МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

А.Ю. Григорьев, Д.П. Малявко, Л.А. Фёдорова

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2014

УДК 531.8

Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Фёдорова Л.А. Сферическое движение твёрдого тела: Учебн.-метод. пособие. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 37 с.

Приводятся методические указания для исследования сферического движения твердых тел, подробно рассматриваются примеры исследования движения тел с одной неподвижной точкой.

Для студентов направлений 141200, 190600, 220700, 151000, 140700 всех форм обучения.

Рецензент: доктор техн. наук, проф. В.А. Арет

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

1. Углы Эйлера. Уравнения сферического движения твёрдого тела

Движение тела, имеющего одну неподвижную тоску, называют сферическим движением или вращением тела вокруг неподвижной точки. Первый термин объясняется тем, что все точки тела движутся по поверхностям сфер, общий центр которых совпадает с неподвижной точкой. Примером такого движения может служить движение волчка, остриё которого остаётся неподвижным, или движение твёрдого тела, единственной связью которого является сферический шарнир. В ряде технических приложений (конические колёса, большинство гироскопических приборов) приходится иметь дело с вращением тела вокруг неподвижного центра.

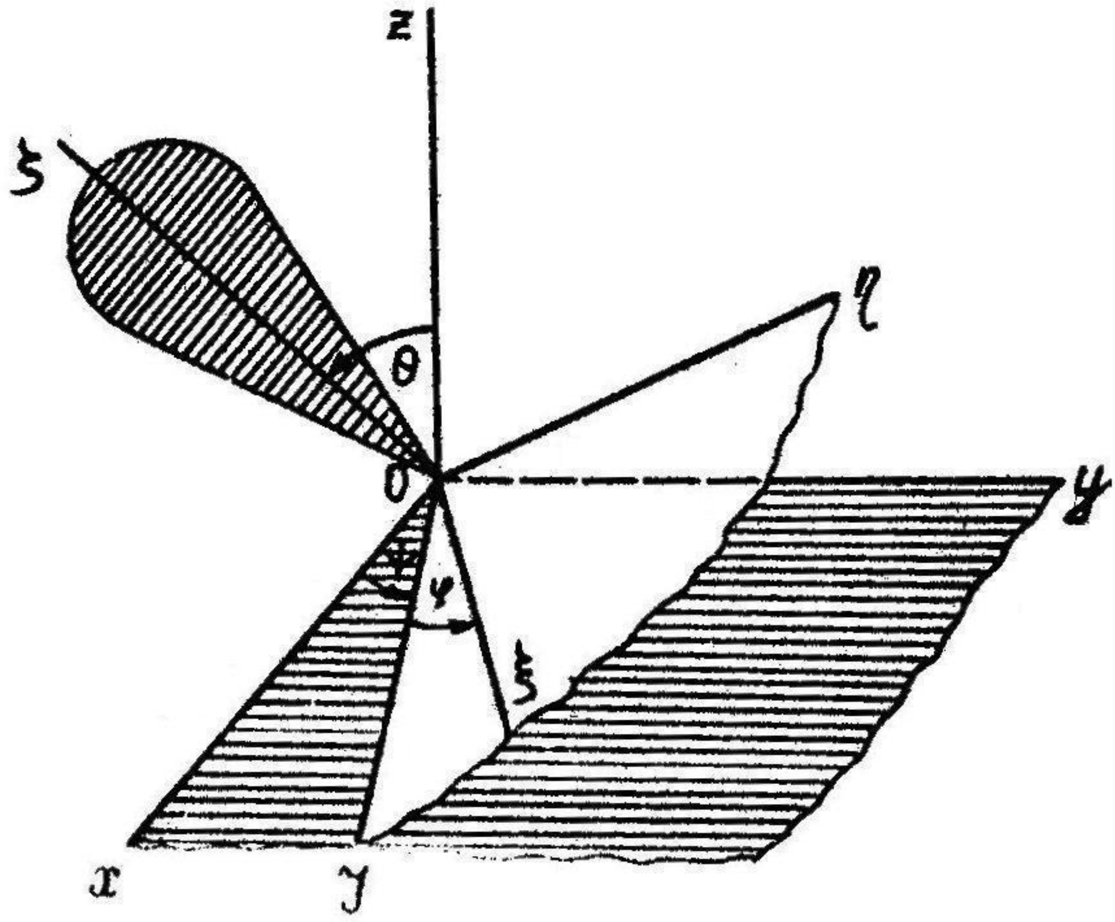
Твёрдое тело с одной закреплённой точкой имеет 3 степени свободы. Три параметра, определяющие положение такого тела относительно неподвижной системы координат $0xyz$ (рисунок 1), могут быть выбраны различными способами. В теоретической механике положение тела с одной неподвижной точкой определяют при помощи углов Эйлера: угла процессии ψ, угла нутации θ, угла собственного вращения φ (рисунок 1).

Сферическое движение твёрдого тела описывается уравнениями: $\psi = f_1(t)$; $\theta = f_2(t)$; $\varphi = f_3(t)$.

Зная три функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, можно в любой момент времени найти положение системы координат $0\xi\eta\zeta$, а следовательно, и положение твёрдого тела, связанного с ней.

2. Мгновенная ось вращения. Угловая скорость тела. Определение положения мгновенной оси вращения

Чтобы определить кинематические характеристики твёрдого тела, совершающего сферическое движение, и отдельных его точек, необходимо помнить, что, в соответствии с теоремой Эйлера-Даламбера, твёрдое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку. Упомянутую ось называют осью конечного вращения, а угол, на который поворачивается тело вокруг оси конечного вращения, называется углом конечного вращения. Положение оси конечного вращения зависит от начального и конечного положений тела.



Углы Эйлера:

$Oxyz$ - неподвижная система координат

$O\xi\eta\zeta$ -система координат, неизменно связанная с твёрдым телом;

OJ - линия узлов.

Рис. 1

Рассмотрим малый промежуток времени $t_2 - t_1 = \Delta t$, которому соответствует поворот тела на угол $\Delta\alpha$. Уменьшая величину промежутка времени Δt, получаем ряд положений оси конечного вращения. Предельное положение этой оси Ω при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной осью вращения тела для данного момента времени t (рис.2).

Предел, к которому стремится отношение $\Delta\alpha / \Delta t$, когда Δt стремится к нулю, называется угловой скоростью твёрдого тела в момент времени t (мгновенной угловой скоростью тела)

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

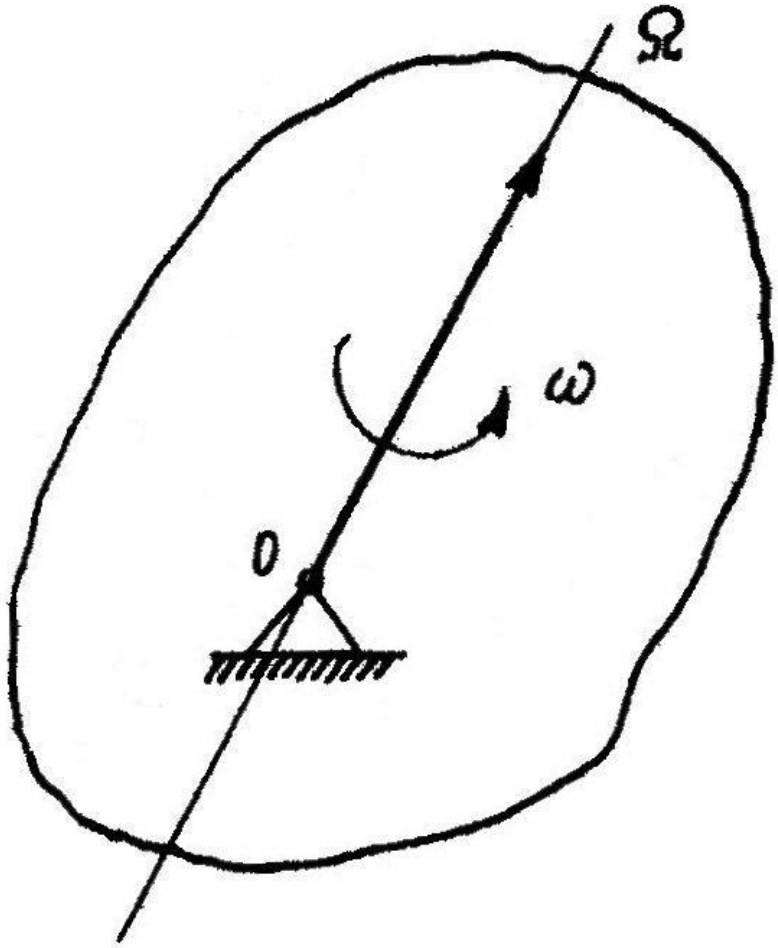


Рис. 2

В случае сферического движения вектор угловой скорости тела в данный момент $\vec{\omega}$ откладывается от неподвижной точки О по мгновенной оси в такую сторону, чтобы, смотря навстречу ему, видеть вращение тела происходящим против движения часовой стрелки.

Мгновенная ось представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Для определения положения мгновенной оси достаточно найти какую-либо точку твёрдого тела, скорость которой в данный момент равна нулю. Соединяя эту точку с неподвижной точкой тела, найдём мгновенную ось вращения тела.

3. Определение углового ускорения тела

При сферическом движении тела положение мгновенной оси вращения со временем изменяется, следовательно, изменяется не только модуль, но и направление вектора угловой скорости тела. Эти изменения характеризуются угловым ускорением тела.

Вектор углового ускорения равен производной от вектора угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Если величина и направление угловой скорости $\vec{\omega}$ известны для любого момента времени, то угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ может быть найдено следующим простым приёмом.

