МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

ИНСТИТУТ ХОЛОДА И БИОТЕХНОЛОГИЙ

А.Ю. Григорьев, Д.П. Малявко, К.А. Григорьев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Статика

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 531(075)
ББК 22.21
Г 83

Григорьев А.Ю., Малявко Д.П., Григорьев К.А. Теоретическая механика. Статика: Учеб. пособие. − СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. − 60 с.

Представлен материал по курсу «Теоретическая механика» для самостоятельного изучения раздела «Статика».

Предназначено для студентов направлений 16.03.03, 14.03.01, 23.03.03, 15.03.02, всех форм обучения.

Рецензенты: кафедра теоретической механики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета (доктор техн. наук, проф. Е.И. Картузов); доктор техн. наук, проф. А.А. Алексеев (Петербургский государственный университет путей сообщения)

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом Института холода и биотехнологий

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
ПРЕДМЕТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Определение

Наука о наиболее общих законах движения и равновесия материальных тел и возникающих при этом взаимодействиях между телами называется теоретической механикой.

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвящённая решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тел и происходящих при этом взаимодействиях между телами. Теоретическая механика представляет собой часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел, то есть законы, которые одинаково справедливы и для движения макротел (планет, звезд), и для движения микрочастиц (электронов, атомов, молекул и др.), полета ракет, самолётов, артиллерийских снарядов, движения вагонеток, автомобилей и др.

Другую часть механики составляют различные общие и специальные технические дисциплины, посвящённые проектированию и расчёту всевозможных конкретных конструкций и сооружений, машин и механизмов и др. Все эти технические дисциплины в основе своей базируются на законах и методах, изучаемых в курсе дисциплины «Теоретическая механика».

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на три раздела: статику, кинематику и динамику. В статике вводится учение о силах и изучаются законы равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел, без учета сил, вызывающих это движение. Наконец, в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

По свойствам изучаемого объекта теоретическая механика делится на:

1) механику материальной точки, т. е. тела, размерами которого при изучении его движения (или равновесия) можно пренебречь;

2) механику системы материальных точек, которая, в свою очередь, делится на:

• механику твёрдого тела, то есть тела, деформациями которого при изучении его движения или равновесия можно пренебречь;

• механику тела переменной массы;
• механику деформируемого тела;
• механику жидкости;
• механику газа.

I. СТАТИКА

1. Основные понятия и определения

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются законы равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, в механике называется *силой.*

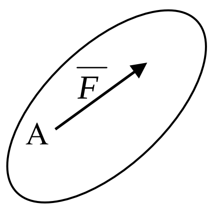


Рис. 1

Сила является векторной величиной. Она характеризуется численным значением или модулем, точкой приложения и направлением действия. Графически сила, как и всякий вектор, изображается направленным отрезком (со стрелкой). Длина этого отрезка (рис. 1) в выбранном масштабе выражает модуль силы, направление отрезка соответствует направлению действия силы, его начало (точка A на рис. 1) обычно совпадает с точкой приложения силы. Иногда, чтобы не загромождать картинку, бывает удобно изображать силу так, что точкой приложения является её конец – острие стрелки.

Совокупность сил, действующих на одно тело, будем называть *системой сил*. **Равнодействующей** системы сил называется такая одна сила, которая заменяет собой действие всей системы сил. В дальнейшем будет показано, что не всякая система сил имеет равнодействующую, то есть может быть заменена одной равнодействующей силой.

2. Аксиомы статики

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых *аксиомами статики*.

Аксиомы статики представляют собой результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтверждённых в быту, технике и научном эксперименте.

Аксиома I. Две силы, приложенные к одному абсолютно твёрдому телу, взаимно уравновешиваются, если они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Например, силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (рис. 2) – это векторы, приложенные в точках A и B одного твердого тела, равные по величине ($F_1 = F_2$), направленные вдоль одной прямой в противоположные стороны (следовательно, $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$); они образуют взаимно уравновешенную пару сил.

Замечание. Аксиома I устанавливает необходимые и достаточные условия взаимного уравновешивания только двух сил, но уравновешенная система сил может состоять и из большего числа сил.

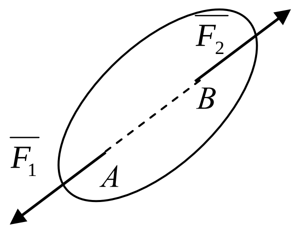


Рис. 2

Аксиома II. Действие данной системы сил на абсолютно твёрдое тело не изменится, если к ней добавить или от неё убрать уравновешенную систему сил.

Эта аксиома устанавливает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему сил, эквивалентны друг другу.

Из аксиом I и II вытекает следствие: силу можно переносить вдоль линии её действия, не меняя характер ее действия на твердое тело.

Доказательство. Пусть имеется твёрдое тело, на точку A которого действует сила $\overline{F}$ (рис. 3). Выберем на линии действия силы произвольную точку B, мысленно приложим к ней две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_1'}$ так, что $\overline{F_1} = -\overline{F_1'} = \overline{F}$. Согласно аксиоме I статики, силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_1'}$ уравновешивают друг друга. Согласно аксиоме II,

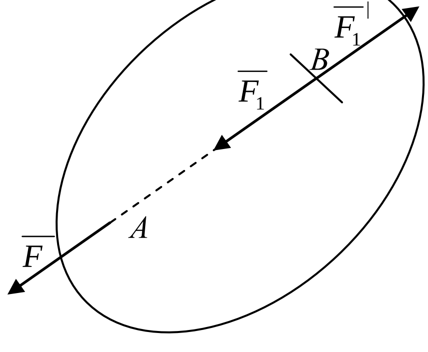


Рис. 3

их можно добавить к исходной системе сил, при этом действие системы сил на тело не изменится. Рассмотрим силы $\overline{F}$ и $\overline{F_1^{|}}$. Эти силы приложены к одному телу, равны по модулю, направлены по одной линии AB в разные стороны. Согласно аксиоме I статики, они уравновешивают друг друга; согласно аксиоме II, их можно отбросить. Оставшаяся сила $\overline{F_1}$ – это результат переноса исходной силы $\overline{F}$ вдоль линии её действия из точки A в точку B. В силу произвольности выбора точки B на линии действия силы следствие доказано.

<u>Аксиома Ш</u> (аксиома параллелограмма сил). Не меняя состояния тела, две силы, приложенные к одной его точке, можно заменить равнодействующей силой, приложенной в той же точке и равной их геометрической сумме: $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$.

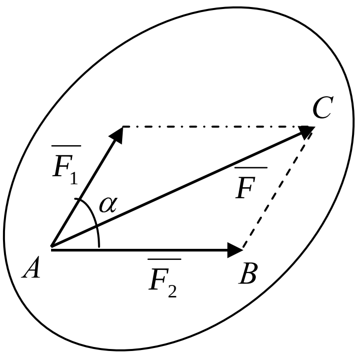


Рис. 4

Из математики нам известно, что геометрической суммой двух векторов называется вектор, по величине и по направлению совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на составляющих векторах (рис. 4): $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$. Если угол $\angle\alpha$ – это угол между векторами сил ($\angle\alpha = \angle \overline{F_1} \wedge \overline{F_2}$), то из ΔABC по теореме косинусов получим

$$AC^2 = F^2 = F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2F_1F_2\cos(\pi - \alpha),$$

откуда

$$F = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos\alpha}\,. \qquad (1)$$

1. Частный случай. Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ лежат на одной прямой и направлены в одну сторону. В этом случае $\alpha = 0$ *рад,* $\cos 0 = 1$ и $F = F_1 + F_2$.

2. Частный случай. Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ лежат на одной линии и направлены в противоположные стороны (пусть $F_1 > F_2$). В этом случае $\alpha = \pi$ *рад*, $\cos\pi = -1$. Равнодействующая направлена в сторону большей силы, а модуль, согласно (1), $F = F_1 - F_2$.

