

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} k &= \frac{(\xi - v_{e\xi}) a_1 + (\eta - v_{e\eta}) b_1 + (\zeta - v_{e\zeta}) c_1}{(\xi - v_{e\xi}) a_2 + (\eta - v_{e\eta}) b_2 + (\zeta - v_{e\zeta}) c_2}; \\ \sin \theta &= \frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) a_3 + (\eta - v_{e\eta}) b_3 + (\zeta - v_{e\zeta}) c_3]. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Итак, для того чтобы определить курс и угол возвышения, надо в счетно-решающем устройстве реализовать алгоритмы (56). Реализация алгоритма (53) позволяет определить величину вектора относительной скорости.

Определим теперь положение вектора скорости относительно осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , связанных с объектом.

Выражения для направляющих косинусов углов, образованных вектором скорости с осями  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , можно написать по аналогии с формулами (54), заменив лишь направляющие косинусы  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  на направляющие косинусы  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  (где  $i = 1, 2, 3$ ), представленные в табл. 8:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{v, x'}) &= \frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_1 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_1 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_1]; \\ \cos(\widehat{v, y'}) &= \frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_2 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_2 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_2]; \\ \cos(\widehat{v, z'}) &= \frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_3 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_3 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_3]. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Величина относительной скорости по-прежнему определится формулой (53).

Зададим положение вектора скорости относительно осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  углом  $\alpha'$  в плоскости  $y'oz'$  и углом  $\beta'$  в плоскости  $x'ov$  (рис. 32).

Из рис. 32 находим

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{v, x'}) &= -\sin \beta'; \\ \cos(\widehat{v, y'}) &= \cos \alpha' \cos \beta'; \\ \cos(\widehat{v, z'}) &= \sin \alpha' \cos \beta'. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Сравнив направляющие косинусы (57) и (58), получим

$$\begin{aligned} \sin \beta' &= -\frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_1 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_1 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_1]; \\ \cos \alpha' \cos \beta' &= \frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_2 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_2 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_2]; \\ \sin \alpha' \cos \beta' &= \frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_3 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_3 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_3]. \end{aligned}$$

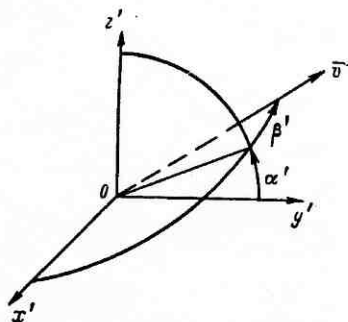


Рис. 32. Углы, определяющие положение вектора скорости относительно осей, связанных с объектом

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{(\xi - v_{e\xi}) \alpha_3 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_3 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_3}{(\xi - v_{e\xi}) \alpha_2 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_2 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_2}; \\ \sin \beta' &= -\frac{1}{v} [(\xi - v_{e\xi}) \alpha_1 + (\eta - v_{e\eta}) \beta_1 + (\zeta - v_{e\zeta}) \gamma_1]. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Для определения углов  $\alpha'$  и  $\beta'$  надо в счетно-решающем устройстве реализовать алгоритмы (59). Величина вектора относительной скорости, как и прежде, определяется алгоритмом (53).

Важно отметить, что при движении в спокойной среде (в отсутствие ветра или течения) углы  $\alpha'$  и  $\beta'$  можно рассматривать как угол атаки и угол скольжения, а относительную скорость  $v$  — как скорость потока. Эти три параметра, как известно, широко используются в аэродинамике и гидродинамике.

Способность инерциальных систем выработать при некоторых условиях информацию об углах атаки и скольжения, а также о скорости потока является еще одним замечательным свойством этих систем. Информацию об углах атаки и скольжения и о скорости потока можно использовать при построении самонастраивающихся и самоорганизующихся систем управления объектами.

До сих пор ориентация стабилизированной платформы была принята произвольной. Придадим теперь стабилизированной платформе экваториальную ориентацию.

Направляющие косинусы углов между осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и осями трехгранника Дарбу  $x$ ,  $y$ ,  $z$  даны в табл. 5.

Как получено ранее,  $a_3 = \xi/R$ ;  $b_3 = \eta/R$ ;  $c_3 = \zeta/R$ . Используя значения направляющих косинусов, получим  $\sin \varphi = \xi/R$ ;  $-\sin \theta \cos \varphi = \eta/R$ ;  $\cos \theta \cos \varphi = \zeta/R$ . Отсюда

$$\sin \theta = -\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}; \quad \cos \theta = \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}.$$

Направляющие косинусы показаны в табл. 9 (при  $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ).

Вектор переносной скорости  $\bar{v}_e$  направлен на восток и, следовательно, совпадает с осью  $x$  трехгранника Дарбу и равен по величине  $v_e = R\omega \cos \varphi$ . Поэтому

$$v_{e\xi} = v_e \cos(\widehat{\xi, x}); \quad v_{e\eta} = v_e \cos(\widehat{\eta, x}); \quad v_{e\zeta} = v_e \cos(\widehat{\zeta, x}).$$

Используя значения направляющих косинусов, получим  $v_{e\xi} = 0$ ;  $v_{e\eta} = -\zeta\omega$ ;  $v_{e\zeta} = \eta\omega$ . Формулы (56) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} k &= \frac{R(\zeta\eta - \xi\eta) - R\omega(\eta^2 + \zeta^2)}{\xi(\eta^2 + \zeta^2) - \xi(\eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta})}; \\ \sin \theta &= \frac{1}{Rv} (\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

	$\xi$		$\eta$		$\zeta$	
$x$	0	$a_1$	$-\frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$	$b_1$	$\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$	$c_1$
$y$	$\frac{1}{R} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$	$a_2$	$-\frac{\zeta\eta}{R\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$	$b_2$	$-\frac{\xi\zeta}{R\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}$	$c_2$
$z$	$\frac{\xi}{R}$	$a_3$	$\frac{\eta}{R}$	$b_3$	$\frac{\zeta}{R}$	$c_3$

Выражения (59) при заданной ориентации стабилизированной платформы можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\xi\alpha_3 + (\dot{\eta} + \zeta\omega)\beta_3 + (\zeta - \eta\omega)\gamma_3}{\xi\alpha_2 + (\dot{\eta} + \zeta\omega)\beta_2 + (\zeta - \eta\omega)\gamma_2}; \\ \sin \beta' &= \frac{1}{v} [\xi\alpha_1 + (\dot{\eta} + \zeta\omega)\beta_1 + (\zeta - \eta\omega)\gamma_1]. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Величина вектора относительной скорости определится выражением

$$v = \sqrt{\xi^2 + (\dot{\eta} + \zeta\omega)^2 + (\dot{\eta} - \eta\omega)^2}. \quad (62)$$

Итак, для определения величины и направления вектора скорости относительно земной системы координат (трехгранника Дарбу) и связанной с объектом системы при экваториальной ориентации стабилизированной платформы надо в счетно-решающем устройстве реализовать алгоритмы (60), (61) и (62).

### § 17. Демпфирование колебаний в аналитических системах инерциальной навигации

В аналитических системах инерциальной навигации демпфирование колебаний осуществляется путем охвата одного из интеграторов прямой или обратной связью. На рис. 33 показана структурная схема одноканальной системы инерциальной навигации, демпфирование которой осуществляется при помощи прямой связи, охватывающей вторичный интегратор. Принимаем нулевые начальные условия для координаты и ее производной.

Изображение выходного сигнала  $f(t)$  имеет вид

$$F(p) = \frac{M_1 M_2^2}{p^2} a_{\xi}(p) - \frac{C M_2^2}{p^2} F(p) + \frac{N M_1 M_2}{p} a_{\xi}(p) - \frac{N C M_2}{p} F(p).$$

После преобразований получим

$$(p^2 + NCM_2p + CM_2^2) F(p) = M_1M_2(M_2 + Np) a_\xi(p).$$

Так как при нулевых начальных условиях  $a_\xi(p) = (p^2 + \nu^2) \xi(p)$ , то  $F(p)$  можно выразить в виде

$$F(p) = \frac{M_1M_2(M_2 + Np)(p^2 + \nu^2)}{p^2 + NCM_2p + CM_2^2} \xi(p).$$

Пусть, как и прежде, выполняется условие  $CM_2^2 = g/R = \nu^2$ . Тогда

$$F(p) = \frac{M_1M_2(M_2 + Np)(p^2 + \nu^2)}{p^2 + \frac{N}{M_2} \nu^2 p + \nu^2} \xi(p).$$

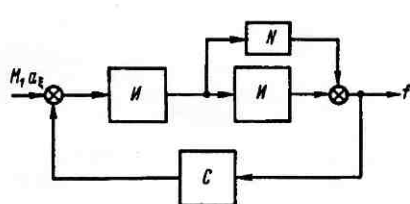


Рис. 33. Демпфирование колебаний с помощью прямой связи

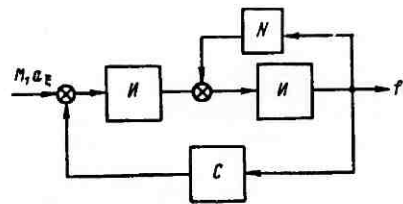


Рис. 34. Демпфирование колебаний с помощью обратной связи

Это выражение можно привести к виду

$$F(p) = M_1M_2^2 \xi(p) + NM_1M_2 \frac{p^3}{p^2 + 2hp + \nu^2} \xi(p), \quad (63)$$

где  $2h = \frac{N}{M_2} \cdot \nu^2$ .

Чтобы построить оригинал изображения  $F(p)$ , применим теорему свертывания. Эта теорема формулируется следующим образом. Пусть имеется две функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , изображения которых соответственно будут  $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$  и  $f_2(t) \leftarrow F_2(p)$ . Тогда оригинал изображения  $\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p)$  определится выражением  $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ , т. е.

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Представим выражение (63) в виде

$$F(p) = M_1M_2^2 \xi(p) + \frac{NM_1M_2}{p} \cdot \frac{p}{p^2 + 2hp + \nu^2} p^3 \xi(p).$$

Пусть  $F_1(p) = p^3 \xi(p)$  и  $F_2(p) = \frac{p}{p^2 + 2hp + \nu^2}$ .

Оригиналы этих изображений имеют вид

$$f_1(t) = \ddot{\xi}(t); \quad f_2(t) = \frac{1}{q} e^{-ht} \sin qt, \quad \text{где } q = \sqrt{v^2 - h^2}; \quad v^2 > h^2.$$

В соответствии с теоремой свертывания можно оригинал изображения  $F(p)$  записать в виде

$$f(t) = M_1 M_2^2 \ddot{\xi}(t) + \frac{N M_1 M_2}{q} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} \sin q(t-\tau) \ddot{\xi}(\tau) d\tau. \quad (64)$$

Отсюда видно, что аналитическая система инерциальной навигации, демпфирование которой осуществляется путем охвата вторичного интегратора прямой связью, во-первых, будет совершать затухающие колебания, на что указывает наличие в подынтегральном выражении экспоненциальной функции  $e^{-h(t-\tau)}$ ; во-вторых, уже не остается невозмущаемой, а возмущается факторами, зависящими от третьей производной от координаты или первой производной от ускорения.

Рассмотренная система имеет тот же эффект, что и геометрическая система инерциальной навигации, первичный интегратор которой охвачен прямой связью.

Охватим теперь вторичный интегратор обратной связью (рис. 34). Представим изображение выходного сигнала в виде

$$F(p) = \frac{M_1 M_2^2}{p^2} a_{\xi}(p) - \frac{C M_2^2}{p^2} F(p) - N \frac{M_2}{p} F(p).$$

После преобразований получим

$$(p^2 + N M_2 p + C M_2^2) F(p) = M_1 M_2^2 a_{\xi}(p).$$

Пусть выполняется условие  $C M_2^2 = g/R = v^2$ , и примем обозначение  $N M_2 = 2h$ .

Используя значение  $a_{\xi}(p)$ , получим

$$F(p) = \frac{M_1 M_2^2 (p^2 + v^2)}{p^2 + 2hp + v^2} \ddot{\xi}(p).$$

Это уравнение можно представить в виде

$$F(p) = M_1 M_2^2 \ddot{\xi}(p) - \frac{2h M_1 M_2^2}{p} \cdot \frac{p}{p^2 + 2hp + v^2} p \ddot{\xi}(p).$$

В соответствии с теоремой свертывания оригинал изображения можно записать следующим образом:

$$f(t) = M_1 M_2^2 \ddot{\xi}(t) - \frac{2h M_1 M_2^2}{q} \int_0^t e^{-h(t-\tau)} \sin q(t-\tau) \ddot{\xi}(\tau) d\tau. \quad (65)$$

Отсюда видно, что аналитическая система инерциальной навигации, демпфирование которой осуществляется путем охвата вторичного интегратора обратной связью, во-первых, будет, как и в предыдущем

случае, совершать затухающие колебания, на что указывает наличие в подынтегральном выражении экспоненциальной функции  $e^{-h(t-\tau)}$ ; во-вторых, уже не остается невозмущаемой, а возмущается факторами, зависящими от скорости.

Сравнивая два метода демпфирования аналитических систем инерциальной навигации, следует отдать предпочтение первому методу, т. е. демпфированию путем охвата вторичного интегратора прямой связью.

В этом случае погрешность системы из-за демпфирования зависит от производной от ускорения. Если объект движется с постоянной скоростью или с постоянным ускорением, то эта погрешность равна нулю. Если же обратной связью охвачен вторичный интегратор, то погрешность системы зависит от скорости и ни при каком характере движения объекта не может обратиться в нуль. Ее можно лишь уменьшить за счет использования внешней информации о скорости, вырабатываемой каким-либо посторонним источником, или за счет использования программного значения скорости.

### **ГЛАВА III. ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ<sup>1</sup>**

В полуаналитических системах навигации для автономного определения элементов движения объектов используют те же элементы, что и в рассмотренных ранее системах: гироскопы, акселерометры, интеграторы и т. д. Основная особенность этих систем заключается в том, что платформа, несущая гироскопы и акселерометры, не стабилизируется в инерциальном пространстве, а непрерывно разворачивается относительно него так, что в течение всего времени движения она остается в плоскости текущего горизонта. При этом гироскопы помимо функций стабилизации выполняют еще роль интегрирующих элементов.

#### **§ 18. Простейшая полуаналитическая система навигации**

Пусть объект движется по дуге большого круга невращающейся сферы (рис. 35). Покажем, как можно построить горизонтальную площадку при помощи гироскопа и акселерометров.

Представим себе площадку 1, составляющую с плоскостью горизонта угол  $\alpha$ . На площадке установлен гироскоп 2 и акселерометр 3, ось чувствительности которого параллельна этой площадке.

На оси прецессии гироскопа установлен датчик моментов ДМ. Сигнал акселерометра подается на вход интегратора И. Сигнал, снимае-

<sup>1</sup> В этой главе использованы материалы статьи [15].

мый с выхода интегратора, подается на ДМ. Датчик момента развивает момент, пропорциональный интегралу от показаний акселерометра. Так как гироскоп представляет собой интегрирующий элемент, то сигнал акселерометра интегрируется еще один раз, в результате чего площадка разворачивается (прецессирует) относительно неподвижного (инерциального) пространства на угол, пропорциональный двойному интегралу от показаний акселерометра.

Из описания принципа действия простейшей полуаналитической системы навигации видно, что здесь реализуется тот же принцип, что и в геометрической системе, с той лишь разницей, что одно интегрирование осуществляется с помощью гироскопа.

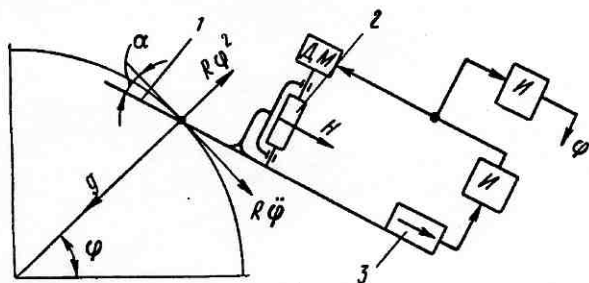


Рис. 35. Схема простейшей полуаналитической системы навигации

Составим уравнение движения системы. Используя основной закон прецессии, напишем

$$H(\dot{\alpha} + \dot{\varphi}) = A \int_0^t a dt,$$

где  $H$  — кинетический момент гироскопа;  $A$  — коэффициент пропорциональности.

Введя в последнюю формулу показание акселерометра, получим

$$\dot{\alpha} + \dot{\varphi} = M \int_0^t [R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha] dt.$$

Величину  $M = A/H$  можно рассматривать как масштаб интегрирующей цепочки «акселерометр—интегратор—датчик моментов—гироскоп».

После однократного дифференцирования получаем

$$\ddot{\alpha} + Mg \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = (MR - 1) \ddot{\varphi}.$$

Если выполняется условие  $M = 1/R$ , то это уравнение принимает вид  $\ddot{\alpha} + Mg(1 - R\dot{\varphi}^2/g)\alpha = 0$ . Оно стало однородным и при нулевых начальных условиях его решением будет  $\alpha = 0$ .

Отсюда следует, что при любом характере движения объекта по дуге большого круга невращающейся сферы площадка будет находиться в плоскости горизонта, не возмущаясь ускорением движущегося объекта, или, как говорят, оставаясь инвариантной по отношению к ускорению движущегося объекта.

Если принять, что  $R\dot{\varphi}^2 \ll g$ , то при случайном возмущении площадка будет совершать колебания с периодом М. Шулера  $T = 2\pi \sqrt{R/g}$ .

Значение угла  $\varphi$ , определяющего положение объекта на дуге, можно получить после повторного интегрирования показаний акселерометра. Для этого предусматривается еще один интегратор, интегрирующий выходной сигнал первичного интегратора (см. рис. 35).

Система должна быть более сложной, если объект движется в пространстве произвольным образом.