Построив годограф вектора угловой скорости, определим скорость $\vec{u}$ движения точки А – конца вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ - по годографу в момент времени t (рис. 3). Радиусом- вектором точки А является вектор $\vec{\omega}$, а скорость точки равна производной от радиуса- вектора по времени

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

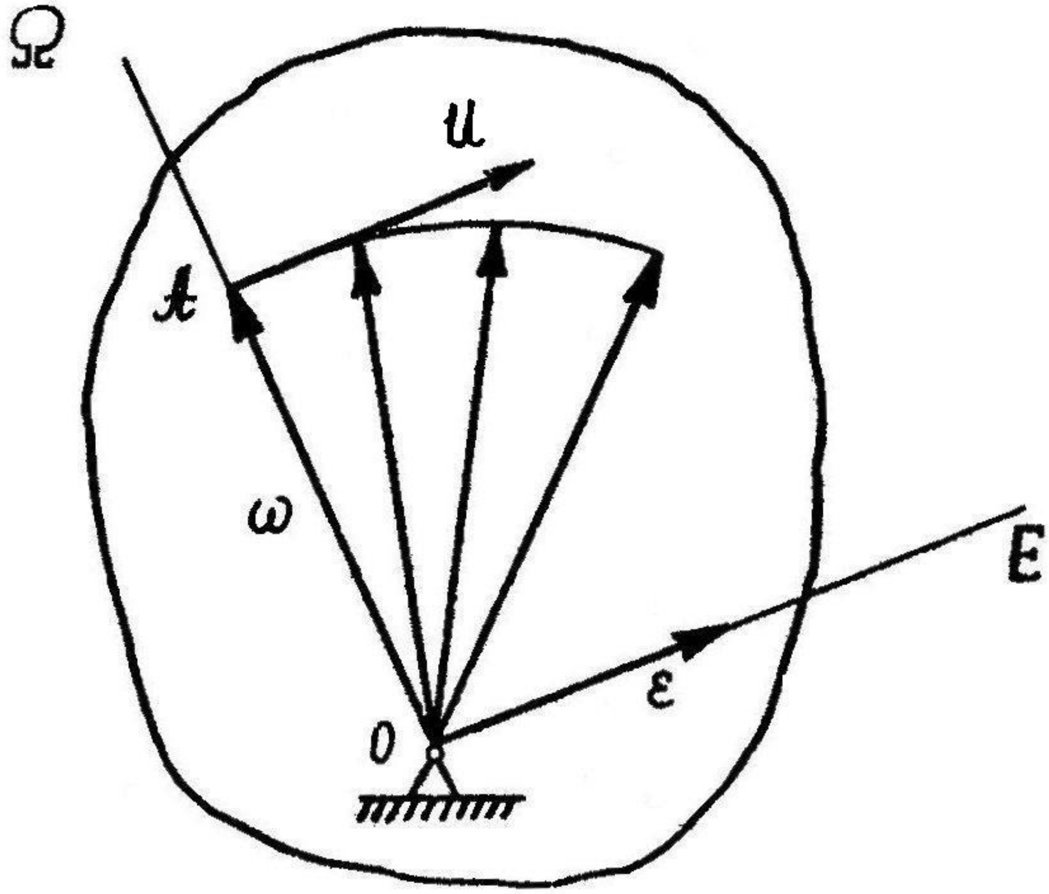


Рис. 3

Так как векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{u}$ геометрически равны одной и той же величине, то они равны между собой

$$\vec{\varepsilon} = \vec{u} \qquad (1)$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, геометрически равный скорости $\vec{u}$, откладывается от неподвижной точки. Прямая, по которой направлен вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, называется осью углового ускорения и обозначается Е.

Таким образом, при сферическом движении твёрдого тела векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены по разным прямым (рис.3).

4. Определение скоростей точек твёрдого тела при сферическом движении

Скорости точек твёрдого тела, совершающего сферическое движение, в каждый момент времени определяются как их вращательные скорости при вращении вокруг мгновенной оси Ω (рис.4). Зная положение мгновенной оси вращения и угловую скорость тела, можно определить скорость любой точки тела М как скорость этой точки во вращательном движении вокруг мгновенной оси по формуле

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, проведённый из неподвижной точки О.

Модуль скорости точки равен

$$\upsilon = \omega \cdot r \cdot \sin\gamma = \omega \cdot h_{\Omega}, \qquad (2)$$

где h_{Ω} - расстояние от точки до мгновенной оси вращения.

Таким образом, распределение скоростей точек тела в данный момент времени t при сферическом движении по отношению к мгновенной оси вращения не отличается от распределения скоростей при вращении тела вокруг неподвижной оси.

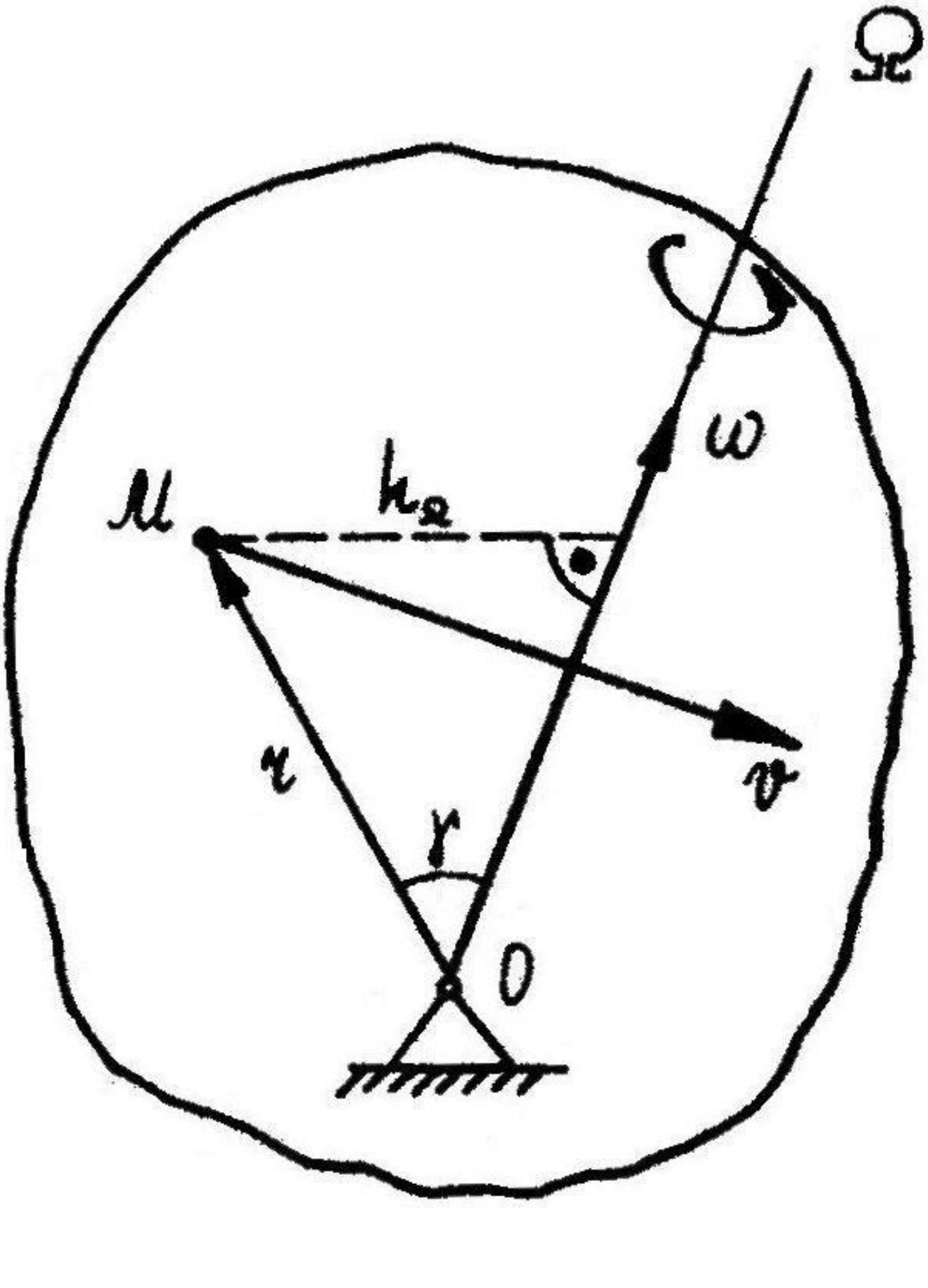


Рис. 4

5. Определение угловой скорости твёрдого тела

<u>I способ</u>. Если положение мгновенной оси Ω уже установлено, то для нахождения угловой скорости $\vec{\omega}$ достаточно знать скорость $\vec{u}_{\hat{A}}$ какой-либо точки А, не лежащей на мгновенной оси (рис. 5).

Тогда, опустив из этой точки перпендикуляр АК на мгновенную ось Ω, получим

$$\upsilon_A = \omega \cdot AK,$$

откуда

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AK}$$

Вектор $\vec{\omega}$ откладывается от неподвижной точки О по мгновенной оси. Его направление определяется направлением скорости $\vec{\upsilon}_A$.

<u>II способ</u>. Сферическое движение твёрдого тела можно рассматривать как сложное, получающееся при сложении двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей. Приняв движение тела вокруг одной из осей (Ω_e) за переносное с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, вращение тела вокруг второй из пересекающихся осей ($\vec{\Omega}_r$) за относительное с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$, можно определить угловую скорость абсолютного вращения тела $\vec{\omega}$ вокруг мгновенной оси Ω как геометрическую сумму угловых скоростей составляющих вращений $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$. Зная одну из трёх угловых скоростей и положение всех трёх осей вращения, можно построить параллелограмм угловых скоростей и определить две другие угловые скорости (рис.6).