3. Частный случай. Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ взаимно перпендикулярны, тогда

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\ рад,\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad и \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\ .$$

Пользуясь аксиомой параллелограмма сил, можно:

1) любую силу разложить по двум произвольным направлениям;

2) по величине и направлению равнодействующей и одной из составляющих найти величину и направление другой составляющей.

Аксиома IV. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (третий закон Ньютона).

Если тело I действует на тело II с силой $\overline{F_2}$, то тело II действует на тело I с силой $\overline{F_1}$ (рис. 5). По модулю эти силы равны, направлены по одной прямой в противоположенные стороны, т. е. $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$.

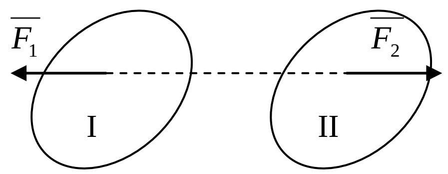


Рис. 5

Заметим, что эти силы не составляют систему уравновешенных сил, так как они приложены к разным телам.

3. Теорема о трех силах

Определение теоремы: если на твердое тело, находящееся в равновесии, действуют три непараллельные и расположенные в одной плоскости силы, то линии их действия пересекаются в одной точке.

Доказательство. Так как тело находится в покое, то непараллельные силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ являются взаимно уравновешенными. Пусть точки A, B, C – точки приложения сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ (рис. 6).

Используя следствие из аксиом I и II статики, перенесём силы $\overline{F_3}$ и $\overline{F_2}$ по линиям действия в точку D их пересечения и заменим эти две силы по аксиоме III равнодействующей $\overline{F}$, определяемой выражением $\overline{F} = \overline{F_3} + \overline{F_2}$.

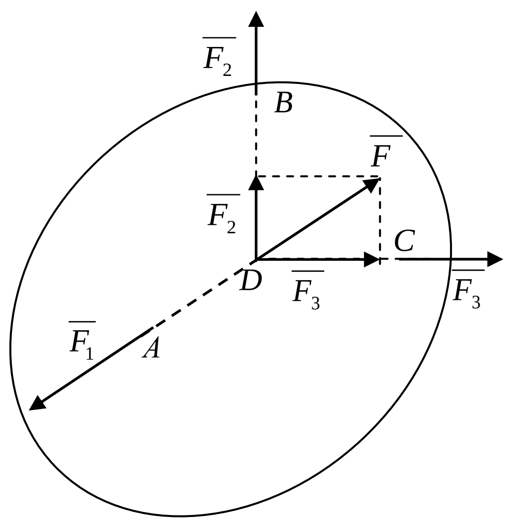


Рис. 6

Таким образом, на тело находящееся в равновесии, действуют две силы $\overline{F}$ и $\overline{F_1}$; следовательно, они являются взаимно уравновешенными, а это может быть (согласно аксиоме I статики) только в том случае, если силы $\overline{F}$ и $\overline{F_1}$ лежат на одной прямой, одинаковы по величине и направлены в противоположные стороны. Так как силы $\overline{F}$ и $\overline{F_1}$ имеют одну линию действия, следовательно, линии действия всех трёх сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ пересекаются в одной точке D. Теорема доказана.

4. Связи и их реакции

Твёрдое тело называется *свободным*, если оно не скреплено и не соприкасается с другими телами и может совершать любые перемещения из данного положения в пространстве (например, летящий воздушный шар).

Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скреплённые или соприкасающиеся с ним тела, называется *несвободным* (груз на столе, дверь на петлях и т. д.). Все тела, ограничивающие перемещения данного тела в пространстве, называются *связями*.

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому препятствует связь, будет действовать на связь с некоторой силой, называемой *силой давления на связь*. Одновременно, согласно аксиоме VI статики, связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. Эта сила называется *силой реакции связи*, или просто *реакцией связи*.

В дальнейшем силы, не являющиеся реакциями связей (например, силу тяжести), будем называть *активными силами*. Особенностью активной силы является то, что её модуль и направление непосредственно не зависят от других действующих на тело сил.

Реакции связей отличаются от активных сил тем, что их величины (модуль) и направления всегда зависят от других сил, действующих на тело, и наперёд неизвестны (причём, если никакие силы на тело не действуют, то реакции связей равны нулю).

Для определения величины реакции связи надо решать соответствующую задачу статики. При этом надо знать, что правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач статики очень важную роль.

<u>Направлена реакция связи всегда в сторону, противоположную той, куда связь не даёт перемещаться телу.</u>

Рассмотрим подробнее, как направлены реакции основных видов связей.

- **Гладкая поверхность**

Гладкой будем называть поверхность, трением о которую тела при решении данной задачи можно пренебречь. Такая поверхность не даёт телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точках их касания (рис. 7).

а) б) в)

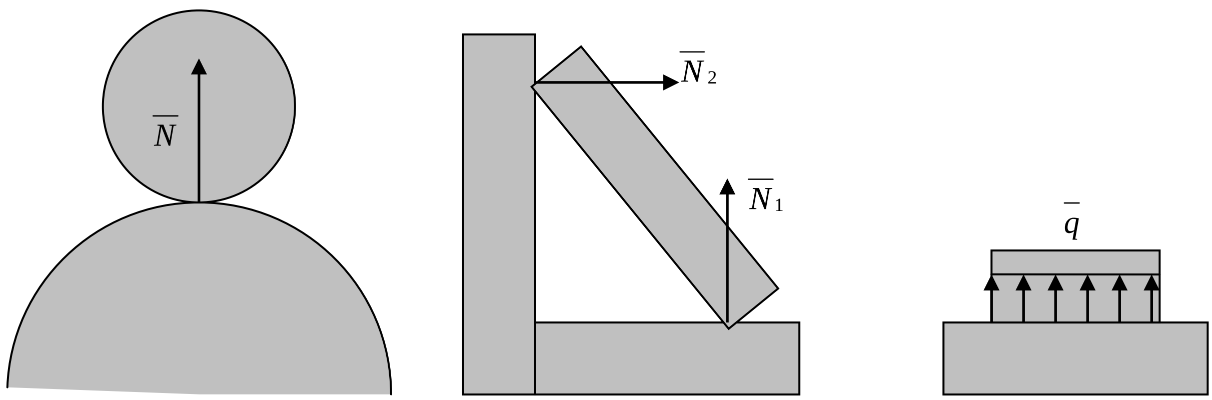


Рис. 7

На практике могут реализоваться следующие три случая:

а) реакция $\overline{N}$ гладкой поверхности всегда направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания, она приложена в этой точке и направлена в сторону от поверхности (см. рис. 7, а);

б) когда одна из соприкасающихся поверхностей не имеет нормали в точке касания (см. рис. 7, б), реакция направлена по нормали к другой поверхности;

в) если тело опирается на гладкую поверхность по линии или поверхности (см. рис. 7, в), то имеет место распределение сил реакций связи, соответственно, по линии или по поверхности соприкосновения. Эта распределенная по линии или по поверхности соприкосновения нагрузка в каждой точке касания направлена по нормали к соприкасающимся поверхностям.

• Нерастяжимая гибкая нить

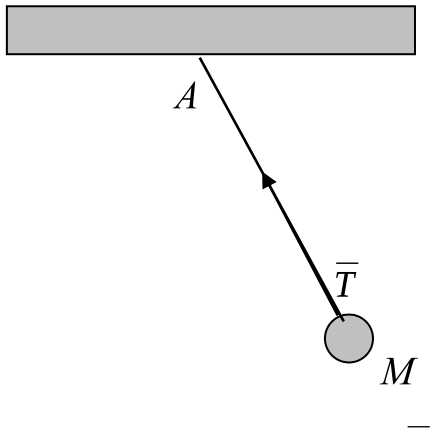


Рис. 8

Связь не даёт телу *M* удаляться от точки подвеса *A* по направлению *AM* (рис. 8). Поэтому реакция натянутой нити $\overline{T}$ направлена вдоль нити, к точке её подвеса.

