координате с точностью до величины γ , имеющей характер динамической ошибки. Оценим эту ошибку со времени окончания набора скорости.

Второе уравнение системы (46) представим в виде

$$\beta = \frac{ml}{I_p} \xi \left\{ 1 + \frac{I_p + I_c}{k\xi} \omega [\cos vt - \cos v(t - \tau)] \right\}.$$

После простых преобразований получим

$$\beta = \frac{ml}{I_p} \xi \left[1 - \frac{2(I_p + I_c)}{k\xi} \omega \sin \frac{v\tau}{2} \sin \left(vt - \frac{v\tau}{2} \right) \right].$$

Пусть продолжительность набора скорости мала по сравнению с полупериодом M . Шулера. Тогда величина $v\tau/2$ будет величиной малой, и можно принять $\sin v\tau/2 \approx v\tau/2$. Тогда

$$\beta = \frac{ml}{I_p} \xi \left[1 - \frac{v(I_p + I_c) \omega \tau}{k\xi} \sin v \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Учитывая нулевые начальные условия для функции $\xi(t)$, можно представить

$$\xi(p) = \frac{\omega}{p^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

Перейдя к оригиналу, получим

$$\xi(t)_{t>\tau} = \frac{\omega t^2}{2} - \frac{\omega(t - \tau)^2}{2}.$$

Выражение для β окончательно будет иметь вид

$$\beta = \frac{ml}{I_p} \xi \left[1 - \frac{(I_p + I_c)v}{k \left(t - \frac{\tau}{2} \right)} \sin v \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Из этого выражения видно, что динамическая ошибка со временем убывает и приближается к нулю. А так как, кроме того, выражение для динамической ошибки содержит в числителе малую величину v , а в знаменателе большую величину k , то можно считать, что динамическая ошибка системы будет чрезвычайно малой.

Итак, считаем, что угол β поворота ротора относительно статора пропорционален координате подвижного объекта относительно инерциального пространства, т. е. $\beta = ml/I_p \xi$. Величина $M = ml/I_p$ представляет собой масштаб интегратора.

Этот результат, игнорирующий динамическую ошибку, можно получить, приравняв реактивный момент $I_p \ddot{\beta}$ ротора δ (см. рис. 29) моменту сил, приложенных к статору. Действительно,

$$I_p \ddot{\beta} = mla_{\xi} - c\beta. \quad (47)$$

Если $c = I_p g/R$, то уравнение (47) примет вид

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{R} \beta = \frac{ml}{I_p} \left(\ddot{\xi} + \frac{g}{R} \xi \right).$$

Это уравнение имеет частное решение

$$\beta = \frac{ml}{I_p} \xi.$$

Если объект движется в пространстве произвольным образом, то на стабилизированную платформу надо установить три двойных интегратора, оси чувствительности которых параллельны осям ξ , η , ζ . Затем следует сформировать в счетно-решающем блоке три функции вида

$$F_1 = C \frac{\beta_1}{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{3/2}}; \quad F_2 = C \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{3/2}};$$

$$F_3 = C \frac{\beta_3}{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{3/2}},$$

где β_1 , β_2 , β_3 — углы поворотов роторов.

Выработанные таким образом функции подаются в соответствующие датчики моментов, связанные со статорами интеграторов.

Соответственно уравнению (47) уравнения движения описанной выше системы инерциальной навигации с точностью до динамических ошибок примет следующий вид:

$$I_p \ddot{\beta}_1 + C \frac{\beta_1}{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{3/2}} = mla_{\xi};$$

$$I_p \ddot{\beta}_2 + C \frac{\beta_2}{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{3/2}} = mla_{\eta};$$

$$I_p \ddot{\beta}_3 + C \frac{\beta_3}{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)^{3/2}} = mla_{\zeta}.$$

Если коэффициенты обратной связи подобрать так, чтобы $C/I_p = g'R_3^2$, то частными решениями уравнений будут

$$\beta_1 = \frac{ml}{I_p} \xi; \quad \beta_2 = \frac{ml}{I_p} \eta; \quad \beta_3 = \frac{ml}{I_p} \zeta.$$

Переход от координат ξ , η , ζ , определяющих положение объекта относительно инерциальной системы координат, к сферическим координатам λ , φ , R можно осуществить обычным способом, как это производится в аналитических системах инерциальной навигации.

§ 15. Об устойчивости движения аналитической системы инерциальной навигации

Напишем уравнения первого приближения нелинейной системы уравнений (40), необходимые для исследования устойчивости движения аналитической системы инерциальной навигации. Представим функции f_1 , f_2 , f_3 в виде $f_1 = M_1 M_2^2 (\xi + \Delta\xi)$; $f_2 = M_1 M_2^2 (\eta + \Delta\eta)$; $f_3 = M_1 M_2^2 (\zeta + \Delta\zeta)$, где $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ — малые отклонения координат ξ , η , ζ .

