МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

С.В. Фролов

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2013

УДК 514

Фролов С.В. Простейшие функции комплексного переменного: Учеб.-метод. пособие.– СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2013. – 42 с.

Даны комплексные числа, простейшие функции комплексного переменного (экспонента, логарифм, корень, тригонометрия и обратная тригонометрия), римановы поверхности и связи их топологии с интегрируемостью в элементарных функциях и с количеством компонент действительной кривой на проективной плоскости. Приведены основная теорема алгебры и разложение многочленов на комплексные и действительные множители, а также разложение дроби на простейшие.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов направлений 141200, 190600, 220700, 151000, 240700, 260100, 260200, 140700, 080200 и 241000 бакалавриата очной и заочной форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Рыков

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

1. Введение. О числовых системах

Рассмотрим развитие понятия числа в математике. Фундаментом всего является множество натуральных чисел **N** = {1, 2, …}. Как говорил крупный математик 19 века Леопольд Кронекер «Бог создал натуральные числа, всё остальное – дело рук человеческих». На самом деле натуральные числа тоже дело рук человеческих, они описываются так называемыми аксиомами Пеано, но мы не будем здесь на этом останавливаться. Натуральные числа можно складывать, умножать, но, вообще говоря, нельзя вычитать (оставаясь в множестве натуральных чисел). Проблема решается переходом к более широкому множеству целых чисел **Z** = {…, – 2, – 1, 0, 1, 2, …}. В нём уже можно вычитать, но, вообще говоря, нельзя делить. Такие множества в математике называют кольцами. Кольцом является также, например, множество многочленов. Переходом к ещё более широкому множеству рациональных чисел **Q** решается проблема деления – в этом множестве можно складывать, вычитать, умножать и делить на всё, кроме нуля. Такое множество называется полем. Однако поле рациональных чисел не обладает свойством полноты: не любое ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань (в формулировке Дедекинда), или не любая фундаментальная последовательность имеет предел (в формулировке Коши – эти формулировки равносильны). Проблема полноты решается переходом к более широкому множеству действительных (иногда употребляют термин «вещественных») чисел **R**, которое уже свойством полноты обладает.

Однако множество действительных чисел тоже не вполне удобно – оно не является алгебраически замкнутым, то есть не любое алгебраическое уравнение имеет корни. Самое простейшее уравнение: $x^2 + 1 = 0$ – не имеет корней на множестве действительных чисел. Проблема алгебраической замкнутости решается переходом к более широкому множеству комплексных чисел**C**, которое мы здесь и будем рассматривать. Хронологически всё было не совсем так последовательно, как здесь изложено: понятие комплексного числа появилось ещё в 16 веке, когда ещё было далеко до осознания проблемы полноты и строгого определения действительного числа (это уже 19 век) – их понимали наивно, как точки числовой прямой. Причина появления комплексных чисел такова: в 16 веке были открыты формулы для решения уравнений третьей и четвёртой степени (похожие на формулу для решения квадратного уравнения, которую вы проходили в школе, только значительно более сложные). Это было первое достижение математики нового времени – древние этих формул не знали. Так вот, в некоторых случаях для нахождения действительного корня уравнения по этим формулам приходилось формально оперировать с квадратными корнями из отрицательных чисел, которые в конце концов сокращались, и результат получался действительным. Правила действий с комплексными числами были изложены уже в «Алгебре» РафаэляБомбелли (1572 год – между прочим, в этом году произошла Варфоломеевская ночь!). Дальнейшее развитие математики показало, что комплексный язык является во многом более естественным, чем действительный, причём практически во всех разделах математики. Как писал крупный математик конца 19 – начала 20 века Жак Адамар [1] «Кардано был не только изобретателем знаменитого «карданова подвеса», но он основательно преобразовал математику изобретением мнимых чисел. Напомним, что такое мнимая величина: алгебраические правила показывают, что квадрат всякого числа, положительного или отрицательного, есть число положительное; следовательно, говорить о квадратном корне из отрицательного числа является просто абсурдом. Кардано сознательно допускает такой абсурд и приступает к действиям над этими «мнимыми» числами. Всякий объявил бы это чистым безумием, и, тем не менее, всё развитие алгебры и анализа было бы невозможным без этого отправного положения, которое, естественно, получило в XIX веке твёрдое и строгое обоснование. С тех пор стало возможным утверждать, что наиболее короткий и наилучший путь между двумя истинами в действительной области часто проходит через мнимую область».

2. Комплексные числа и действия над ними

Комплексным числом является комбинация $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а i– мнимая единица: формальный символ, означающий квадратный корень изминус единицы: $i^2 = -1$ (по традиции комплексные числа обозначаются буквами с конца английского алфавита, а действительные – с начала). При этом $a = \mathrm{Re}z$ называется действительной частью комплексного числа, а $b = \mathrm{Im}z$ соответственно мнимой (обозначения от слов Real & Image соответственно).

Что можно делать с комплексными числами? Понятно, что их можно складывать и вычитать – покомпонентно, складывая (вычитая) действительные и мнимые части независимо. Далее понятно, что их можно перемножать, учитывая вышеприведённое соотношение для мнимой единицы:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \tag{1}$$

Значительно менее тривиальный факт – что комплексные числа можно делить. Чтобы получить формулу для деления, можно поступить двояко. Лобовой и более длинный способ: написать результат деления через неизвестные, умножить на знаменатель и решать систему уравнений:

$$\frac{a+bi}{c+di}=x+yi; a+bi=(cx-dy)+(dx+cy)i$$

$$\begin{cases} cx-dy=a \\ dx+cy=b \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases} \tag{2}$$

Видно, что можно поделить на любое число кроме нуля, то есть множество комплексных чисел является полем. Однако существует и более «цивилизованный» способ деления, основанный на известной вам со школы операции – умножение на сопряжённое, с помощью которой вы избавлялись от корней в знаменателе. Число $\bar{z}=a-bi$называется сопряжённым к числу $z = a + bi$. Имеем $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$ (заодно определили модуль комплексного числа – мы с ним ещё столкнёмся). Умножив числитель и знаменатель дроби (1) на сопряжённое к знаменателю, получим снова формулы (2) гораздо проще. Отметим важные (хоть и совершенно очевидные) свойства комплексного сопряжения:

$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}; \overline{zw}=\bar{z}\bar{w}; \overline{z^n}=\bar{z}^n$$

Говоря научным языком, комплексное сопряжение является автоморфизмом поля комплексных чисел. Можно показать, что этот автоморфизм является единственным.

В отличие от действительных чисел поле комплексных чисел является неупорядоченным: на нём нельзя ввести отношение «меньше – больше» так, чтобы были выполнены аксиомы упорядоченности:

1) Для любых двух чисел x и y выполнено одно и только одно из трёх: либо $x<y$, либо $x>y$, либо $x = y$.
2) Аксиома транзитивности: если $x<y$ и $y<z$, то $x<z$.
3) Если $x<y$, то $x + z<y + z$(к обеим частям неравенства можно прибавить любое число).
4) Если $x<y$ и $z> 0$, то $xz<yz$ (обе части неравенства можно умножать на положительное число.

Теорема. Поле комплексных чисел невозможно упорядочить.

Доказательство. Предположим, что мы упорядочили комплексные числа. Тогда должно быть либо $i> 0$, либо $i< 0$. В первом случае можем умножить обе части неравенства на i: $i^2 = - 1 > 0$. Во втором случае вычитаем i из обеих частей неравенства и получаем: $-i > 0$. Теперь мы можем умножить обе части неравенства на $-i$ и опять получить: $(-i)^2 = -1 > 0$. На самом деле доказательство не закончено – необходимо получить противоречие с аксиомами. Если $-1 > 0$, мы можем умножить обе части неравенства на -1: $(-1)^2 = 1 > 0$. Вычитая единицу из обеих частей неравенства, получаем $-1 < 0$. Требуемое противоречие получено: не может быть одновременно и $-1 < 0$ и $-1 > 0$.