• Цилиндрический шарнир (подшипник)

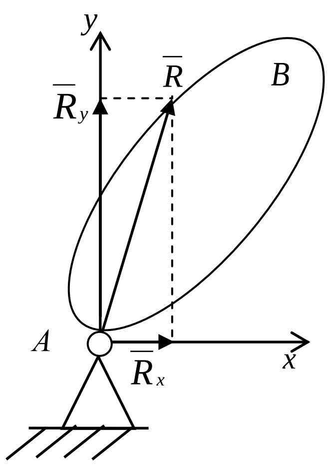


Рис. 9

Если два тела соединены болтом или шпилькой, проходящей через отверстия в этих телах, то такое соединение называется шарнирным, или просто шарниром. Осевая линия болта называется осью шарнира. Тело *AB* (рис. 9) может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира (в плоскости чертежа). При этом точка *A* тела не может перемещаться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира.

Следовательно, реакция $\overline{R}$ цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира.

Для силы $\overline{R}$ неизвестными являются её модуль и направление. При решении задачи определения реакции цилиндрического шарнира этот вектор раскладывают на две взаимно перпендикулярные составляющие $\overline{R_x}$ и $\overline{R_y}$, найдя которые, однозначно определяют величину и направление вектора $\overline{R}$.

Частный случай (рис. 10) – **подвижный цилиндрический шарнир**.

В этом случае шарнир не дает перемещаться точке *A* тела только по направлению нормали к поверхности, по которой движется шарнир. Следовательно, реакция такого шарнира направлена перпендикулярно поверхности, по которой движется шарнир.

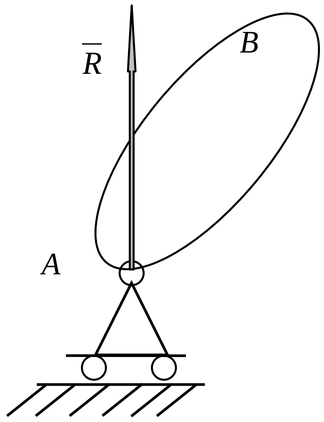


Рис. 10

• Сферический шарнир, или подпятник

Данный вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никакие перемещения в пространстве (точка *O* на рис. 11).

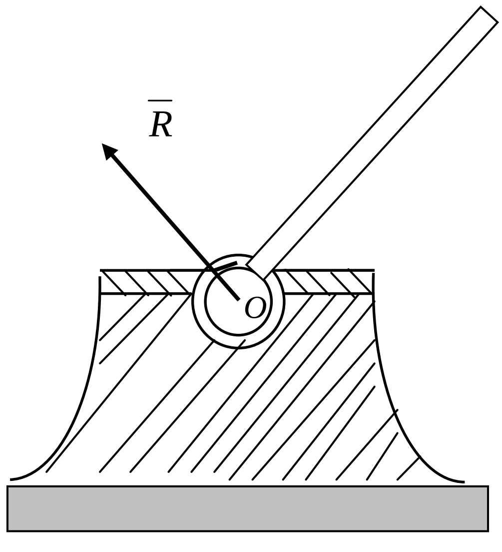


Рис. 11

Реакция $\overline{R}$ шарового шарнира, или подпятника, может иметь любое направление в пространстве. Для неё наперёд неизвестны ни модуль реакции R, ни углы, образуемые ею с осями x, y и z. При решении задачи определения этой реакции её раскладывают на три взаимно перпендикулярные составляющие вдоль осей координат. Таким образом, один сферический шарнир дает три неизвестные составляющие при решении задачи.

• Невесомый стержень без поперечной нагрузки

Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень *AB*, закреплённый на концах шарнирами (рис. 12). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в шарнирах.

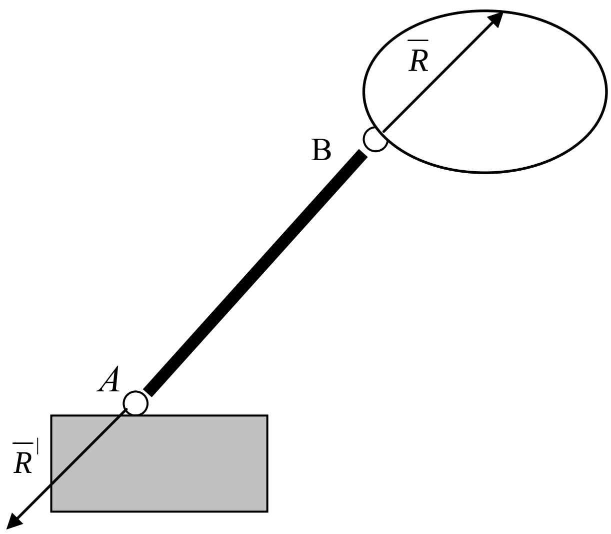


Рис. 12

В общем случае, если тело находится в движении, эти силы могут быть направлены произвольно, но если стержень находится в равновесии, то, согласно аксиоме I статики, они являются взаимно уравновешенными. Следовательно, они должны быть направлены по одной прямой *AB* – вдоль оси стержня. Таким образом, неподвижный, нагруженный на концах стержень, весом которого по сравнению с этими нагрузками можем пренебречь, может работать лишь на растяжение или сжатие. Если такой стержень является связью, то его реакция $\overline{R}$ будет направлена только вдоль оси стержня.

- **Силы трения скольжения**

Опыт показывает, что при стремлении перемещать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, *называемая силой трения скольжения.*

В инженерных расчётах учитывают трение с помощью трех законов трения скольжения.

I закон. При стремлении перемещать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения, величина которой может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого *предельной силой трения.* Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

II закон. Величина предельной силы трения равна произведению коэффициента трения на нормальное давление:

$$F_{пр} = f_o \cdot N ,$$

где коэффициент трения $f_о$ – число безразмерное; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел, состояния их поверхностей, наличия смазки и др.

III закон. Величина коэффициента трения в довольно широких пределах не зависит от размера соприкасающихся при трении поверхностей.

Экспериментально коэффициент трения $f_о$ определяются с помощью простейшей установки (рис. 13).

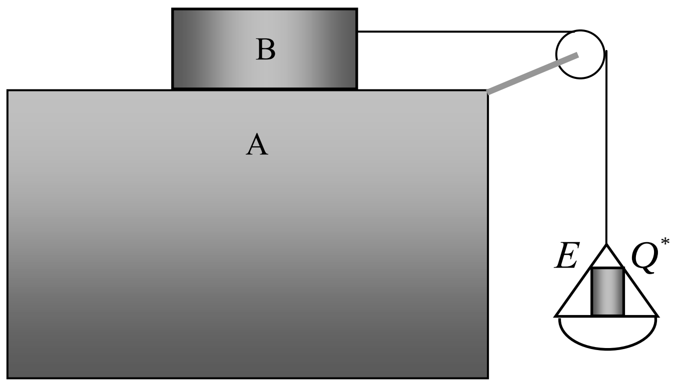


Рис. 13.

Поверхности тела A и тела B сделаны из тех материалов, между которыми требуется определить коэффициент трения.

Подкладывая гири известного веса на чашку E, определяют вес Q^*, который сдвинет тело B, тогда

$$f_0 = \frac{F_{пр}}{N} = \frac{Q^*}{P}.$$

С помощью этого прибора подтверждается справедливость всех трех законов трения скольжения.

При любых нагрузках Q, меньших Q^*, груз находится в покое; следовательно, уравновешивающая силу Q сила трения F, действительно, может принимать любые значения от нуля (при $Q = 0$) до $F_{пр}$ (при $Q \geq Q^*$), то есть справедливы законы I и II.

Проделав опыты с брусками разной геометрии, убедимся, что справедлив и закон III трения скольжения.

5. Аксиома связей

Равновесие несвободных тел в статике изучается на основании аксиомы связей: **всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями этих связей** (рис. 14).