### § 19. Полуаналитическая система с географической ориентацией подвеса<sup>1</sup>

Пусть объект произвольно движется по сфере. Рассмотрим площадку, подвешенную в трехосном кардановом подвесе, который ориентирован географически так, что ось его внутреннего кольца направлена на восток. На площадке установлены две

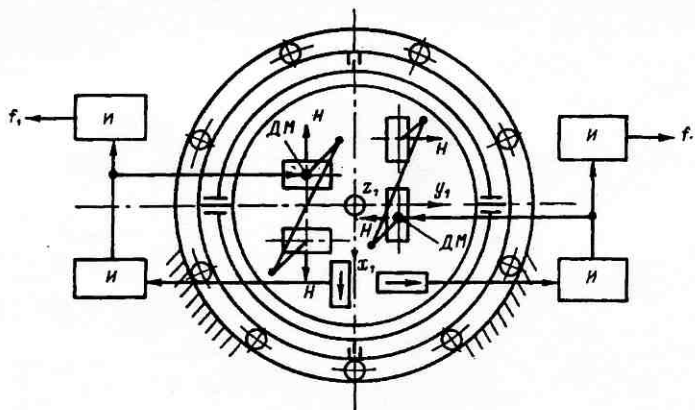


Рис. 36. Схема полуаналитической системы навигации

пары гироскопов, соединенных между собой антипараллелограммами (рис. 36). Оси прецессии гироскопов перпендикулярны плоскости площадки. На этой площадке установлены также два акселерометра, оси чувствительности которых взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости площадки. На осях прецессии двух не связанных между собой гироскопов помещены датчики моментов ДМ. Сигналы акселерометров после однократного интегрирования подаются на датчики

<sup>1</sup> Теория этой системы была впервые разработана Г. О. Фридлендером.



моментов, как показано на схеме. Координаты движущегося объекта получаются путем двойного интегрирования сигналов акселерометров.

Составим уравнения движения площадки. Свяжем с ней оси  $x_1, y_1, z_1$ . Оси чувствительности акселерометров направлены по осям  $x_1$  и  $y_1$ . Рассмотрим движение площадки относительно трехгранника Дарбу  $xuz$ , оси которого ориентированы географически по направлениям «восток—север—зенит».

Положение осей  $x_1, y_1, z_1$  относительно осей  $x, y, z$  определим углом  $\alpha$  поворота вокруг оси  $x$  («восток») и углом  $\beta$  поворота вокруг оси  $y_1$  (рис. 37). Направляющие косинусы углов, определяющих взаимное положение осей  $x_1, y_1, z_1$  и  $x, y, z$ , даны в табл. 10.

Выражения для проекций мгновенной угловой скорости трехгранника  $x_1y_1z_1$  на оси  $x_1, y_1$  имеют вид

$$\omega_{x_1} = \dot{\alpha} \cos \beta + u_1 \cos \beta + u_2 \sin \alpha \sin \beta - u_3 \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\omega_{y_1} = \dot{\beta} + u_2 \cos \alpha + u_3 \sin \alpha.$$

При малых углах  $\alpha$  и  $\beta$  получим

$$\omega_{x_1} = \dot{\alpha} + u_1 - u_3\beta;$$

$$\omega_{y_1} = \dot{\beta} + u_2 + u_3\alpha.$$

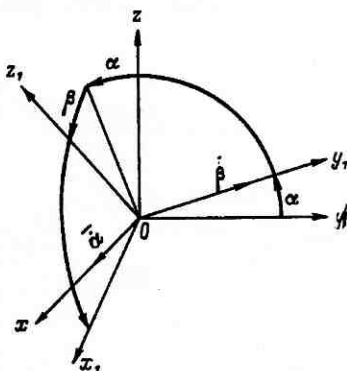


Рис. 37. Углы, определяющие положение платформы полуаналитической системы навигации относительно трехгранника Дарбу

Уравнения движения системы можно представить в виде

$$2H\omega_{x_1} = -M_1; 2H\omega_{y_1} = M_2,$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — моменты внешних сил относительно осей прецессии.

Считаем, что вокруг осей прецессии гироскопов действуют только моменты, развиваемые датчиками моментов,

$$M_1 = A \int_0^t a_{y_1} dt; M_2 = A \int_0^t a_{x_1} dt,$$

где  $A$  — коэффициент пропорциональности;  $a_{y_1}$  и  $a_{x_1}$  — проекции кажущегося ускорения на оси  $y_1$  и  $x_1$ .

Таблица 10

	$x$	$y$	$z$
$x_1$	$\cos \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$	$-\cos \alpha \sin \beta$
$y_1$	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$z_1$	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

Для этих проекций при малых углах  $\alpha$  и  $\beta$  получим выражения

$$a_{x_1} = \omega_1 - (g + \omega_3)\beta; \quad a_{y_1} = \omega_2 + (g + \omega_3)\alpha,$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  — проекции ускорения на оси трехгранника Дарбу, определяемые формулами (3).

Уравнения движения запишутся в виде

$$2H(\alpha + u_1 - u_3\beta) = -A \int_0^t (\omega_2 + g_1\alpha) dt;$$

$$2H(\beta + u_2 + u_3\alpha) = A \int_0^t (\omega_1 - g_1\beta) dt, \quad \text{где } g_1 = g + \omega_3.$$

После однократного дифференцирования уравнения примут вид

$$\ddot{\alpha} - \frac{d}{dt}(u_3\beta) + Mg_1\alpha = -\dot{u}_1 - M\omega_2;$$

$$\ddot{\beta} + \frac{d}{dt}(u_3\alpha) + Mg_1\beta = -\dot{u}_2 + M\omega_1,$$

где  $M = A/2H$  — масштаб интегрирующей цепочки «акселерометр—интегратор—датчик моментов—гироскоп».

Введем сюда значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Имея в виду, что  $R = \text{const}$ , получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} - \frac{d}{dt}(u_3\beta) + Mg_1\alpha &= (MR - 1)\dot{u}_1 - MRu_2u_3; \\ \ddot{\beta} + \frac{d}{dt}(u_3\alpha) + Mg_1\beta &= (MR - 1)\dot{u}_2 + MRu_1u_3. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Координаты подвижного объекта следует определить путем интегрирования выходных сигналов первичных интеграторов или, что то же самое, интегрирования сигнала, определяющего момент, который развивает датчик момента, т. е.

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= A_1 \int_0^t dt \int_0^t (\omega_1 - g_1\beta) dt; \\ f_2 &= A_1 \int_0^t dt \int_0^t (\omega_2 + g_1\alpha) dt, \end{aligned} \right\} \quad (66a)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — выходные сигналы вторичных интеграторов;  $A_1$  — масштаб интегрирующей цепочки «акселерометр — первичный и вторичный интеграторы».

Обратимся к уравнениям (66). Пусть выполняется условие  $M = 1/R$ . Тогда уравнения (66) примут вид

$$\ddot{\alpha} - \frac{d}{dt}(u_3\beta) + \frac{g_1}{R}\alpha = -u_2u_3;$$

$$\ddot{\beta} + \frac{d}{dt}(u_3\alpha) + \frac{g_1}{R}\beta = u_1u_3.$$

Пренебрежем для простоты выражениями  $\frac{d}{dt}(u_3\beta)$  и  $\frac{d}{dt}(u_3\alpha)$ . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{g_1}{R} \alpha &= -u_2 u_3; \\ \ddot{\beta} + \frac{g_1}{R} \beta &= u_1 u_3. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Рассмотрим поведение системы на неподвижном основании. В этом случае

$$u_1 = 0; \quad u_2 = \omega \cos \varphi; \quad u_3 = \omega \sin \varphi; \quad g_1 = g - R\omega^2 \cos^2 \varphi.$$

Величина  $g_1$  представляет собой ускорение силы тяжести. Уравнения (67) для неподвижного основания примут вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{g_1}{R} \alpha &= -\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi; \\ \ddot{\beta} + \frac{g_1}{R} \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Эти уравнения определяют колебания площадки с периодом М. Шуллера  $T = 2\pi \sqrt{R/g_1}$  около  $\alpha_r = -\frac{R\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g_1}$ ;  $\beta_r = 0$ , как около положения равновесия.

Отсюда следует, что площадка при каком-либо случайном возмущении будет совершать колебания не около плоскости геоцентрического горизонта, а около плоскости истинного горизонта.

Рассмотрим теперь поведение системы на подвижном основании. Примем, что  $g_1 \approx \text{const}$ . Тогда уравнения (67) будут иметь решения

$$\alpha = C_1 \cos vt + C_2 \sin vt - \frac{1}{v} \int_0^t \sin v(t-\tau) u_2(\tau) u_3(\tau) d\tau;$$

$$\beta = C_3 \cos vt + C_4 \sin vt + \frac{1}{v} \int_0^t \sin v(t-\tau) u_1(\tau) u_3(\tau) d\tau.$$

Пусть в начальный момент площадка была совмещена с плоскостью истинного горизонта и отпущена без толчка, т. е.

$$\alpha(0) = -\frac{R\omega^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{g_1}; \quad \beta(0) = 0; \quad \dot{\beta}(0) = 0; \quad \dot{\alpha}(0) = 0,$$

где  $\varphi_0$  — широта точки отправления.

Тогда решения наших уравнений примут вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{R\omega^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{g_1} \cos vt - \frac{1}{v} \int_0^t \sin v(t-\tau) u_2(\tau) u_3(\tau) d\tau; \\ \beta &= \frac{1}{v} \int_0^t \sin v(t-\tau) u_1(\tau) u_3(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Из полученных решений видно, что площадка не будет в течение всего времени движения оставаться совмещенной с плоскостью истинного горизонта, а будет совершать какое-то сложное движение. Система, следовательно, не является инвариантной, а возмущается ускорением движущегося объекта.

Посмотрим, как это обстоятельство влияет на точность определения координат движущегося объекта.

Возьмем интегралы, входящие в выражения (69), по частям:

$$\alpha = -\frac{u_2 u_3}{v^2} + \frac{1}{v^2} \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_2 u_3) d\tau;$$

$$\beta = \frac{u_1 u_2}{v^2} - \frac{1}{v^2} \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_1 u_2) d\tau.$$

Подставим значения  $\alpha$  и  $\beta$  в выражения (66а). Тогда получим

$$f_1 = A_1 R \int_0^t dt \int_0^t \dot{u}_2 dt + A_1 R \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_1 u_2) d\tau;$$

$$f_2 = A_1 R \int_0^t dt \int_0^t \dot{u}_1 dt + A_1 R \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_2 u_3) d\tau.$$

Вспомянув, что  $u_1 = -\dot{\varphi}$ ;  $u_2 = (\lambda + \omega) \cos \varphi$ , и принимая  $A_1 = 1/R$ , получим

$$f_1 = \int_0^t (\lambda + \omega) \cos \varphi dt + \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_1 u_2) d\tau;$$

$$f_2 = \varphi - \varphi_0 + \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_2 u_3) d\tau.$$

Выражения для широты и долготы примут вид

$$\varphi = f_2 + \varphi_0 - \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_2 u_3) d\tau;$$

$$\lambda = \int_0^t \frac{df_1}{dt} \cdot \frac{dt}{\cos \varphi} + \lambda_0 - \omega t - \int_0^t \frac{dt}{\cos \varphi} \int_0^t dt \int_0^t \cos (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (u_1 u_2) d\tau.$$

Из этих выражений видно, что широта и долгота определяются с погрешностями

$$|\Delta \varphi| = \frac{1}{R} \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (R u_2 u_3) d\tau;$$

$$|\Delta \lambda| = \frac{1}{R} \int_0^t \frac{dt}{\cos \varphi} \int_0^t dt \int_0^t \cos \nu (t - \tau) \frac{d}{d\tau} (R u_1 u_2) d\tau.$$

Итак, погрешность в определении координат движущегося объекта зависит от производных от составляющих ускорений  $Ru_1u_3$  и  $Ru_2u_3$ , в то время как погрешность определения горизонта зависит от самих составляющих. Если, например, можно выполнить маневр, при котором  $u_1u_3 = \text{const}$  и  $u_2u_3 = \text{const}$ , то широта и долгота определяются точно, несмотря на то что площадка не занимает горизонтального положения.

Вместе с тем очевидно, что погрешности определения координат и погрешности определения горизонта можно ликвидировать при  $u_3 = 0$ . Поэтому целесообразно стабилизировать площадку в азимуте относительно инерциального пространства.

Эта идея впервые была предложена А. Ю. Ишлинским [7].

Для стабилизации площадки в азимуте обычно применяют гироскопы, которые называют азимутальными гироскопами. Поэтому система, в которой площадка стабилизируется таким образом, называется полуаналитической системой с азимутальными гироскопами.

### § 20. Полуаналитическая система с азимутальными гироскопами

В полуаналитической системе с азимутальными гироскопами площадка подвешена в трехосном кардановом подвесе и на ней установлена еще одна пара гироскопов (рис. 38).<sup>1</sup>

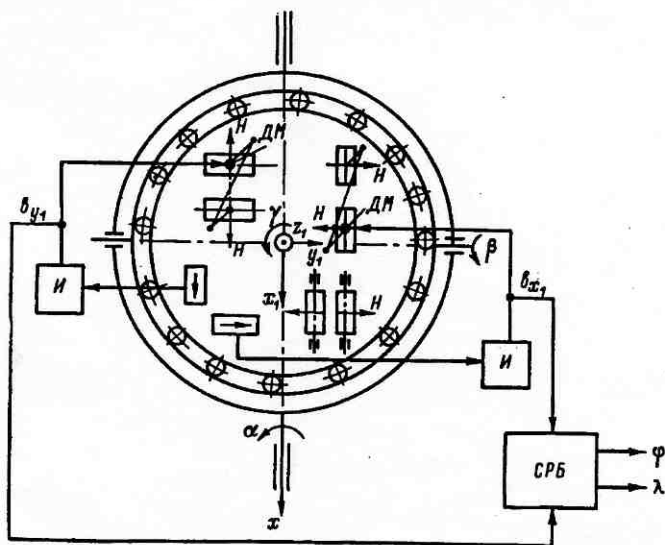


Рис. 38. Схема полуаналитической системы навигации с азимутальными гироскопами

<sup>1</sup> Эта система работает по принципу силовой стабилизации. Система стабилизации на рисунке не показана.

Составим уравнения движения системы. Для этого определим положение площадки углом  $\alpha$  поворота вокруг оси  $x$ , углом  $\beta$  поворота вокруг линии узлов и углом  $\gamma$  поворота вокруг оси  $z_1$  (рис. 39).

Значения направляющих косинусов этих углов представлены в табл. 11.

Найдем проекции мгновенной угловой скорости трехгранника  $x_1y_1z_1$  на оси  $x_1, y_1, z_1$ :

$$\omega_{x_1} = (\dot{\alpha} \cos \beta + u_1 \cos \beta + u_2 \sin \alpha \sin \beta - u_3 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \\ + (\dot{\beta} + u_2 \cos \alpha + u_3 \sin \alpha) \sin \gamma;$$

$$\omega_{y_1} = -(\dot{\alpha} \cos \beta + u_1 \cos \beta + u_2 \sin \alpha \sin \beta - u_3 \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma + \\ + (\dot{\beta} + u_2 \cos \alpha + u_3 \sin \alpha) \cos \gamma;$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta + u_1 \sin \beta - u_2 \sin \alpha \cos \beta + u_3 \cos \alpha \cos \beta.$$

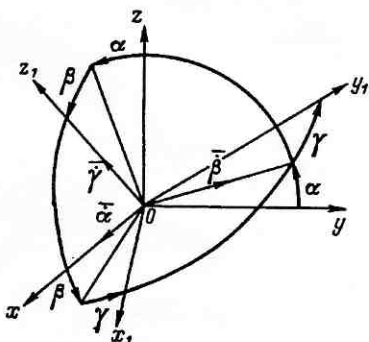


Рис. 39. Углы, определяющие положение платформы, стабилизированной в азимуте, относительно трехгранника Дарбу

Будем считать углы  $\alpha$  и  $\beta$  величинами малыми. Тогда

$$\omega_{x_1} = (\dot{\alpha} + u_1 - u_3 \beta) \cos \gamma + \\ + (\dot{\beta} + u_2 + u_3 \alpha) \sin \gamma;$$

$$\omega_{y_1} = -(\dot{\alpha} + u_1 - u_3 \beta) \sin \gamma + \\ + (\dot{\beta} + u_2 + u_3 \alpha) \cos \gamma;$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\gamma} + u_1 \beta - u_2 \alpha + u_3.$$

Для удобства записи введем обозначения

$$p = \dot{\alpha} + u_1 - u_3 \beta; \quad q = \dot{\beta} + u_2 + u_3 \alpha.$$

Тогда выражения для проекций мгновенной угловой скорости трехгранника  $x_1y_1z_1$  на оси  $x_1$  и  $y_1$  примут вид

$$\omega_{x_1} = p \cos \gamma + q \sin \gamma; \quad \omega_{y_1} = -p \sin \gamma + q \cos \gamma.$$

Таблица 11

	$x$	$y$	$z$
$x_1$	$\cos \beta \cos \gamma$	$\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta$	$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta$
$y_1$	$-\cos \beta \sin \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta$	$\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta$
$z_1$	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

Уравнения движения системы запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} 2H\omega_{x_1} &= -M_1; \\ 2H\omega_{y_1} &= M_2; \\ 2H\omega_{z_1} &= M_3, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

где  $M_1, M_2, M_3$  — моменты, действующие вокруг осей прецессии гироскопов.

Вокруг осей прецессии гироскопов (кроме азимутальных) действуют моменты, развиваемые датчиками моментов,

$$M_1 = A \int_0^t a_{y_1} dt; \quad M_2 = A \int_0^t a_{x_1} dt,$$

где  $A$  — коэффициент пропорциональности;  $a_{x_1}$  и  $a_{y_1}$  — показания акселерометров.

Будем считать, что к осям прецессии азимутальных гироскопов моменты внешних сил не приложены ( $M_3 = 0$ ). Уравнения движения (70) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= -M \int_0^t a_{y_1} dt; \\ \omega_{y_1} &= M \int_0^t a_{x_1} dt; \\ \omega_{z_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где  $M = A/2H$  — масштаб интегрирующей цепочки.