Для малого промежутка времени можно приближенно принять $\xi = \eta = 0$ и $\zeta = R$, и тогда уравнения (49) распадутся на три независимых уравнения

$$\Delta \ddot{\xi} + \frac{k}{R^3} \Delta \xi = 0; \quad \Delta \ddot{\eta} + \frac{k}{R^3} \Delta \eta = 0; \quad \Delta \ddot{\zeta} - \frac{2k}{R^3} \Delta \zeta = 0.$$

Можно считать, что в ограниченном промежутке времени $R \approx R_3$, и тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\xi} + v^2 \Delta \xi &= 0; \\ \Delta \ddot{\eta} + v^2 \Delta \eta &= 0; \\ \Delta \ddot{\zeta} - 2v^2 \Delta \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Первые два уравнения (50) описывают колебательные движения, совершающиеся с периодом M . Шулера. Характеристическое уравнение третьего уравнения (50) будет иметь один положительный корень $v\sqrt{2}$. Следовательно, изменение величины $\Delta \zeta$ определяется гиперболической функцией, которая растет со временем. Таким образом, движение системы по координате ζ будет неустойчивым.

Так как ось ζ в начальный момент ориентирована по вертикали и в течение короткого промежутка времени будет близка к ней, то можно сказать, что в рассматриваемом случае неустойчивой будет координата, определяющая высоту полета объекта. В достаточно большом промежутке времени будут, очевидно, неустойчивы все три координаты.

Чтобы исследовать устойчивость движения аналитической системы инерциальной навигации в неограниченном промежутке времени, можно попытаться «заморозить» коэффициенты уравнений (49) и написать характеристическое уравнение этой системы.

Составим характеристический определитель системы, причем для удобства записи перейдем от координат ξ, η, ζ к направляющим косинусам $a_3 = \xi/R, b_3 = \eta/R, c_3 = \zeta/R$:

$$\Delta_0(p) = \begin{vmatrix} p^2 + n^2(1 - 3a_3^2) & -3n^2 a_3 b_3 & -3n^2 a_3 c_3 \\ -3n^2 a_3 b_3 & p^2 + n^2(1 - 3b_3^2) & -3n^2 b_3 c_3 \\ -3n^2 a_3 c_3 & -3n^2 b_3 c_3 & p^2 + n^2(1 - 3c_3^2) \end{vmatrix}$$

при $n^2 = g'R_3^2/R^3$.

Раскроем определитель и соберем члены при одинаковых степенях p : $\Delta_0(p) = p^6 - 3n^4 p^2 - 2n^6$. Характеристическое уравнение $p^6 - 3n^4 p^2 - 2n^6 = 0$ можно представить в виде

$$(p^2 + n^2)^2 (p^2 - 2n^2) = 0. \quad (51)$$

Характеристическое уравнение будет иметь один положительный корень $p = n\sqrt{2}$. Отсюда следует, что движение аналитической системы инерциальной навигации при произвольном движении объекта в пространстве неустойчиво.

Принтегрируем уравнения (49) при «замороженных» коэффициентах. Как и раньше, для удобства записи перейдем от координат ξ , η , ζ к направляющим косинусам.

Обозначим через $\Delta\xi(p)$, $\Delta\eta(p)$ и $\Delta\zeta(p)$ изображения функций $\Delta\xi(t)$, $\Delta\eta(t)$ и $\Delta\zeta(t)$.

Вторые производные от этих функций будут иметь следующие изображения: ¹

$$\Delta\ddot{\xi}(t) \leftarrow p^2 [\Delta\xi(p) - \Delta\xi(0)];$$

$$\Delta\ddot{\eta}(t) \leftarrow p^2 [\Delta\eta(p) - \Delta\eta(0)];$$

$$\Delta\ddot{\zeta}(t) \leftarrow p^2 [\Delta\zeta(p) - \Delta\zeta(0)].$$

Уравнения (49) в операторной форме примут вид

$$[p^2 + n^2(1 - 3a_3^2)] \Delta\xi(p) - 3n^2 a_3 b_3 \Delta\eta(p) - 3n^2 a_3 c_3 \Delta\zeta(p) = p^2 \Delta\xi(0);$$

$$-3n^2 a_3 b_3 \Delta\xi(p) + [p^2 + n^2(1 - 3b_3^2)] \Delta\eta(p) - 3n^2 b_3 c_3 \Delta\zeta(p) = p^2 \Delta\eta(0);$$

$$-3n^2 a_3 c_3 \Delta\xi(p) - 3n^2 b_3 c_3 \Delta\eta(p) + [p^2 + n^2(1 - 3c_3^2)] \Delta\zeta(p) = p^2 \Delta\zeta(0).$$