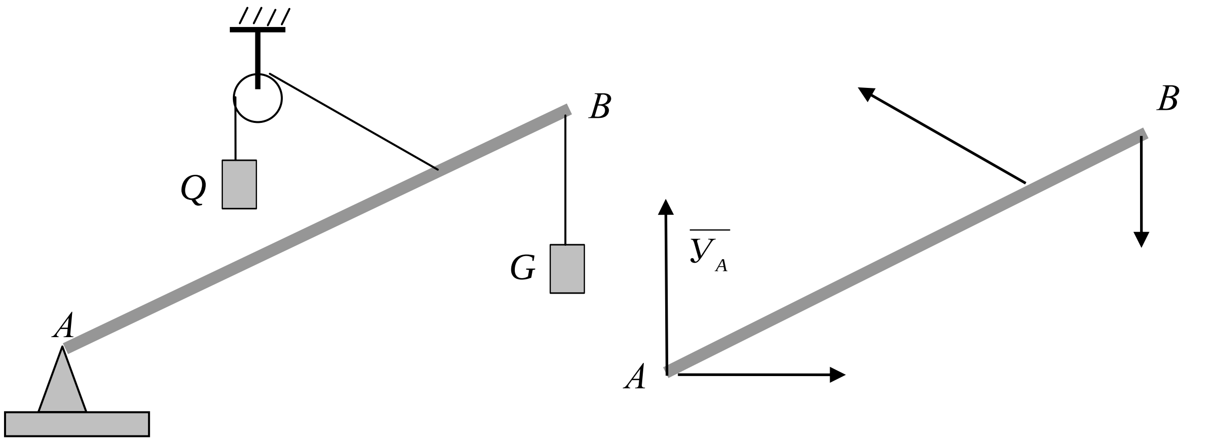


Рис. 14

Решение задачи определения реакций связей имеет важное практическое значение. Зная их, мы, согласно аксиоме IV, будем знать и силы давления на связи, т. е. будем знать те исходные данные, которые необходимы для расчёта прочности и надёжности соответствующих частей конструкции или механизма.

II. СХОДЯЩАЯСЯ СИСТЕМА СИЛ

Определение: действующая на тело система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке. Эту точку называют *точкой схода системы сил*.

1. Теорема о равнодействующей сходящейся системы сил

<u>Определение теоремы</u>: сходящаяся система сил всегда приводится к равнодействующей силе, равной геометрической сумме всех сил системы:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i .$$

Приложена равнодействующая сила к точке схода исходной системы сил.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим твёрдое тело, находящееся под действием сходящейся системы, состоящей из *n* сил: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, … , $\overline{F}_n$ (рис. 15). Пусть точка *O* – точка пересечения линий действия сил (точка схода). Пользуясь следствием из первых двух аксиом статики, перенесём все силы системы вдоль линии их действия в точку схода *O*. Используя аксиому параллелограмма сил, найдём равнодействующую сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, это будет сила $\overline{F'} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

Аналогично найдём равнодействующую сил $\overline{F'}$ и $\overline{F}_3$ – силу $\overline{F} = \overline{F'} + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$. Если заданная система состоит из трех сил, то вектор $\overline{F}$ является равнодействующей и равен геометрической сумме трех исходных сил.

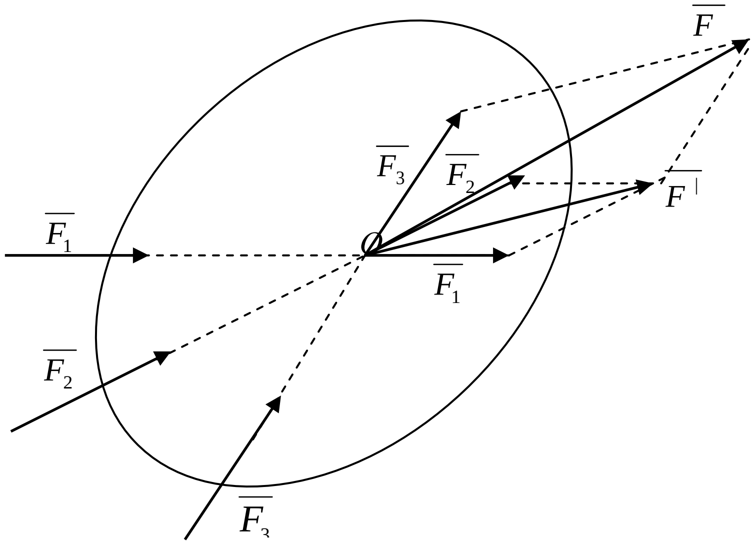


Рис. 15

В случае, если система состоит из *n* сил, продолжая процесс последовательного геометрического суммирования, мы всегда придём к единственной равнодействующей силе, равной геометрической сумме *n* составляющих сил: $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n}$, или $\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$.

<u>Замечания</u>:

1. Величина и направление равнодействующей силы не зависят от порядка геометрического суммирования, т. е. справедлив переставочный закон.

2. Величину и направление равнодействующей силы удобно находить с помощью построения силового многоугольника (пример на рис. 16).

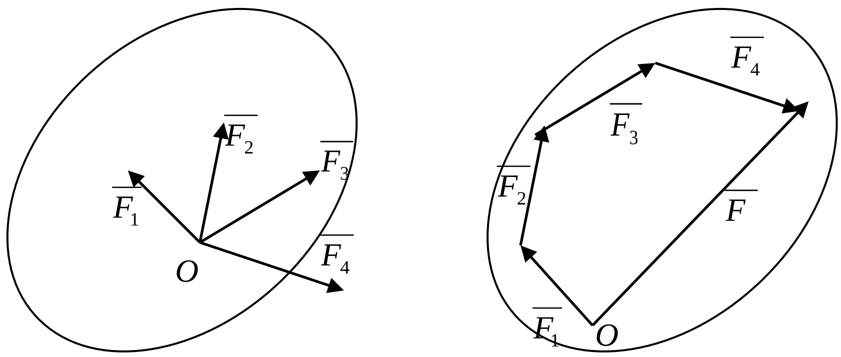


Рис. 16

Для этого необходимо к концу каждого предыдущего вектора прикладывать начало следующего вектора. Вектор $\overline{F}$, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, и есть равнодействующий вектор силы данной системы сил. Силовой многоугольник в общем случае может быть не плоским, а стороны его могут пересекаться.

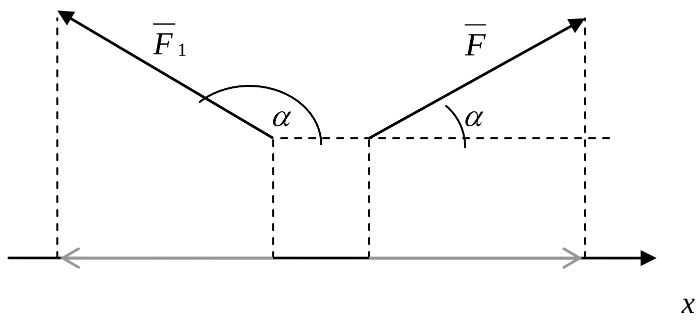
3. Сходящаяся система сил является уравновешенной, если геометрическая сумма всех сил равна нулю ($F = \sum^{n} \overline{F_i} = 0$), следовательно, силовой многоугольник в этом случае является замкнутым.

2. Проекции вектора силы на оси координат

<u>1-й случай.</u> Сила и ось лежат в одной плоскости.

<u>Определение.</u> Проекцией вектора на ось называется взятый с соответствующим знаком отрезок оси, заключённый между двумя перпендикулярами к оси, проходящими через начало и конец вектора. Если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси, то проекция вектора положительная; если отрезок направлен в обратную по отношении к оси сторону, то проекция отрицательная.