Показания акселерометра будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= (\omega_1 \cos \beta + \omega_2 \sin \alpha \sin \beta - g_1 \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma + \\ &\quad + (\omega_2 \cos \alpha + g_1 \sin \alpha) \sin \gamma; \\ a_{y_1} &= -(\omega_1 \cos \beta + \omega_2 \sin \alpha \sin \beta - g_1 \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma + \\ &\quad + (\omega_2 \cos \alpha + g_1 \sin \alpha) \cos \gamma. \end{aligned}$$

При малых углах  $\alpha$  и  $\beta$

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= (\omega_1 - g_1 \beta) \cos \gamma + (\omega_2 + g_1 \alpha) \sin \gamma; \\ a_{y_1} &= -(\omega_1 - g_1 \beta) \sin \gamma + (\omega_2 + g_1 \alpha) \cos \gamma. \end{aligned}$$

Уравнения (71) окончательно запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} p \cos \gamma + q \sin \gamma &= M \int_0^t [(\omega_1 - g_1 \beta) \sin \gamma - (\omega_2 + g_1 \alpha) \cos \gamma] dt; \\ -p \sin \gamma + q \cos \gamma &= M \int_0^t [(\omega_1 - g_1 \beta) \cos \gamma + (\omega_2 + g_1 \alpha) \sin \gamma] dt; \\ \dot{\gamma} + u_3 \beta - u_2 \alpha + u_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Продифференцировав первые два уравнения системы (72) один раз, получим

$$\begin{aligned} \dot{p} \cos \gamma + \dot{q} \sin \gamma - (p \sin \gamma - q \cos \gamma) \dot{\gamma} &= M[(\omega_1 - g_1 \beta) \sin \gamma - (\omega_2 + g_1 \alpha) \cos \gamma]; \\ -\dot{p} \sin \gamma + \dot{q} \cos \gamma - (p \cos \gamma + q \sin \gamma) \dot{\gamma} &= \\ &= M[(\omega_1 - g_1 \beta) \cos \gamma + (\omega_2 + g_1 \alpha) \sin \gamma]. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно привести к виду

$$\dot{p} + q\dot{\gamma} = -M(\omega_2 + g_1 \alpha); \quad \dot{q} - p\dot{\gamma} = M(\omega_1 - g_1 \beta).$$

Вводя сюда значения  $p$  и  $q$ , а также их производных и используя третье уравнение системы (72), получаем с точностью до малых второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \frac{d}{dt}(u_3 \beta) - u_3 \dot{\beta} - u_1 u_2 \beta + (Mg_1 + u_2^2 - u_3^2) \alpha &= \\ &= (1 - MR)(-\dot{u}_1 + u_2 u_3); \\ \ddot{\beta} + \frac{d}{dt}(u_3 \alpha) + u_3 \dot{\alpha} - u_1 u_2 \alpha + (Mg_1 + u_1^2 - u_3^2) \beta &= \\ &= (MR - 1)(\dot{u}_2 + u_1 u_3). \end{aligned}$$

Если  $M = 1/R$ , то эти уравнения обращаются в однородные

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \frac{d}{dt}(u_3 \beta) - u_3 \dot{\beta} - u_1 \dot{u}_2 \beta + (Mg_1 + u_2^2 - u_3^2) \alpha &= 0; \\ \ddot{\beta} + \frac{d}{dt}(u_3 \alpha) + u_3 \dot{\alpha} - u_1 u_2 \alpha + (Mg_1 + u_1^2 - u_3^2) \beta &= 0. \end{aligned}$$

При нулевых начальных условиях они имеют решения  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ . Отсюда следует, что положением равновесия площадки будет плоскость геоцентрического горизонта. При каком-либо случайном возмущении она будет совершать движение, близкое к колебательному с периодом  $M$ . Шулера.

Чтобы определить координаты движущегося объекта, можно использовать уравнения (72), имея в виду, что правые части первых двух уравнений представляют собой выходные сигналы интеграторов. Обозначим эти сигналы через  $b_{x_1}$ ,  $b_{y_1}$ .

Первые два уравнения системы (72) запишутся в виде

$$p \cos \gamma + q \sin \gamma = b_{y_1}; \quad -p \sin \gamma + q \cos \gamma = b_{x_1}.$$

Если площадка находится точно в плоскости геоцентрического горизонта ( $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ ), то  $p = u_1$  и  $q = u_2$ . И тогда

$$\left. \begin{aligned} u_1 \cos \gamma + u_2 \sin \gamma &= b_{y_1}; \\ -u_1 \sin \gamma + u_2 \cos \gamma &= b_{x_1}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Предположим, что в начальный момент площадка имела географическую ориентацию. Тогда  $u_1 = -\dot{\varphi}$ ,  $u_2 = (\dot{\lambda} + \omega) \cos \varphi$ ,  $u_3 =$



$= (\dot{\lambda} + \omega) \sin \varphi$ . Уравнения (73) и третье уравнение системы (72) примут вид

$$\begin{aligned} -\dot{\varphi} \cos \gamma + (\dot{\lambda} + \omega) \cos \varphi \sin \gamma &= b_{y_1}; \\ \dot{\varphi} \sin \gamma + (\dot{\lambda} + \omega) \cos \varphi \cos \gamma &= b_{x_1}; \\ \dot{\gamma} + (\dot{\lambda} + \omega) \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Разрешим эти уравнения относительно первых производных для удобства их реализации в счетно-решающем устройстве:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= b_{x_1} \sin \gamma - b_{y_1} \cos \gamma; \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{b_{x_1} \cos \gamma + b_{y_1} \sin \gamma}{\cos \varphi} - \omega; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -(b_{x_1} \cos \gamma + b_{y_1} \sin \gamma) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} (74)$$

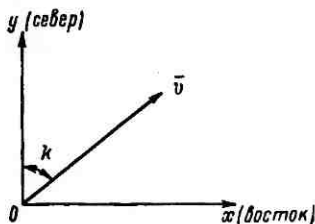


Рис. 40. К определению курса подвижного объекта

Счетно-решающий блок (см. рис. 38) реализует этот алгоритм. С выхода блока снимаются значения широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$ .

Рассмотренная система позволяет определить курс, под которым движется объект (рис. 40).

Находим  $\operatorname{tg} k = v_e/v_N$ , где  $v_e = R \frac{d\lambda}{dt} \cos \varphi$  и  $v_N = R \frac{d\varphi}{dt}$  — восточная и северная составляющие относительной скорости объекта. Таким образом,

$$\operatorname{tg} k = \frac{b_{x_1} \cos \gamma + b_{y_1} \sin \gamma - \omega \cos \varphi}{b_{x_1} \sin \gamma - b_{y_1} \cos \gamma}. \quad (75)$$

Реализация этого алгоритма даст значение курса.

## § 21. Полуаналитическая система с подачей сигналов акселерометров на оси карданова подвеса

В предыдущих двух схемах полуаналитических систем оказывалось воздействие на оси прецессии гироскопов.

Рассмотрим теперь полуаналитическую систему, воздействие в которой осуществляется на оси карданова подвеса. В этой системе на осях карданова подвеса установлены датчики моментов, на которые подаются сигналы акселерометров, как показано на рис. 41. Свободу вращения гироскопов вокруг осей прецессии ограничивают пружины. Таким образом, приведенная схема подобна классической схеме четырехгироскопной вертикали [14, 16].

На осях прецессии гироскопов установлены датчики углов, сигналы которых используются для определения координат движущегося объекта.

Составим уравнения движения системы, изображенной на рис. 41. Рассмотрим движение площадки относительно трехгранника Дарбу  $xuz$ , оси которого ориентированы географически. Это обстоятельство предполагает, что карданов подвес стабилизирован в азимуте так, что ось его внешнего кольца направлена на восток.<sup>1</sup> С площадкой свяжем оси  $x_1, y_1, z_1$  и сориентируем их так, как показано на рис. 41.

Положение осей  $x_1, y_1, z_1$  относительно осей трехгранника Дарбу определим углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Для проекций мгновенной угловой скорости

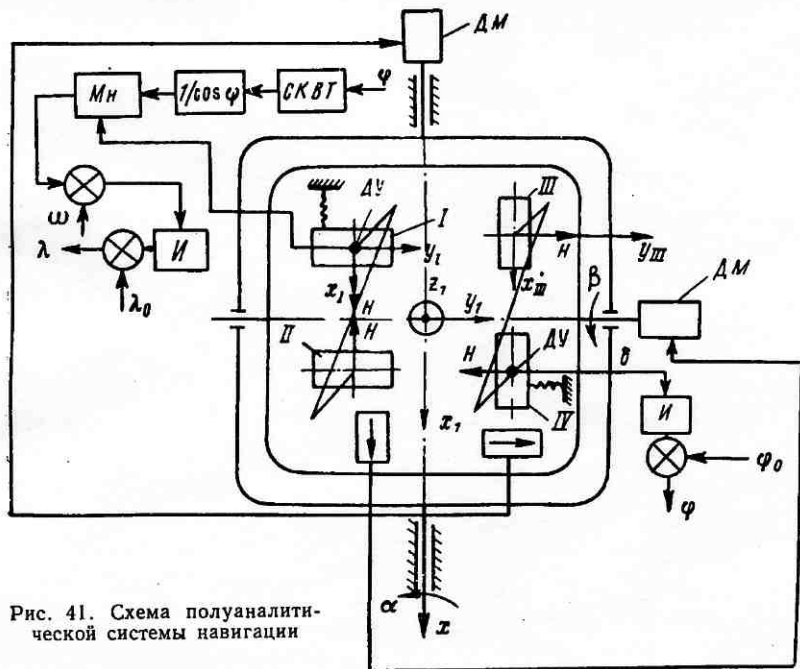


Рис. 41. Схема полуаналитической системы навигации

треугольника  $x_1y_1z_1$  на оси  $x_1, y_1, z_1$  будем иметь следующие выражения:

$$\omega_{x_1} = \dot{\alpha} \cos \beta + u_1 \cos \beta + u_2 \sin \alpha \sin \beta - u_3 \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\omega_{y_1} = \dot{\beta} + u_2 \cos \alpha + u_3 \sin \alpha;$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\alpha} \sin \beta + u_1 \sin \beta - u_2 \sin \alpha \cos \beta + u_3 \cos \alpha \cos \beta.$$

С первым гироскопом свяжем оси  $x_1, y_1, z_1$  и сориентируем их так, чтобы ось  $x_1$  была направлена по оси собственного вращения.

<sup>1</sup> Для географической ориентации подвеса необходимо предусмотреть третье кольцо, дающее возможность подвесу поворачиваться относительно палубы (на рис. 41 не показано).

гироскопа, ось  $z_1$  — по оси прецессии, ось  $y_1$  — перпендикулярно осям  $x_1$  и  $z_1$ . Положение этих осей относительно осей  $x_1, y_1, z_1$ , скрепленных с площадкой, определим углом  $\gamma$  поворота вокруг оси прецессии (рис. 42).

В дальнейшем предполагаем в уравнениях движения отбросить нутационные члены. Поэтому используем лишь проекцию мгновенной угловой скорости на ось собственного вращения гироскопа I:

$$p_1 = \dot{\varphi}_1 + \omega_{x_1} \cos \gamma + \omega_{y_1} \sin \gamma.$$

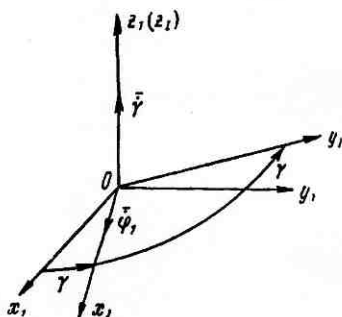


Рис. 42. Расположение осей, связанных с гироскопом I полуаналитической системы навигации, относительно платформы

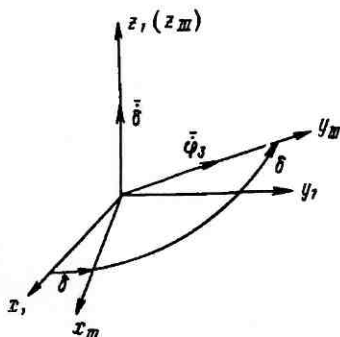


Рис. 43. Расположение осей, связанных с гироскопом III полуаналитической системы навигации, относительно платформы

Для второго гироскопа, учитывая наличие антипараллелограмма, получим

$$p_{II} = -\dot{\varphi}_2 + \omega_{x_1} \cos \gamma - \omega_{y_1} \sin \gamma.$$

С третьим гироскопом свяжем оси  $x_{III}, y_{III}, z_{III}$  и направим ось  $y_{III}$  по оси собственного вращения гироскопа, ось  $z_{III}$  по оси прецессии, ось  $x_{III}$  перпендикулярно осям  $y_{III}$  и  $z_{III}$ . Положение этих осей относительно осей  $x_1, y_1, z_1$  определим углом  $\delta$  поворота вокруг оси прецессии (рис. 43)

Проекция угловой скорости на ось собственного вращения гироскопа будет равна

$$q_{III} = \dot{\varphi}_3 - \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta.$$

Для четвертого гироскопа, учитывая действие антипараллелограмма, можно написать

$$q_{IV} = -\dot{\varphi}_4 + \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta.$$

В последних формулах  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$  и  $\dot{\varphi}_4$  — угловые скорости собственного вращения соответствующих гироскопов.

Кинетическая энергия системы выразится в виде

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} C (\dot{\varphi}_1 + \omega_{x_1} \cos \gamma + \omega_{y_1} \sin \gamma)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} C (-\dot{\varphi}_2 + \omega_{x_1} \cos \gamma - \omega_{y_1} \sin \gamma)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} C (\dot{\varphi}_3 - \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2} C (-\dot{\varphi}_4 + \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta)^2,
 \end{aligned}$$

где  $C$  — осевые моменты инерции гироскопов (одинаковые для всех гироскопов).

Чтобы составить уравнения движения системы, воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В качестве обобщенных координат примем углы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Находим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= C (\dot{\varphi}_1 + \omega_{x_1} \cos \gamma + \omega_{y_1} \sin \gamma); \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} &= -C (-\dot{\varphi}_2 + \omega_{x_1} \cos \gamma - \omega_{y_1} \sin \gamma); \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} &= C (\dot{\varphi}_3 - \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta); \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} &= -C (-\dot{\varphi}_4 + \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta).
 \end{aligned}$$

Примем, что моменты сил сопротивления на осях роторов гироскопов уравновешиваются активными моментами двигателей. Поэтому можно считать, что обобщенные силы, соответствующие координатам  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ , равны нулю. Тогда получим четыре первых интеграла дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned}
 C (\dot{\varphi}_1 + \omega_{x_1} \cos \gamma + \omega_{y_1} \sin \gamma) &= H_1 = \text{const}; \\
 -C (-\dot{\varphi}_2 + \omega_{x_1} \cos \gamma - \omega_{y_1} \sin \gamma) &= H_2 = \text{const}; \\
 C (\dot{\varphi}_3 - \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta) &= H_3 = \text{const}; \\
 -C (-\dot{\varphi}_4 + \omega_{x_1} \sin \delta + \omega_{y_1} \cos \delta) &= H_4 = \text{const}.
 \end{aligned}$$

Для быстровращающихся гироскопов можно принять  $C\dot{\varphi}_1 = H_1$ ,  $C\dot{\varphi}_2 = H_2$ ,  $C\dot{\varphi}_3 = H_3$ ,  $C\dot{\varphi}_4 = H_4$ .

Будем считать, что угловые скорости собственного вращения гироскопов по модулю одинаковы, т. е.  $|H_1| = |H_2| = |H_3| = |H_4| = H$ .

Выполнив операцию дифференцирования и считая углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  величинами малыми, получим уравнения движения системы в виде

$$2H(\dot{\delta} + u_3\dot{\gamma}) = -Q_\alpha; \quad 2H(\dot{\gamma} - u_3\dot{\delta}) = Q_\beta; \quad 2H(\dot{\beta} + u_2 + u_3\dot{\alpha}) = -Q_\gamma;$$

$$2H(\dot{\alpha} + u_1 - u_3\dot{\beta}) = Q_\delta.$$

Определим обобщенные силы. Для этого напишем выражение элементарной работы сил на виртуальных перемещениях

$$\delta A = M_x \delta\alpha + M_{y_1} \delta\beta + M_{z_1} \delta\gamma + M_{z_{IV}} \delta\delta.$$

Отсюда  $Q_\alpha = M_x$ ,  $Q_\beta = M_{y_1}$ ;  $Q_\gamma = M_{z_1}$ ,  $Q_\delta = M_{z_{IV}}$ .

При малых углах  $\alpha$  и  $\beta$  можно считать, что  $M_x = M_{x_1}$ .

Уравнения движения системы запишутся в виде

$$2H(\dot{\delta} + u_3\dot{\gamma}) = -M_{x_1}; \quad 2H(\dot{\gamma} - u_3\dot{\delta}) = M_{y_1};$$

$$2H(\dot{\beta} + u_2 + u_3\dot{\alpha}) = -M_{z_1}; \quad 2H(\dot{\alpha} + u_1 - u_3\dot{\beta}) = M_{z_{IV}}.$$

Вокруг осей карданова подвеса действуют моменты, развиваемые датчиками моментов. Эти датчики получают сигналы от акселерометров, оси чувствительности которых параллельны осям  $x_1$  и  $y_1$ . Считая, что при малых углах  $\alpha$  и  $\beta$  датчики моментов действуют вокруг осей  $x_1$  и  $y_1$ , можно моменты  $M_{x_1}$  и  $M_{y_1}$  выразить в виде

$$M_{x_1} = -A(\omega_2 + g_1\alpha); \quad M_{y_1} = A(\omega_1 - g_1\beta),$$

где  $A$  — коэффициент пропорциональности, учитывающий масштаб акселерометров и крутизну характеристики датчиков моментов.

Знаки моментов  $M_{x_1}$  и  $M_{y_1}$  определяются надлежащим включением датчиков моментов.

Вокруг осей прецессии действуют только моменты, развиваемые пружинами и пропорциональные углам  $\gamma$  и  $\delta$ . Следовательно,  $M_{z_1} = -k\gamma$  и  $M_{z_{IV}} = -k\delta$ , где  $k$  — коэффициент жесткости пружины, т. е. момент, соответствующий повороту гироскопа вокруг оси прецессии на один радиан.

Уравнения движения системы окончательно выразим в виде

$$\dot{\delta} + u_3\dot{\gamma} - ag_1\alpha = a\omega_2; \quad \dot{\gamma} - u_3\dot{\delta} + ag_1\beta = a\omega_1;$$

$$\dot{\beta} + u_3\dot{\alpha} - c\gamma = -u_2; \quad \dot{\alpha} - u_3\dot{\beta} + c\delta = -u_1.$$

Здесь введены обозначения  $A/2H = a$  и  $k/2H = c$ . Введем комплексные переменные  $x = \alpha + i\beta$ ;  $y = \gamma + i\delta$ ;  $u = u_1 + iu_2$ .

Тогда уравнения движения системы после введения сюда значений  $\omega_1$  и  $\omega_2$  примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} + iu_3y - iag_1x &= -iaR(\dot{u} - iu_3u); \\ \dot{x} + iu_3x - icy &= -u. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Покажем, что подбором параметров эту систему можно сделать инвариантной по отношению к ускорению движущегося объекта.