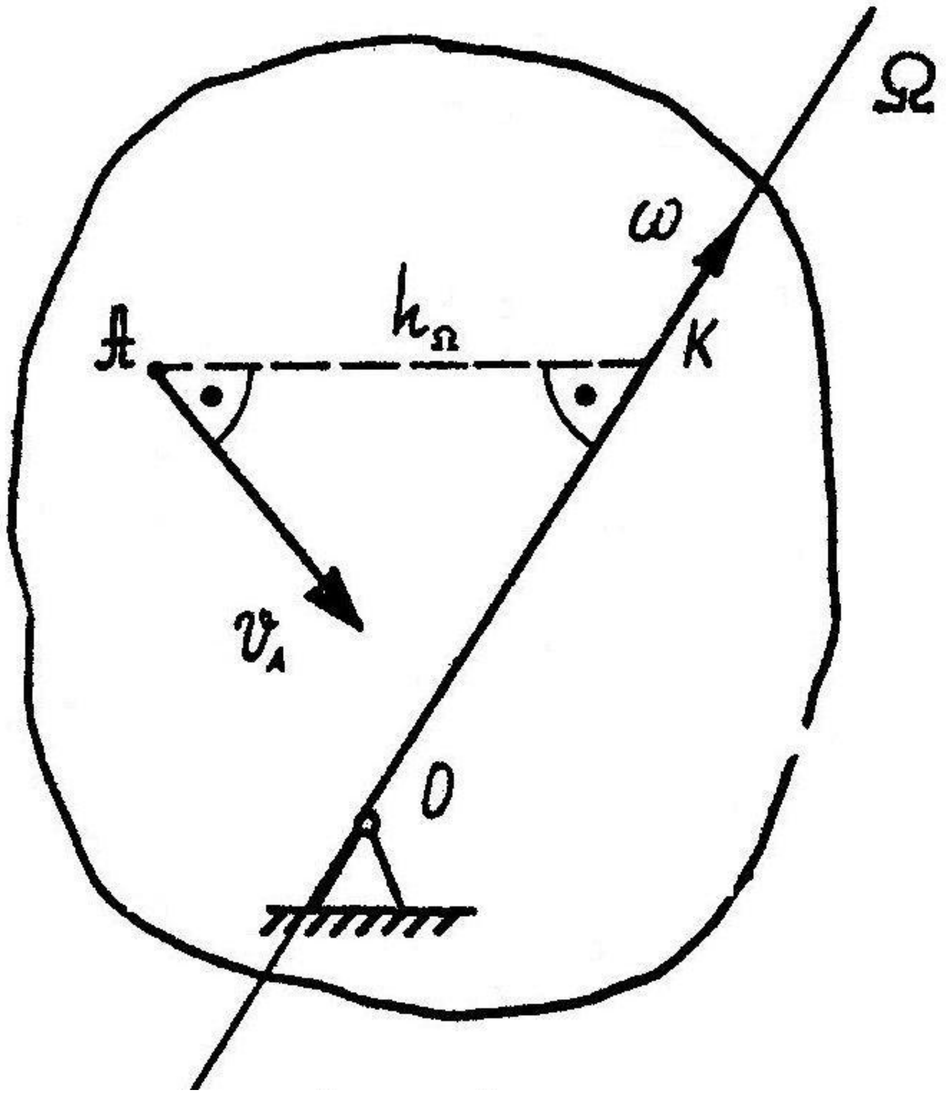


Рис. 5

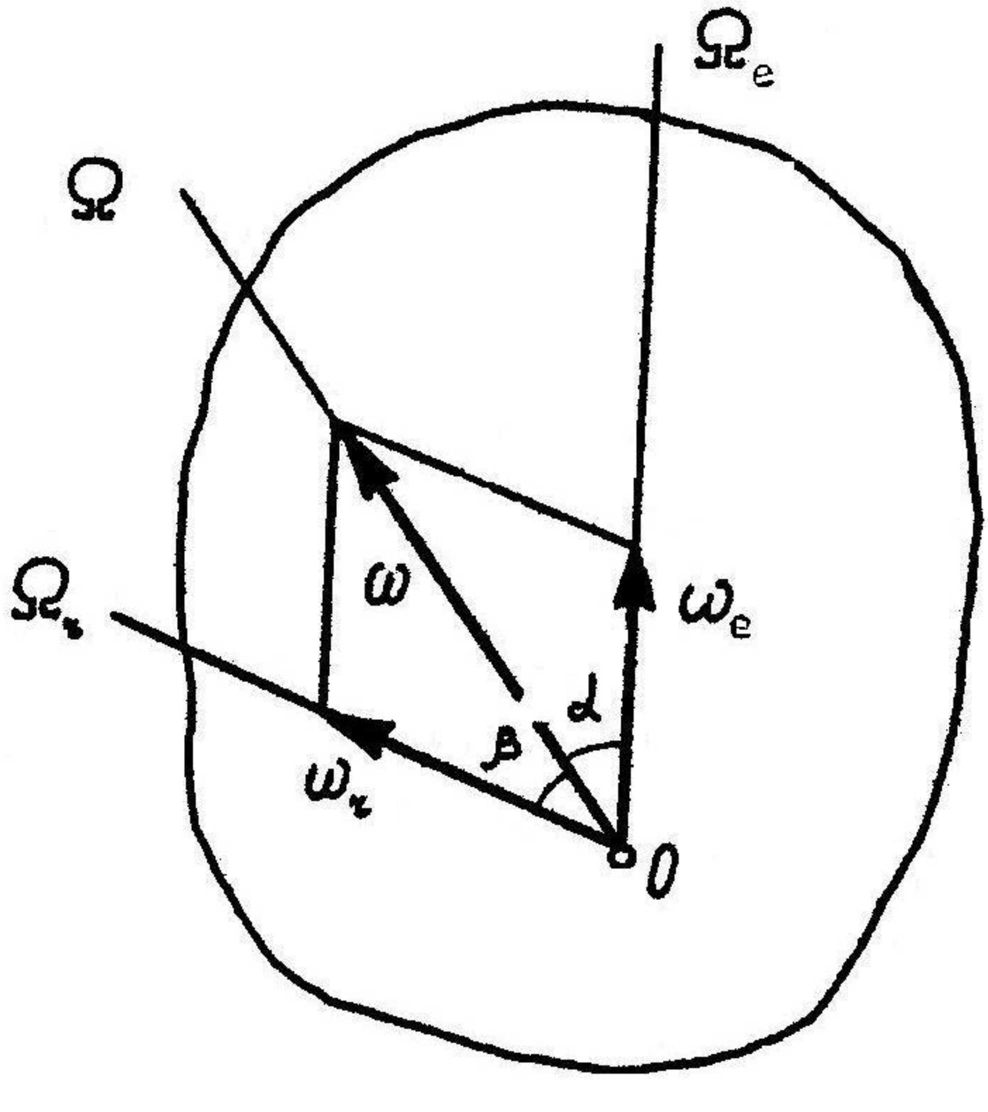


Рис. 6

6. Определение ускорений точек твёрдого тела при сферическом движении

В соответствии с теоремой Ривальса ускорение любой точки твёрдого тела при сферическом движении определяется как геометрическая сумма вращательного и осестремительного ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}^{\varepsilon} + \vec{a}^{\omega}. \qquad (3)$$

Вектор вращательного ускорения $\vec{a}^{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ и радиус-вектор точки $\vec{r}$, в ту сторону, откуда поворот вектора $\vec{\varepsilon}$ к вектору $\vec{r}$ на наименьший угол виден происходящим против часовой стрелки (рис. 7). Модуль вращательного ускорения равен

$$\vec{a}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon \cdot h_{\varepsilon}, \qquad (4)$$

где $h_{\varepsilon} = MK_1$ - расстояние от точки М до оси углового ускорения Е.

Вектор осестремительного ускорения $\vec{a}^{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$ направлен перпендикулярно векторам угловой скорости $\vec{\omega}$ и линейной скорости точки $\vec{\upsilon}$, т.е. по перпендикуляру, опущенному из точки М на мгновенную ось Ω, в сторону этой оси (рис. 7). Модуль осестремительного ускорения равен

$$\vec{a}^{\omega} = \omega \cdot \upsilon \cdot \sin(\vec{\omega}\vec{\upsilon}) = \omega \cdot \upsilon = \omega^2 \cdot h_{\Omega}, \qquad (5)$$

где $h_{\Omega} = MK_2$ - расстояние от точки М до мгновенной оси Ω.

Модуль ускорения точки М как диагональ параллелограмма ускорений (рис. 7) определяется по формуле

$$\vec{a} = \sqrt{(a^{\varepsilon})^2 + (a^{\omega})^2 + 2a^{\varepsilon} \cdot a^{\omega} \cdot \cos(\vec{a}^{\varepsilon}, \vec{a}^{\omega})}$$

Вследствие того, что векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлены по разным осям, вращательная составляющая ускорения $\vec{a}^{\varepsilon}$ может быть направлена по отношению к вектору скорости $\vec{\upsilon}$ под любым углом, оставаясь перпендикулярной вектору $\vec{r}$. В этом существенное различие между вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси и движения тела, имеющего одну неподвижную точку.

7. Исследование качения конуса по наружной поверхности неподвижного конуса

Задача. Конус А обегает 120 раз в минуту неподвижный конус В. Высота конуса А $OO_1 = 10 см.$ Определить угловую скорость, угловое ускорение конуса А, а также скорости и ускорения точек С и Д подвижного конуса при заданном его положении (рис. 8).

Дано: $n = const = 120 об/мин;$

$OO_1 = 10 см.$

Определить: $\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{\upsilon}_C, \vec{\upsilon}_Д, \vec{a}_C, \vec{a}_Д$.