Пусть имеются вектор силы $\overline{F}$ и некоторая ось x, лежащие в одной плоскости (рис. 17).



$$\text{пр}_X(\overline{F_1}) = F_{1X} = X_1 \prec 0, \quad \text{пр}_X(\overline{F}) = F_X = X \succ 0$$

Рис. 17

Опустим из концов вектора $\overline{F}$ перпендикуляры на ось x. Тогда проекцией вектора $\overline{F}$ на ось называется скалярная величина, равная произведению модуля вектора силы $\overline{F}$ на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси x, т. е.

$$np_X(\overline{F}) = F_X = X = F \cdot \cos\alpha.$$

<u>2-й случай.</u> Сила и ось не лежат в одной плоскости. <u>Метод двойного проецирования.</u>

В общем пространственном случае проекции вектора силы находят по методу <u>двойного проецирования.</u> Так, пусть $Oxyz$ – прямоугольная, правая декартовая система координат; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты выбранной декартовой системы координат (единичные векторы, ориентированные вдоль, соответственно, осей x, y, z); $\overline{F}$ – произвольно ориентированный вектор силы (рис. 18). Требуется определить проекции вектора $\overline{F}$ на оси x, y и z.

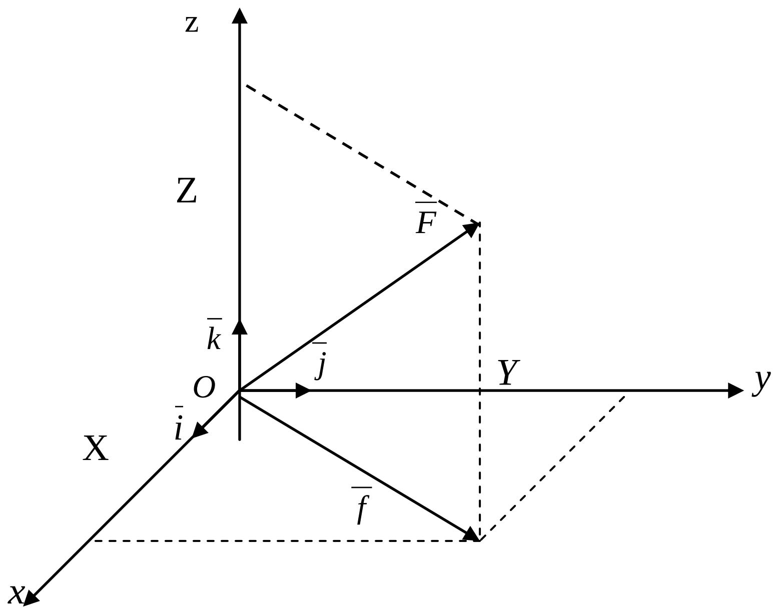


Рис. 18

Для этого необходимо:

1. Спроецировать вектор силы на одну (любую) из координатных плоскостей (например, на Oxy), т. е. получить $np_{OXY}(\overline{F}) = \bar{f}$.

2. Спроецировать вектор силы на плоскость *Oxy*, вектор $\overline{f}$ на оси *x* и *y*, тогда мы получим $X = np_X(\overline{F})$ и $Y = np_Y(\overline{F})$.

Для получения проекции $\overline{F}$ на ось *z* необходимо спроецировать вектор $\overline{F}$ на одну из фронтальных плоскостей (*Oxz* или *Oyz*), а затем полученную проекцию на плоскости спроецировать на ось *z*. Вектор $\overline{F}$ через его известные декартовые проекции представляется в следующем координатном виде:

$$\overline{F} = X\overline{i} + Y\overline{j} + Z\overline{k},$$

а модуль вектора силы

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{2}$$

Косинусы углов между вектором силы и декартовыми осями определяются по формулам

$$\begin{cases} \cos(\overline{F}\,\hat{}\,ox) = \dfrac{X}{F}; \\ \cos(\overline{F}\,\hat{}\,oy) = \dfrac{Y}{F}; \\ \cos(\overline{F}\,\hat{}\,oz) = \dfrac{Z}{F}. \end{cases} \tag{3}$$

Эти косинусы ещё называются *направляющими косинусами вектора*. Приведённые аналитические формулы (2) и (3) позволяют полностью определить вектор $\overline{F}$ в пространстве.

3. Аналитические уравнения равновесия твёрдого тела под действием сходящейся системы сил

Рассмотрим твёрдое тело под действием системы *n* сходящихся сил $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$. Введём декартовую систему координат *Oxyz* с ортами осей $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Согласно теореме о сходящихся силах, эта система сил приводится к равнодействующей $\overline{F}$. Линия действия равнодействующей проходит через точку схода O, а вектор равнодействующей равен геометрической сумме векторов составляющих сил:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \ . \tag{4}$$

Каждую i-ю силу через ее проекции на оси координат можно записать в следующем виде:

$$\overline{F}_i = X_i \bar{i} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k} ,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; X_i, Y_i, Z_i – проекции силы $\overline{F}_i$ на оси координат.

Аналогично равнодействующая сила $\overline{F}$ через свои проекции на оси координат запишется в следующем виде: $\overline{F} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}$. Спроецируем векторное равенство (4) на ось Ox. В силу теоремы о проекции геометрической суммы на ось получим $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$; аналогично спроецируем (4) на оси Oy и Oz: $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Таким образом, проекции на координатные оси равнодействующей сходящейся системы сил равны алгебраическим суммам одноимённых проекций всех составляющих сил системы.

Модуль вектора равнодействующий $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Косинусы углов между равнодействующей и декартовыми осями

$$\begin{cases} \cos(\overline{F} \wedge OX) = \dfrac{X}{F}, \\ \cos(\overline{F} \wedge OY) = \dfrac{Y}{F}, \\ \cos(\overline{F} \wedge OZ) = \dfrac{Z}{F}. \end{cases}$$

Эти аналитические формулы позволяют без геометрических построений определить равнодействующую силу и представить её в пространстве.

Если сходящаяся система сил является уравновешенной, то

$$\overline{F} = 0 \rightarrow X = Y = Z = 0,$$

поэтому аналитические уравнения равновесия твердого тела под действием сходящейся системы сил имеют вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0. \end{cases}$$

Твёрдое тело находится в равновесии под действием сходящейся системы сил тогда и только тогда, когда алгебраические суммы одноимённых проекций всех составляющих сил обращаются в ноль.

III. СЛОЖЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Рассмотрим твёрдое тело, на которое действуют две параллельные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис. 19) одного направления. Пользуясь аксиомами I и II статики, перейдём от данной системы параллельных сил к статически эквивалентной ей системе сходящихся сил $\overline{Q_1}$ и $\overline{Q_2}$. Для этого приложим в точках *A* и *B* пару взаимно уравновешенных сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ ($\overline{P}_1 = -\overline{P}_2$), направленных вдоль прямой *AB*. Затем сложим их с исходными силами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ по правилу параллелограмма (аксиома III статики). Полученные силы $\overline{Q_1}$ и $\overline{Q_2}$ перенесём в точку *O*, где пересекаются их линии действия, и разложим на первоначальные составляющие. После этого в точке *O* на тело будут действовать две взаимно уравновешенные силы ($\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$), которые можно отбросить, не меняя характер действия системы сил на тело, и две силы, направленные вдоль одной прямой ($\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$).