3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел Модуль и аргумент, тригонометрическая форма записи

Комплексное число $z = a + bi$естественно интерпретировать как точку на плоскости (или вектор, идущий из начала координат в данную точку). По горизонтали откладывают действительную часть, а по вертикали – мнимую. При этом сложению комплексных чисел отвечает сложение векторов. А вот для геометрической интерпретации умножения комплексных чисел вначале перейдём на нашей плоскости к полярным координатам:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = Argz = arctg\frac{b}{a} \qquad (3)$$

Одна из этих величин нам уже знакома – это модуль, другая же называется аргумент, он определён с точностью до прибавления (вычитания) величины, кратной 2π (впоследствии мы увидим, что это обстоятельство чрезвычайно важно). Кстати, маленькая тонкость, о которой часто забывают программисты: при a< 0 к арктангенсу в (3) надо добавить π. Используя величины (3), число z можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{4}$$

Например:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi\,; i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}; 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Попробуем перемножить два комплексных числа в тригонометрической форме (4):

$$zw = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)|w|(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= |z||w|\big(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\big) =$$

$$= |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Следовательно, при умножении всех чисел плоскости на фиксированное комплексное число z, все модули умножатся на его модуль $|z|$, а к аргументам прибавится Argz. То есть, геометрически, плоскость растянется в $|z|$ раз и повернётся на угол Argz. Так что комплексные числа можно интерпретировать как повороты плоскости с растяжением. Это означает, что вместо комплексных чисел, можно рассматривать матрицы поворота с растяжением:

$$|z|\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -b \\ b & a\end{pmatrix} \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что закон умножения матриц (5) аналогичен закону умножения комплексных чисел (1). Определитель такой матрицы:

$$det\begin{pmatrix}a & -b \\ b & a\end{pmatrix} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Всё правильно: определитель матрицы показывает, во сколько раз меняется мера (для плоскости – площадь) множеств при действии соответствующего оператора, а при растяжении плоскости в $|z|$ раз площади увеличатся в $|z|^2$ раз. Так что комплексные числа являются своего рода удвоением действительных. Любопытно, что таким же способом можно удвоить комплексные числа – рассмотреть матрицы (5) с комплексными элементами (только во второй строке нужно добавить комплексное сопряжение – подумайте, почему?). Получится система кватернионов – «четверных чисел» – в которых имеются сразу три мнимые единицы. Кватернионы описывают повороты уже трёхмерного пространства, их произведение некоммутативно ($ab \neq ba$ – это естественно, повороты трёхмерного пространства, в отличие от поворотов плоскости, не коммутируют!). Знакомое вам векторное исчисление (скалярное, векторное произведение) и векторный анализ (градиент, дивергенция, ротор) в 19 веке возникли вначале в кватернионной оболочке, избавившись от неё лишь к концу века. Подробнее смотрите в [1], тема 28.

Используя тригонометрическую форму (4), можно очень легко получить формулы для $\cos(n\varphi)$ и $\sin(n\varphi)$. Заметим, что:

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n \tag{6}$$

Соотношение (6) называется формулой Муавра (иногда пишут «Моавра»). Для того чтобы получить искомые формулы, необходимо раскрыть степень в (6) по формуле бинома и собрать отдельно действительную и мнимую части.

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \cos^{n-j}(\varphi)\sin^j(\varphi) i^j =$$

$$= (\cos^n(\varphi) - C_n^2 \cos^{n-2}(\varphi)\sin^2(\varphi) + \cdots) +$$

$$+ i(C_n^1 \cos^{n-1}(\varphi)\sin(\varphi) - C_n^3 \cos^{n-3}(\varphi)\sin^3(\varphi) + \cdots) \tag{7}$$

Первая скобкасправа в (7) – это $\cos(n\varphi)$, а вторая – $\sin(n\varphi)$. Знаки в суммах чередуются, индексыи степени в каждом следующем слагаемом увеличиваются или уменьшаются на два. Напоминаем, что биноминальный коэффициент C_n^k – это количество способов выбрать k предметов из n и считаются они по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}; n! = 123 \dots n$$

4. Комплексное дифференцирование, конформные отображения и гармонические функции

Функции комплексного переменного можно дифференцировать и интегрировать по тем же правилам, что и функции действительного переменного. При этом возникают важные связи с геометрией – так называемыми конформными отображениями, которые сохраняют углы между кривыми. Возникновение геометрической теории функций комплексного переменного в середине 19 века, связанное с именем великого Бернарда Римана, привело к новой геометризации математики после полуторавекового «формульного» периода.

Пусть у нас имеется комплексное переменное $z = x + iy$, и комплекснозначная функция $w(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Эта функция называется комплексно дифференцируемой или аналитической если существует комплексный дифференциал:

$$w(z + dz) - w(z) = dw + o(dz) = w'(z)dz + o(dz) \tag{8}$$

Напоминаем, что запись $o(dz)$ означает величину, которая стремится к нулю при $dz \to 0$ быстрее, чем dz (то есть $o(dz)/dz \to 0$).

Теорема. Из существования комплексного дифференциала (8) следуют следующие условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \tag{9}$$

Также действительная и мнимая части функции P и Q являются гармоническими функциями:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0 \tag{10}$$

Доказательство. Распишем дифференциал функции $w(z)$ в действительных терминах:

$$dw = d(P + iQ) = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + i\frac{\partial Q}{\partial x}dx + i\frac{\partial Q}{\partial y}dy$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx + i\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy$$

С другой стороны в комплексных терминах тот же дифференциал:

$$dw = w'(z)dz = w'(z)(dx + idy)$$

Приравнивая эти выражения, получим условия (9):

$$w'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

Дифференцируя первое из равенств (9) по x а второе по y, и складывая их, получим:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Аналогично доказывается и гармоничность Q.

Теорема. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ осуществляют отображение плоскости (x, y) на плоскость $(P(x, y), Q(x, y))$. Тогда это отображение сохраняет углы между кривыми и ориентацию (то есть правое переходит в правое, а левое – в левое) тогда и только тогда, когда выполняются условия Коши-Римана (10).

Доказательство. Угол между кривыми – это угол между касательными векторами к ним. Поэтому для того, чтобы углы между кривыми сохранялись, нужно чтобы линейная часть отображения, называемая матрицей Якоби или якобианом:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

сохраняла углы между векторами. Поскольку столбцы матрицы – это образы базисных векторов, которые ортогональны друг другу и имеют единичную длину, то столбцы якобиана должны, во-первых, быть также ортогональными и, во вторых, иметь одинаковую длину (их сумма образует угол $\pi/4$ с каждым – значит сумма их образов тоже должна образовывать тот же угол с каждым образом, а для этого длины этих образов должны быть одинаковыми):

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} = 0; \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 \tag{11}$$

Выражая из первого равенства (11) одну из производных и подставляя во второе равенство, после сокращения получим:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2; \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \tag{12}$$

Из первого равенства (11) следует, что одна из пар производных (12) равна, а вторая – отличается знаком. Условие сохранения ориентации равносильно положительности определителя якобиана, а это означает, что именно первая пара (12) совпадает, а вторая – отличается знаком. Это и есть условия Коши-Римана.

Таким образом, если комплексная функция имеет комплексную производную, то она задаёт конформное отображение, которое сохраняет углы. Нарушаться конформность может только в тех точках, где аналитичность нарушается, то есть где не существует однозначной производной. Функции, которые аналитичны везде, кроме отдельных особых точек, называются голоморфными. Ниже мы рассмотрим примеры голоморфных функций и увидим, какие особые точки у них могут быть.

Как мы видели, действительная и мнимая части аналитической функции являются функциями гармоническими. Гармонические функции очень широко распространены в природе. Гармоническим является стационарное (то есть не меняющееся во времени) распределение температуры в однородном теле без внутренних источников тепла, электростатический потенциал в области без электрических зарядов и даже потенциал течения идеальной жидкости (идеальной называется жидкость с нулевой вязкостью). Поэтому многие физические и технические задачи решаются с помощью аналитических функций. Если нужно найти распределение температуры (или электростатического потенциала, или поля скоростей жидкости) в какой либо области, то находится аналитическая функция, осуществляющая конформное отображение этой области на какую либо простую область, в которой искомое распределение находится без труда. А дальше это распределение пересаживается в исходную область с помощью этой функции. Подробнее см. [2], темы 21-25.

5. Комплексная экспонента. Формула Эйлера Комплексный логарифм и его риманова поверхность

Рассмотрим поподробнее функцию $f(\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Как мы показали в предыдущем пункте $f(\varphi)f(\psi) = f(\varphi + \psi)$. Вспомним, какая действительная функция обладала таким свойством. Это экспонента $f(x) = e^{kx}$. Константа k могла быть найдена дифференцированием: $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$. Попробуем продифференцировать нашу функцию: $f'(\varphi) = -\sin(\varphi) + i\cos(\varphi) = i(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = if(\varphi)$. Таким образом, мы приходим к следующей формуле Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (13)$$

Следует отметить, что вышеприведённые рассуждения не являются доказательством формулы (13). Формула Эйлера не нуждается в доказательстве – она представляет собой определение комплексной экспоненты. А приведённые рассуждения показывают, что определение это хорошее – свойства так определённой экспоненты будут такими же, как и у обычной действительной. Формула Эйлера позволяет использовать показательную форму записи комплексного числа $z = |z|e^{i\varphi}$.

Поскольку у нас есть экспонента, можно ввести и обратную функцию: комплексный логарифм Lnz (По традиции, комплексный логарифмзаписывают с большой буквы, в отличие от действительного). Согласно формуле Эйлера и свойствам логарифма получим:

$$Lnz = Ln(|z|e^{i\varphi}) = ln|z| + i\varphi + 2\pi in \qquad (14)$$

где n – произвольное целое число. Например:

$$Lni = Lne^{i\pi/2} = \frac{i\pi}{2} + 2\pi in$$

Мы учли, что прибавление к аргументу числа, кратного 2π ничего не меняет. Таким образом, комплексный логарифм оказывается бесконечнозначной функцией, что чрезвычайно важно и приводит к далеко идущим выводам. Можно, конечно, ограничиться одной ветвью функции, например договориться, что аргумент всегда $0 \leq \varphi < 2\pi$, но тогда логарифм станет разрывной на положительной части действительной оси функцией.