Решение.

<u>Определение угловой скорости тела.</u> Объект рассмотрения – конус А (рис.8). Конус А, катаясь без скольжения по неподвижному конусу В, совершает сферическое движение, так как его вершина О остаётся неподвижной. Это движение в каждый момент времени представляет собой вращение вокруг мгновенной оси. Мгновенная ось конуса $\grave{A}\Omega$ совпадает с общей образующей конусов, так как в данный момент времени скорости точек этой образующей равны нулю.

Зная частоту вращения конуса А вокруг оси z, определим угловую скорость этого вращения из соотношения, рад/с

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi$$

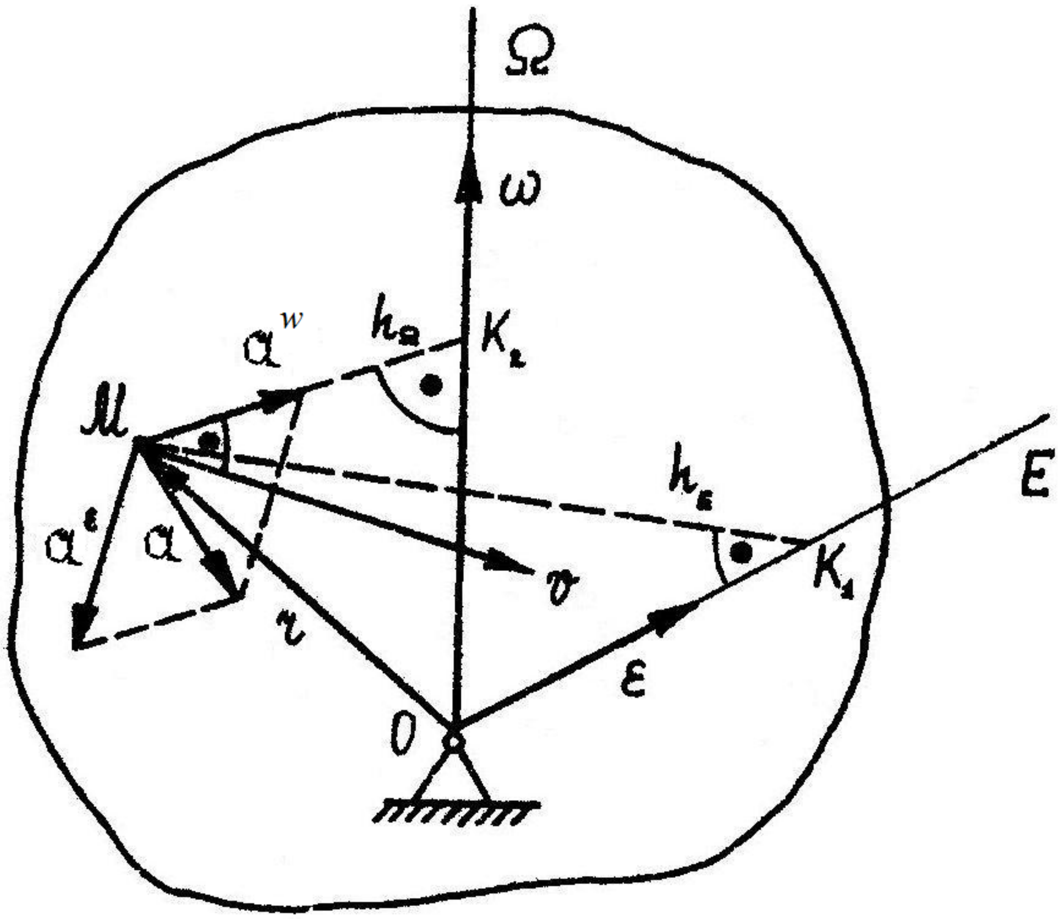


Рис. 7

С данной постоянной угловой скоростью вращается вокруг неподвижной оси z и оси η подвижного конуса А. Примем для определённости, что вращение вокруг оси z совершается почасовой стрелке.

Определим скорость точки O_1- центра основания конуса А. Эта скорость является вращательной вокруг оси z; модуль скорости υ_{o1} равен см/с

$$\upsilon_{o1} = \omega_1 \cdot OO_1 = 4\pi \cdot 10 = 40\pi$$

Вектор $\vec{\upsilon}_{o1}$ параллелен оси x и направлен в сторону её положительного направления (рис. 8).

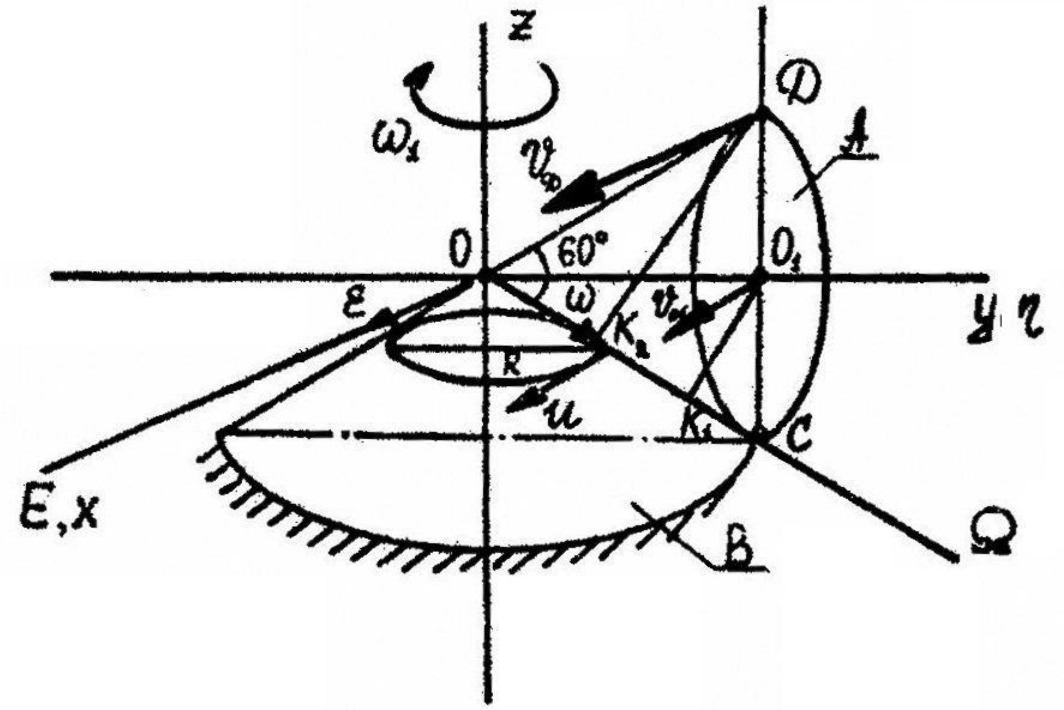


Рис. 8

С другой стороны, скорость $\vec{\upsilon}_{o1}$ точки O_1 является вращательной по отношению к мгновенной оси Ω. В соответствии с формулой (2)

$$\upsilon_{o1} = \omega \cdot O_1K_1,$$

где O_1K_1 - расстояние от точки O_1 до мгновенной оси вращения Ω. Следовательно, угловая скорость конуса А равна

$$\omega = \frac{\upsilon_{o1}}{O_1K_1}$$

Находим расстояние O_1K_1, рассматривая ΔOO_1K_1 (рис. 8)

$$O_1K_1 = \frac{OO_1}{2} = \frac{10}{2} = 5см.$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{40\pi}{5} = 8\pi \ рад/с.$$

Модуль угловой скорости конуса А не изменяется во всё время его движения. Направление угловой скорости $\vec{\omega}$ определяется направлением скорости $\vec{\upsilon}_{o1}$ (рис. 8).

Угловую скорость конуса А (абсолютную угловую скорость $\vec{\omega}$) можно найти также путём сложения вращений вокруг пересекающихся осей (z, η) - построением параллелограмма угловых скоростей (рис. 9).

Здесь $\vec{\omega}_1$- угловая скорость переносного вращения конуса вокруг оси z,

$\vec{\omega}_2$ - угловая скорость относительного вращения конуса вокруг его собственной оси η.

Зная положение осей Ω, z, η и модуль угловой скорости переносного вращения конуса ω_1, находим

$$\omega = \frac{\omega_1}{\cos 60^\circ} = \frac{4\pi}{1/2} = 8\pi \ рад/с.$$

Таким образом убеждаемся в совпадении значений угловой скорости конуса А, определённых различными способами.

<u>Определение углового ускорения конуса.</u> Для определения углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ необходимо построить годограф угловой скорости $\vec{\omega}$. При качении конуса А по конусу В вектор $\vec{\omega}$ поворачивается вокруг оси z. Так как модуль его не изменяется, то

конец вектора $\vec{\omega}$ описывает окружность радиусом $R = \omega \cdot \sin 60^\circ$ вокруг оси z в горизонтальной плоскости (рис. 8).

Вектор $\vec{\varepsilon}$ геометрически равен скорости $\vec{u}$ конца вектора $\vec{\omega}$. В данном случае скорость $\vec{u}$ является вращательной вокруг оси z. Находим её как вращательную скорость точки – конца вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ - при вращении вектора вокруг оси z.

Определяем модуль скорости $\vec{u}$

$$u = \omega_1 \cdot R = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin 60^\circ = 4\pi \cdot 8\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27{,}71\pi^2 \ \ рад/с^2$$

Скорость $\vec{u}$ направлена по касательной к годографу вектора $\vec{\omega}$ в точке, совпадающей с концом $\vec{\omega}$ в рассматриваемый момент времени.