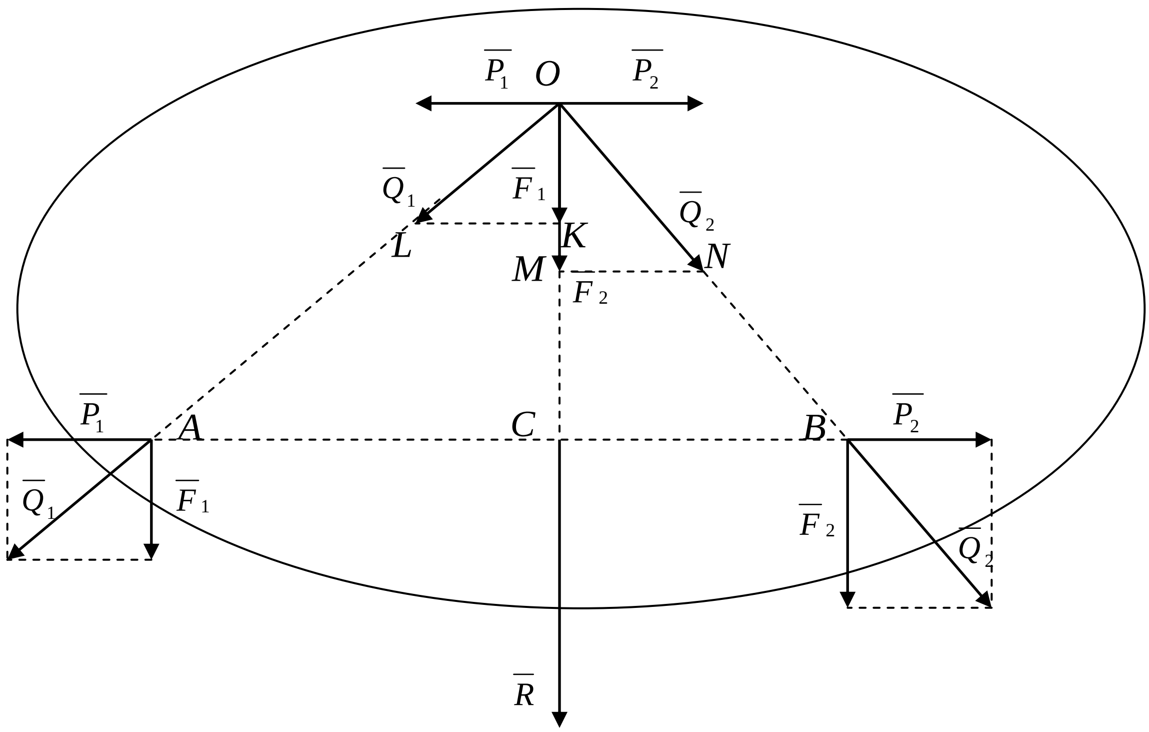


Рис. 19

Эти силы перенесём в точку *C* на прямой *AB* и заменим их равнодействующей $\overline{R}$, модуль которой равен $R = F_1 + F_2$. Сила $\overline{R}$ является равнодействующей исходных параллельных сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, приложенных в точках *A* и *B*. Для определения положения точки *C* рассмотрим треугольники *OAC, OLK* и *OCB, OMN*. Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1} \quad \text{и} \quad \frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}, \quad \text{или} \quad AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2 \quad (\text{так как } P_1 = P_2),$$

откуда $\dfrac{BC}{F_1} = \dfrac{AC}{F_2}$. Кроме того, согласно правилам пропорций, так как $BC + AC = AB$ и $F_1 + F_2 = R$, то справедливо и $\dfrac{BC}{F_1} = \dfrac{AC}{F_2} = \dfrac{AB}{R}$.

Итак, равнодействующая двух действующих на абсолютно твёрдое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.

2. Сложение двух параллельных сил, направленных в разные стороны

Пусть на некоторое тело действуют две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ (рис. 20), лежащие на параллельных прямых и направленные в противоположенные стороны (считаем для определённости, что $F_1 > F_2$).

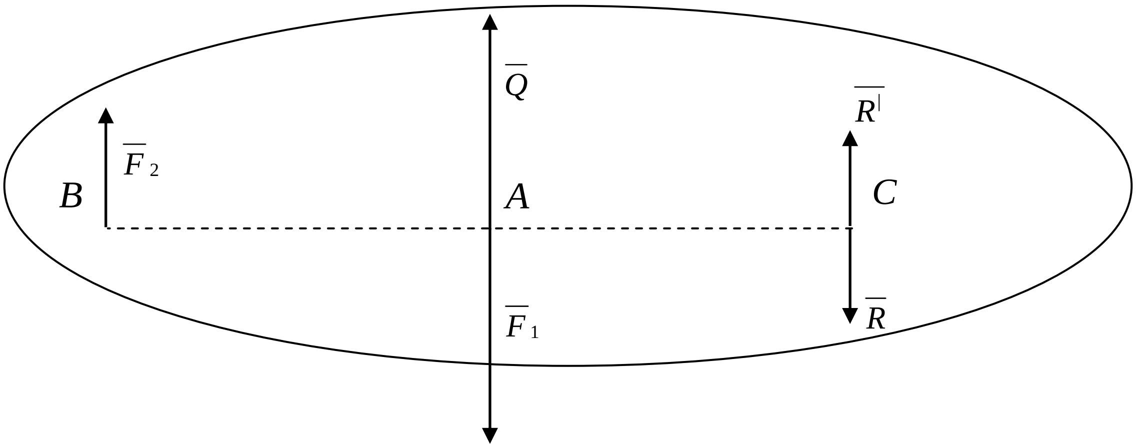


Рис. 20

Возьмём на продолжении прямой AB точку C и приложим к ней взаимно уравновешенные силы $\overline{R}$ и $\overline{R'}$, параллельные силам $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$. При этом модули сил и положение точки C на продолжении прямой AB выберем из условия, что

$$R = F_1 - F_2,$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R} \quad .$$

Силы $\overline{F_2}$ и $\overline{R'}$ – это параллельные силы одного направления и, согласно выводам из предыдущего подраздела, их можно заменить равнодействующей силой $\overline{Q}$, параллельной слагаемым силам, её модуль $Q = F_2 + R' = F_1$. Приложена сила $\overline{Q}$ в точке A. Так как силы $\overline{F_1}$ и $\overline{Q}$ лежат на одной прямой, равны по модулю и направлены в противоположенные стороны, то они являются взаимно уравновешенными и их можно отбросить, не меняя характер действия системы сил на твердое тело. В результате статически эквивалентных преобразований заданные силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ заменены одной силой $\overline{R}$, которая и является их равнодействующей. Модуль этой равнодействующей и точку её приложения C определяем по вышеуказанным формулам.

Таким образом, равнодействующая двух действующих на абсолютно твёрдое тело параллельных сил, направленных в противоположные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, со стороны большей силы, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных исходным силам.

IV. ТЕОРИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАР НА ПЛОСКОСТИ

1. Понятие о механический паре

Определение: две силы (рис. 21), приложенные к одному телу, называются *механической парой*, если они равны по модулю, действуют вдоль параллельных прямых в противоположные стороны ($\overline{F} = -\overline{F'}$).

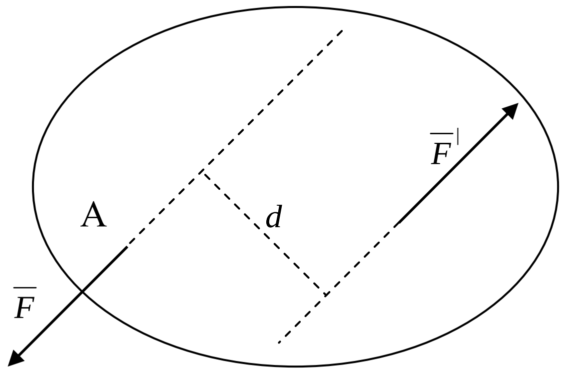


Рис. 21

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил называется плечом пары. Механическая пара, будучи приложенной к свободному твёрдому телу, приводит его во вращательное движение. Вращательный эффект пары характеризуется её моментом.

Определение. Моментом пары называется взятое с соответствующим законом произведение модуля одной из сил пары на её плечо. Момент пары условились считать положительным, если она стремится вращать плоскость чертежа против хода часовой стрелки; если вращает по чаовой стрелке, то момент отрицательный.

Пара сил – простейший пример неуравновешенной системы сил, которая не сводится к равнодействующей силе.

Определение: две различные механические пары, оказывающие на одно и то же тело одинаковое действие, называются *статически эквивалентными механическими парами*.

2. Теорема о статически эквивалентных механических парах на плоскости

Определение теоремы: для статический эквивалентности двух механических пар на плоскости необходимо и достаточно, чтобы моменты этих пар совпадали по величине и знаку.