Введем новую переменную  $z = y + iu/c$ . Переходя в уравнениях (76) к этой переменной, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} + iu_3z - iag_1x &= i\left(\frac{1}{c} - aR\right)(\dot{u} - iu_3u); \\ \dot{x} + iu_3x - icz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Пусть выполняется условие  $1/c = aR$  или

$$\frac{Ak}{4H^2} = \frac{1}{R}. \quad (78)$$

В этом случае уравнения (77) становятся однородными:

$$\dot{z} + iu_3z - iag_1x = 0; \quad \dot{x} + iu_3x - icz = 0.$$

При нулевых начальных условиях эти уравнения имеют решения  $x = 0$ ,  $z = 0$ .

После перехода к переменной  $y$  и разделения вещественной и мнимой частей

$$\alpha = 0; \quad \beta = 0; \quad \gamma = u_2/c; \quad \delta = -u_1/c. \quad (79)$$

Так как  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$ , то площадка, несущая гироскопы и акселерометры, не будет возмущаться ускорением движущегося объекта и в течение всего времени движения останется в плоскости геоцентрического горизонта.

Условие (78) следует рассматривать как условие инвариантности системы.

Гироскопы будут отклонены на величины, определяемые формулами (79).

Эффект изменения ускорения основания проявляется в изменении величин  $\gamma$  и  $\delta$  соответственно новым значениям скорости движения основания, причем в новое положение гироскопы будут переходить аperiодически без возбуждения свободных колебаний.

Это обстоятельство позволяет определить широту и долготу подвижного объекта, что показано ниже.

При географической ориентации подвеса

$$u_1 = -\dot{\varphi}; \quad u_2 = (\dot{\lambda} + \omega) \cos \varphi.$$

Значит

$$\gamma = \frac{(\dot{\lambda} + \omega) \cos \varphi}{c}; \quad \delta = \frac{\dot{\varphi}}{c}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= c \int_0^t \delta dt + \varphi_0; \\ \lambda &= c \int_0^t \left( \frac{\gamma}{\cos \varphi} - \omega \right) dt + \lambda_0, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

где  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  — начальные значения широты и долготы.

Значения углов  $\delta$  и  $\gamma$  списываются с помощью датчиков углов, установленных на осях прецессии соответствующих гироскопов.

Схема реализации алгоритмов (80) показана на рис. 41.

## ГЛАВА IV. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ СИСТЕМ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Теория систем инерциальной навигации, изложенная выше, предполагала точное функционирование элементов систем: гироскопов, акселерометров, интеграторов и т. д. В действительности же они работают с некоторыми погрешностями, что, естественно, сказывается на работе системы в целом. С выхода системы в результате этого снимаются неточные значения параметров движения объекта.

Настоящая глава посвящена исследованию влияния этих погрешностей на точность работы различных типов систем инерциальной навигации, причем имеется в виду только детерминированный характер погрешностей.

### § 22. Влияние уходов стабилизированной платформы на точность определения горизонта в геометрической системе инерциальной навигации

Стабилизированная платформа, используемая в системах инерциальной навигации, под влиянием моментов вредных сил уходит от заданного положения. Это обстоятельство порождает погрешности систем как в построении горизонтальной площадки, так и в выработке координат движущегося объекта.

Исследуем влияние уходов стабилизированной платформы на точность определения горизонта в геометрической системе инерциальной навигации. Для простоты анализа будем рассматривать простейшее движение объекта по дуге большого круга невращающейся сферы.

Пусть стабилизированная платформа повернулась относительно неподвижного пространства против часовой стрелки на угол  $\varepsilon$  (см. рис. 11). Угол между построителем вертикали и стабилизированной платформой  $\beta$  теперь будет  $\mu = \varphi + \alpha - \varepsilon$  (см. § 3).

В соответствии с принципом работы геометрической системы инерциальной навигации этот угол должен быть пропорционален двойному интегралу от показаний акселерометра, т. е.

$$\varphi + \alpha - \varepsilon = M \int_0^t dt \int_0^t a dt, \quad (81)$$

где  $\alpha$  — угол между построителем вертикали и плоскостью геоцентрического горизонта (погрешность определения горизонта);  $a$  — показания акселерометра;  $\varphi$  — угловое расстояние, пройденное объектом.

Введем в выражение (81) показания акселерометра:

$$\varphi + \alpha - \varepsilon = M \int_0^t dt \int_0^t [R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2) \alpha] dt.$$

После двукратного дифференцирования получим

$$\ddot{\alpha} + M(g - R\dot{\varphi}^2)\alpha = (MR - 1)\ddot{\varphi} + \ddot{\varepsilon}.$$

Пусть выполняется условие  $M = 1/R$ . Тогда

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = \ddot{\varepsilon}.$$

Это уравнение уже не является однородным. Поэтому построитель вертикали не будет лежать в плоскости горизонта, а составит с ней какой-то угол, представляющий собой погрешность определения горизонта.

Примем, что  $R\dot{\varphi}^2/g \ll 1$ . Введя прежнее обозначение  $v^2 = g/R$ , получим

$$\ddot{\alpha} + v^2 \alpha = \ddot{\varepsilon}. \quad (82)$$

Отсюда видно, что погрешность определения горизонта зависит от характера ухода стабилизированной платформы. Если она уходит с угловой скоростью  $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ , то уравнение (82) будет однородным и при нулевых начальных условиях его решением будет  $\alpha = 0$ . Построитель вертикали будет находиться в плоскости горизонта, т. е. он будет инвариантен по отношению к ускорению движущегося объекта, как и в том случае, когда стабилизированная платформа сохраняла свое положение неизменным в пространстве.

Однако практически уход стабилизированной платформы не может начаться с постоянной угловой скоростью, эта скорость набирается в течение какого-то промежутка времени. Поэтому более реально сделать следующее предположение о характере ухода стабилизированной платформы.

Пусть платформа по-прежнему уходит с постоянной угловой скоростью, но эту скорость она набирает с постоянным угловым ускорением  $b$  в течение промежутка времени  $\tau$ , малого по сравнению с четвертью периода  $M$ . Шулера.

Тогда характер изменения углового ускорения определится графиком, изображенным на рис. 44.



Математически закон изменения углового ускорения можно записать следующим образом:

$$\ddot{\varepsilon} = \begin{cases} b & \text{при } t < \tau; \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

В операторном виде угловое ускорение будет равно

$$\ddot{\varepsilon}(p) = b(1 - e^{-p\tau}).$$

Операторный вид угла  $\varepsilon$  при нулевых начальных значениях будет следующим:

$$\varepsilon(p) = \frac{b}{p^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

Переходя к оригиналу, найдем закон изменения угла  $\varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(t)_{t < \tau} &= \frac{bt^2}{2}; \\ \varepsilon(t)_{t > \tau} &= \frac{bt^2}{2} - \frac{b(t-\tau)^2}{2} = b\tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Перейдем к интегрированию уравнения (82). При нулевых начальных значениях

$$\alpha(p) = \frac{b(1 - e^{-p\tau})}{p^2 + \nu^2}. \quad (84)$$

Переходя к оригиналу и пользуясь теоремой запаздывания, получим

$$\alpha(t)_{t < \tau} = \frac{b}{\nu^2} (1 - \cos \nu t);$$

$$\alpha(t)_{t > \tau} = \frac{b}{\nu^2} [\cos \nu(t - \tau) - \cos \nu t].$$

Так как в данном случае наиболее важно изменение угла  $\alpha$  при  $t > \tau$ , т. е. в течение промежутка времени, когда стабилизированная платформа уходит с постоянной угловой скоростью, то сделаем преобразование последнего выражения и для простоты записи опустим индекс. Тогда

$$\alpha = \frac{2b}{\nu^2} \sin \frac{1}{2} \nu \tau \sin \nu \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Время  $\tau$  считаем малым по сравнению с четвертью периода  $M$ . Шулера, поэтому можно принять  $\sin \frac{1}{2} \nu \tau \approx \frac{1}{2} \nu \tau$ , и тогда

$$\alpha = \frac{b\tau}{\nu} \sin \nu \left( t - \frac{\tau}{2} \right). \quad (85)$$

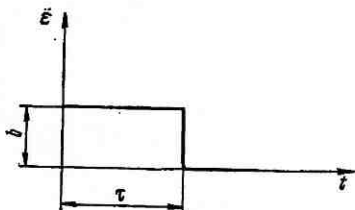


Рис. 44. Характер изменения углового ускорения стабилизированной платформы

Замечая, что  $b\tau = \dot{\epsilon}$ , где  $\dot{\epsilon}$  — угловая скорость ухода стабилизированной платформы, можно написать

$$\alpha = \frac{\dot{\epsilon}}{\nu} \sin \nu \left( t - \frac{\tau}{2} \right)$$

или

$$\alpha = \frac{R\dot{\epsilon}}{\sqrt{Rg}} \sin \nu \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Из полученного решения видно, что уходы стабилизированной платформы вызывают колебания построителя вертикали около плоскости горизонта с периодом  $M$ . Шулера. Первое максимальное отклонение построителя вертикали наступает примерно через четверть периода (при малом  $\tau$ ) от начала движения и определяется выражением

$$\alpha_{\max} = \frac{R\dot{\epsilon}}{\sqrt{Rg}}, \quad (86)$$

где  $\sqrt{Rg}$  — первая космическая скорость.

Таким образом, отклонение построителя вертикали имеет характер баллистической девиации, т. е. такой девиации, которая возникает после того, как прекращается действие возмущения.

Скорость ухода стабилизированной платформы обычно измеряют угловыми минутами в минуту времени. Поэтому формулу (86) целесообразно привести к виду

$$\alpha_{\max} = \frac{\dot{\epsilon}}{\omega} \cdot \frac{R\omega}{\sqrt{Rg}},$$

где  $\omega$  — угловая скорость суточного вращения Земли.

Принимая  $R\omega = 450$  м/сек,  $\sqrt{Rg} \approx 7900$  м/сек и имея в виду, что  $\omega = 15$  угл. мин/мин, получим  $\alpha_{\max} = 3,8 \cdot 10^{-3} \dot{\epsilon}$  рад.

Чтобы  $\alpha_{\max}$  получить сразу в минутах дуги, надо этой формуле придать окончательный вид:

$$\alpha_{\max} = 13,7\dot{\epsilon} \text{ угл. мин.} \quad (87)$$

Итак, формула (87) дает возможность определить максимальное отклонение построителя вертикали от плоскости горизонта в угловых минутах, если скорость ухода стабилизированной платформы измеряется угловыми минутами в минуту времени.

Если, например, стабилизированная платформа уходит со скоростью  $\dot{\epsilon} = 1$  угл. мин/мин, то максимальное отклонение построителя вертикали составит 13,7'.

Установим значение погрешности определения горизонта построителем вертикали, когда система инерциальной навигации функционирует в течение промежутка времени, малого по сравнению с четвертью периода  $M$ . Шулера.

Для малого промежутка времени функционирования системы можно считать, что  $\sin \nu (t - \tau/2) \approx \nu (t - \tau/2)$ . Формула (85) при-

мет вид

$$\alpha = b\tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Имея в виду выражения (83), находим

$$\alpha = \varepsilon. \quad (88)$$

Следовательно, для малого промежутка времени погрешность определения горизонта построителем вертикали равна именно тому углу, на который уйдет стабилизированная платформа за время функционирования системы инерциальной навигации, т. е. построитель вертикали отклонится от плоскости горизонта на такой же угол, на который отклонится стабилизированная платформа от заданного положения, причем стабилизированная платформа и построитель вертикали отклонятся в одну и ту же сторону.

Формулу (88) можно использовать для более продолжительного промежутка времени, но все же меньшего, чем четверть периода М. Шулера. Для этого следует принять

$$\sin v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \approx v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - \frac{v^3 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^3}{6}.$$

Тогда формула (85) примет вид

$$\alpha = b\tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - \frac{b\tau v^3 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^3}{6}$$

или

$$\alpha = \varepsilon - \varepsilon \frac{v^2 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2}{6}.$$

Если пренебречь величиной  $\tau/2$ , как малой по сравнению с  $t$ , то получим окончательно

$$\alpha = \varepsilon \left( 1 - \frac{v^2 t^2}{6} \right). \quad (89)$$

В соответствии с точностью разложения синуса формула (88) дает погрешность вычисления угла  $\alpha$ , равную 10% при продолжительности функционирования  $t \approx 10$  мин, а формула (89) даст ту же погрешность при продолжительности функционирования системы инерциальной навигации  $t \approx 20$  мин.

### § 23. Влияние уходов стабилизированной платформы на точность определения местоположения движущегося объекта

Как показано выше (см. § 3), угол  $\varphi$ , определяющий местоположение объекта, или путь  $S = R\varphi$ , пройденный объектом, можно определить двояким образом: или измерением угла между стабилизированной платформой и построителем вертикали, или

списанием выходного сигнала вторичного интегратора. В обоих случаях при точном функционировании элементов системы получается точное значение угла  $\varphi$ .

Уходы стабилизированной платформы от заданного положения должны, естественно, вызвать погрешность определения угла  $\varphi$ . Эта погрешность имеет сложный характер, так как она вызывается собственно уходом стабилизированной платформы и погрешностью определения горизонта построителем вертикали.

Рассмотрим случай, когда угол  $\varphi$  определяется измерением угла  $\mu$  между стабилизированной платформой и построителем вертикали (см. рис. 11).

Угол  $\mu$  определяется выражением  $\mu = \varphi + \alpha - \varepsilon$ . Если  $\alpha = 0$  и  $\varepsilon = 0$ , то  $\mu = \varphi$ . Следовательно, разность  $\Delta\varphi = \mu - \varphi$  можно считать абсолютной погрешностью угла  $\varphi$  или погрешностью местоположения объекта. Тогда можно написать  $\Delta\varphi = \alpha - \varepsilon$ . Введем сюда погрешность определения горизонта  $\alpha$ , определяемую формулой (85). Получим

$$\Delta\varphi = \frac{b\tau}{v} \sin v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - \varepsilon. \quad (90)$$

Подставим в это выражение значение угла  $\varepsilon$ , определяемое второй формулой (83):

$$\Delta\varphi = b\tau \left[ \frac{1}{v} \sin v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right]. \quad (91)$$

Пренебрежем в уравнениях (90) и (91) величиной  $\tau/2$ , как малой по сравнению с  $t$ .

Тогда

$$\Delta\varphi = \frac{b\tau}{v} \sin vt - \varepsilon; \quad (92)$$

$$\Delta\varphi = b\tau \left( \frac{1}{v} \sin vt - t \right). \quad (93)$$

Из последнего уравнения (93) видно, что погрешность местоположения объекта имеет характер непрерывно возрастающей величины, на которую накладываются колебания, совершающиеся с периодом  $M$ . Шулера. Погрешность местоположения, таким образом, накапливается со временем.

Из уравнения (92) следует, что в течение первого полупериода ( $t \approx 42$  мин) погрешность местоположения по абсолютному значению меньше угла  $\varepsilon$ , на который стабилизированная платформа уходит за это время. В течение второго полупериода погрешность местоположения по абсолютному значению больше угла  $\varepsilon$ , в течение следующего — она опять меньше угла  $\varepsilon$ , и т. д. Однако по мере возрастания времени величина  $b\tau \sin vt/v$  теряет свое влияние на погрешность. В частности, через промежуток времени  $t = 3\pi/2v = 3T/4$  ( $\approx 60$  мин) от начала движения, что следует из уравнения (93), величина  $1/v$  будет в 4,7 раза меньше  $t$ , а через промежуток времени  $t = 5T/4$  ( $\approx 100$  мин) величина  $1/v$  будет уже в 6,8 раза меньше  $t$ , и т. д.

Вышеизложенное позволяет утверждать, что при достаточно длительном функционировании системы инерциальной навигации (по крайней мере, длительнее одного периода  $T = 84,4$  мин) погрешность местоположения примерно равна углу  $\varepsilon$ , на который уходит стабилизированная платформа за это время.

Для малого промежутка времени, как указано выше, погрешность местоположения будет меньше угла  $\varepsilon$ , причем она будет снижаться по мере уменьшения продолжительности функционирования системы инерциальной навигации.

Пусть система инерциальной навигации функционирует в течение такого промежутка времени, что можно принять

$$\sin v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \approx v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - \frac{v^3 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^3}{6}.$$

Тогда уравнение (91) примет вид

$$|\Delta\varphi| = \frac{b\tau v^2 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^3}{6}$$

или в соответствии с уравнением (83)

$$\Delta\varphi = \varepsilon \frac{v^2 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2}{6}.$$

Пренебрегая, как и раньше, величиной  $\tau/2$ , получаем

$$\Delta\varphi = \varepsilon \frac{v^2 t^2}{6}. \quad (94)$$

Пусть  $vt = \pi/4$ , что соответствует функционированию системы в течение примерно 10 мин. В этом случае  $\Delta\varphi \approx 0,1\varepsilon$ . Ошибка в определении пути, пройденного объектом, которая равна  $\Delta S = R\Delta\varphi = 0,1R\varepsilon$ , при скорости ухода стабилизированной платформы в 1 угл. мин/мин составит всего 1,8 км.

При функционировании системы в течение 15 мин  $\Delta\varphi \approx 0,2\varepsilon$  и  $\Delta S \approx 0,2R\varepsilon$ , а при  $\dot{\varepsilon} = 1$  угл. мин/мин  $\Delta S = 3,6$  км.

Формуле (94) можно придать несколько иной вид:

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{gt^2}{6} \quad \text{или} \\ \Delta S = \varepsilon \frac{gt^2}{6}. \quad (94a)$$

Пусть теперь для определения угла  $\varphi$  используется выходной сигнал вторичного интегратора.

В соответствии с формулой (14a) имеем

$$S = RM \int_0^t dt \int_0^t [R\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2) \alpha] dt.$$

Пусть  $M = 1/R$ . Пренебрегая, как и раньше, величиной  $R\varphi^2$ , как малой по сравнению с  $g$ , получаем

$$S = R\varphi - g \int_0^t dt \int_0^t \alpha dt;$$

$$\Delta\varphi = \frac{S}{R} - \varphi = -v^2 \int_0^t dt \int_0^t \alpha dt.$$

В операторной форме

$$\Delta\varphi(p) = -v^2 \frac{\alpha(p)}{p^2}.$$

Используя выражение (84), получаем

$$\Delta\varphi(p) = -\frac{bv^2(1 - e^{-p\tau})}{p^2(p^2 + v^2)}.$$

Переходя к оригиналам, будем иметь

$$\Delta\varphi(t)_{t < \tau} = b \left[ \frac{1}{v^2} (1 - \cos vt) - \frac{t^2}{2} \right];$$

$$\Delta\varphi(t)_{t > \tau} = b \left\{ \frac{1}{v^2} [\cos v(t - \tau) - \cos vt] - \frac{t^2}{2} + \frac{(t - \tau)^2}{2} \right\}.$$

После преобразований (см. § 22) приведем второе уравнение к виду

$$\Delta\varphi(t) = b\tau \left[ \frac{1}{v} \sin v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) - \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (91), устанавливаем их полную идентичность. Отсюда следует, что уходы стабилизированной платформы дают одну и ту же погрешность местоположения при определении угла  $\varphi$  двумя методами.