В соответствии с формулой (1) $\vec{\varepsilon} = \vec{u}$. Таким образом, модуль углового ускорения конуса А равен

$$\varepsilon = u = 27{,}71\pi^2 \ рад/с^2$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ отложен от неподвижной точки О по направлению скорости $\vec{u}$, т.е. он лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через точку О, и направлен перпендикулярно плоскости zOη.

Следовательно, ось углового ускорения Е совпадает с осью x (рис. 8).

<u>Определение скоростей точек С и Д.</u> Скорость точки Д определяем как вращательную по отношению к мгновенной оси Ω конуса А в соответствии с формулой (2)

$$\upsilon_Д = \omega \cdot ДК_2$$

Рассматривая подобные треугольники $\Delta ДК_2С$ и $\Delta O_1К_1С$ (рис. 8) легко увидеть, что $ДК_2 = 2O_1К_1 = 2 \cdot 5 = 10 см.$ Таким образом, $\upsilon_Д = 8\pi \cdot 10 = 80\pi см/с.$ Вектор $\vec{\upsilon}_Д$ параллелен вектору

$\vec{\upsilon}_{o1}$ и имеет одинаковое с ним направление (рис. 8). Скорость точки С, лежащей на мгновенной оси Ω, равна нулю: $\upsilon_C = 0$.

<u>Определение ускорений точек С и Д:</u>

А) Ускорение точки Д определяем по формуле (3) как геометрическую сумму осестремительного ускорения во вращении конуса А вокруг мгновенной оси Ω и вращательного ускорения относительно оси углового ускорения Е.

$$\vec{a}_Д = \vec{a}_Д^{\omega} + \vec{a}_Д^{\varepsilon}$$

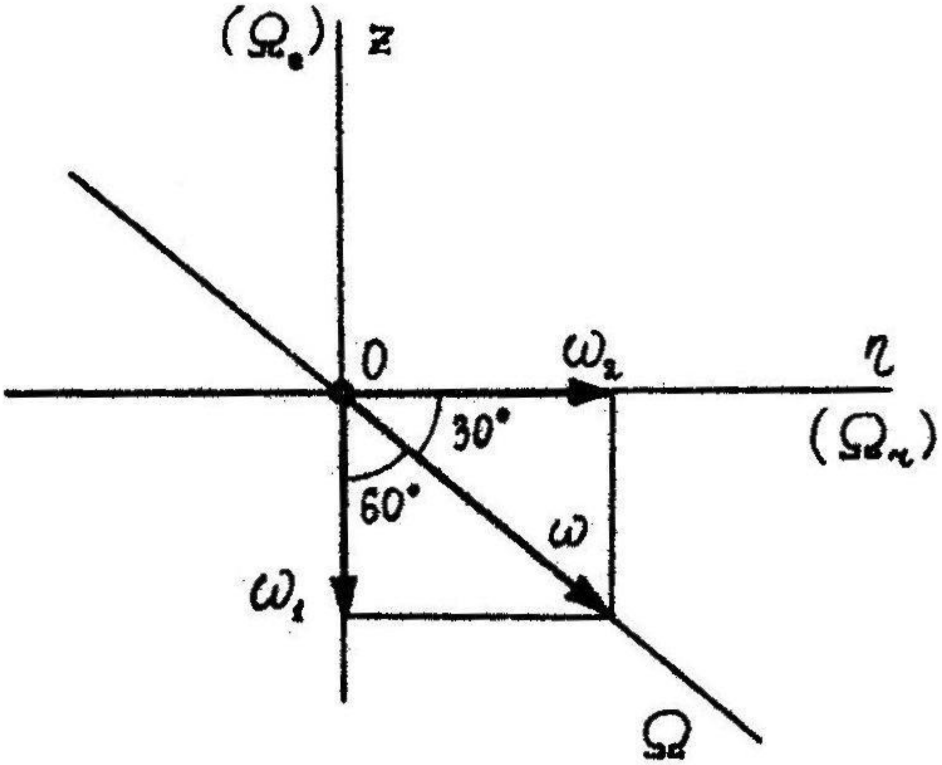


Рис. 9

Осестремительное ускорение $\vec{a}_{Д}^{\,\omega}$ направлено по перпендикуляру $ДК_2$ к мгновенной оси вращения Ω (рис. 10). В соответствии с формулой (5)

$$a_{Д}^{\omega} = \omega^2 \cdot ДК_2 = (8\pi)^2 \cdot 10 = 640\pi^2 см/с^2$$

Для определения вращательного ускорения опускаем из точки Д перпендикуляр на ось углового ускорения Е, который совпадает с отрезком ОД. По формуле (4) $\vec{a}_{Д}^{\,\varepsilon} = \varepsilon \cdot ОД$. Из $\Delta ОДО_1$ (рис. 10) определяем ОД

$$ОД = \frac{OO_1}{\cos 30^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}/2} = 11{,}55 см,$$

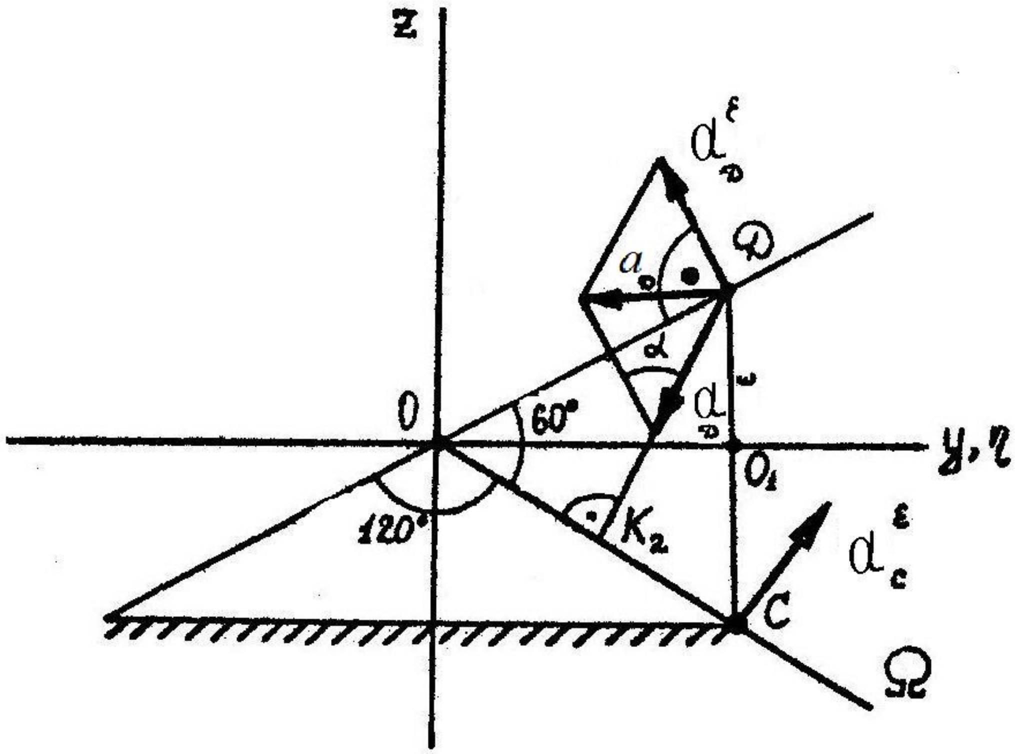


Рис. 10

Следовательно,

$$\vec{a}_{Д}^{\varepsilon} = 27{,}71\pi^2 \cdot 11{,}55 = 319{,}97\pi^2 см/с^2.$$

Направляем вектор $\vec{a}_{Д}^{\varepsilon}$ перпендикулярно к ОД в плоскости, перпендикулярной к $\vec{\varepsilon}$ (zOη) так, чтобы, смотря навстречу $\vec{\varepsilon}$, видеть вектор $\vec{a}_{Д}^{\varepsilon}$ направленным противоположно направлению вращения часовой стрелки.

Обе составляющие ускорения точки Д расположены в плоскости zOη (zOy). Сложим векторы вращательного и осестремительного ускорений по правилу параллелограмма (рис.10).

$$a_{Д} = \sqrt{(a_{Д}^{\omega})^2 + (a_{Д}^{\varepsilon})^2 - 2a_{Д}^{\omega}a_{Д}^{\varepsilon}\cos\alpha};$$

$$\cos\alpha = \cos\angle K_2 OД = \cos 60^\circ = 0{,}5;$$

$$a_{Д} = \sqrt{(640\pi^2)^2 + (319{,}97\pi^2)^2 - 2\cdot 640\pi^2 \cdot 319{,}97\pi^2 \cdot 0{,}5} =$$
$$= \pi^2\sqrt{409600 + 102379 - 204779} = 554\pi^2 см/с^2$$

Ускорение точки Д конуса А можно определить и по формуле

$$a_{Д} = \sqrt{a_{Дy}{}^2 + a_{Дz}{}^2},$$

где $a_{Дy}, a_{Дz}$ - проекции ускорения $\vec{a}_{Д}$ на оси y и z.

Определим эти проекции и модуль ускорения точки Д

$$a_{Дy} = -a_{Д}^{\varepsilon}\cos 60^\circ - a_{Д}^{\omega}\cos 60^\circ = -\cos 60^\circ (a_{Д}^{\varepsilon} + a_{Д}^{\omega}) =$$
$$= -0{,}5\cdot(319{,}97\pi^2 + 640\pi^2) = -480\pi^2 см/с^2;$$

$$a_{Дz} = a_Д^{\varepsilon}\cos 30^\circ - a_Д^{\omega}\cos 30^\circ = \cos 30^\circ \left(a_Д^{\varepsilon} - a_Д^{\omega}\right) =$$
$$= \sqrt{3}/2 \cdot \pi^2 \left(319{,}97 - 640\right) = -160\sqrt{3}\pi^2 см/с^2;$$

$$a_Д = \pi^2\sqrt{480^2 + 3\cdot 160^2} = 554\pi^2 см/с^2$$

Таким образом, ускорение наивысшей точки подвижного конуса А катящегося без скольжения по неподвижному конусу В, равно $a_Д = 554\pi^2 см/с^2$;

б) Определяем ускорение точки С подвижного конуса А по формуле (3) $\vec{a}_C = \vec{a}_C^{\omega} + \vec{a}_C^{\varepsilon}$. Точка С лежит на мгновенной оси Ω (рис.10). Следовательно, $\vec{a}_C^{\omega} = 0$.