Доказательство

1-й этап. Покажем, что на произвольно ориентированном отрезке на плоскости, как на плече, можно построить механическую пару, статически эквивалентную исходной.

Пусть пара сил $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ является исходной механической парой с плечом *AB* на данной рассматриваемой плоскости (рис. 22). Выберем на этой плоскости произвольный отрезок *CD*. Через точки *C* и *D* проведём прямые, перпендикулярные отрезку *CD*. Продолжим линии действия сил $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ до пересечения с линиями, проведёнными из точек *C* и *D*. В результате получим параллелограмм *ENKM*. Пользуясь следствием из первых двух аксиом статики, перенесём силу $\overline{F}$ в точку *E*, а силу $\overline{F'}$ в точку *K*. Проведём диагональ параллелограмма *EK*. Пользуясь аксиомой параллелограмма сил, разложим силу $\overline{F}$ по направлениям *EC* и *EK*. Пусть $\overline{Q}$ и $\overline{R}$ проекции $\overline{F}$ на направления *EC* и *EK*, тогда $\overline{F} = \overline{Q} + \overline{R}$. Аналогично разложим силу $\overline{F'}$ на направления *KD* и *EK*, имеем $\overline{F'} = \overline{Q'} + \overline{R'}$.

Силы $\overline{R'}$ и $\overline{R}$ равны по модулю и действуют вдоль прямой *EK* в противоположные стороны. Согласно аксиоме I статики, эти силы уравновешивают друг друга, а согласно аксиоме II статики их можно отбросить, не меняя действия системы сил на твёрдое тело. Силы $\overline{Q'}$

и $\overline{Q}$ также равны по модулю и действуют вдоль параллельных прямых *KD* и *CE* в противоположные стороны. Пользуясь следствием из первых двух аксиом статики, перенесём их вдоль линии действия в точки *C* и *D*. Все преобразования не изменяли действия системы сил на тело. Следовательно, эти силы образуют на плече *CD* механическую пару, статически эквивалентную исходной.

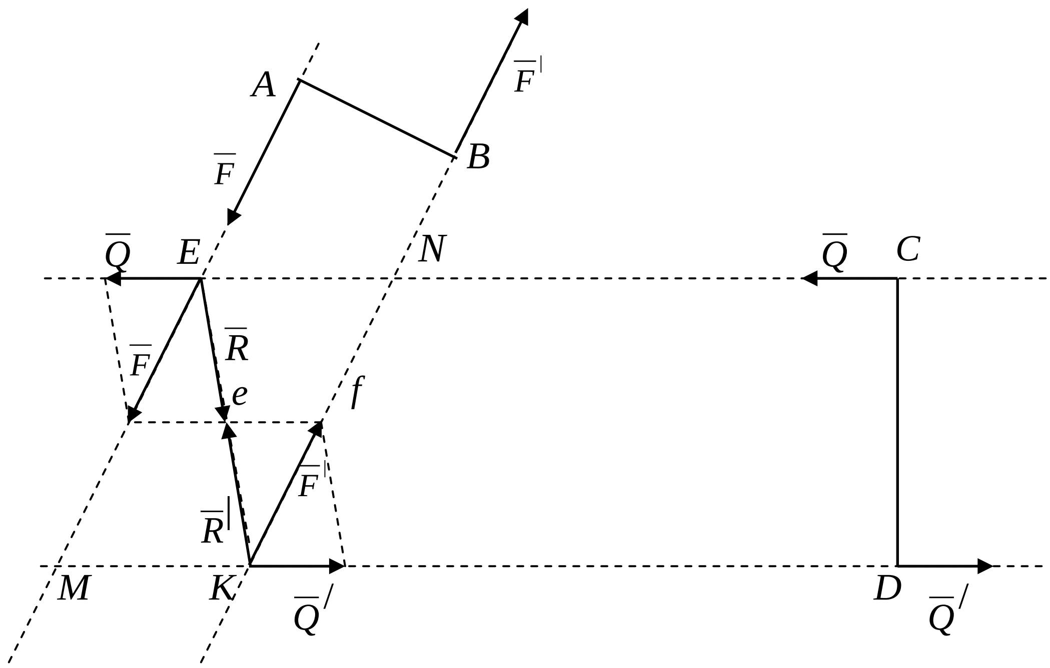


Рис. 22

Так как отрезок *CD* на плоскости взят произвольно, то механическую пару сил, эквивалентную исходной, можно построить на любом отрезке на плоскости.

2-й этап. Покажем, что моменты исходной и построенной механических пар совпадают по величине и знаку. Для этого рассмотрим ΔEKN и ΔefK; они являются подобными, как треугольники со взаимно параллельными сторонами. Из подобия этих треугольников вытекает

$$\frac{ef}{Kf} = \frac{EN}{KN} = \frac{Q}{F}. \tag{5}$$

Вычислим площадь ΔEKN двумя способами:

<u>1-й способ:</u> EN – основание треугольника EKN, CD – его высота, тогда

$$S_{\Delta EKN} = \frac{1}{2} EN \cdot CD;$$

<u>2-й способ:</u> KN – основание треугольника, AB – высота, тогда

$$S_{\Delta EKN} = \frac{1}{2} KN \cdot AB,$$

откуда

$$EN \times CD = KN \times AB \text{ или } \frac{EN}{KN} = \frac{AB}{CD}. \qquad (6)$$

Так как левые части равенств (5) и (6) одинаковые, то равны друг другу и правые

$$\Rightarrow \frac{Q}{F} = \frac{AB}{CD}$$

или

$$\underbrace{Q \cdot CD}_{\textit{момент построенной пары}} = \underbrace{F \cdot AB}_{\textit{момент исходной пары}}$$

Знаки моментов также совпадают (см. рис. 22), следовательно, теорема доказана.

<u>Следствие 1.</u> Механическую пару можно переносить как угодно по плоскости ее действия, сохраняя по величине и знаку её момент.

<u>Следствие 2.</u> Плечо механической пары можно увеличить (уменьшить) в любое число раз, соответственно уменьшив (увеличив) модуль сил, составляющих пару, в то же число раз.

<u>Замечание.</u> Поскольку значение имеет лишь момент механической пары, а не величина и ориентация его плеча, то для пары принято обозначение в виде дуги со стрелкой с указанием момента, причём

$$\overset{\curvearrowright}{\mathrm{M}} < 0, \qquad \overset{\curvearrowleft}{\mathrm{M}} > 0.$$

3. Теорема о сложении механических пар на плоскости

Определение теоремы: механические пары, действующие в одной плоскости на твёрдое тело, можно заменить одной равнодействующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Доказательство. Пусть на некоторое твердое тело действуют три механические пары сил $\overline{F}_1\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2\overline{F}_2'$ и $\overline{F}_3\overline{F}_3'$, лежащие в одной плоскости (рис. 23). Их моменты: $M_1 = F_1d_1$, $M_2 = -F_2d_2$, $M_3 = F_3d_3$.

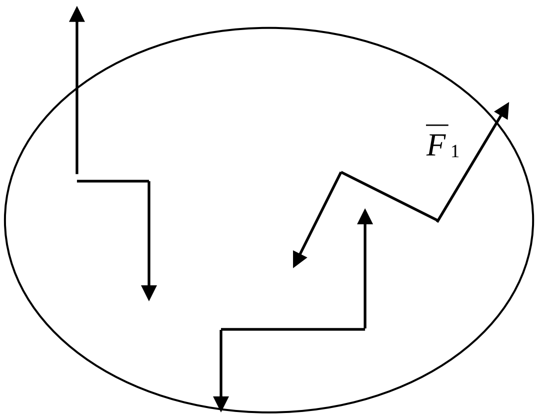


Рис. 23

Преобразуем заданные пары к одному плечу d (рис. 24), оставив те же моменты. Моменты $M_1 = Q_1d$, $M_2 = -Q_2d$, $M_3 = Q_3d$.