Решая эти уравнения как систему алгебраических уравнений относительно $\Delta\xi(p)$, $\Delta\eta(p)$, $\Delta\zeta(p)$, получим

$$\Delta\xi(p) = \frac{p^2}{p^2 + n^2} \Delta\xi(0) + \frac{3n^2 a_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)] p^2}{(p^2 + n^2)(p^2 - 2n^2)};$$

$$\Delta\eta(p) = \frac{p^2}{p^2 + n^2} \Delta\eta(0) + \frac{3n^2 b_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)] p^2}{(p^2 + n^2)(p^2 - 2n^2)};$$

$$\Delta\zeta(p) = \frac{p^2}{p^2 + n^2} \Delta\zeta(0) + \frac{3n^2 c_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)] p^2}{(p^2 + n^2)(p^2 - 2n^2)}.$$

По этим изображениям строим оригиналы

$$\Delta\xi(t) = \{\Delta\xi(0) - a_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)]\} \cos nt + \\ + a_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)] (2 \operatorname{ch} nt - 1);$$

$$\Delta\eta(t) = \{\Delta\eta(0) - b_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)]\} \cos nt + \\ + b_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)] (2 \operatorname{ch} nt - 1);$$

$$\Delta\zeta(t) = \{\Delta\zeta(0) - c_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)]\} \cos nt + \\ + c_3 [a_3 \Delta\xi(0) + b_3 \Delta\eta(0) + c_3 \Delta\zeta(0)] (2 \operatorname{ch} nt - 1).$$

Полученные решения содержат слагаемые, множителями которых являются гиперболические косинусы, неограниченно возрастающие со временем. Отсюда следует, что движение аналитической системы инерциальной навигации неустойчиво.

Поэтому систему инерциальной навигации при произвольном движении объекта в пространстве можно использовать в течение ограниченного интервала времени.

¹ Для простоты считаем, что $\dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \dot{\zeta}(0) = 0$.

§ 16. Выработка вектора относительной скорости

Решение ряда задач навигации и управления подвижными объектами вызывает необходимость определить значение вектора скорости относительно Земли, или, как его иногда называют, вектора путевой скорости. Аналитическая система инерциальной навигации позволяет решить эту задачу.

Выведем алгоритмы преобразований, реализация которых в счетно-решающем устройстве дает возможность определить величину и направление вектора скорости относительно Земли. Одновременно с этим выведем подобные алгоритмы, позволяющие определить направление вектора скорости относительно связанной с объектом системы координат.

Предположим, что начало трехгранника Дарбу xuz совпадает с центром масс движущегося объекта. С объектом, как и раньше (см. § 12), свяжем систему координат $x'y'z'$ с началом в центре масс объекта. Направим ось y' этой системы вдоль продольной оси объекта к носу, ось z' — в плоскости симметрии объекта перпендикулярно оси y' , ось x' — перпендикулярно осям y' и z' вправо, если смотреть по направлению движения.¹

Положение осей x' , y' , z' , связанных с объектом, относительно осей трехгранника Дарбу определяют направляющие косинусы (см. табл. 7).

Пусть \bar{v}_a — абсолютная скорость; \bar{v} — скорость относительно Земли; \bar{v}_e — переносная скорость движения центра масс объекта, т. е. скорость той точки земного пространства, с которой в данный момент совпадает центр масс объекта.

Тогда

$$\bar{v} = \bar{v}_a - \bar{v}_e. \quad (52)$$

Это уравнение определяет относительную скорость движения центра масс объекта по значениям абсолютной и переносной скоростей, вырабатываемых системой инерциальной навигации.

Определим положение вектора скорости относительно трехгранника Дарбу.

Проектируем равенство (52) на оси x , y , z трехгранника Дарбу:

$$v_x = v_{ax} - v_{ex}; \quad v_y = v_{ay} - v_{ey}; \quad v_z = v_{az} - v_{ez}.$$

Проекции абсолютной скорости на оси x , y , z определяются выражениями

$$v_{ax} = \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1; \quad v_{ay} = \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2; \quad v_{az} = \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3.$$

Значения ξ , η , ζ списываются, как показано ранее, с выходов первичных интеграторов. Направляющие косинусы в этих выражениях (см. табл. 1) определяют взаимное положение осей инерциальной системы координат и осей трехгранника Дарбу. Они могут быть выработаны системой инерциальной навигации при определенной ориентации стабилизированной платформы.