Для определения вращательного ускорения $\vec{a}_C^{\varepsilon}$ опускаем из точки С перпендикуляр на ось Е углового ускорения, который совпадает с отрезком ОС. По формуле (4) модуль вращательного ускорения точки С равен $\vec{a}_C^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OC = \varepsilon \cdot OД = 320\pi^2 см/с^2$, так как ОС=ОД. Следовательно $a_C = a_C^{\varepsilon} = 320\pi^2 см/с^2$.

Вектор $\vec{a}_C$ направлен перпендикулярно ОС в плоскости zOη (zOy) так, чтобы, смотря на встречу $\vec{\varepsilon}$, видеть $\vec{a}_C$ направленным противоположно вращению часовой стрелки (рис. 10).

8. Исследование качения конуса по внутренней поверхности неподвижного конуса

Задача. Конус II с углом при вершине $\alpha_2 = 45^\circ$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90^\circ$. Высота подвижного конуса $OO_1 = 100$ *см*. Ось подвижного конуса ζ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = const = 4\pi$ *рад/с* вокруг неподвижной оси z.

Определить угловую скорость, угловое ускорения конуса II , а также скорости и ускорения точек M_1, M_2 подвижного конуса при заданном положении конуса II.

Определить:

$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \vec{\upsilon}_{M1}, \vec{\upsilon}_{M2}, \vec{a}_{M1}, \vec{a}_{M2}$.

Решение.

Определение угловой скорости конуса. Объект рассмотрения – конус II (рис. 11). Движение катящегося конуса является сферическим, так как его вершина O остаётся неподвижной. Это движение в каждый момент времени представляет собой вращение вокруг мгновенной оси.

Мгновенная ось вращения Ω совпадает с общей образующей конусов (рис. 12), так как скорости точек этой образующей равны нулю. Скорость $\vec{\upsilon}_{O1}$ точки O_1 является вращательной скоростью по отношению к мгновенной оси Ω. Следовательно, по формуле (2)

$$\vec{\upsilon}_{O1} = \omega \cdot O_1K \, .$$

Отсюда угловая скорость конуса равна по модулю

$$\omega = \frac{\upsilon_{O1}}{O_1K} \cdot$$

С другой стороны, скорость точки O_1, описывающей окружность радиуса OO_1, можно определить по формуле $\upsilon_{O1} = \omega_1 \cdot O_1O_2$.

Вычислим расстояния O_1O_2, O_1K (рис. 12)

$$O_1O_2 = OO_1 \cdot \sin 22{,}5^\circ = 100 \cdot 0{,}3827 = 38{,}27\ \text{см},$$

$$O_1K = OO_1 \cdot \sin 22{,}5^\circ = 38{,}27\ \text{см}.$$

Строим вектор $\vec{\upsilon}_{O1}$ перпендикулярно $zo\zeta$, учитывая направление угловой скорости $\vec{\omega}_1$. Вектор $\vec{\upsilon}_{O1}$ направлен параллельно оси x в сторону её отрицательного направления (рис. 12).

Вычислим модуль угловой скорости конуса II

$$\omega = \frac{\omega_1 \cdot O_1O_2}{O_1K} = \omega_1 = 4\pi\ рад/с.$$

Таким образом, модуль угловой скорости конуса II не изменяется во время его движения. Руководствуясь направлением скорости $\vec{\upsilon}_{O1}$, откладываем от точки O по мгновенной оси Ω вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ так, чтобы, смотря ему навстречу, видеть вращение конуса вокруг этой оси происходящим против движения часовой стрелки (рис. 12).

Угловая скорость конуса II можно найти также путём сложения вращений вокруг пересекающихся осей – построением параллелограмма угловых скоростей (рис. 13).

Здесь $\vec{\omega}_1$ - угловая скорость переносного вращения конуса вокруг оси z;

$\vec{\omega}_2$ - угловая скорость относительного вращения конуса вокруг его собственной оси ζ.

Из рассмотрения ΔOAB получаем $\omega = \omega_1 = 4\pi\ рад/с$.

Определение углового ускорения конуса. Угловое ускорение конуса II геометрически равно скорости $\vec{u}$ конца вектора $\vec{\omega}$, который описывает окружность радиусом $R = \omega \cdot \sin 45^\circ$ вокруг оси z (рис. 14). Так как модуль его не изменяется, то конец вектора $\vec{\omega}$ описывает окружность в горизонтальной плоскости. В данном случае скорость $\vec{u}$ является вращательной вокруг оси z. Угловая скорость этого вращения - $\vec{\omega}_1$. Расстояние конца вектора $\vec{\omega}$ от оси вращения z равно $ВД = \omega \cdot \sin 45^\circ$. Определяем модуль скорости $\vec{u}$

$$u = \omega_1 \cdot ВД = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= 4\pi \cdot 4\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = 11{,}3\pi^2 \ рад/с^2.$$