Приведём один исторический парадокс, являющийся прямым следствием бесконечнозначности комплексного логарифма. В начале 18 века математики спорили по поводу того, как понимать логарифмы отрицательных чисел. Великий Иоганн Бернулли «доказывал», что $\ln(-x) = \ln x$ ($x > 0$, разумеется). Делал он это так:

$$(-x)^2 = x^2 \Rightarrow \ln(-x)^2 = \ln(x^2) \Rightarrow 2\ln(-x) = 2\ln(x) \Rightarrow \qquad (15)$$

$$\ln(-x) = \ln(x)$$

Где же ошибка в рассуждениях? Для того чтобы это понять, распишем входящие в (15) элементы в виде комплексных логарифмов:

$$Ln(x^2) = Ln(-x)^2 = 2\ln(x) + 2\pi in;$$

$$2Ln(x) = 2(\ln(x) + 2\pi im) = 2\ln(x) + 2\pi i2m$$

$$2Ln(-x) = 2(\ln(x) + \pi i + 2\pi ik) = 2\ln(x) + 2\pi i(2k + 1)$$

Вот и разгадка парадокса: при вынесении квадрата из $\mathrm{Ln}(x^2)$ теряется половина значений этого логарифма, а именно – значения с нечётными n (остаются только чётные $n = 2m$). А при вынесении квадрата из $\mathrm{Ln}(-x)^2$ теряется другая половина значений – значения с чётными n (остаются нечётные $n = 2k + 1$). В результате, хотя равенство $\mathrm{Ln}(-x)^2 = \mathrm{Ln}(x^2)$ верно, равенство $2\mathrm{Ln}(-x) = 2\mathrm{Ln}(x)$ уже неверно. Ситуация немного напоминает известную загадку: можно ли жениться на сестре своего брата? Казалось бы, нет: она тебе тоже сестра. Однако если он тебе брат только по матери, а она ему – только по отцу (или наоборот), то вы с ней вообще не родственники.

Поскольку многозначные функции не очень удобная вещь, математики восстанавливают их однозначность, задавая их не на комплексной плоскости, а на так называемой римановой поверхности (РП). РП – одно из важнейших понятий теории функций комплексного переменного. Построим РП логарифма – см. рисунок 1.

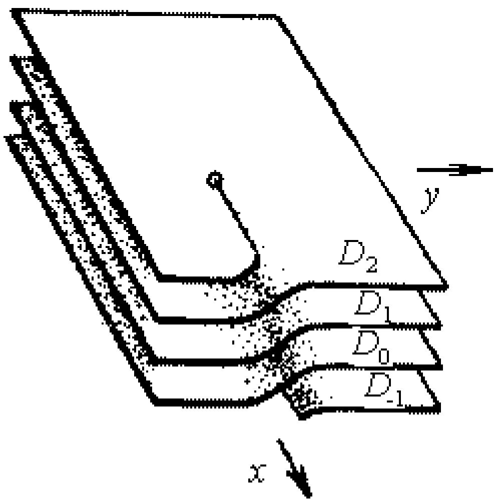

Рис.1. Риманова поверхность логарифма

Возьмём экземпляр комплексной плоскости (обозначим его D_0) и разрежем его по положительной части действительной оси. На верхнем берегу разреза определим комплексный логарифм как действительное число $\mathrm{Ln}x = \ln x$. Далее, обходя плоскость D_0 против часовой стрелки, получим на нижнем берегу разреза $\mathrm{Ln}x = \ln x + 2\pi i$. Возьмём ещё один экземпляр комплексной плоскости (обозначим D_1) с разрезом по положительной части действительной оси и приклеим верхний берег разреза D_1 к нижнему берегу разреза D_0. На D_1 аргумент продолжит возрастать, и на нижнем берегу разреза D_1 получим $\mathrm{Ln}x = \ln x + 4\pi i$. Далее подклеиваем лист D_2 и так далее до бесконечности. Теперь идём в другую сторону: подклеиваем верхний разрез D_0 к нижнему разрезу D_{-1}, на которой логарифм меняется от $\mathrm{Ln}x = \ln x$ до $\mathrm{Ln}x = \ln x - 2\pi i$. И, опять же, так далее до бесконечности. Получаем бесконечный в обе стороны штопор. На этом множестве логарифм однозначен.

6. Возведение комплексного числа в степень
Корни из комплексных чисел

Комплексная экспонента и комплексный логарифм позволяют нам возводить любое комплексное число в любую комплексную же степень:

$$z^w = e^{wLnz}$$

Например:

$$i^i = e^{iLni} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2}+2\pi in\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi n}$$

Так что i^i имеет бесконечное множество действительных значений, с одной стороны при $n \to +\infty$ стремящихся к нулю, а с другой, при $n \to -\infty$, стремящихся к бесконечности. Таким образом, комплексная степень имеет, вообще говоря, бесконечное множество значений.

Единственным исключением является ситуация, когда степень чисто действительная и рациональная. Тогда получим:

$$z^{p/q} = e^{p/q(ln|z|+i\varphi+2\pi ni)}$$

Видно, что n может принимать значения $n = 0, 1, \ldots, q - 1$, а далее при $n = q$ мы снова получим то же число, что и при $n = 0$ (поскольку к аргументу экспоненты будет прибавляться число $2\pi pi$, что кратно $2\pi i$).Так что корень q-той степени из любого комплексного числа имеет ровно q значений. Как они расположены на комплексной плоскости? Во-первых, они все имеют одинаковый модуль, равный корню из модуля числа, то есть, они лежат на окружности с центром в начале координат. Далее, углы между ними равны $2\pi/q$, то есть, они лежат в вершинах правильного q-угольника. Таким образом, алгоритм извлечения корня следующий: извлекаем корень из модуля подкоренного выражения, рисуем окружность этого радиуса, делим аргумент подкоренного выражения на q и откладываем этот угол от положительной половины действительной оси и ставим точку на окружности. Затем вписываем в окружность правильный q-угольник так, чтобы эта точка была одной из вершин. Например, извлечём корень 4-й степени из – 1. Модуль у неё равен единице, так что все значения корня лежат на единичной окружности. Аргумент у – 1 равен π, так что первый корень имеет аргумент $\pi/4$, второй $\pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$, третий $5\pi/4$, и четвёртый $7\pi/4$. Подставляя эти значения в тригонометрическую форму (4), получим $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$ (все возможные комбинации знаков). А вот на рисунке 2 изображены корни шестой степени из плюс единицы, которые суть ± 1; $\pm ½ \pm \sqrt{3}i/2$ (посчитайте сами).

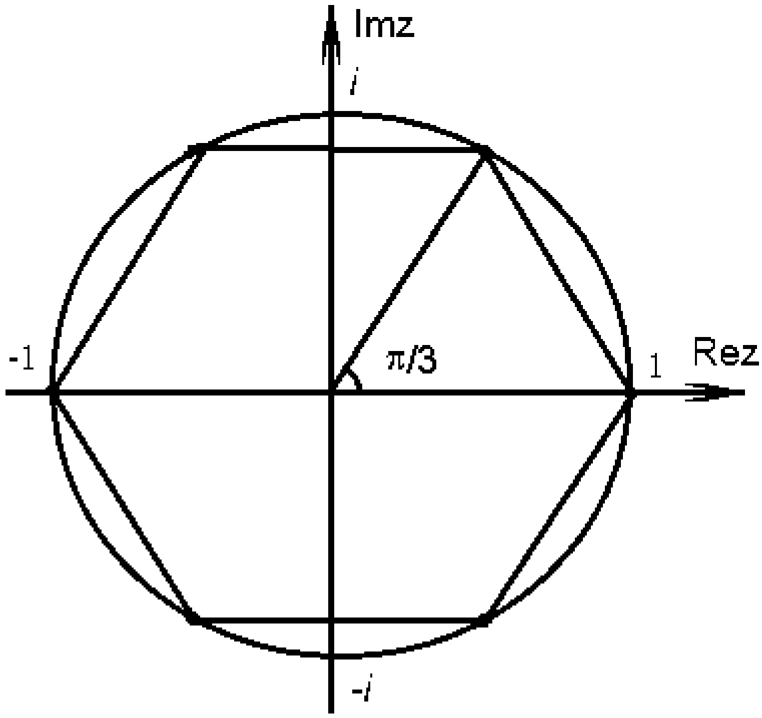

Рис. 2. Корни шестой степени из плюс единицы

Как устроена РП корня q-той степени? Возьмём q экземпляров комплексной плоскости с разрезами по положительной части действительной оси. На верхнем берегу разреза первого листа D_0 комплексный корень совпадает с действительным и имеет нулевой аргумент. При обходе нуля на D_0 против часовой стрелки к аргументу корня прибавляется $2\pi/q$, и на нижнем берегу разреза аргумент корня равен $2\pi/q$. К нижнему берегу D_0 пришивается верхний берег следующего листа D_1, на котором аргумент возрастает от $2\pi/q$ до $4\pi/q$. Опять же к нижнему берегу D_1 пришивается верхний берег D_2, на котором аргумент возрастает от $4\pi/q$ до $6\pi/q$. На последнем листе D_{q-1} аргумент возрастает от $2(q-1)\pi/q$ до $2q\pi/q = 2\pi$. Но аргумент 2π – это всё равно, что аргумент 0, поэтому нижний берег D_{q-1} сшивается с верхним берегом D_0. Говорят, что начало координат является точкой ветвления n-го порядка. На рисунке 3 ситуация изображена для случая $q = 3$. Следует только иметь в виду, что самопересечений, которые видны на рисунке 3, в действительности нет! Просто в трёхмерном пространстве такую РП нельзя изобразить без самопересечений (в четырёхмерном можно). На деле же РП существует как самостоятельный объект, не нуждающийся во вложении в какое либо пространство – рисунок 3 приведён исключительно для наглядности.