Сопоставляя оба метода определения угла  $\varphi$ , можно погрешности местоположения дать двоякую трактовку: с одной стороны, эта погрешность равна погрешности определения угла между стабилизированной платформой и построителем вертикали, с другой — погрешности компенсации ускорения силы земного тяготения.

#### § 24. Влияние неточности интегрирования на точность определения горизонта и определения местоположения движущегося объекта в геометрической системе инерциальной навигации

Уравнение движения геометрической системы инерциальной навигации имеет вид (см. § 3)

$$\varphi + \alpha = M \int_0^t dt \int_0^t \alpha dt. \quad (95)$$

Уточним значение масштаба устройства  $M$ . Величина  $M$  представляет собой произведение масштабов элементов всей цепи, а именно:

произведение масштабов акселерометра, масштабов интеграторов и передаточного отношения кинематической связи, при помощи которой построитель вертикали разворачивается относительно стабилизированной платформы. Вместе с этим, вид уравнения (95) дает возможность рассматривать  $M$  как масштаб интегрирующей цепи или просто как масштаб интегрирования.

Следовательно, можно считать, что погрешность интегрирования сказывается в отклонении масштаба интегрирования от его точного (исчисленного) значения, т. е.  $M = M_0 + \Delta M$ , где  $M_0$  — точное (исчисленное) значение масштаба интегрирования;  $\Delta M$  — погрешность интегрирующей цепи или погрешность интегрирования.

Уравнение (95) после подстановки в него значений  $M$  и  $a$  примет вид

$$\varphi + \alpha = (M_0 + \Delta M) \int_0^t dt \int_0^t [\bar{R}\ddot{\varphi} - (g - R\dot{\varphi}^2)\alpha] dt.$$

После двукратного дифференцирования получим

$$\ddot{\alpha} + (M_0 + \Delta M)(g - R\dot{\varphi}^2)\alpha = [(M_0 + \Delta M)R - 1]\ddot{\varphi}.$$

Примем, что для точного (исчисленного) значения  $M_0$  выполняется условие  $M_0 = 1/R$ . Тогда

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \left(1 + \frac{\Delta M}{M_0}\right) \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = \Delta M R \ddot{\varphi}.$$

Введем относительную погрешность интегрирования  $\delta M = \Delta M/M_0$ . Уравнение движения примет вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} (1 + \delta M) \left(1 - \frac{R\dot{\varphi}^2}{g}\right) \alpha = \delta M \ddot{\varphi}.$$

Пусть по-прежнему  $R\dot{\varphi}^2 \ll g$ . Замечая, что  $\ddot{\varphi} = \dot{v}/R$ , можно написать

$$\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = \frac{\delta M}{R} \dot{v}, \quad (96)$$

где  $k^2 = \frac{g}{R} (1 + \delta M)$ .

Уравнение (96) уже не является однородным. Следовательно, построитель вертикали не будет инвариантным по отношению к ускорению движущегося основания.

Можно сказать, что погрешность интегрирования нарушает условие инвариантности системы.

Зададимся законом изменения ускорения  $\dot{v}$ . Считаем, что объект набирает скорость, двигаясь с постоянным ускорением  $\omega$  в течение времени  $t = \tau$ . Этот участок назовем участком набора скорости. После того как объект набрал нужную скорость, он продолжает двигаться с приобретенной скоростью равномерно. Этот участок назовем участком установившегося движения.

н и я объекта. Тогда ускорение  $\dot{v}$  будет изменяться по следующему закону:

$$\dot{v} = \begin{cases} \omega & \text{при } t < \tau; \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

График изменения ускорения в зависимости от времени  $t$  показан на рис. 45.

В операторном виде закон изменения ускорения  $\dot{v}$  запишется в виде

$$\dot{v}(p) = \omega (1 - e^{-p\tau}).$$

Изображения скорости и пути будут иметь вид

$$v(p) = \frac{\omega}{p} (1 - e^{-p\tau});$$

$$S(p) = \frac{\omega}{p^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

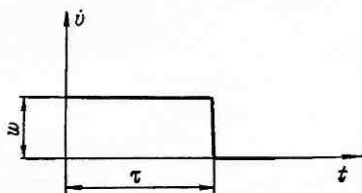


Рис. 45. Характер изменения ускорения

Переходя к оригиналам, получим

$$\left. \begin{aligned} v(t)_{t < \tau} &= \omega t; \\ v(t)_{t > \tau} &= \omega \tau; \\ S(t)_{t < \tau} &= \frac{\omega t^2}{2}; \\ S(t)_{t > \tau} &= \omega t \left( t - \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Уравнение (96) в операторном виде запишется следующим образом:

$$\alpha(p) = \frac{\delta M}{R} \cdot \frac{\omega (1 - e^{-p\tau})}{p^2 + k^2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем

$$\begin{aligned} \alpha(t)_{t < \tau} &= \frac{\delta M}{Rk^2} \omega (1 - \cos kt); \\ \alpha(t)_{t > \tau} &= \frac{\delta M}{Rk^2} [\cos k(t - \tau) - \cos kt]. \end{aligned}$$

После простых преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t)_{t < \tau} &= \frac{2\delta M}{Rk^2} \omega \sin^2 \frac{kt}{2}; \\ \alpha(t)_{t > \tau} &= \frac{2\delta M}{Rk^2} \omega \sin \frac{k\tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (98)$$



В конце участка набора скорости

$$\alpha(t)_{t=\tau} = \frac{2\delta M}{Rk^2} \omega \sin^2 \frac{k\tau}{2}. \quad (99)$$

Имея в виду участок установившегося движения, можно в соответствии с выражением (98) считать, что погрешность интегрирования вызывает колебания построителя вертикали около плоскости горизонта с частотой  $k = v \sqrt{1 + \delta M}$ .

Как видно из сравнения выражений (99) и (98), погрешность определения горизонта в конце участка набора скорости меньше максимальной погрешности определения горизонта, которая равна

$$\alpha_{\max} = \frac{2\delta M \omega}{Rk^2} \sin \frac{k\tau}{2},$$

в  $\sin \frac{k\tau}{2}$  раз, т. е. погрешность построителя вертикали имеет максимальное значение не в конце участка набора скорости, когда кончается действие ускорения, а в момент  $t = \frac{\pi}{2k} + \frac{\tau}{2} = \frac{T}{4} + \frac{\tau}{2}$ , примерно (при малом  $\tau$ ) через четверть периода от начала движения объекта.

Если продолжительность движения объекта на участке набора скорости мала и можно считать  $\sin \frac{k\tau}{2} \approx \frac{k\tau}{2}$ , то максимальная погрешность определения горизонта будет равна

$$\alpha_{\max} = \delta M \frac{\omega\tau}{Rk} = \delta M \frac{\omega\tau}{\sqrt{Rg(1 + \delta M)}}.$$

Замечая, что  $\omega\tau = v_m$ , где  $v_m$  — скорость установившегося движения объекта, и пренебрегая величиной  $\delta M$ , как малой по сравнению с единицей, можно записать

$$\alpha_{\max} = \delta M \frac{v_m}{\sqrt{Rg}}. \quad (100)$$

Из этой формулы видно, что погрешность определения горизонта зависит от отношения скорости установившегося движения объекта к первой космической скорости.

Пусть объект движется со скоростью  $v_m = 300$  м/сек. Если относительная погрешность интегрирования  $\delta M = 1\%$ , то

$$\alpha_{\max} = \frac{[0,01 \cdot 300]}{7900} \approx 1,5'.$$

Погрешность определения горизонта сравнительно невелика.

Покажем, что погрешность интегрирования влияет на период собственных колебаний системы. Так как

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{v \sqrt{1 + \delta M}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \delta M}},$$

где  $T_0$  — период М. Шулера, то при  $\delta M \ll 1$  можно принять

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \delta M \right).$$

Пусть  $\delta T = \frac{T_0 - T}{T_0}$  представляет собой относительную погрешность периода собственных колебаний. Тогда  $\delta T = \delta M/2$ , т. е. относительная погрешность периода в два раза меньше относительной погрешности интегрирования.

Определим местоположение объекта путем измерения угла  $\mu = \varphi + \alpha$  между стабилизированной платформой и построителем вертикали. Погрешность местоположения равна  $\Delta\varphi = \mu - \varphi$ , следовательно,  $\Delta\varphi = \alpha$ . Погрешность положения в угловом измерении равна погрешности определения горизонта.

Подставляя значение  $\alpha$  из выражения (98), получим

$$\Delta\varphi_{t < \tau} = \frac{2\delta M}{Rk^2} \omega \sin^2 \frac{kt}{2};$$

$$\Delta\varphi_{t > \tau} = \frac{2\delta M}{Rk^2} \omega \sin \frac{k\tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Все изложенное о погрешности определения горизонта в полной мере относится и к погрешности местоположения.

Погрешность определения пути, пройденного объектом, будет равна  $\Delta S = R\Delta\varphi$ .

На участке установившегося движения

$$\Delta S = \frac{2\delta M}{k^2} \omega \sin \frac{k\tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Принимая  $\sin \frac{k\tau}{2} \approx \frac{k\tau}{2}$  и имея в виду, что  $\omega\tau = v_m$ , можно записать

$$\Delta S = \frac{\delta M v_m}{k} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Максимальная погрешность определения пути имеет вид

$$\Delta S_{\max} = \delta M \frac{Rv_m}{\sqrt{Rg(1 - \delta M)}}.$$

В подрадикальном выражении пренебрежем величиной  $\delta M$ , как малой по сравнению с единицей. Тогда

$$\Delta S_{\max} = \delta M \frac{Rv_m}{\sqrt{Rg}}.$$

Используя прежний пример ( $\delta M = 1\%$ ,  $v_m = 300$  м/сек), находим  $\Delta S_{\max} \approx 2,6$  км. Эту погрешность система инерциальной навигации, как указано выше, будет иметь через четверть периода ( $\sim 20$  мин) от начала движения.

**§ 25. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации из-за уходов стабилизированной платформы. Уравнения ошибок<sup>1</sup>**

Введем оси  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$ , связанные со стабилизированной платформой. Эти оси, выставленные в начальный момент параллельно осям  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  инерциальной системы координат, из-за уходов стабилизированной платформы рассогласуются. Определим положение осей  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$  относительно осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  тремя углами  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ , которые представляют собой углы уходов стабилизированной платформы.

Взаимное расположение указанных осей показано на рис. 46. Направляющие косинусы углов, определяющих взаимное положение осей трехгранников  $\xi\eta\zeta$  и  $\xi^*\eta^*\zeta^*$ , представлены в табл. 12.

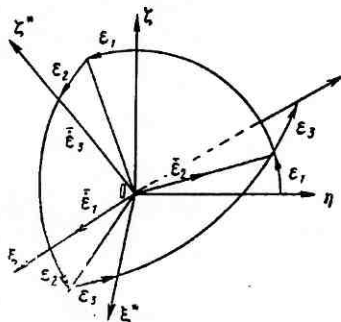


Рис. 46. Взаимное расположение осей, связанных со стабилизированной платформой, и осей инерциальной системы координат

Будем считать углы  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  величинами малыми. Тогда направляющие косинусы примут вид, представленный в табл. 13.

Пусть, как и раньше,  $a_\xi$ ,  $a_\eta$ ,  $a_\zeta$  — проекции кажущегося ускорения на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  инерциальной системы координат. Найдем при помощи табл. 13 проекции кажущегося ускорения на оси  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$ , связанные со стабилизированной платформой:

$$a_{\xi^*} = a_\xi + a_\eta \epsilon_3 - a_\zeta \epsilon_2;$$

$$a_{\eta^*} = -a_\xi \epsilon_3 + a_\eta + a_\zeta \epsilon_1;$$

$$a_{\zeta^*} = a_\xi \epsilon_2 - a_\eta \epsilon_1 + a_\zeta.$$

Таблица 12

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\xi^*$	$\cos \epsilon_2 \cos \epsilon_3$	$\cos \epsilon_1 \sin \epsilon_3 + \sin \epsilon_1 \cos \epsilon_3 \sin \epsilon_2$	$\sin \epsilon_1 \sin \epsilon_3 - \cos \epsilon_1 \cos \epsilon_3 \sin \epsilon_2$
$\eta^*$	$-\cos \epsilon_2 \sin \epsilon_3$	$\cos \epsilon_1 \cos \epsilon_3 - \sin \epsilon_1 \sin \epsilon_3 \sin \epsilon_2$	$\sin \epsilon_1 \cos \epsilon_3 + \cos \epsilon_1 \sin \epsilon_3 \sin \epsilon_2$
$\zeta^*$	$\sin \epsilon_2$	$-\sin \epsilon_1 \cos \epsilon_2$	$\cos \epsilon_1 \cos \epsilon_2$

<sup>1</sup> Здесь использованы материалы работы, выполненной автором совместно с С. А. Бабушкиным.

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\xi^*$	1	$\varepsilon_3$	$-\varepsilon_2$
$\eta^*$	$-\varepsilon_3$	1	$\varepsilon_1$
$\zeta^*$	$\varepsilon_2$	$-\varepsilon_1$	1

Оси чувствительности акселерометров, установленных на стабилизированной платформе, образуют ортогональную систему координат

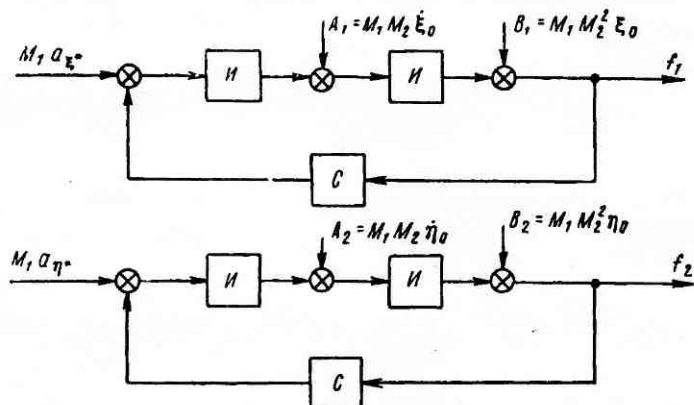


Рис. 47. Структурная схема аналитической системы инерциальной навигации

$\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$ . Таким образом, акселерометры измеряют в некотором масштабе проекции кажущегося ускорения  $a_{\xi^*}$ ,  $a_{\eta^*}$ ,  $a_{\zeta^*}$  на оси  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$ .

Подадим на входы счетно-решающих устройств аналитической системы инерциальной навигации, структурная схема которой изображена на рис. 47, величины  $M_1 a_{\xi^*}$  и  $M_1 a_{\eta^*}$ , где  $M_1$  — масштабы акселерометров.

Величины  $A_1$ ,  $B_1$  и  $A_2$ ,  $B_2$  учитывают начальные значения координат и их производных.

Выходные сигналы системы имеют следующий вид:

$$f_1 = M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^t a_{\xi^*} dt - M_2^2 C \int_0^t \int_0^t f_1 dt + M_1 M_2 \dot{\xi}_0 t + M_1 M_2^2 \xi_0;$$

$$f_2 = M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^t a_{\eta^*} dt - M_2^2 C \int_0^t \int_0^t f_2 dt + M_1 M_2 \dot{\eta}_0 t + M_1 M_2^2 \eta_0.$$

Здесь  $M_2$  — масштаб интеграторов;  $C$  — коэффициент обратной связи, осуществляющей автокомпенсацию ускорения силы земного тяготения.

После двукратного дифференцирования получим

$$\ddot{f}_1 + M_2^2 C f_1 = M_1 M_2^2 a_{\xi^*}; \quad \ddot{f}_2 + M_2^2 C f_2 = M_1 M_2^2 a_{\eta^*}.$$

Пусть объект движется произвольно по поверхности земной сферы. Считаем, что выполняется условие  $M_2^2 C = g/R = v^2$ , где  $R$  — радиус Земли.

Для удобства записи введем обозначение  $M_1 M_2^2 = M$ . Тогда

$$\dot{f}_1 + v^2 f_1 = M a_{\xi^*}; \quad \dot{f}_2 + v^2 f_2 = M a_{\eta^*}.$$

Подставим сюда значения  $a_{\xi^*}$  и  $a_{\eta^*}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 + v^2 f_1 &= M (a_{\xi} + a_{\eta} \varepsilon_3 - a_{\zeta} \varepsilon_2); \\ \dot{f}_2 + v^2 f_2 &= M (-a_{\xi} \varepsilon_3 + a_{\eta} + a_{\zeta} \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Так как

$$a_{\xi} = \ddot{\xi} + v^2 \xi; \quad a_{\eta} = \ddot{\eta} + v^2 \eta; \quad a_{\zeta} = \ddot{\zeta} + v^2 \zeta,$$

последние уравнения можно окончательно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{f}_1 + v^2 f_1 &= M [\ddot{\xi} + v^2 \xi + (\ddot{\eta} + v^2 \eta) \varepsilon_3 - (\ddot{\zeta} + v^2 \zeta) \varepsilon_2]; \\ \dot{f}_2 + v^2 f_2 &= M [-(\ddot{\xi} + v^2 \xi) \varepsilon_3 + \ddot{\eta} + v^2 \eta + (\ddot{\zeta} + v^2 \zeta) \varepsilon_1]. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Из этих уравнений видно, что при отсутствии уходов стабилизированной платформы функции  $f_1$  и  $f_2$  были бы пропорциональны координатам  $\xi$  и  $\eta$ , т. е.  $f_1 = M\xi$ ,  $f_2 = M\eta$ .

Следовательно, можно принять, что

$$f_1 - M\xi = M\Delta\xi; \quad f_2 - M\eta = M\Delta\eta, \quad (102)$$

где  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  — погрешности определения координат.