¹ Ось x' системы координат, связанной с самолетом, будет направлена вдоль крыльев вправо, если смотреть по направлению полета.

Для того чтобы найти проекции переносной скорости на оси x, y, z , спроектируем вектор этой скорости на оси инерциальной системы координат и найдем проекции переносной скорости $v_{e\xi}, v_{e\eta}, v_{e\zeta}$, а затем перепроектируем их на оси x, y, z . Тогда

$$v_x = (\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_1 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_1 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_1;$$

$$v_y = (\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_2;$$

$$v_z = (\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_3 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_3 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_3.$$

Величина вектора относительной скорости определится выражением

$$v = \sqrt{(\dot{\xi} - v_{e\xi})^2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta})^2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta})^2}. \quad (53)$$

Положение вектора скорости относительно осей трехгранника Дарбу определится направляющими косинусами углов, составленными этим вектором с осями x, y, z ,

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{v, x}) &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_1 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_1 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_1]; \\ \cos(\widehat{v, y}) &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_2]; \\ \cos(\widehat{v, z}) &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_3 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_3 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_3]. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Покажем, что формулы (54) дают возможность определить курс k , под которым движется объект, и угол возвышения. Зададим положение вектора скорости относительно осей трехгранника Дарбу углом k , лежащим в горизонтальной плоскости и отсчитываемым, как принято, от направления «север» (оси y) по часовой стрелке, и углом возвышения ϑ , лежащим в вертикальной плоскости (рис. 31).

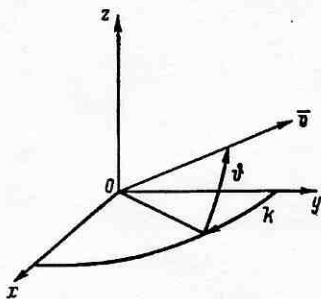


Рис. 31. Углы, определяющие положение вектора скорости относительно трехгранника Дарбу

Из рис. 31 находим

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{v, x}) &= \cos \vartheta \sin k; \\ \cos(\widehat{v, y}) &= \cos \vartheta \cos k; \\ \cos(\widehat{v, z}) &= \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Сравнивая направляющие косинусы (54) и (55), получаем

$$\cos \vartheta \sin k = \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_1 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_1 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_1];$$

$$\cos \vartheta \cos k = \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_2];$$

$$\sin \vartheta = \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_3 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_3 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_3].$$

Для того чтобы найти проекции переносной скорости на оси x, y, z , спроектируем вектор этой скорости на оси инерциальной системы координат и найдем проекции переносной скорости $v_{e\xi}, v_{e\eta}, v_{e\zeta}$, а затем перепроектируем их на оси x, y, z . Тогда

$$\begin{aligned}v_x &= (\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_1 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_1 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_1; \\v_y &= (\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_2; \\v_z &= (\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_3 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_3 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_3.\end{aligned}$$

Величина вектора относительной скорости определится выражением

$$v = \sqrt{(\dot{\xi} - v_{e\xi})^2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta})^2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta})^2}. \quad (53)$$

Положение вектора скорости относительно осей трехгранника Дарбу определится направляющими косинусами углов, составленными этим вектором с осями x, y, z ,

$$\left. \begin{aligned}\cos(\widehat{v, x}) &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_1 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_1 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_1]; \\ \cos(\widehat{v, y}) &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_2]; \\ \cos(\widehat{v, z}) &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_3 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_3 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_3].\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Покажем, что формулы (54) дают возможность определить курс k , под которым движется объект, и угол возвышения. Зададим положение вектора скорости относительно осей трехгранника Дарбу углом k , лежащим в горизонтальной плоскости и отсчитываемым, как принято, от направления «север» (оси y) по часовой стрелке, и углом возвышения ϑ , лежащим в вертикальной плоскости (рис. 31).

Из рис. 31 находим

$$\left. \begin{aligned}\cos(\widehat{v, x}) &= \cos \vartheta \sin k; \\ \cos(\widehat{v, y}) &= \cos \vartheta \cos k; \\ \sin \vartheta &= \cos(\widehat{v, z}).\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Рис. 31. Углы, определяющие положение вектора скорости относительно трехгранника Дарбу

Сравнивая направляющие косинусы (54) и (55), получаем

$$\begin{aligned}\cos \vartheta \sin k &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_1 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_1 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_1]; \\ \cos \vartheta \cos k &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_2 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_2 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_2]; \\ \sin \vartheta &= \frac{1}{v} [(\dot{\xi} - v_{e\xi}) a_3 + (\dot{\eta} - v_{e\eta}) b_3 + (\dot{\zeta} - v_{e\zeta}) c_3].\end{aligned}$$