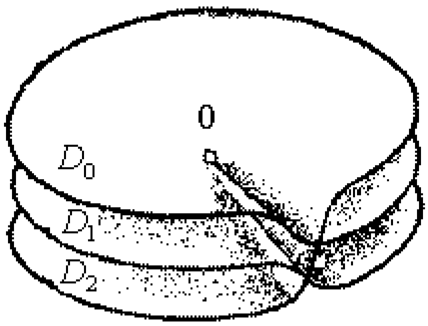

Рис. 3. Риманова поверхность кубического корня

Отметим, что точка ветвления всегда является особой точкой, даже если комплексная производная в ней существует! Например, у функции $z^{3/2}$ производная в нуле существует и равна нулю, но конформность нарушается (все углы умножаются на 3/2). Так что в особой точке функция может уходить на бесконечность (как $1/z$), либо ветвиться (как та же $z^{3/2}$), либо и то, и другое (как Lnz) – у всех них особая точка $z = 0$ разумеется. Существуют и более хитрые особые точки, как у функции $e^{1/z}$. Приближаясь к нулю по положительной части действительной оси, эта функция будет стремиться к бесконечности, по отрицательной – к нулю, а по мнимой оси – совершать бесконечно много колебаний между – 1 и + 1. Такие точки называются существенно особыми, так называемая большая теорема Пикара утверждает, что на любой сколь угодно малой окрестности существенно особой точки функция принимает все комплексные значения, кроме, может быть, одного (наша функция $e^{1/z}$ не принимает лишь нулевого значения). Доказательство этой теоремы весьма сложно и в стандартных курсах, вроде [3] и [4] не приводится.

7. Компактификация комплексной плоскости. Сфера Римана. Топология римановой поверхности и её связь с интегрированием в элементарных функциях

Задача компактификации комплексной плоскости впервые возникла при рассмотрении важного класса дробно-линейных отображений (ДЛО) комплексной плоскости:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)}; \qquad bc-ad \neq 0; \qquad z = \frac{b-dw}{cw-a} \quad (16)$$

Из формул (16) видно, что, во-первых, ДЛО образуют группу (композиция ДЛО тоже ДЛО, обратное ДЛО тоже ДЛО), и, во вторых, любое ДЛО является композицией линейного отображения (сводящегося к растяжению, повороту и сдвигу) и отображения инверсии $w = 1/z$. Заметим, что ДЛО не является взаимно-однозначным отображением: он определён во всех точках, кроме $z = -\,d/c$ (ноль в знаменателе) и принимает все значения, кроме $w = a/c$. Однако можно восстановить взаимно-однозначность отображения дополнив комплексную плоскость одной бесконечно-удалённой точкой $z = \infty$. Тогда при $z = \infty$ получим $w = a/c$, а при $z = -\,d/c$ получим $w = \infty$. Наглядно это можно себе представить с помощью стереографической проекции (см. рис. 4): каждой точке на сфере отвечает точка на плоскости, кроме самой верхней – она и отвечает бесконечно удалённой точке. Видно, что компактифицированная комплексная плоскость топологическипредставляет из себя сферу.Напоминаем, что два множества топологически эквивалентны, если существует взаимно-однозначное непрерывное отображение одного множества на другое, обратное к которому тоже непрерывно. Особое удобство использования сферы Римана состоит в том, что ДЛО переводит окружность в окружность – но только при условии, что прямая также считается окружностью с центром в бесконечно удалённой точке (подробнее см. [2] тема 21, а также [3] и [4]).

Как же будет выглядеть компактифицированная РП корня? Это будет q сфер, вложенных друг в друга, соединённых по разрезу, идущему из точки $z = 0$ в точку $z = \infty$. Каждая внешняя сфера нижним берегом разреза приклеена к верхнему берегу внутренней, а самая внутренняя приклеена к самой внешней –опять таки, без самопересечений! Что эта конструкция представляет из себя топологически? Обладая достаточным пространственным воображением, можно понять, что протащив эти сферы друг через друга, мы получим в результате просто сферу (можно доказать и формально с помощью формулы Римана-Гурвица – см. [2], тема 30).

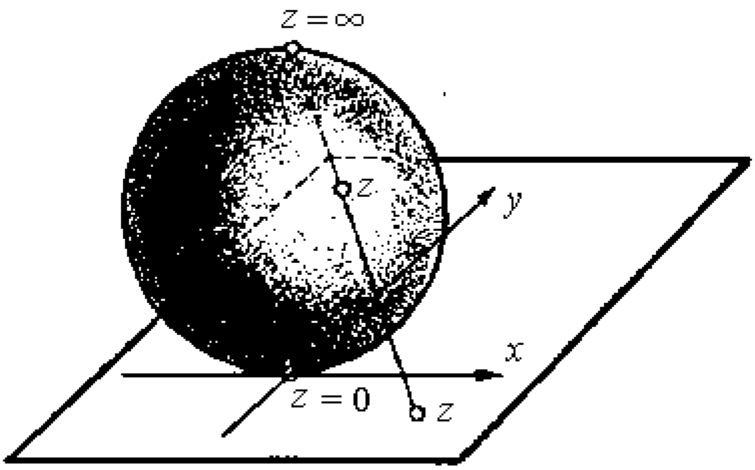

Рис. 4. Стереографическая проекция

Теперь рассмотрим физический пример, где построение РП позволит получить важное соотношение. Пусть частица движется по оси x в поле потенциала $U(x)$, представляющего из себя многочлен чётного порядка $2n$, где $n > 1$, растущий на бесконечности. Пусть при некотором значении энергии E_0, уравнение $U(x) = E_0$ имеет полный набор $2n$ действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$. Таким образом, частица может двигаться в n потенциальных ямах. Обозначим периоды колебаний в этих ямах $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Попробуем написать интеграл для T_i, и построить РП подынтегрального выражения. Для этого вспомним закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E_0; v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E_0 - U(x))}{m}}; dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}$$

$$T_i = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}} \qquad (17)$$

Двойка в (17) появилась потому, что полное колебание – это путь туда и обратно. Посмотрим на подынтегральное выражение. Под квадратным корнем стоит выражение, обращающееся в ноль во всех точках $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ (обращаю ваше внимание на то, что если в этих точках не обращается в ноль его производная – а это так, поскольку иначе корень был бы кратным, что невозможно – интеграл (17) заведомо сходится – подумайте, почему). Это означает, что каждая такая точка есть точка ветвления второго порядка. Таким образом, РП состоит из двух листов, соединённых крест-накрест n разрезами по отрезкам$[x_{2i-1}; x_{2i}]$. После компактификации получим 2 сферы, соединённые n разрезами. Отметим, что если бы многочлен имел нечётную степень $2n$ – 1, то разрезов бы было тоже n штук, просто один из них шёл бы в бесконечность (корень квадратный из многочлена порядка $2n$ ведёт себя на бесконечности в главном порядке как z^n, то есть как целая степень, поэтому ветвления в бесконечности нет, а вот корень из многочлена порядка $2n$ – 1 ведёт себя на бесконечности как $z^{n-½}$, то есть как полуцелая степень, поэтому ветвление в бесконечности есть). Теперь разберёмся со значениями подынтегральной функции. Двигаемся по первому листу РП. Пусть на верхнем берегу первого разреза $[x_1, x_2]$ подынтегральное выражение положительно (аргумент равен нулю). После обхода точки x_2 по часовой стрелке (см. рисунок 5) из аргумента подкоренного выражения (17) вычитается π, следовательно, из аргумента корня вычитается $\pi/2$, следовательно, к аргументу подкоренного выражения прибавляется $\pi/2$ (корень стоит в знаменателе). Так что между разрезами подынтегральное выражение чисто мнимое с положительной мнимой частью. После обхода x_3 снова прибавляется $\pi/2$, и на верхнем берегу второго разреза $[x_3, x_4]$ подынтегральное выражение действительно, но отрицательно. И так далее.

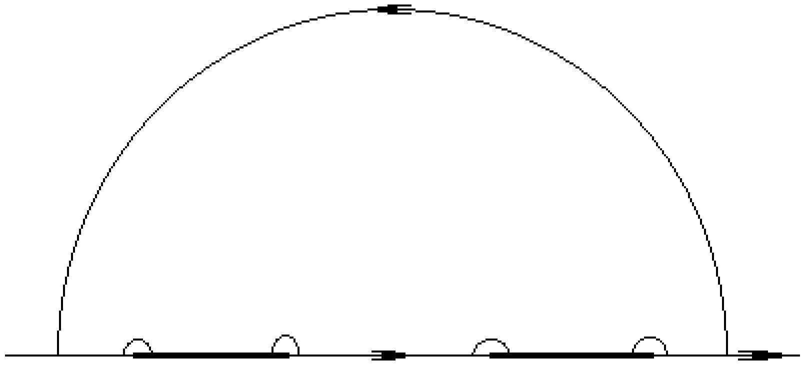

Рис. 5. Контур интегрирования на римановой поверхности выражения (17) (случай n = 2)

Воспользуемся без доказательства (его можно найти в [3] или [4]) одной теоремой комплексного анализа: если у голоморфной функции внутри контура нет особенностей, то интеграл по этому контуру равен нулю. Рассмотрим контур, изображённый на рисунке 5 – внутри него очевидно выражение (17) особенностей не имеет – и устремим радиусы маленьких полуокружностей к нулю, а большой – к бесконечности. Если большая полуокружность имеет радиус R, то подынтегральное выражение имеет порядок $1/R^n$, а сам интеграл порядок $1/R^{n-1}$, что стремится к нулю при$R \to \infty$. Так что в пределе интеграл по контуру перейдёт в интеграл по действительной оси и он будет равен нулю. Но действительная часть этого интеграла равна $\frac{1}{2}(T_1 - T_2 + \ldots)$ и она также должна быть равна нулю. Так что периоды колебаний в потенциальных ямах не независимы, а связаны соотношением $T_1 - T_2 + \ldots = 0$. В частности, при $n = 2$ получим$T_1 = T_2$.