Перейдя к переменным  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  в уравнениях (101), получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{\xi} + v^2 \Delta\xi &= (\ddot{\eta} + v^2 \eta) \varepsilon_3 - (\ddot{\zeta} + v^2 \zeta) \varepsilon_2; \\ \Delta\dot{\eta} + v^2 \Delta\zeta &= (\ddot{\zeta} + v^2 \zeta) \varepsilon_1 - (\ddot{\xi} + v^2 \xi) \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Таким образом, чтобы определить погрешности системы инерциальной навигации из-за уходов стабилизированной платформы, необходимо проинтегрировать уравнения (103) при заданных начальных условиях.

При назначении начальных условий для  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$  надо иметь в виду начальные значения выходных величин  $f_1$  и  $f_2$ . Выходные величины поступают в систему управления движущимся объектом, и их начальные условия можно задать произвольно.

Пусть в начальный момент

$$\begin{aligned} f_1(0) &= M\xi_0; \quad f_2(0) = M\eta_0; \\ \dot{f}_1(0) &= M\dot{\xi}_0; \quad \dot{f}_2(0) = M\dot{\eta}_0. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с выражениями (102)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_0 &= 0; & \Delta \eta_0 &= 0; \\ \Delta \xi_0 &= 0; & \Delta \eta_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

Таким образом, для  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$  можно назначить нулевые начальные условия.

Для интегрирования уравнений (103) целесообразно ввести новые переменные  $x$  и  $y$  уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi &= \eta \varepsilon_3 - \zeta \varepsilon_2 + x; \\ \Delta \eta &= \zeta \varepsilon_1 - \xi \varepsilon_3 + y. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Введя новые переменные в уравнения (103), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} + v^2 x &= 2(\zeta \ddot{\varepsilon}_2 - \dot{\eta} \dot{\varepsilon}_3) + \zeta \ddot{\varepsilon}_2 - \dot{\eta} \dot{\varepsilon}_3; \\ \ddot{y} + v^2 y &= 2(\xi \ddot{\varepsilon}_3 - \dot{\zeta} \dot{\varepsilon}_1) + \xi \ddot{\varepsilon}_3 - \dot{\zeta} \dot{\varepsilon}_1. \end{aligned}$$

Пусть уходы стабилизированной платформы происходят с постоянными угловыми скоростями, т. е.  $\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_1 t$ ;  $\varepsilon_2 = \dot{\varepsilon}_2 t$ ;  $\varepsilon_3 = \dot{\varepsilon}_3 t$ .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + v^2 x &= 2(\zeta \dot{\varepsilon}_2 - \dot{\eta} \dot{\varepsilon}_3); \\ \ddot{y} + v^2 y &= 2(\xi \dot{\varepsilon}_3 - \dot{\zeta} \dot{\varepsilon}_1). \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

В соответствии с выражениями (104) назначим начальные условия для  $x$  и  $y$ . Непосредственно из уравнений (105) получаем  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ .

Дифференцируя уравнения (105) один раз и используя условия (104), находим

$$\dot{x}(0) = \zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3; \quad \dot{y}(0) = \xi_0 \dot{\varepsilon}_3 - \zeta_0 \dot{\varepsilon}_1.$$

Считаем, что стабилизированная платформа в начальный момент имеет горизонтную ориентацию. Тогда оси  $\xi$  и  $\eta$  будут лежать в плоскости горизонта, а ось  $\zeta$  направлена по вертикали точки отправления. Предположив далее, что объект начинает движение с поверхности Земли, получим

$$\xi_0 = \eta_0 = 0; \quad \zeta_0 = R; \quad \dot{x}(0) = R \dot{\varepsilon}_2; \quad \dot{y}(0) = -R \dot{\varepsilon}_1,$$

где  $R$  — радиус Земли.

Итак, уравнения (106) надлежит интегрировать при следующих начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0; & y(0) &= 0; \\ \dot{x}(0) &= R \dot{\varepsilon}_2; & \dot{y}(0) &= -R \dot{\varepsilon}_1. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Кроме начальных условий для интегрирования уравнений (104) необходимо задать характер изменения самих координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

Предположим, что объект движется с ускорением, характер изменения проекций которого на оси инерциальной системы координат показан на рис. 48.

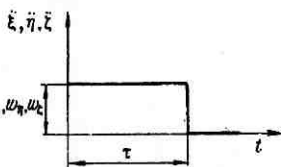
В течение времени  $0 \leq t \leq \tau$ , которое назовем временем набора скорости, объект движется с постоянным ускорением  $w$ . В момент времени  $t = \tau$  действие ускорения прекращается и объект начинает двигаться с постоянной скоростью.

Математически такой закон изменения ускорения запишется в виде

$$\xi(t), \ddot{\eta}(t), \ddot{\zeta}(t) = \begin{cases} w_\xi, w_\eta, w_\zeta & \text{при } t < \tau; \\ 0, 0, 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Изображения функций  $\xi(t), \ddot{\eta}(t), \ddot{\zeta}(t)$  будут

$$\left. \begin{aligned} \xi(p) &= w_\xi (1 - e^{-p\tau}); \\ \ddot{\eta}(p) &= w_\eta (1 - e^{-p\tau}); \\ \ddot{\zeta}(p) &= w_\zeta (1 - e^{-p\tau}). \end{aligned} \right\} \quad (108)$$



Составим изображения для координат и их производных. Из известных формул операционного исчисления

Рис. 48. Характер изменения ускорения

$$\xi(p) = p^2 \left[ \xi(p) - \xi_0 - \frac{\dot{\xi}_0}{p} \right]; \quad \dot{\xi}(p) = p [\xi(p) - \xi_0].$$

Отсюда

$$\xi(p) = \frac{\dot{\xi}(p)}{p^2} + \frac{\dot{\xi}_0}{p} + \xi_0; \quad \dot{\xi}(p) = \frac{\dot{\xi}(p)}{p} + \dot{\xi}_0.$$

Совершенно аналогично

$$\eta(p) = \frac{\ddot{\eta}(p)}{p^2} + \frac{\dot{\eta}_0}{p} + \eta_0;$$

$$\dot{\eta}(p) = \frac{\ddot{\eta}(p)}{p} + \dot{\eta}_0;$$

$$\zeta(p) = \frac{\ddot{\zeta}(p)}{p^2} + \frac{\dot{\zeta}_0}{p} + \zeta_0;$$

$$\dot{\zeta}(p) = \frac{\ddot{\zeta}(p)}{p} + \dot{\zeta}_0.$$

Используя изображения функций (108), получаем следующую группу формул:

$$\left. \begin{aligned} \xi(p) &= \frac{w_\xi}{p^2} (1 - e^{-p\tau}) + \frac{\dot{\xi}_0}{p} + \xi_0; \\ \dot{\xi}(p) &= \frac{w_\xi}{p} (1 - e^{-p\tau}) + \dot{\xi}_0; \\ \eta(p) &= \frac{w_\eta}{p^2} (1 - e^{-p\tau}) + \frac{\dot{\eta}_0}{p} + \eta_0; \\ \dot{\eta}(p) &= \frac{w_\eta}{p} (1 - e^{-p\tau}) + \dot{\eta}_0; \\ \zeta(p) &= \frac{w_\zeta}{p^2} (1 - e^{-p\tau}) + \frac{\dot{\zeta}_0}{p} + \zeta_0; \\ \dot{\zeta}(p) &= \frac{w_\zeta}{p} (1 - e^{-p\tau}) + \dot{\zeta}_0. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

## § 26. Интегрирование уравнений ошибок

Выше получены все исходные данные для интегрирования уравнений ошибок (106). Запишем уравнения (106) в операторном виде, имея в виду начальные условия (107) и операторные представления (109):

$$x(p) = 2(\omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta} \dot{\varepsilon}_3) \frac{1 - e^{-p\tau}}{p(p^2 + \nu^2)} + \frac{2(\zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3)}{p^2 + \nu^2} + R \dot{\varepsilon}_2 \frac{p}{p^2 + \nu^2};$$

$$y(p) = 2(\omega_{\xi} \varepsilon_3 - \omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_1) \frac{1 - e^{-p\tau}}{p(p^2 + \nu^2)} + \frac{2(\xi_0 \varepsilon_3 - \zeta_0 \dot{\varepsilon}_1)}{p^2 + \nu^2} - R \dot{\varepsilon}_1 \frac{p}{p^2 + \nu^2}.$$

Чтобы построить оригинал, воспользуемся теоремой запаздывания. В соответствии с этой теоремой

$$\begin{aligned} x(t)_{t < \tau} &= \frac{2(\omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta} \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} \left( t - \frac{\sin \nu t}{\nu} \right) + \\ &+ \frac{2(\zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) + \frac{R \dot{\varepsilon}_2}{\nu} \sin \nu t; \\ x(t)_{t > \tau} &= \frac{2(\omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta} \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} \left[ \tau - \frac{\sin \nu t}{\nu} + \frac{\sin \nu(t - \tau)}{\nu} \right] + \\ &+ \frac{2(\zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) + \frac{R \dot{\varepsilon}_2}{\nu} \sin \nu t; \\ y(t)_{t < \tau} &= \frac{2(\omega_{\xi} \varepsilon_3 - \omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_1)}{\nu^2} \left( t - \frac{\sin \nu t}{\nu} \right) + \\ &+ \frac{2(\xi_0 \varepsilon_3 - \zeta_0 \dot{\varepsilon}_1)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) - \frac{R \dot{\varepsilon}_1}{\nu} \sin \nu t; \\ y(t)_{t > \tau} &= \frac{2(\omega_{\xi} \varepsilon_3 - \omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_1)}{\nu^2} \left[ \tau - \frac{\sin \nu t}{\nu} + \frac{\sin \nu(t - \tau)}{\nu} \right] + \\ &+ \frac{2(\xi_0 \varepsilon_3 - \zeta_0 \dot{\varepsilon}_1)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) - \frac{R \dot{\varepsilon}_1}{\nu} \sin \nu t. \end{aligned}$$

Перейдем к переменным  $\Delta \xi$  и  $\Delta \eta$  по формулам (105) и произведем некоторые преобразования тригонометрических величин:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_{t < \tau} &= \eta \varepsilon_3 - \zeta \varepsilon_2 + \frac{2(\omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta} \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} \left( t - \frac{\sin \nu t}{\nu} \right) + \\ &+ \frac{2(\zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) + \frac{R \dot{\varepsilon}_2}{\nu} \sin \nu t; \\ \Delta \xi_{t > \tau} &= \eta \varepsilon_3 - \zeta \varepsilon_2 + \frac{2(\omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta} \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} \left[ \tau - \frac{2}{\nu} \sin \frac{\nu \tau}{2} \cos \nu \times \right. \\ &\times \left. \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] + \frac{2(\zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) + \frac{R \dot{\varepsilon}_2}{\nu} \sin \nu t; \end{aligned} \right\} (110)$$



$$\left. \begin{aligned} \Delta\eta_{t<\tau} &= \zeta\varepsilon_1 - \xi\varepsilon_3 + \frac{2(\omega_{\xi}\dot{\varepsilon}_3 - \omega_{\zeta}\dot{\varepsilon}_1)}{v^2} \left( t - \frac{\sin vt}{v} \right) + \\ &+ \frac{2(\dot{\xi}_0\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\zeta}_0\dot{\varepsilon}_1)}{v^2} (1 - \cos vt) - \frac{R\dot{\varepsilon}_1}{v} \sin vt; \\ \Delta\eta_{t>\tau} &= \zeta\varepsilon_1 - \xi\varepsilon_3 + \frac{2(\omega_{\xi}\dot{\varepsilon}_3 - \omega_{\zeta}\dot{\varepsilon}_1)}{v^2} \left[ \tau - \frac{2}{v} \sin \frac{v\tau}{2} \cos v \times \right. \\ &\times \left. \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] + \frac{2(\dot{\xi}_0\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\zeta}_0\dot{\varepsilon}_1)}{v^2} (1 - \cos vt) - \frac{R\dot{\varepsilon}_1}{v} \sin vt. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Рассмотрим погрешности систем инерциальной навигации из-за уходов стабилизированной платформы на участке набора скорости. Этот участок характерен тем, что его продолжительность обычно мала по сравнению с четвертью периода М. Шулера.

Следовательно, можно принять, что

$$\sin vt \approx vt - \frac{v^3 t^3}{6}; \quad \cos vt \approx 1 - \frac{v^2 t^2}{2}.$$

Первое и третье уравнения (110) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{t<\tau} &= \eta\varepsilon_3 - \zeta\varepsilon_2 + (\omega_{\xi}\dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta}\dot{\varepsilon}_3) \frac{t^3}{3} + (\dot{\zeta}_0\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\eta}_0\dot{\varepsilon}_3) t^2 + \\ &+ R\dot{\varepsilon}_2 \left( t - \frac{v^2 t^2}{6} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta_{t<\tau} &= \zeta\varepsilon_1 - \xi\varepsilon_3 + (\omega_{\xi}\dot{\varepsilon}_3 - \omega_{\zeta}\dot{\varepsilon}_1) \frac{t^3}{3} + (\dot{\xi}_0\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\zeta}_0\dot{\varepsilon}_1) t^2 - \\ &- R\dot{\varepsilon}_1 \left( t - \frac{v^2 t^2}{6} \right). \end{aligned}$$

Так как на участке набора скорости

$$\xi = \frac{\omega_{\xi} t^2}{2} + \dot{\xi}_0 t; \quad \eta = \frac{\omega_{\eta} t^2}{2} + \dot{\eta}_0 t; \quad \zeta = \frac{\omega_{\zeta} t^2}{2} + \dot{\zeta}_0 t + R,$$

то после простых преобразований можно получить

$$\left. \begin{aligned} \Delta\xi_{t<\tau} &= \omega_{\eta} \frac{t^2}{6} \varepsilon_3 - (\omega_{\zeta} + g) \frac{t^2}{6} \varepsilon_2; \\ \Delta\eta_{t<\tau} &= -\omega_{\xi} \frac{t^2}{6} \varepsilon_3 + (\omega_{\zeta} + g) \frac{t^2}{6} \varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Эти формулы определяют погрешности систем инерциальной навигации в определении координат из-за уходов стабилизированной платформы на участке набора скорости.

Погрешности в определении скорости движения объекта можно получить дифференцированием уравнений (111), считая  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$

линейными функциями времени:

$$\Delta \dot{\xi}_{t < \tau} = \omega_{\eta} \frac{t}{2} \varepsilon_3 - (\omega_{\zeta} + g) \frac{t}{2} \varepsilon_2;$$

$$\Delta \dot{\eta}_{t < \tau} = -\omega_{\xi} \frac{t}{2} \varepsilon_3 + (\omega_{\zeta} + g) \frac{t}{2} \varepsilon_1.$$

В конце участка набора скорости ( $t = \tau$ ) погрешности определения координат и скоростей будут иметь вид

$$\Delta \xi(\tau) = \omega_{\eta} \frac{\tau^2}{6} \varepsilon_3(\tau) - (\omega_{\zeta} + g) \frac{\tau^2}{6} \varepsilon_2(\tau);$$

$$\Delta \eta(\tau) = -\omega_{\xi} \frac{\tau^2}{6} \varepsilon_3(\tau) + (\omega_{\zeta} + g) \frac{\tau^2}{6} \varepsilon_1(\tau);$$

$$\Delta \dot{\xi}(\tau) = \omega_{\eta} \frac{\tau}{2} \varepsilon_3(\tau) - (\omega_{\zeta} + g) \frac{\tau}{2} \varepsilon_2(\tau);$$

$$\Delta \dot{\eta}(\tau) = -\omega_{\xi} \frac{\tau}{2} \varepsilon_3(\tau) + (\omega_{\zeta} + g) \frac{\tau}{2} \varepsilon_1(\tau),$$

где  $\varepsilon_1(\tau)$ ,  $\varepsilon_2(\tau)$ ,  $\varepsilon_3(\tau)$  — значения углов, на которые уйдет от заданного положения стабилизированная платформа в конце участка набора скорости ( $t = \tau$ ).

Перейдем к рассмотрению погрешностей систем инерциальной навигации из-за уходов стабилизированной платформы при установившемся движении объекта, когда он перемещается с постоянной скоростью.

Так как продолжительность участка набора скорости мала, примем, что  $\sin \frac{\nu \tau}{2} \approx \frac{\nu \tau}{2}$ . Тогда второе и четвертое уравнения (110) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_{t > \tau} &= \eta \varepsilon_3 - \zeta \varepsilon_2 + \frac{2(\omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_2 - \omega_{\eta} \dot{\varepsilon}_3) \tau}{\nu^2} \left[ 1 - \cos \nu \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{2(\zeta_0 \dot{\varepsilon}_2 - \eta_0 \dot{\varepsilon}_3)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) + \frac{R \dot{\varepsilon}_2}{\nu} \sin \nu t; \\ \Delta \eta_{t > \tau} &= \zeta \varepsilon_1 - \xi \varepsilon_3 + \frac{2(\omega_{\xi} \dot{\varepsilon}_3 - \omega_{\zeta} \dot{\varepsilon}_1) \tau}{\nu^2} \left[ 1 - \cos \nu \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{2(\xi_0 \dot{\varepsilon}_3 - \zeta_0 \dot{\varepsilon}_1)}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) - \frac{R \dot{\varepsilon}_1}{\nu} \sin \nu t. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Из этих уравнений видно, что под влиянием уходов стабилизированной платформы аналитическая система инерциальной навигации получает три вида погрешностей:

а) погрешности, зависящие от углов  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  уходов стабилизированной платформы и накапливающиеся со временем;

б) погрешности, зависящие от скоростей уходов стабилизированной платформы и сохраняющие постоянные значения;

в) погрешности, изменяющиеся по гармоническому закону с периодом  $M$ . Шулера  $T = 2\pi/\nu$ .

Очевидно, что при длительном функционировании системы главные значения приобретают погрешности, зависящие от углов уходов стабилизированной платформы и накапливающиеся со временем. В конечном итоге главными составляющими погрешностей будут величины  $\xi_{e_2} \approx Re_2$ ,  $\xi_{e_1} \approx Re_1$ . Например, уходу стабилизированной платформы на  $1^\circ$  будет соответствовать погрешность определения пути  $b$ , равная 60 *мильям* (111 км), или, иначе говоря, уходу стабилизированной платформы на одну угловую минуту соответствует погрешность пути, равная одной миле.

Однако в интервале времени движения объекта, меньшем, по крайней мере, чем четверть периода М. Шулера, погрешность определения пути при одной и той же величине ухода стабилизированной платформы будет значительно меньше.