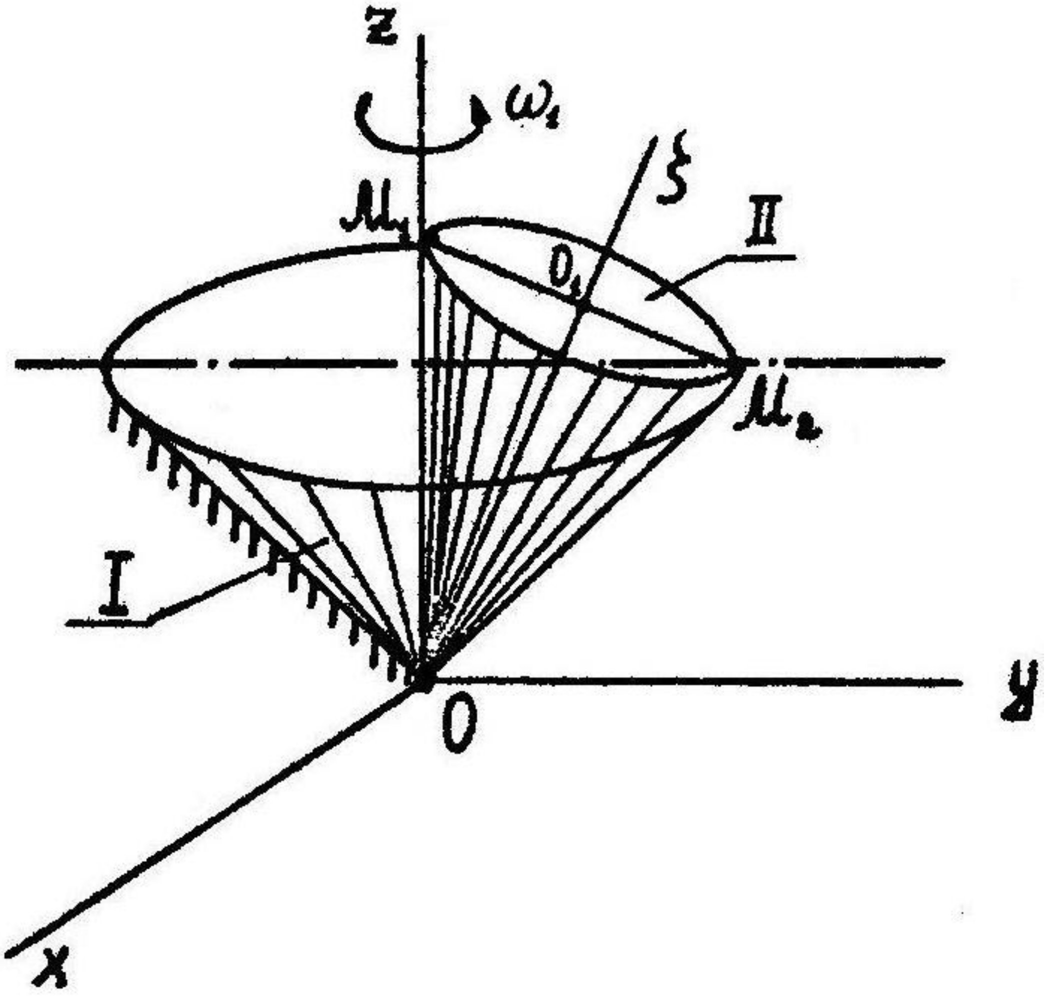


Рис. 11

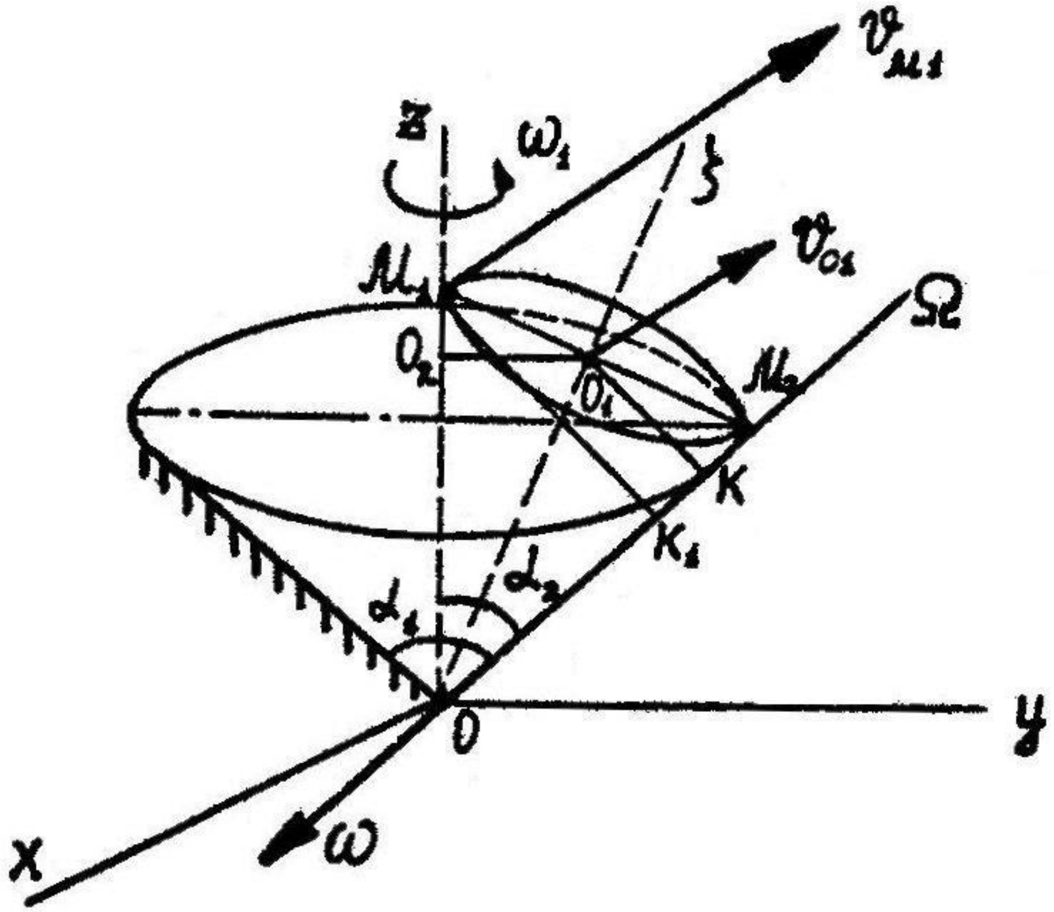


Рис. 12

Скорость $\vec{u}$ направлена по касательной к годографу $\vec{\omega}$ в точке, совпадающей с концом $\vec{\omega}$ в рассматриваемый момент времени. В момент времени, которому соответствует положение конуса II, изображенное на рисунке 14, вектор $\vec{u}$ параллелен оси x и направлен в сторону положительного направления этой оси. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \vec{u}$. Его модуль $\varepsilon = u = 11{,}3\pi^2 \ рад/с^2$.

Вектор $\vec{\varepsilon}$ приложен в точке O и направлен перпендикулярно плоскости $zo\zeta$ по направлению вектора $\vec{u}$. Следовательно, он лежит в горизонтальной плоскости и перпендикулярен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 14). Ось углового ускорения E совпадает с осью x.

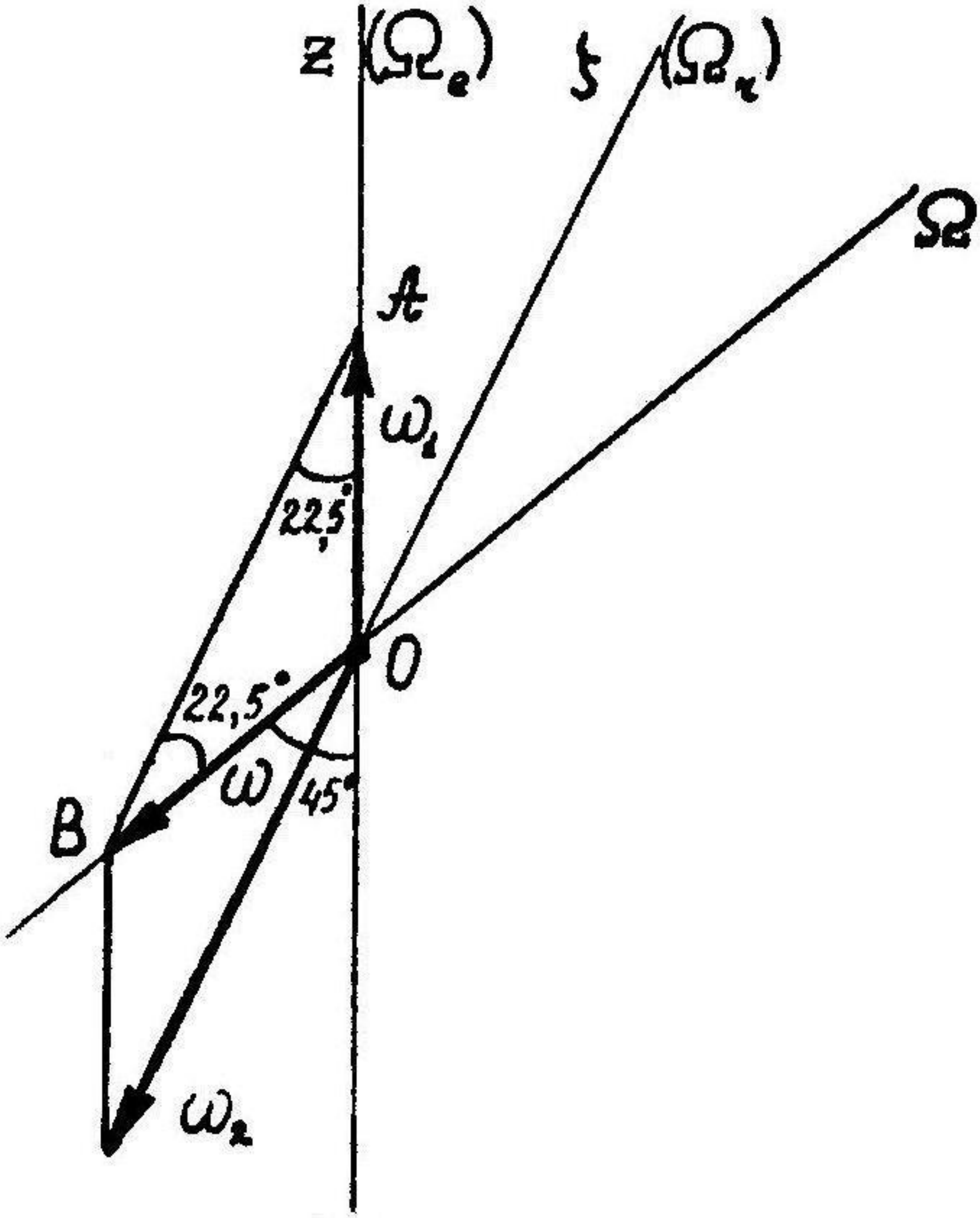


Рис. 13

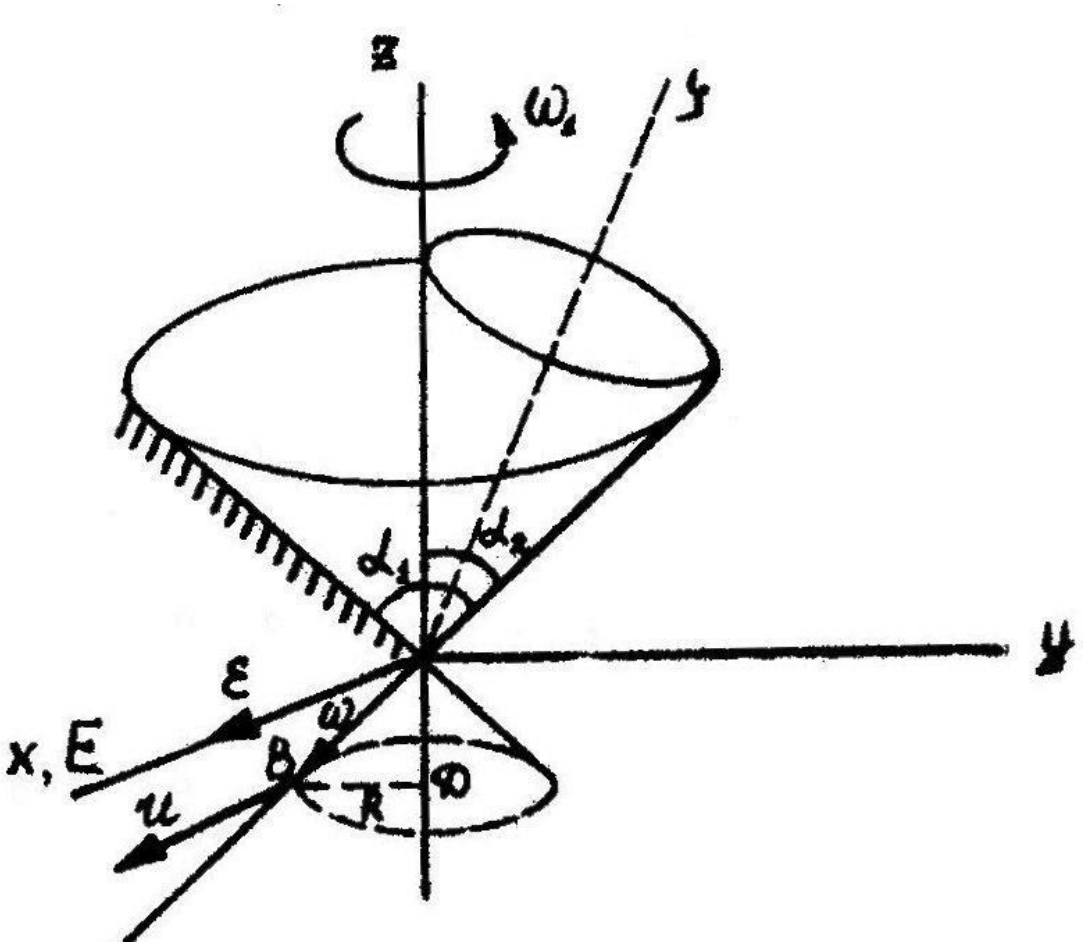


Рис. 14

<u>Определение скоростей точек конуса.</u> Скорость точки M_2, лежащей на мгновенной оси вращения конуса II , равна нулю $\upsilon_{M2} = 0$.