Какова топология РП рассмотренного примера?Если мы протащим внутреннюю сферу через внешнюю, то на месте каждого разреза возникнет перемычка между сферами. Так что топологически это будет сфера с (n – 1)-ой ручкой. При n = 2 получим тор – поверхность бублика.Сопоставим это с тем известным вам фактом, что интегралы с корнями квадратными из многочленов первой и второй степени всегда берутся в элементарных функциях (подстановки Эйлера – см. [2], тема 6), а вот из многочленов больших степеней – в общем случае нет (берутся, но только если у многочлена есть кратные корни, что автоматически упрощает топологическое строение РП и приводит к появлению особых точек на кривой). Оказывается это взаимосвязанные вещи – интеграл можно взять в элементарных функциях только если РП подынтегральной функциитопологически является сферой.

8. Проективная плоскость. Уникурсальность кривой и ее связь с топологией римановой поверхности

В этом разделе мы рассмотрим другую компактификацию плоскости – проективную. Она необходима для восстановления однозначности проективных преобразований. Пусть мы взяли 2 плоскости в трёхмерном пространстве и из некоторой точки (не принадлежащей плоскостям) проектируем одну плоскость на другую. Ясно, что линии, параллельные одной из плоскостей, но пересекающие другую нарушают взаимную однозначность отображения. Для этого добавляют к плоскости бесконечно удалённые точки (бесконечно удалённая прямая – проективная прямая, имеющая свою бесконечно удалённую точку и топологически являющаяся окружностью) – по одной для каждой системы параллельных прямых. Каждая система параллельных прямых пересекается в своей бесконечно удалённой точке.

Как топологически устроена проективная плоскость? Возьмём трёхмерное пространство и семейство прямых, проходящих через начало координат. Каждой прямой отвечает точка проективной плоскости. Любая прямая, проходящая через начало координат пересекает половину сферы с центром в начале координат в одной точке, кроме границы полусферы, где каждой прямой соответствуют две диаметрально противоположные точки. Поэтому надо взять полусферу и склеить диаметрально противоположные точки её границы. В результате получится фигура, изображённая на рисунке 6. К сожалению, её невозможно расположить в трёхмерном пространстве без самопересечений (которых в действительности нет), поэтому на рисунке она изображена не совсем адекватно.

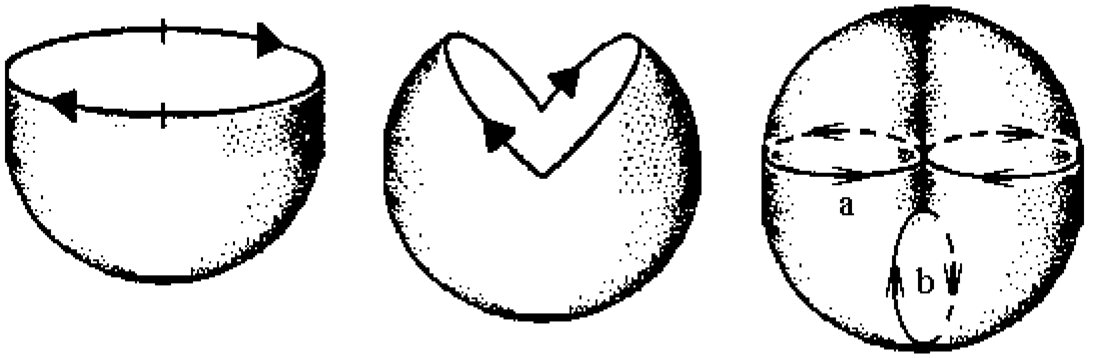

Рис. 6. Топология проективной плоскости

Отметим любопытное свойство проективной плоскости – она является односторонней поверхностью – из любой точки мы можем непрерывно перемещаясь вдоль поверхности прийти в ту же точку но с другой стороны. Поэтому у неё не две стороны (как, например, у сферы – внутренняя сторона и внешняя) а всего одна. Замкнутый контур может быть расположен на проективной плоскости двумя топологически неэквивалентными способами: первое расположение (контур a на рисунке 5) разбивает проективную плоскость на два куска – один (верхний на рисунке 5) топологически эквивалентен диску (он считается внутренней областью), а второй (нижний на рисунке 5) – ленте Мебиуса – перекрученной склеенной полоске, которая также имеет только одну сторону (внешняя область); второе расположение (контур b на рисунке 5) не разбивает проективную плоскость – после разрезания по нему получается один диск.

Неособая кривая (то есть не имеющая особых точек, в которых $\partial P/\partial x = \partial P/\partial y = 0$) на проективной плоскости $P(x, y) = 0$ может иметь неразбивающую компоненту (только одну – любые два неразбивающих контура пересекаются по топологическим причинам, а самопересечение – особая точка) и некоторое количество разбивающих (называемых овалами). Алгебраическая кривая (то есть $P(x, y)$ – многочлен) нечётного порядка на проективной плоскости обязательно содержит одну неразбивающую компоненту, а кривая чётного порядка всегда состоит только из овалов. Напоминаем, что порядок слагаемого многочлена равен сумме степеней у x и y, а порядок многочлена – максимальному порядку своего слагаемого. Теорема Харнака (см. [2], тема 26) утверждает, что количество компонент неособой алгебраической кривой порядка n может принимать любое значение от 0 (чётная степень) или 1 (нечётная степень) до $(n^2 - 3n + 4)/2$. Однако теорема Харнака ничего не говорит о возможном взаимном расположении овалов (овал может лежать в другом овале, а может снаружи). Задача перечисления всех возможных взаимных расположений овалов алгебраической кривой заданной степени носит название шестнадцатой проблемы Гильберта. Проблемы Гильберта – список из 23 нерешённых проблем, сформулированный великим математиком Давидом Гильбертом на втором международном математическом конгрессе в 1900 году в качестве своеобразного математического завещания 19 века веку 20-му. В настоящее время нерешёнными остались только 8-я («гипотеза Римана» – см. [2], тема 58) и рассматриваемая 16-я, решённая только для кривых степени ≤ 8 (см. [2], темы 13 и 26).

На рисунке 7 изображен случай гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Видно, что ветви гиперболы замыкаются в двух бесконечно удалённых точках, и гипербола представляет из себя овал. При этом полоса между рогами гиперболы склеится, перекрутившись, и станет лентой Мебиуса (внешняя область), а области справа и слева склеятся в диск (внутренняя область).

Если кривая состоит из одной компоненты, то её называют уникурсальной – её можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги. Гипербола и парабола уникурсальны – они состоят из одного овала, как и эллипс, только по разному лежат относительно бесконечно удалённой прямой. Эллипс не пересекается с ней, парабола касается её в одной точке, а гипербола пересекается с ней в двух точках. Так вот, если соответствующая РП топологически является сферой, то кривая обязательно будет уникурсальной (кривые второго порядка именно таковы), а если нет – то может быть, а может и не быть.

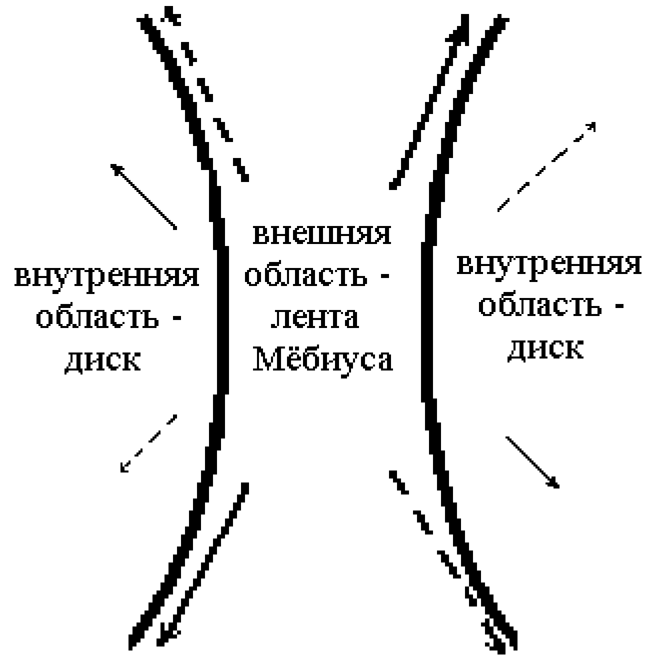

Рис. 7. Гипербола на проективной плоскости

Например РП кубической кривой $y^2 = x^3 + ax + b$ (если она неособая, что будет тогда, когда у кубического многочлена в правой части нет кратных корней) является тором (два листа, 4 точки ветвления второго порядка – три корня уравнения $x^3 + ax + b = 0$ и бесконечно удалённая точка). Тор может пересекаться с действительной плоскостью либо неразбивающим образом (то есть тор не развалится на два куска после разрезания), тогда кривая будет одним овалом и будет уникурсальна, либо разбивающим образом (тор развалится на два куска), тогда будет два овала и кривая не уникурсальна. Ситуация изображена на рисунке 8 (может показаться, что при продолжении плоскости на рисунке 8(1) она обязательно пересечётся с тором по ещё одной окружности, однако это связано с тем, что мы вынуждены рисовать в трёхмерном пространстве, а пространство комплексных переменных (x, y) четырёхмерно).