Чтобы показать это, ограничим время движения объекта так, чтобы можно было допустить разложение

$$\cos v \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \approx 1 - \frac{v^2 \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2}{2};$$

$$\cos vt \approx 1 - \frac{v^2 t^2}{2}.$$

Погрешность этого разложения не превышает 1% при  $vt = 37,9^\circ$ , что соответствует продолжительности движения  $t = 8,5$  *мин*, и 10% при  $vt = 59,3^\circ$ , что соответствует времени движения  $t = 14$  *мин*. Примем далее, что  $\sin vt \approx vt - v^3 t^3/6$ . Это разложение точнее, чем принятое разложение косинуса.

Уравнения (112) для ограниченного промежутка времени примут вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi_{t>\tau} &= \eta e_3 - \xi e_2 + (\omega_\zeta e_2 - \omega_\eta e_3) \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2 + \\ &+ (\dot{\xi}_0 e_2 - \dot{\eta}_0 e_3) t^2 + Re_2 - \frac{Re_2 v^2 t^2}{6}; \\ \Delta \eta_{t>\tau} &= \xi e_1 - \xi e_3 + (\omega_\xi e_3 - \omega_\zeta e_1) \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2 + \\ &+ (\dot{\xi}_0 e_3 - \dot{\zeta}_0 e_1) t^2 - Re_1 + \frac{Re_1 v^2 t^2}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Определим значения координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  при заданном характере движения объекта. Для этого найдем оригиналы изображений  $\xi(p)$ ,  $\eta(p)$ ,  $\zeta(p)$ , определяемые первой, третьей и пятой формулами (109). Используя теорему запаздывания, получим

$$\xi_{t>\tau} = \omega_\xi \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \dot{\xi}_0 t + \xi_0;$$

$$\eta_{t>\tau} = \omega_\eta \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \dot{\eta}_0 t + \eta_0;$$

$$\zeta_{t>\tau} = \omega_\zeta \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \dot{\zeta}_0 t + \zeta_0.$$

При принятой ориентации осей инерциальной системы координат  $\xi_0 = \eta_0 = 0, \zeta_0 = R$ . Следовательно,

$$\xi_{t>\tau} = \omega_{\xi} \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \xi_0 t;$$

$$\eta_{t>\tau} = \omega_{\eta} \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \eta_0 t;$$

$$\zeta_{t>\tau} = \omega_{\zeta} \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right) + \zeta_0 t + R.$$

Введем найденные значения координат в уравнения (113). Тогда

$$\Delta \xi = \omega_{\eta} \frac{\tau^2}{2} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \dot{\varepsilon}_3 - \omega_{\zeta} \frac{\tau^2}{2} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \dot{\varepsilon}_2 - \frac{gt^2}{6} \varepsilon_2;$$

$$\Delta \eta = \omega_{\zeta} \frac{\tau^2}{2} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \dot{\varepsilon}_1 - \omega_{\xi} \frac{\tau^2}{2} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \dot{\varepsilon}_3 + \frac{gt^2}{6} \varepsilon_1.$$

Пренебрегая величиной  $\tau/2$ , как малой по сравнению с  $t$ , получаем окончательно

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xi &= \omega_{\eta} \frac{\tau^2}{2} \varepsilon_3 - \left( \omega_{\zeta} \frac{\tau^2}{2} + \frac{gt^2}{6} \right) \varepsilon_2; \\ \Delta \eta &= -\omega_{\xi} \frac{\tau^2}{2} \varepsilon_3 + \left( \omega_{\zeta} \frac{\tau^2}{2} + \frac{gt^2}{6} \right) \varepsilon_1. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

По этим формулам можно рассчитать погрешности аналитической системы инерциальной навигации из-за уходов стабилизированной платформы.

Однако не все слагаемые в одинаковой степени определяют погрешность. Элементарные расчеты показывают, что наибольшие погрешности определяются слагаемыми  $\frac{gt^2}{6} \varepsilon_1$  и  $\frac{gt^2}{6} \varepsilon_2$ .

Поэтому приближенно можно принять

Таблица 14

Продолжительность движения, мин	Погрешность пути, м	Погрешность скорости, м/сек
3	48	1,0
4	113	1,4
5	220	2,2
6	380	3,2
7	600	4,3
8	900	5,6
9	1300	7,2
10	1800	8,8
11	2300	10,7
12	3000	12,7
13	3900	14,9
14	4800	17,3

$$|\Delta \xi| = \frac{gt^2}{6} \varepsilon_2; \quad |\Delta \eta| = \frac{gt^2}{6} \varepsilon_1.$$

Пусть погрешность определения пути равна  $\Delta S = \sqrt{\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2}$ , уход стабилизированной платформы вокруг мгновенной оси равен  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ . Тогда погрешность определения пути выразится формулой

$$\Delta S = \frac{gt^2}{6} \varepsilon. \quad (115)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (94а), устанавливаем их полную идентичность. Отсюда следует, что уходы стабилизированной платформы в ограниченный интервал времени вызывают одинаковые погрешности геометрической и аналитической систем инерциальной навигации.

Формулу для погрешности определения скорости можно получить путем дифференцирования формулы (115):

$$\Delta v = \frac{gt}{2} \varepsilon. \quad (116)$$

В табл. 14 приведены значения погрешностей системы инерциальной навигации при уходе стабилизированной платформы  $\varepsilon = 1$  угл. мин/мин, вычисленные по формулам (115) и (116).

### § 27. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызываемые погрешностью акселерометра<sup>1</sup>

Рассмотрим одноканальную систему инерциальной навигации, использующую информацию акселерометра, ось чувствительности которого параллельна оси  $\xi$  инерциальной системы координат. Структурная схема такой системы изображена на рис. 49.

Пусть  $F(p)$  — изображение выходного сигнала  $f(t)$  системы инерциальной навигации. Примем для простоты, что в начальный момент при  $t = 0$   $\xi = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ .

Тогда

$$F(p) = \frac{M_1 M}{p^2 + CM} a_{\xi}(p), \quad (117)$$

где  $M_1$  — масштаб акселерометра;  $M$  — суммарный масштаб двух интеграторов;  $C$  — коэффициент обратной связи, введенной для компенсации ускорения силы земного тяготения;  $a_{\xi}$  — показания акселерометра в единичном масштабе.

Если объект движется по сфере, то  $a_{\xi} = \ddot{\xi} + g/R\xi$ .

Пусть  $\xi(p)$  — изображение функции  $\xi(t)$ . Тогда при нулевых начальных значениях  $\xi$  и  $\dot{\xi}$  можно изображение величины  $a_{\xi}$  представить в виде

$$a_{\xi}(p) = (p^2 + v^2) \xi(p).$$

Вводя значение  $a_{\xi}(p)$  в выражение (117), получим

$$F(p) = M_1 M \frac{p^2 + v^2}{p^2 + CM} \xi(p). \quad (118)$$

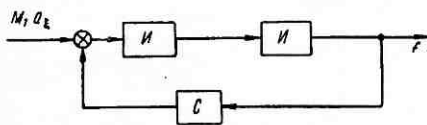


Рис. 49. Структурная схема одноканальной аналитической системы инерциальной навигации

<sup>1</sup> § 27—29 написаны на основе работ, опубликованных автором совместно с Е. В. Сафоновой и А. Д. Ильичевой [18, 19].

Предположим, что абсолютная погрешность акселерометра  $\Delta M_1$  проявляется в отклонении величины его масштаба от номинального (исчисленного) значения  $M_1^*$ , т. е.  $M_1 = M_1^* + \Delta M_1$ .

Вводя значение  $M_1$  в выражение (118) и предполагая, что выполняется условие  $CM = v^2$ , получаем

$$F(p) = (M_1^* + \Delta M_1) M \xi(p).$$

Введем относительную погрешность акселерометра

$$\delta M_1 = \Delta M_1 / M_1^*.$$

Тогда

$$F(p) = (1 + \delta M_1) M_1^* M \xi(p).$$

Перейдя к оригиналу, получим  $f(t) = (1 + \delta M_1^*) M_1^* M \xi(t)$ .

Введем относительную погрешность координаты  $\xi$  выражением

$$\delta \xi = \frac{f(t) - M_1^* M \xi(t)}{M_1^* M \xi(t)}.$$

Тогда  $\delta \xi = \delta M_1$ , т. е. относительная погрешность координаты (погрешность местоположения) равна относительной погрешности акселерометра.

### § 28. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызываемые погрешностью интегрирования

Пусть аналогично предыдущему случаю абсолютная погрешность интегрирования  $\Delta M$  проявляется в отклонении величины масштабов интеграторов от их начальных (исчисленных) значений  $M_0$ , т. е.  $M = M_0 + \Delta M$ .

Введем значение  $M$  в выражение (118):

$$F(p) = M_1 (M_0 + \Delta M) \frac{p^2 + v^2}{p^2 + C(M_0 + \Delta M)} \xi(p).$$

Введем относительную погрешность интегрирования  $\delta M = \Delta M / M_0$ . Тогда

$$F(p) = M_1 M_0 (1 + \delta M) \frac{p^2 + v^2}{p^2 + C M_0 (1 + \delta M)} \xi(p).$$

Пусть для исчисленного значения масштабов интеграторов выполняется условие  $CM_0 = v^2$ . Тогда

$$F(p) = M_1 M_0 (1 + \delta M) \frac{p^2 + v^2}{p^2 + v^2 (1 + \delta M)}.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$F(p) = M M_0 (1 + \delta M) \left[ 1 - \delta M \frac{v^2}{p^2 + v^2 (1 + \delta M)} \right] \xi(p).$$

Удерживая лишь члены первого порядка малости относительно  $\delta M$ , получаем

$$F(p) = M_1 M_0 \left[ 1 + \delta M \frac{p^2}{p^2 + v^2 (1 + \delta M)} \right] \xi(p).$$

Введем обозначение  $k^2 = v^2 (1 + \delta M)$ . Тогда

$$F(p) = M_1 M_0 \left( 1 + \delta M \frac{p^2}{p^2 + k^2} \right) \xi(p).$$

Предположим, что функция  $\xi(t)$  изменяется, как изображено на рис. 48. Тогда

$$\dot{\xi}(p) = \omega_{\xi} (1 - e^{-p\tau})$$

и соответственно для нулевых начальных значений

$$\xi(p) = \frac{\omega_{\xi}}{p^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

Изображение выходного сигнала примет вид

$$F(p) = M_1 M_0 \left[ \xi(p) + \delta M \frac{\omega_{\xi} (1 - e^{-p\tau})}{p^2 + k^2} \right].$$

Получаем оригинал изображения, используя теорему запаздывания:

$$f(t)_{t < \tau} = M_1 M_0 \left[ \xi(t) + \delta M \frac{\omega_{\xi}}{k^2} (1 - \cos kt) \right];$$

$$f(t)_{t > \tau} = M_1 M_0 \left\{ \xi(t) + \delta M \frac{\omega_{\xi}}{k^2} [\cos k(t - \tau) - \cos kt] \right\}.$$

Введем, как и раньше, относительную погрешность координаты  $\xi$  выражением

$$\delta \xi = \frac{f(t) - M_1 M_0 \xi(t)}{M_1 M_0 \xi(t)}.$$

Тогда

$$\delta \xi_{t < \tau} = \delta M \frac{\omega_{\xi}}{k^2 \xi(t)} (1 - \cos kt);$$

$$\Delta \xi_{t > \tau} = \delta M \frac{\omega_{\xi}}{k^2 \xi(t)} [\cos k(t - \tau) - \cos kt].$$

Преобразуем эти выражения:

$$\delta \xi_{t < \tau} = \delta M \frac{2\omega_{\xi}}{k^2 \xi(t)} \sin^2 \frac{kt}{2};$$

$$\delta \xi_{t > \tau} = \delta M \frac{2\omega_{\xi}}{k^2 \xi(t)} \sin \frac{k\tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Так как

$$\xi(t)_{t < \tau} = \frac{\omega_{\xi} t^2}{2}; \quad \xi(t)_{t > \tau} = \omega_{\xi} \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right),$$

то

$$\delta \xi_{t < \tau} = \delta M \frac{4}{k^2 t^2} \sin^2 \frac{k t}{2};$$

$$\delta \xi_{t > \tau} = \delta M \frac{2}{k^2 \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right)} \sin \frac{k \tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Если продолжительность движения на участке набора скорости мала по сравнению с четвертью периода собственных колебаний, то можно принять, что  $\sin k\tau/2 \approx k\tau/2$ , и тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_{t < \tau} &= \delta M; \\ \delta \xi_{t > \tau} &= \frac{\delta M}{k \left( t - \frac{\tau}{2} \right)} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Из первого уравнения (119) видно, что при малой продолжительности участка набора скорости относительная погрешность координаты в течение этого промежутка времени равна относительной погрешности интегрирования.

Второе уравнение (119) показывает, что если общая продолжительность движения на обоих участках мала и можно принять  $\sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \approx k \left( t - \frac{\tau}{2} \right)$ , то относительная погрешность координаты равна относительной погрешности интегрирования.

При неограниченной продолжительности движения объекта относительная погрешность координаты носит колебательный характер, как это следует из второго уравнения (119), причем колебания совершаются с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 \pm \delta M}}$$

и с амплитудой, убывающей со временем.

Если  $t \rightarrow \infty$ , то относительная погрешность координаты  $\delta \xi \rightarrow 0$ .

### § 29. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызываемые неточной компенсацией ускорения силы земного тяготения

В аналитических системах инерциальной навигации компенсация ускорения силы земного тяготения, как известно, осуществляется с помощью обратной связи, которая подается на вход первичного интегратора с коэффициентом  $C$ . Этот коэффи-



циент для точной компенсации должен удовлетворять условию  $CM = v^2$ . Очевидно, что при отклонении коэффициента обратной связи  $C$  от точного значения компенсация ускорения силы земного тяготения будет осуществляться с некоторой погрешностью.

Примем, что погрешность компенсации ускорения силы земного тяготения  $\Delta C$  проявляется в отклонении коэффициента обратной связи от его номинального (исчисленного) значения  $C_0$ , т. е.  $C = C_0 + \Delta C$ .

Введем значение  $C$  в уравнение (118):

$$F(p) = M_1 M \frac{p^2 + v^2}{p^2 + (C_0 + \Delta C) M} \xi(p).$$

Введем относительную погрешность компенсации ускорения силы земного тяготения  $\delta C = \Delta C / C_0$  и предположим, что для номинального (исчисленного) значения коэффициента обратной связи выполняется условие  $C_0 M = v^2$ . Тогда

$$F(p) = M_1 M \frac{p^2 + v^2}{p^2 + v^2 (1 + \delta C)} \xi(p).$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель. Тогда получим

$$F(p) = M_1 M \left[ \xi(p) - \delta C \frac{v^2}{p^2 + v^2 (1 + \delta C)} \xi(p) \right]. \quad (120)$$

Пусть, как и раньше,  $\xi(p) = w_\xi (1 - e^{-p\tau})$ .

Тогда при нулевых начальных значениях  $\xi$  и  $\dot{\xi}$

$$\xi(p) = \frac{w_\xi}{p^2} (1 - e^{-p\tau}).$$

Изображение выходного сигнала примет вид

$$F(p) = M_1 M \left[ \xi(p) - \delta C \frac{w_\xi v^2 (1 - e^{-p\tau})}{p^2 (p^2 + k^2)} \right],$$

где  $k^2 = v^2 (1 + \delta C)$ .

Оригинал этого выражения, построенный с помощью теоремы запаздывания, напишется в виде

$$f(t)_{t < \tau} = M_1 M \left\{ \xi(t) - \delta C \frac{w_\xi v^2}{k^2} \left[ \frac{1}{k^2} (\cos kt - 1) + \frac{1}{2} t^2 \right] \right\};$$

$$f(t)_{t > \tau} = M_1 M \left\{ \xi(t) - \delta C \frac{w_\xi v^2}{k^2} \left[ \frac{\cos kt - \cos k(t - \tau)}{k^2} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} (t - \tau)^2 \right] \right\}.$$

Введем относительную погрешность координаты уравнением

$$\delta \xi = \frac{M_1 M \xi(t) - f(t)}{M_1 M \xi(t)}.$$

Тогда относительная погрешность будет иметь вид

$$\delta \xi_{t < \tau} = \delta C \frac{\omega_{\xi} v^2}{k^2 \xi(t)} \left[ \frac{1}{k^2} (\cos kt - 1) + \frac{1}{2} t^2 \right];$$

$$\delta \xi_{t > \tau} = \delta C \frac{\omega_{\xi} v^2}{k^2 \xi(t)} \left[ \frac{\cos kt - \cos k(t - \tau)}{k^2} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} (t - \tau)^2 \right].$$

Так как

$$\xi(t)_{t < \tau} = \frac{\omega_{\xi} t^2}{2};$$

$$\xi(t)_{t > \tau} = \omega_{\xi} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{(t - \tau)^2}{2} \right], \text{ то}$$

$$\delta \xi_{t < \tau} = \delta C \frac{v^2}{k^2} \left( 1 + 2 \frac{\cos kt - 1}{k^2 t^2} \right);$$

$$\delta \xi_{t > \tau} = \delta C \frac{v^2}{k^2} \left[ 1 + \frac{\cos kt - \cos k(t - \tau)}{k^2 \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right)} \right].$$

После простых преобразований эти выражения приведем к виду

$$\delta \xi_{t < \tau} = \delta C \frac{v^2}{k^2} \left( 1 - \frac{4}{k^2 t^2} \sin^2 \frac{kt}{2} \right);$$

$$\delta \xi_{t > \tau} = \delta C \frac{v^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{2}{k^2 \tau \left( t - \frac{\tau}{2} \right)} \sin \frac{k\tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right].$$

Если продолжительность движения на участке набора скорости мала по сравнению с четвертью периода собственных колебаний и можно принять  $\sin \frac{k\tau}{2} \approx \frac{k\tau}{2}$ , то

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_{t < \tau} &= 0; \\ \delta \xi_{t > \tau} &= \delta C \frac{v^2}{k^2} \left[ 1 - \frac{1}{k \left( t - \frac{\tau}{2} \right)} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Из первого уравнения (121) видно, что относительная погрешность координаты, вызываемая неточной компенсацией ускорения силы земного тяготения, на участке набора скорости близка к нулю. Следовательно, в данном случае компенсацию ускорения силы земного тяготения можно осуществлять грубо.