Скорость точки M_1 определяем как вращательную скорость по отношению к мгновенной оси Ω по формуле (2) $\upsilon_{M1} = \omega \cdot M_1K_1$.

Из подобия $\Delta K_1M_1M_2$ и $\Delta K_2O_1M_2$ (рис. 12) получаем $M_1K_1 = 2O_1K$.

Из ΔOO_1K определяем

$$O_1K = OO_1 \cdot \sin 22{,}5^\circ = 100 \cdot 0{,}3827 = 38{,}27 \ см.$$

Таким образом

$$\upsilon_{M1} = \omega \cdot 2O_1K = 4\pi \cdot 2 \cdot 38{,}27 = 306{,}16\pi \ см/с.$$

Вектор скорость $\vec{\upsilon}_{M1}$ так же, как и $\vec{\upsilon}_{O1}$, перпендикулярен плоскости $zo\zeta$ и направлен параллельно оси x в сторону отрицательных значений.

<u>Определение ускорений точек конуса.</u> Ускорение точек конуса определяем как геометрическую сумму осестремительного ускорения $\vec{a}^{\omega}$ во вращении конуса вокруг мгновенной оси Ω и вращательного ускорения $\vec{a}^{\varepsilon}$ относительно оси углового ускорения Е по формуле (3)

$$\vec{a}_{M1} = \vec{a}^{\omega}_{M1} + \vec{a}^{\varepsilon}_{M1}.$$

По формуле (5) находим

$$\vec{a}^{\omega}_{M1} = \omega^2 \cdot M_1K_1 = (4\pi)^2 \cdot 2 \cdot 38{,}27 = 1224{,}6\pi^2 \ см/с^2.$$

Вектор $\vec{a}^{\omega}_{M1}$ направлен по перпендикуляру M_1K_1, опущенному из точки M_1 на мгновенную ось вращения Ω (рис. 15). Для определения вращательного ускорения точки M_1 опускаем из этой точки перпендикуляр на ось Е углового ускорения, который совпадает с отрезком OM_1 (рис. 15).

Определяем a^{ε}_{M1} по формуле (4) $a^{\varepsilon}_{M1} = \varepsilon \cdot OM_1$.

Из ΔOM_1O_1 (рис. 12) находим

$$OM_1 = \frac{OO_1}{\cos 22{,}5^\circ},$$

$$a_{M1}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \frac{OO_1}{\cos 22{,}5^\circ} = 11{,}3\pi^2 \cdot \frac{100}{0{,}9239} = 1223{,}08\pi^2 \ см/с^2.$$

Направляем вектор $\vec{a}_{M1}^{\varepsilon}$ перпендикулярно отрезку OM_1 в плоскости, перпендикулярной $\vec{\varepsilon}$ (ΩOz) так, чтобы, смотря навстречу $\vec{\varepsilon}$, видеть вектор $\vec{a}_{M1}^{\varepsilon}$ направленным противоположно вращению часовой стрелки (рис. 15).

Определяем модуль ускорения точки M_1 как длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_{M1}^{\omega}$, $\vec{a}_{M1}^{\varepsilon}$

$$a_{M1} = \sqrt{\left(a_{M1}^{\omega}\right)^2 + \left(a_{M1}^{\varepsilon}\right)^2 - 2 \cdot a_{M1}^{\omega} \cdot a_{M1}^{\varepsilon} \cdot \cos 45^\circ} =$$

$$= \sqrt{\left(1224{,}6\pi^2\right)^2 + \left(1223{,}1\pi^2\right)^2 - 2 \cdot 1224{,}6\pi^2 \cdot 1223{,}1\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \pi^2 \sqrt{1499743 + 1495914 - 2995655 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 937\pi^2 см/с^2$$

Возможен другой способ вычисления модуля ускорения точки M_1

a_{M1} по формуле

$$a_{M1} = \sqrt{a_{M1(y)}^2 + a_{M1(z)}^2}$$

Найдём алгебраические величины проекций ускорения $\vec{a}_{M1}$ на оси y и z (рис.15)

$$a_{M1(y)} = -a_{M1}^{\varepsilon} + a_{M1}^{\omega}\cos 45^{\circ},$$

$$a_{M1(z)} = -a_{M1}^{\omega}\sin 45^{\circ}.$$

$$a_{M1(y)} = -1223{,}08\pi^2 + 1224{,}64\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = -357{,}12\pi^2 см/c^2,$$

$$a_{M1(z)} = -1224{,}64\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = -865{,}95\pi^2\ см/c^2.$$

Определяем ускорение точки M_1

$$a_{M1} = \pi^2\sqrt{357{,}12^2 + 865{,}95^2} = 937\pi^2 см/c^2$$

В точке M_2, лежащей на мгновенной оси вращения, осестремительное ускорение равно нулю: $a_{M2}^{\omega} = 0$.

Определяем модуль вращательного ускорения точки M_2

$$\vec{a}_{M2}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot OM_2 = 11{,}3\pi^2 \cdot \frac{100}{0{,}9239} = 1223\pi^2\ см/c^2,$$

так как

$$OM_1 = OM_2$$

Направляем вектор $\vec{a}_{M2}^{\varepsilon}$ перпендикулярно отрезку OM_2 в плоскости ΩOz в сторону, соответствующую направлению вектора $\vec{\varepsilon}$

$$a_{M2} = a_{M2}^{\varepsilon} = 1223\pi^2 см/c^2.$$

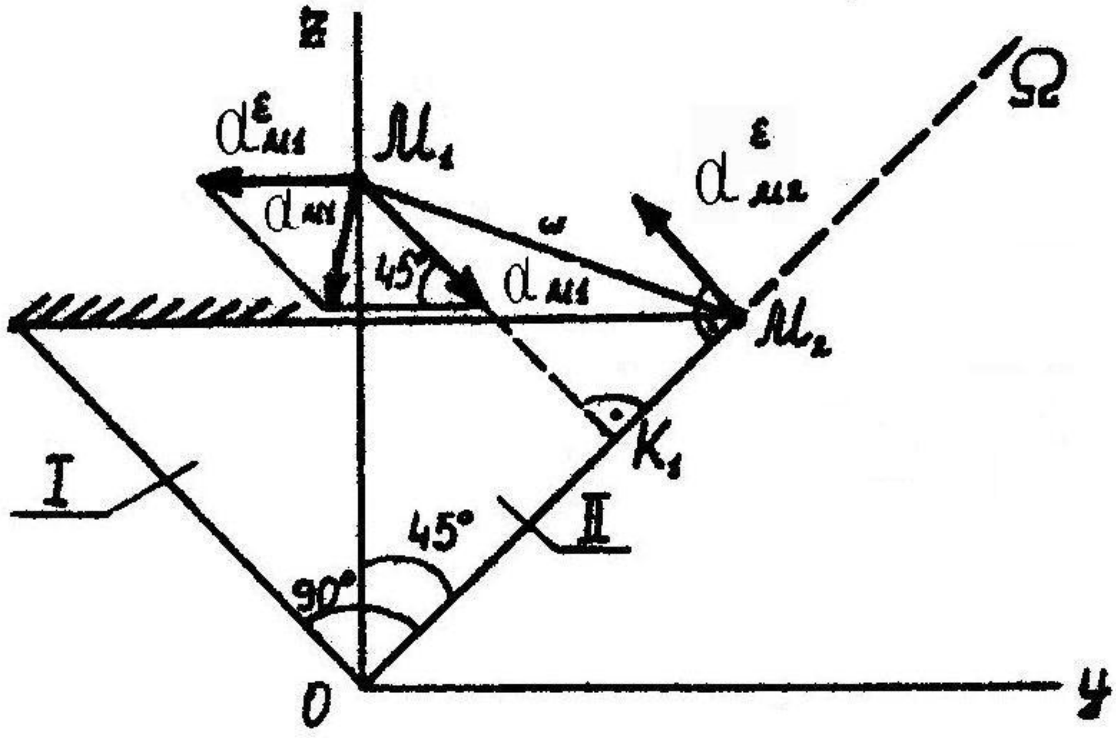

z
Ω
a^{ε}_{M1}
M_1
a^{ε}_{M2}
a_{M1}
ω
45°
a_{M1}
M_2
K_1
I
45°
II
90°
O
y

Рис. 15

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мещерский И.В.** Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие. 50-е изд., стер. / Под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.

2. **Яблонский А.А., Никифорова В.М.** Курс теоретической механики: Статика, кинематика, динамика: Учеб. пособие для вузов. 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007. – 764 с.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под общ. ред. А.А. Яблонского. – М.: Интеграл-Пресс, 2004.

4. **Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.** Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.

5. **Бать М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2 т. Т.2. Динамика: Учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. 9-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Григорьев Александр Юрьевич

Малявко Дмитрий Пантелеймонович

Фёдорова Людмила Анатольевна

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Учебно-методическое пособие

Ответственный редактор

Т.Г. Смирнова

Компьютерная верстка

А.М. Елисеев

Дизайн обложки

Н. А. Потехина

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 17.04.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 2,33. Печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,13
Тираж 150 экз. Заказ № С 26

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9