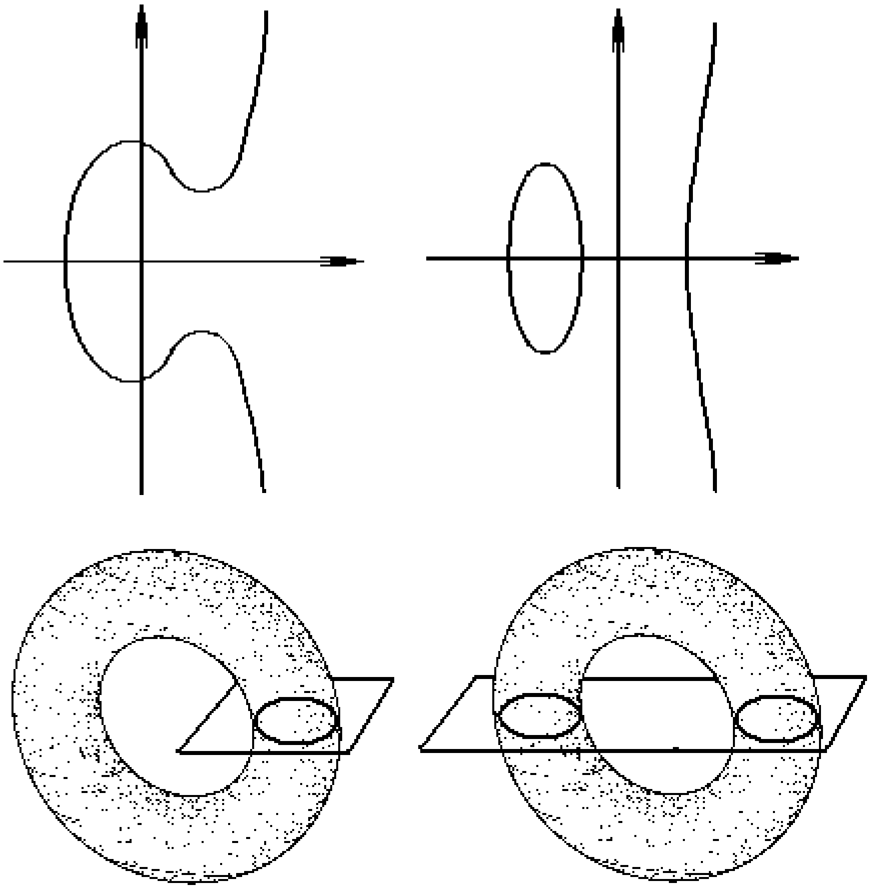

Рис. 8. Кубические кривые и соответствующие римановы поверхности 1. Уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет 1 действительный корень, сечение неразбивающее, кривая уникурсальна. 2. Уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет 3 действительных корня, сечение разбивающее, кривая неуникурсальна

Теорема Гурвица утверждает, что РП не имеющей особых точек (комплексных, не обязательно действительных!) кривой n-го порядка топологически является сферой с $(n - 1)(n - 2)/2$ ручками (число ручек называется родом кривой), а наличие особых точек уменьшает это число (см. [2], тема 30). Примером неособой кривой может служить $x^n + y^n = 1$, связанная с великой теоремой Ферма (доказанной Эндрю Уайльдсом в 1995 году), которая утверждает, что при $n > 2$ на этой кривой нет рациональных точек кроме (±1, 0) и (0, ±1). Видно, что максимальное количество действительных компонент кривой (см. выше теорему Харнака) на единицу больше максимального рода кривой, чего вообще то и следовало ожидать – с действительной плоскостью могут пересекаться сама сфера и все её ручки.

Приведём пару цитат из воспоминаний В.И.Арнольда: «Когда я учился на первом курсе мехмата МГУ, лекции по анализу читал теоретико-множественный тополог Л.А. Тумаркин, добросовестно пересказывающий старый классический курс анализа французского образца, типа Гурса. Он сообщил нам, что интегралы от рациональных функций вдоль алгебраической кривой берутся, если соответствующая риманова поверхность – сфера, и, вообще говоря, не берутся, если род ее выше, и что для сферичности достаточно существования на кривой данной степени достаточно большого числа двойных точек (вынуждающих кривую быть уникурсальной: ее вещественные точки можно нарисовать на проективной плоскости единым росчерком пера). (Имеются в виду интегралы вида $\int R(x, y)\, dx$, где R – рациональная функция – отношение двух многочленов – С.В.Ф.) Эти факты настолько поражают воображение, что (даже сообщенные без всяких доказательств) дают большее и более правильное понятие о современной математике, чем целые тома трактата Бурбаки. Ведь мы узнаем здесь о существовании замечательной связи между вещами на вид совершенно различными: существованием явного выражения для интегралов и топологией соответствующей римановой поверхности, с одной стороны, а с другой стороны – между числом двойных точек и родом соответствующей римановой поверхности, проявляющемся вдобавок в вещественной области в виде уникурсальности.».

Ещё одна цитата: «Римановы поверхности считал вершиной математики ещё основатель Московского Математического общества Н. Бугаев (отец Андрея Белого). Он, правда, считал, что в современной ему математике конца XIX века начали появляться не укладывающиеся в русло этой старой теории объекты – неголоморфные функции действительных переменных, являющиеся, по его мнению, математическим воплощением идеи свободной воли в той же мере, в какой римановы поверхности и голоморфные функции воплощают идею фатализма и предопределённости. В результате этих размышлений Бугаев послал молодых москвичей в Париж, чтобы они выучились там новой "математике свободной воли" (у Бореля и Лебега). Эту программу блестяще выполнил Н. Н. Лузин, создавший по возвращении в Москву блестящую школу, включающую всех основных московских математиков многих десятилетий: Колмогорова и Петровского, Александрова и Понтрягина, Меньшова и Келдыш, Новикова и Лаврентьева, Гельфанда и Люстерника».

Подробнее см. [2], темы 4, 13, 16.

9. Комплексные тригонометрические и обратные тригонометрические функции

Для того чтобы определить комплексные синус и косинус, используем формулу Эйлера (13) для аргументов φ и – φ:

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi \\ e^{-i\varphi} = cos\varphi - isin\varphi \end{cases}; \begin{cases} cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\ sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases} \quad (18)$$

Можно также записать через гиперболические функции: cos φ = ch$i$φ, sin φ = – $i$sh$i$φ. Напоминаем определение гиперболических функций:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; ch^2x - sh^2x = 1$$

Нетрудно заметить, что комплексные синус и косинус также 2π-периодичны, но только по действительной оси. Поскольку:

$$sin\left(\pm\frac{\pi}{2} + ix\right) = \frac{e^{\pm\frac{i\pi}{2}-x} - e^{\mp\frac{i\pi}{2}+x}}{2i} = \frac{\pm ie^{-x} \pm ie^{x}}{2i} = \pm chx$$

и sinix = $i$sh$x$, то комплексный синус отображает полуполосу– π/2 ≤ Rez ≤ π/2; Imz> 0 на верхнюю полуплоскость. Полуполоса же с Imz< 0 отобразится на нижнюю полуплоскость. Таким образом, вся полоса – π/2 ≤ Rez ≤ π/2 отобразится на всю комплексную плоскость с разрезами из – ∞ в – 1 и из 1 в + ∞ (на первый разрез отобразится граница полосы с Rez = – π/2, на второй – с Rez = π/2).

Можно также ввести тангенс и котангенс:

$$tg\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}; ctg\varphi = \frac{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$$

Поскольку комплексные тригонометрические функции выражаются через комплексную экспоненту, обратные тригонометрические функции должны выражаться через комплексный логарифм. Вначале рассмотрим комплексный арксинус:

$$w = Arcsinz; z = sinw = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}; (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0;$$

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}; w = \frac{1}{i} Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \qquad (19)$$

Подсчитаем, например Arcsin2:

$$Arcsin2 = \frac{1}{i} Ln\left(i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right) = \frac{1}{i} Ln\left(\left(2 \pm \sqrt{3}\right)e^{\frac{i\pi}{4} + 2\pi in}\right) =$$

$$= -iln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

Попробуем взять производную от (19):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{i + \frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{i\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)} = \frac{i\sqrt{1 - z^2} - z}{\sqrt{1 - z^2}\left(-z + i\sqrt{1 - z^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

Как видим, получилась известная производная для действительного арксинуса.

Арксинус также представляет собой бесконечнозначную функцию, причём бесконечное значение логарифма «удваивается» за счёт двух значений корня. Построим РП арксинуса (см. рис. 9).