Второе уравнение (121) показывает, что на участке установившегося движения погрешность координаты, вызываемая неточной ком-

пенсацией ускорения силы земного тяготения, носит колебательный характер, причем колебания совершаются с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{v \sqrt{1 + \delta C}}$$

и с амплитудой, убывающей со временем. Найдем предел, к которому стремится погрешность  $\delta \xi$ , если время  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \xi = \delta C \frac{v^2}{k^2} = \frac{\delta C}{1 + \delta C}, \quad (122)$$

а при  $\delta C$ , малой по сравнению с единицей, относительная погрешность координаты стремится к относительной погрешности компенсации ускорения силы земного тяготения, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \xi = \delta C.$$

Таким образом, относительная погрешность координаты не превосходит относительной погрешности компенсации ускорения силы земного тяготения.

До сих пор был принят определенный закон изменения ускорения движущегося основания. Главная особенность этого закона заключается в том, что ускорение действует в течение ограниченного промежутка времени, как это часто встречается на практике.

Покажем, что и при ином законе изменения ускорения получают те же результаты, что и раньше.

Для этого рассмотрим еще раз влияние неточной компенсации ускорения силы земного тяготения на точность определения координаты движущегося объекта.

Примем следующий закон изменения ускорения  $\ddot{\xi}(t)$ : ускорение возрастает от  $t = 0$ , достигая своего максимального значения  $\ddot{\xi}_{\max}$  при  $t = t_1$ , затем убывает, асимптотически приближаясь к нулю (рис. 50).

Аналитически такой закон изменения ускорения можно представить в виде

$$\ddot{\xi}(t) = A t e^{-at},$$

где

$$A = \frac{1}{t_1} \ddot{\xi}_{\max} e, \quad a = \frac{1}{t_1}.$$

Изображение этой функции будет иметь вид

$$\ddot{\xi}(p) = A \frac{p}{(p + a)^2}.$$

Пусть  $\xi(t) = \int_0^t dt \int_0^t \ddot{\xi}(t) dt$ , тогда

$$\xi(p) = \frac{A}{p(p + a)^2}. \quad (123)$$

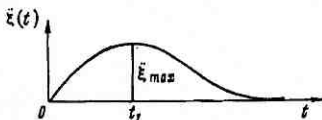


Рис. 50. График изменения ускорения

Введем изображение  $\xi(p)$  в выражение (120). Тогда

$$F(p) = M_1 M \left[ \xi(p) - \delta C \frac{A v^2}{p(p+a)^2(p^2+k^2)} \right].$$

Переходя к оригиналу, получаем

$$f(t) = M_1 M \xi(t) - M_1 M \delta C A v^2 \left[ D_1 \sin \left( kt - 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{a} \right) + \right. \\ \left. + D_2 t e^{-at} + D_3 e^{-at} + D_4 t + D_5 \right],$$

$$\text{где } D_1 = -\frac{1}{k^2(k^2+a^2)}; \quad D_2 = \frac{1}{a^2(k^2+a^2)}; \quad D_3 = \frac{2(k^2+2a^2)}{a^2(k^2+a^2)}; \\ D_4 = \frac{1}{k^2 a^2}; \quad D_5 = -\frac{2}{k^2 a^3}.$$

Введем, как и раньше, относительную погрешность в определение координаты по формуле

$$\delta \xi = \frac{M_1 M \xi(t) - f(t)}{M_1 M \xi(t)}.$$

Относительная погрешность будет иметь следующий вид:

$$\delta \xi = \delta C \frac{A v^2}{\xi(t)} \left[ D_1 \sin \left( kt - 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{a} \right) + D_2 t e^{-at} + D_3 e^{-at} + \right. \\ \left. + D_4 t + D_5 \right]. \quad (124)$$

По изображению (123) найдем оригинал функции  $\xi(t)$ :

$$\xi(t) = \frac{A}{a^2} t e^{-at} + \frac{2A}{a^3} e^{-at} + \frac{A}{a^2} t - \frac{2A}{a^3}.$$

Подставим значение  $\xi(t)$  в выражение (124). Тогда

$$\delta \xi = \delta C \frac{D_1 v^2 \sin \left( kt - 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{a} \right)}{\frac{t e^{-at}}{a^2} + \frac{2 e^{-at}}{a^3} + \frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3}} + \delta C \frac{D_2 t e^{-at} + D_3 e^{-at} + D_4 t + D_5}{\frac{t e^{-at}}{a^2} + \frac{2 e^{-at}}{a^3} + \frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3}}.$$

Пусть  $a^2 \gg k^2$ . Отбросим члены, содержащие в качестве множителей экспоненциальную функцию  $e^{-at}$ , полагая, что эти члены быстро «затухнут». Тогда относительная погрешность координаты примет окончательный вид

$$\delta \xi = \delta C \frac{D_1 v^2}{\frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3}} \sin \left( kt - \frac{2k}{a} \right) + \delta C v^2 \frac{D_4 t + D_5}{\frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3}},$$

$$\text{где } D_1 = -\frac{1}{k^2 a^2}; \quad D_2 = \frac{1}{a^4}; \quad D_3 = \frac{4}{a^3}; \quad D_4 = \frac{1}{k^2 a^2}; \quad D_5 = -\frac{2}{k^2 a^3}.$$

Рассмотрим случай, когда продолжительность движения объекта мала по сравнению с четвертью периода собственных колебаний системы инерциальной навигации.

Так как  $2k/a$  — величина малая, то можно принять

$$\sin\left(kt - \frac{2k}{a}\right) \approx kt - \frac{2k}{a},$$

и тогда  $\delta\xi = 0$ .

Получен прежний результат: если продолжительность движения объекта мала по сравнению с четвертью периода собственных колебаний системы инерциальной навигации, то погрешность координаты, вызываемая неточной компенсацией ускорения силы земного тяготения, близка к нулю.

Найдем предел, к которому стремится погрешность  $\delta\xi$ , если время  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \delta C \frac{D_1 v^2}{\frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3}} \sin k\left(t - \frac{2}{a}\right) + \delta C v^2 \frac{D_4 t + D_5}{\frac{t}{a^2} - \frac{2}{a^3}} \right].$$

Числитель первого слагаемого ограничен, знаменатель стремится к бесконечности, следовательно, слагаемое стремится к нулю; второе слагаемое стремится к  $\delta C v^2 a^2 D_4$ , поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta\xi = \frac{\delta C}{1 + \delta C}.$$

Последнее равенство совершенно идентично выражению (122). Если погрешность  $\delta C$  мала по сравнению с единицей, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta\xi = \delta C$ .

Таким образом, относительная погрешность координаты не превосходит относительной погрешности компенсации ускорения силы земного тяготения.

Полученный результат указывает еще на одно преимущество автокомпенсации перед методом ввода поправок на ускорение силы земного тяготения. Автокомпенсация превращает аналитическую систему инерциальной навигации в замкнутую систему. Введение же поправок оставляет систему разомкнутой, и погрешность ввода поправок дважды интегрируется, что неизбежно порождает ошибки в определении координаты, накапливающиеся со временем.

### § 30. Основные результаты исследования инструментальных погрешностей

Проведенное рассмотрение инструментальных погрешностей свелось к анализу действия возмущений на длиннопериодные системы, к которым относятся системы инерциальной навигации. Длиннопериодными эти системы называют не только потому, что период их собственных колебаний равен 84,4 мин, но главным образом в связи с малой продолжительностью действия возмущения по сравнению с периодом их собственных колебаний.

Очевидно, погрешности систем инерциальной навигации обусловлены погрешностями элементов, возникающими вследствие действия на них сил инерции движущегося объекта. Практически ни один из объектов не может двигаться длительное время с ускорением, осуществляя набор скорости или совершая какой-либо маневр. Через некоторый определенный промежуток времени движение с ускорением прекращается, и объект начинает двигаться со скоростью, близкой к постоянному значению. Указанные обстоятельства и имеются в виду при рассмотрении инструментальных погрешностей.

Исследование движения длиннопериодных систем, подверженных действию возмущений, вызвано необходимостью определить движение систем как во время действия возмущения (на участке набора объектом скорости), так и после прекращения действия возмущения (на участке установившегося движения объекта). Кроме того, существует необходимость получить решения дифференциальных уравнений движения, учитывающие как свободное, так и вынужденное движение системы. Поэтому нельзя было ограничиться рассмотрением установившегося режима, когда достаточно исследовать только вынужденное движение (что допустимо при анализе короткопериодных систем).

Примененный операторный метод интегрирования дифференциальных уравнений оказался, на наш взгляд, достаточно эффективным, так как он дал возможность получить решения уравнений в замкнутом виде для случаев, когда возмущающие силы претерпевали разрыв 1-го рода.

Проведенное исследование инструментальных погрешностей систем инерциальной навигации дало возможность получить следующие основные результаты.

1. В ряде случаев максимальные погрешности системы возникают не в момент прекращения действия возмущения, а после него, примерно через четверть периода собственных колебаний от начала движения объекта. Такого рода погрешности, называемые баллистическими девиациями, характерны для гироскопических приборов [3, 7].

2. Уход стабилизированной платформы от заданного положения вызван накапливающимися со временем погрешностями. В частности, если стабилизированная платформа «ушла» на угол  $\epsilon$ , то погрешности системы определится линейной величиной  $R\epsilon$ , где  $R$  — радиус Земли. Однако указанное правило справедливо для неограниченной продолжительности функционирования системы. Если же продолжительность функционирования системы ограничена, то погрешность системы из-за уходов стабилизированной платформы будет меньше, причем она будет уменьшаться с уменьшением продолжительности функционирования системы.

3. Так как инерциальные системы навигации представляют собой замкнутые системы, то ошибка интегрирования не вызывает накапливающихся со временем погрешностей.

4. По той же причине погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызванные неточной компенсацией ускорения силы земного тяготения, не вызывают накапливающихся со временем

погрешностей. Так, если продолжительность набора скорости объектом мала по сравнению с четвертью периода собственных колебаний системы, то относительная погрешность определения координаты также весьма мала. Следовательно, в данном случае компенсацию ускорения силы земного тяготения можно осуществлять грубо. При неограниченном времени функционирования системы относительная погрешность определения координаты не превосходит относительной погрешности компенсации ускорения силы земного тяготения.

1. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. М., «Наука», 1966.
2. Броксмейер У. Ф. Системы инерциальной навигации. Пер. с англ. Л., «Судостроение», 1967.
3. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М., Гостехтеоретиздат, 1955.
4. Диткин В. А. и Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
5. Инерциальная навигация, анализ и проектирование. Пер. с англ. Под ред. К. Ф. О'Доннела. М., «Наука», 1969.
6. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
7. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд. АН СССР, 1963.
8. Каракашев В. А. К вопросу о гиросtabilизированной платформе с периодом собственных колебаний  $T = 84,4$  мин. — Известия вузов, «Приборостроение», 1959, т. 2.
9. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М., Гостехтеоретиздат, 1950.
10. Питтмен Г. Инерциальные системы управления. Пер. с англ. М., Воениздат, 1964.
11. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств. Ч. 1. Л., Судпромгиз, 1962.
12. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств. Ч. 2. Л., «Судостроение», 1964.
13. Риглей В., Вудбери Р. и Говорка Дж. Инерциальная навигация. Пер. с англ. М., ИЛ, 1958.
14. Ройтенберг Я. Н. Многогироскопная вертикаль. — ПММ, 1947, т. 11, вып. 2.
15. Сайдов П. И. и Слив Э. И. Гироскопические ориентаторы. — Известия ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1963, вып. 18.
16. Сайдов П. И., Слив Э. И. и Чертков Р. И. Вопросы прикладной теории гироскопов. Л., Судпромгиз, 1961.
17. Слив Э. И. О некоторых погрешностях гиринерциальных систем навигации. — В сб. Доклады юбилейной научно-технической конференции «Проблемы повышения точности и надежности гироскопических систем», Л., 1967.
18. Слив Э. И., Сафонова Е. В. и Ильичева А. Д. О некоторых погрешностях систем инерциальной навигации. — Известия вузов, «Приборостроение», 1966, т. 9, № 1.
19. Слив Э. И., Сафонова Е. В. и Ильичева А. Д. Погрешности систем инерциальной навигации из-за неточного интегрирования. — Известия вузов, «Приборостроение», 1967, т. 10, № 4.
20. Холостов Д. И. Средства кораблевождения подводных атомных. М., Воениздат, 1967.



Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава I. Геометрические системы инерциальной навигации . . . . .</b>	<b>14</b>
§ 1. Соотношение между высотами направлений, связанных со стабилизированной платформой, и географическими координатами . .	16
§ 2. Выработка географических координат. Построение трассы без промежуточного определения широты и долготы . . . . .	17
§ 3. Основные принципы построения вертикали . . . . .	20
§ 4. Построение вертикали при произвольном движении объекта . .	22
§ 5. Построение вертикали по приближенному алгоритму . . . . .	24
§ 6. Геометрическая система инерциальной навигации со стабилизированным в азимуте построителем вертикали . . . . .	27
§ 7. Геометрическая система инерциальной навигации с акселерометрами, установленными на стабилизированной платформе . . . . .	31
§ 8. Демпфирование колебаний . . . . .	35
<b>Глава II. Аналитические системы инерциальной навигации . . . . .</b>	<b>39</b>
§ 9. Определение параметров движения объекта, перемещающегося по сфере . . . . .	40
§ 10. Определение параметров произвольного движения объекта в пространстве . . . . .	43
§ 11. Аналитическая система инерциальной навигации с использованием интеграторов ускорений . . . . .	46
§ 12. О возможности материализации вертикали в аналитических системах инерциальной навигации . . . . .	48
§ 13. Аналитическая система инерциальной навигации с использованием двойных интеграторов ускорений. Уравнения движения .	51
§ 14. Анализ уравнений движения . . . . .	53
§ 15. Об устойчивости движения аналитической системы инерциальной навигации . . . . .	57
§ 16. Выработка вектора относительной скорости . . . . .	61
§ 17. Демпфирование колебаний в аналитических системах инерциальной навигации . . . . .	65
<b>Глава III. Полуаналитические системы инерциальной навигации . . . .</b>	<b>68</b>
§ 18. Простейшая полуаналитическая система навигации . . . . .	—
§ 19. Полуаналитическая система с географической ориентацией подвеса . . . . .	70
§ 20. Полуаналитическая система с азимутальными гироскопами . .	75
§ 21. Полуаналитическая система с подачей сигналов акселерометров на оси карданова подвеса . . . . .	79

Глава IV. Инструментальные погрешности систем инерциальной навигации	85
§ 22. Влияние уходов стабилизированной платформы на точность определения горизонта в геометрической системе инерциальной навигации	—
§ 23. Влияние уходов стабилизированной платформы на точность определения местоположения движущегося объекта	89
§ 24. Влияние неточности интегрирования на точность определения горизонта и определения местоположения движущегося объекта в геометрической системе инерциальной навигации	92
§ 25. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации из-за уходов стабилизированной платформы. Уравнения ошибок	97
§ 26. Интегрирование уравнений ошибок	102
§ 27. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызываемые погрешностью акселерометра	107
§ 28. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызываемые погрешностью интегрирования	103
§ 29. Погрешности аналитической системы инерциальной навигации, вызываемые неточной компенсацией ускорения силы земного тяготения	110
§ 30. Основные результаты исследования инструментальных погрешностей	115
Литература	118

## **ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Э.И. СЛИВА**

Родился 30 сентября 1910 года.

1939 – окончил факультет точной механики Ленинградского института точной механики и оптики.

1939 – 1941 – обучение в аспирантуре ЛИТМО.

1941 – 1946 – служба в рядах Красной Армии; участие с октября 1941 г. в боевых действиях, в частности, в Польше и Германии; награждение за образцовое выполнение заданий командования орденами “Красного Знамени”, “Отечественной войны 1-й и 2-й степени”, “Красной Звезды”, а также несколькими медалями.

1946 – 1948 – окончание обучения в аспирантуре ЛИТМО.

1948 – защита диссертации “К вопросу о влиянии больших скоростей и ускорений на гироскопические приборы”, присуждение ученой степени кандидата технических наук.

1948 – 1964 – работа в должности старшего научного сотрудника научно-исследовательской организации.

1955 – утверждение в ученом звании старшего научного сотрудника по специальности “Приборы и устройства автоматики и телемеханики”.

1957–1964 – работа в Ленинградском электротехническом институте им. В.И.Ульянова (Ленина) доцентом по совместительству.

1963 – присуждение ученой степени доктора технических наук.

1964 – 1975 – работа в должности заведующего кафедрой технической (до 1965 г. – теретической) механики ЛИТМО.

1965 – утверждение в ученом звании профессора по кафедре “Теоретическая механика”.

1975 – 1980 – работа в должности профессора кафедры технической механики ЛИТМО.

Умер 13 февраля 1982 года.

## **ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ Э.И. СЛИВА**

Гирскопические ориентаторы. // Известия ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина). Вып. 18. Л., 1963.-37 с. (Соавтор – П.И. Сайдов).

Вопросы прикладной теории гироскопов. Л., 1961.-427 с. (Соавторы – П.И. Сайдов, Р.И. Чертков).

Прикладная теория инерциальной навигации. Л., 1972.-120 с.

## **Наименования предыдущих книг серии**

- Г.Н. Дульнев.* Энергоинформационный обмен в природе. 2000. – 134 с.  
*А.В. Сечкарев.* Фотонная оптика. 2000. – 220 с.  
*В.С. Игнатовский.* Элементарные основы теории оптических приборов. 2001.– 202 с.  
*К.Г. Коротков.* Основы ГРВ биоэлектрографии. 2001.– 360 с.  
*В.Н. Чуриловский.* Основы теории оптических приборов. 2001. – 274 с.  
*Ю.Г. Шнейдер.* Эксплуатационные свойства деталей с регулярным микрорельефом. 2001. – 264 с.  
*В.С. Меськин.* Основы легирования стали. 2002. – 236 с.

**Эля Израилевич Слив**  
**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ**  
**ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ**

**Репринтное воспроизведение**  
**издания 1972 года**

Компьютерная верстка, дизайн  
Дизайн обложки серии  
Автор проекта серии

ИВА-Design  
В.А. Петров  
М.И. Потеев

Подписано в печать 30.04.02. Формат А5. Бумага офсетная.  
Отпечатано на ризографе. Тираж 120 экз. Заказ № 88.

Санкт-Петербургский государственный  
институт точной механики и оптики  
(технический университет)  
Лицензия ИД №00408 от 05.11.99  
197101, СПб, ул. Саблинская, 14

Издательство “ИВА”  
Лицензия ИД №00705 от 17.01.2000  
197348, СПб, ул. Аэродромная, 4