Возьмём лист D_0 с разрезами из – ∞ в – 1 и из 1 в + ∞ (см. выше) и зададим на нём арксинус с действительной частью – π/2 ≤ ReArcsinz ≤ π/2. Разрез из 1 в + ∞ отвечает прямой ReArcsinz = π/2. Возьмём второй лист D_1 и приклеим его крест-накрест по разрезу из 1 в + ∞ к листу D_0. Лист D_1 соответствует полосе π/2 ≤ ReArcsinz ≤ 3π/2. Далее к листу D_1 приклеивается крест-накрест лист D_2 но уже по разрезу – ∞ в – 1 (поскольку sin(x + π) = – sin$x$). Лист D_2 отвечает полосе 3π/2 ≤ ReArcsinz ≤ 5π/2. И так далее до бесконечности и так же в другую сторону. В бесконечности имеем две бесконечных спирали, такие как у логарифма. Это легко понять, обходя вокруг обеих точек ветвления на рис. 9. Видно, что с листа D_0 мы попадём на D_2, а с D_1 на D_3. Так что одной спиралью соединеныD_n с чётными n, а другой – с нечётными.

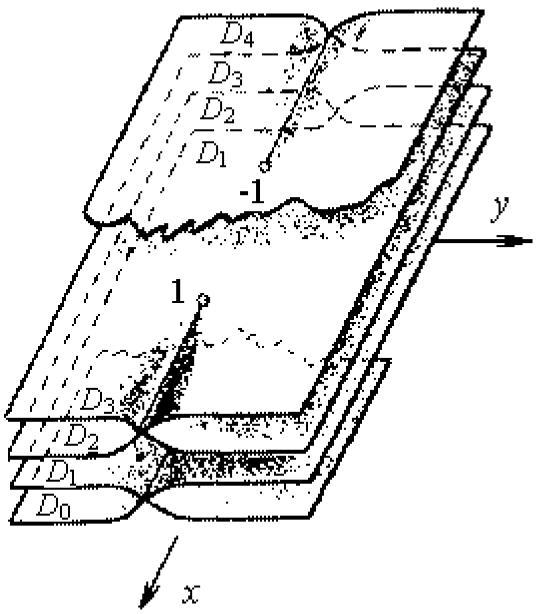

Рис. 9. Риманова поверхность арксинуса

Как ни странно, в классическом учебнике Лаврентьева и Шабата [3] ошибочно утверждается, что у РП арксинуса спираль в бесконечности только одна (стр. 103). Это тем более странно, поскольку в учебнике Шабата [4] всё написано правильно (стр. 174). Книга [3] предназначена для физиков и инженеров – в ней не делается упора на математическую строгость, зато приведено большое количество практических примеров применения комплексного анализа (задачи теории упругости, гидродинамики и газовой динамики, расчёт электрических цепей, теория куммулятивного взрыва и т. д.). Учебник [4] предназначен для математиков, в нём изложение более строгое. Кроме того в [4] помимо теории функций одного комплексного переменного изложена также теория функций нескольких комплексных переменных. В отличие от теории одного переменного, в основных чертах законченной ещё в конце 19 века, теория нескольких переменных – ещё пока становящаяся дисциплина, в которой вопросов больше чем ответов. Автор в своей кандидатской диссертации (1993 год) пытался применять теорию функций нескольких комплексных переменных в квантовой физике твёрдого тела – без особого успеха именно из-за слабой развитости аппарата теории нескольких переменных.

Теперь разберёмся с арктангенсом:

$$w = Arctgz; z = tgw = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}; e^{-iw}(1 + iz) = e^{iw}(1 - iz);$$

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}; w = Arctgz = \frac{1}{2i} Ln \frac{1+iz}{1-iz} \qquad (20)$$

Продифференцируем (20):

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1 + iz} + \frac{i}{1 - iz}\right) = \frac{1}{1 + z^2}$$

Видно, что получилась обычная действительная производная арктангенса.

РП арктангенса построить проще, чем арксинуса. В (20) под логарифмом стоит дробно-рациональная функция, которая не имеет точек ветвления. Поэтому будут только точки ветвления логарифма: 0 и ∞, которые будут достигаться при соответственно $z = i$ и $z = -i$. Поэтому РП будет состоять из бесконечного количества листов, соединённых лесенкой по разрезам [$-i$;i].

Вышеизложенная теория комплексных экспоненты, логарифма, тригонометрических и обратных тригонометрических функций (кроме римановых поверхностей) была построена великим Леонардом Эйлером в серии работ 1740-1749 годов. Впоследствии Эйлер развил теорию дифференциального и начала интегрального исчисления функций комплексного переменного, а также впервые применил эту теорию в гидродинамике и картографии.

10. Многочлены над полем комплексных чисел Основная теорема алгебры Разложение многочлена на множители

В этом разделе мы рассмотрим кольцо многочленов, у которых и коэффициенты и переменная являются, вообще говоря, комплексными числами:

$$w = P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (21)$$

Напомним, что кольцо – это множество, в котором можно складывать, вычитать, умножать, но, вообще говоря, нельзя делить. Единицами кольца называются обратимые элементы, на которые всегда можно делить. В кольце многочленов единицами являются многочлены нулевого порядка, то есть константы (кроме нуля конечно). Далее, введём понятие нормы кольца. Норма – это функция, заданная на элементах кольца $|x| \geq 0$ (причём $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$), обладающая следующим свойством: если $x \div y$ (то есть x делится на y нацело), то $|x| \geq |y|$. В кольце многочленов в качестве нормы можно взять a^n, где $a > 1$ – некоторое фиксированное число, а n – степень многочлена. Она даже обладает более сильным свойством: норма произведения равна произведению норм. Далее, нормированное кольцо называют евклидовым, если оно допускает деление с остатком. Это означает, что если $|x| \geq |y|$, то можно найти такие элементы p и q, что $x = py + q$, $|y| > |q|$. Кольцо многочленов является евклидовым – доказательством является известный вам со школы алгоритм деления многочленов столбиком. Почему евклидовость кольца так важна? Оказывается, евклидовы кольца по своим свойствам очень похожи на кольцо целых чисел. В евклидовом кольце любые два элемента кольца x и y имеют наибольший общий делитель (НОД) d, который может быть выражен как комбинация $d = ax + by$, где a и b – тоже элементы кольца. Также каждый элемент евклидового кольца единственным образом представляется в виде произведения простых элементов (то есть таких, которые делятся только на единицы кольца), то есть в евклидовом кольце выполнена основная теорема арифметики. Единственность разложения рассматривается с точностью до домножения каждого элемента на какую-либо единицу кольца. Подробнее о кольцах см. [2], тема 27.

Как уже упоминалось во введении, введение комплексных чисел позволяет решить проблему алгебраической замкнутости.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен над полем комплексных чисел имеет хотя бы один корень.

Эскиз доказательства. Мы здесь дадим лишь эскиз доказательства. Его можно развернуть в полное и строгое доказательство, однако это долго и хлопотно. Можете его посмотреть в книге [5], где оно расположено на страницах 127-154. Будем считать, что свободный член многочлена (21) $a_n \neq 0$ (в противном случае у многочлена имеется корень $z = 0$). Рассмотрим на плоскости переменной z окружность малого радиуса ε с центром в нуле. На плоскости w она перейдёт в замкнутую кривую, расположенную в районе точки $w = a_n$. Мы можем выбрать радиус окружности ε настолько малым, чтобы её образ на плоскости w отстоял от точки $w = a_n$ настолько мало, чтобы он заведомо не достигал точки $w = 0$. Можно провести и точные оценки – нужно чтобы:

$$|a_0|\varepsilon^n + |a_1|\varepsilon^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|\varepsilon < |a_n|$$

Для этого достаточно, например:

$$\varepsilon < MIN\left\{\frac{|a_n|}{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}, 1\right\}$$

Таким образом, точка $w = 0$ заведомо лежит вне контура. Далее, начнём увеличивать радиус окружности на плоскости z. При этом контур на плоскости w будет непрерывно деформироваться. Когда радиус окружности на плоскости z станет очень большим, характер кривой на плоскости w будет определяться главным слагаемым a_0z^n. Если отбросить все остальные слагаемые, то контур на плоскости w будет окружностью радиуса $|a_0||z|^n$, пробегаемойn раз (поскольку при возведении в степень n аргумент умножается на n). Остальные слагаемые исказят окружности, но характер кривой останется таким же: кривая, охватывающая точку $w = 0$ n раз. Итак, контур вначале не содержал точку $w = 0$ внутри себя, а затем, в процессе непрерывной деформации стал содержать. Ясно, что в какой то момент деформации точка $w = 0$ должна пересечь контур, то есть на окружности на плоскости z должна содержать точку, которая переходит в точку $w = 0$. Это и есть корень уравнения.

Заметим, что, несмотря на своё название, доказательство теоремы аналитическое – оно активно использует соображения непрерывности. Для наведения строгости нужно строго определить, что значит контур охватывает точку (ввести и изучить так называемый индекс точки относительно кривой) и доказать, что при непрерывной деформации без попадания точки на контур индекс не меняется.

Для доказательства теоремы о разложении, вначале вспомним одну школьную теорему:

Теорема Безу. Если z_1 – корень многочлена $P_n(z)$, то этот многочлен нацело делится на $z - z_1$.

Доказательство. Поделим $P_n(z)$ на $z - z_1$ с остатком: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_1) + C$. Подставив в это равенство $z = z_1$, получим $C = 0$.

На самом деле то, что мы только что доказали – простейший частный случай теоремы Безу. Общую формулировку можно посмотреть в [1], тема 26.

Теорема о разложении. Любой многочлен представляется в виде:

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}; \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n \qquad (22)$$

Здесь $z_1, \dots, z_k$ – корни многочлена, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – их кратности. Другими словами простыми элементами кольца многочленов с комплексными коэффициентами являются все многочлены первого порядка и только они.

Доказательство. Согласно основной теореме алгебры, у многочлена $P_n(z)$ имеется корень z_1. Согласно теореме Безу многочлен нацело делится: $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_1)$. Далее с многочленом $Q_{n-1}(z)$ поступаем так же. Каждый раз степень многочлена понижается на единицу, пока не станет равна единице.

Таким образом, у многочлена максимально может быть столько корней, какова его степень. Это хорошо согласуется с доказательством основной теоремы алгебры: для того, чтобы контур n раз охватил точку, она должна пересечь его n раз. Но как тогда быть с кратными корнями? Получается, что в результате одного пересечения точкой контура, контур станет охватывать её несколько раз. Как такое возможно? Ответ показан на рисунке 10 – это кривые на плоскости w, являющиеся образами окружностей $|z| = 0{,}7$; $|z| = 1$ и $|z| = 1{,}3$ для многочлена $(z - 1)^2$ (у которого очевидно $z = 1$ является корнем второй кратности). Видно, что в момент пересечения точкой контура она является особой точкой – остриём клюва, который распускается потом в петлю (об особенностях и их распусканиях см. [2], тема 13).

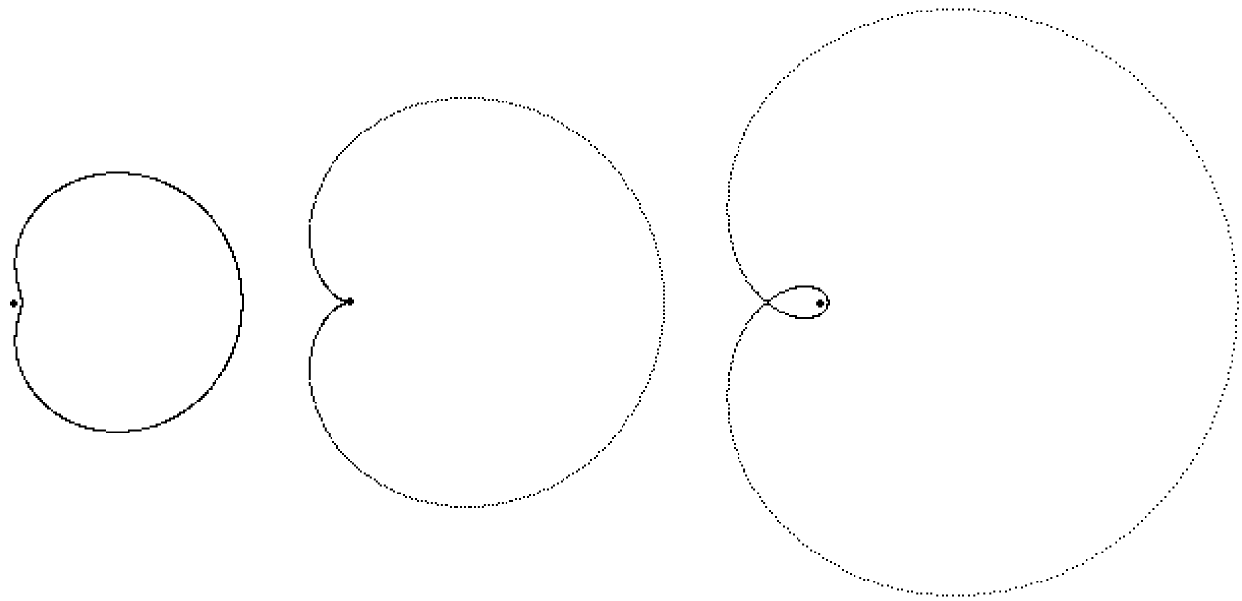

Рис. 10. Образы окружностей $r = |z| = 0{,}7;\ 1;\ 1{,}3$
при отображении $w = (z - 1)^2$. Точкой показана $w = 0$

Однако на практике у многочленов часто бывают действительные коэффициенты и разложить их нужно на действительные множители.

Теорема. Если многочлен $P_n(z)$ имеет действительные коэффициенты, то если он имеет комплексный (с ненулевой мнимой частью) корень z_1, то сопряжённое число к z_1 тоже является корнем и, следовательно, многочлен нацело делится на квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом:

$$(z - z_1)(z - \overline{z_1}) = z^2 - 2Re(z_1)z + |z_1|^2 \qquad (23)$$

Доказательство. Используем свойства комплексного сопряжения (см. выше) и тот факт, что сопряжённое к действительному числу – оно же само:

$$0 = \overline{P_n(z)} = \overline{a_0 z^n + \cdots + a_n} = \overline{a_0}\bar{z}^n + \cdots + \overline{a_n} =$$

$$= a_0 \bar{z}^n + \cdots + a_n = P_n(\bar{z})$$

Так что разложение многочлена с действительными коэффициентами на действительные множители может иметь сомножители двух типов: типа (22) для действительных корней, и типа (23) для комплексных (они тоже могут стоять в разложении в какой-либо степени β – в случае кратных корней). Они и только они являются простыми элементами кольца многочленов с действительными коэффициентами.

Например, разложим на множители многочлен $z^4 + 1$. Его корни – корни четвёртой степени изминус единицы мы уже находили выше: $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$. Таким образом имеем: $z^4 + 1 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$ (перемножьте и убедитесь).

11. Разложение рациональной дроби на простейшие

Рассмотрим рациональную дробь – отношение двух многочленов $Q_m(z)/P_n(z)$. Также как и числовые дроби, рациональная дробь может быть правильной (при $m<n$) и неправильной ($m \geq n$). Из неправильной дроби можно выделить целую часть (посредством деления уголком) и получить правильную. Так что будем считать $m<n$. Для разложения дроби на простейшие вначале необходимо разложить знаменатель на множители. Как мы уже знаем, множители будут двух типов – тип (22) и тип (23). Каждому множителю отвечают свои простейшие. Именно множителю $(z - z_1)^\alpha$ отвечают простейшие:

$$\frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{(z - z_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(z - z_1)^\alpha}$$

Если корень не кратный ($\alpha = 1$) слагаемое будет только одно. Множителям же типа (23) $(z^2 + pz + q)^\beta$ отвечают простейшие:

$$\frac{B_1 z + C_1}{z^2 + pz + q} + \frac{B_2 z + C_2}{(z^2 + pz + q)^2} + \cdots + \frac{B_\beta z + C_\beta}{(z^2 + pz + q)^\beta}$$

Опять же, если корни не кратные ($\beta = 1$) слагаемое будет только одно. Для того чтобы разложить дробь на простейшие, необходимо записать сумму всех простейших отвечающих всем множителям, привести к общему знаменателю и приравнять исходной дроби. Приравнивая коэффициенты при всех степенях в числителях, получим систему линейных уравнений на неизвестные A, B и C. Подсчитаем, сколько у нас неизвестных и сколько уравнений. Множитель $(z - z_1)^{\alpha}$ имеет степень α и ему отвечает α неизвестных. Множитель $(z^2 + pz + q)^{\beta}$имеет степень 2β и ему отвечает 2β неизвестных. Поскольку степень многочлена в знаменателе равна сумме степеней сомножителей, общее количество неизвестных будет равно степени многочлена $P_n(z)$, то есть n.В числителе будет стоять многочлен (n– 1)-ой степени, а у него n коэффициентов. Таким образом, у нас система из n линейных уравнений с n неизвестными. Если определитель матрицы коэффициентов такой системы не равен нулю, она всегда имеет единственное решение. Можно показать, что в нашем случае этот определитель всегда ненулевой, но мы не будем здесь проводить необходимые выкладки (это несколько канительно). Так что задача разложения дроби на простейшие всегда имеет единственное решение.Разберём пример:

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+1} =$$
$$= \frac{A(z^2-z+1)+(Bz+C)(z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} =$$
$$= \frac{(A+B)z^2+(-A+B+C)z+(A+C)}{(z+1)(z^2-z+1)}$$

Приравнивая числители, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0; \\ A+C=1 \end{cases} \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=2/3 \end{cases}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{z-2}{z^2-z+1}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адамар Жак.** Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М.: Советское радио, 1970. – 152 с. (имеется в html-формате на www.ega-math.narod.ru).

2. **Фролов С.В., Багаутдинова А.Ш.** Высшая математика. Этюды по теории и приложениям. – СПб.: ГИОРД, 2012. – 612 с. (Имеется в библиотеке, шифр Б27 404).

3. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1965. – 716 с. (имеется в djvu-формате на www.eqworld.ipm.net).

4. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1961. – 571 с. (имеется в djvu-формате на www.eqworld.ipm.net).

5. **Стинрод Н., Чинн У.** Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967. – 224 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Фролов Сергей Владимирович

ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Р.А. Сафарова

Компьютерная верстка
И.В. Гришко

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 12.12.2013. Формат 60×84×1/16
Усл. печ. л. 2,56. Печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 2,5
Тираж 70 экз. Заказ № С 93

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9