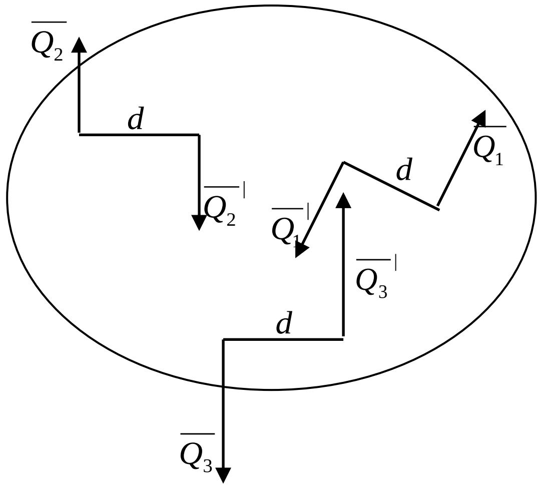


Рис. 24

Возьмём на плоскости отрезок *AB* (рис. 25), равный по величине d, и перенесём пары сил так, чтобы они были приложены в точках *A* и *B*. Сложим силы, приложенные в точках *A* и *B*. (Пусть для определённости $Q_1 + Q_3 > Q_2$.) Тогда

$$F = Q_1 - Q_2 + Q_3, \; F' = Q_1' - Q_2' + Q_3'. \qquad (7)$$

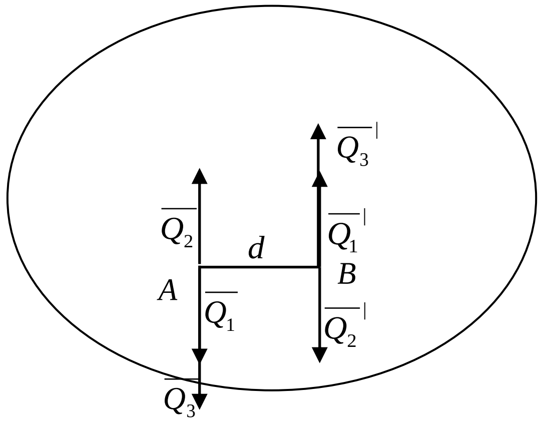


Рис. 25

Силы $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ составляют пару (рис. 26), которая и является <u>равнодействующей механической парой.</u> Для нахождения её момента, умножим обе части (7) на d, получим

$$F \cdot d = Q_1 d - Q_2 d + Q_3 d, \text{ т. е. } M = M_1 + M_2 + M_3.$$

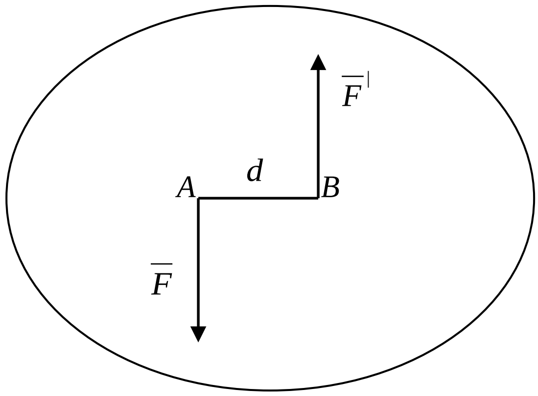


Рис. 26

Для n механических пар, расположенных в одной плоскости, продолжая аналогично суммирование, получим, что момент равнодействующей механической пары определяется выражением $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Теорема доказана.

Замечание. Если твердое тело находится в равновесии под действием механических пар, лежащих в одной плоскости, то момент равнодействующей пары должен быть равен нулю: $M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$.

V. ТЕОРИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ПАР В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Теорема о переносе механической пары в параллельную плоскость

Определение теоремы: от переноса механической пары в параллельную плоскость действие её на тело не меняется.

Доказательство. Пусть даны плоскость P и параллельная ей, произвольно взятая плоскость Q (рис. 27). В плоскости P на твердое тело действует механическая пара сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ с плечом AB.

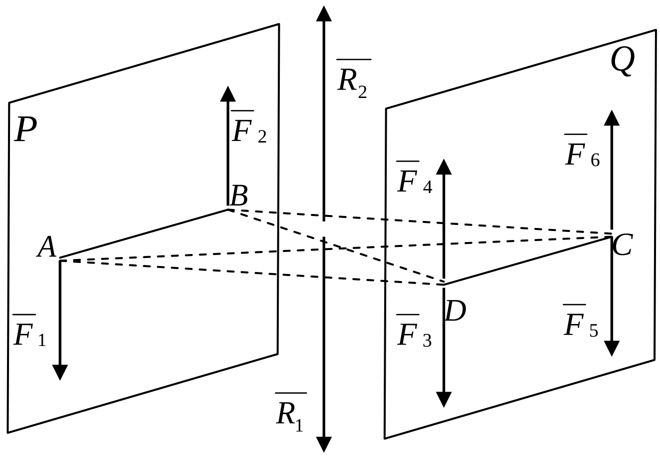


Рис. 27

Возьмём в плоскости Q отрезок CD, параллельный и равный отрезку AB, и приложим в точках C и D по две взаимно уравновешивающие силы, параллельные силам заданной пары и равные им по модулю ($F_3 = F_4 = F_5 = F_6 = F_1 = F_2$). Сложим силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_5}$, равнодействующей этих двух параллельных сил одного направления будет сила $\overline{R_1}$. Так как силы F_1 и F_3 равны по модулю, параллельны и направлены в одну сторону, то их равнодействующая приложена в середине отрезка AC, параллельна силам F_1 и F_3, направлена в ту же сторону, а по модулю $R_1 = F_1 + F_3$. Аналогично сложим силы $\overline{F_2}$ и $\overline{F_4}$. Получим силу $\overline{R_2}$, модуль которой $R_2 = F_2 + F_4$; она приложена на середине отрезка BD, параллельна силам $\overline{F_2}$ и $\overline{F_4}$ и направлена в ту же сторону, что и они.

Фигура $ABCD$ – параллелограмм, его диагонали AC и BD, пересекаясь, делятся пополам, следовательно, силы $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$ приложены в одной точке, действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны, а их модули равны ($R_1 = R_2$); таким образом, они являются взаимно уравновешенными и, согласно аксиоме II статики, их можно отбросить. Оставшиеся силы $\overline{F_3}$ и $\overline{F_6}$ образуют пару, действие которой на твёрдое тело не отличается от исходной, но расположенную в плоскости Q. Теорема доказана.

2. Представление момента механической пары вектором

Пусть в плоскости P на твёрдое тело действует пара с силами $\overline{F}$ и $\overline{F'}$ и плечом d (рис. 28). Правило знаков для момента механической пары в пространстве теряет смысл, так как наблюдатель может находиться по любую сторону от плоскости P, что вызовет перемену направления действия пары.

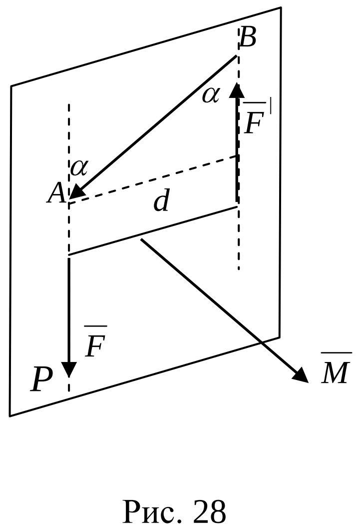


Рис. 28

Поэтому условились в пространстве момент пары представлять вектором, направлен этот вектор перпендикулярно плоскости, в которой лежит механическая пара ($\overline{M} \perp пл.P$). По модулю этот вектор равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары ($M = F \cdot d$) и направлен ту сторону перпендикулярно плоскости *P*, откуда «вращение» механической пары видится происходящим против часовой стрелки.

Из теории об эквивалентных механических парах на плоскости и о переносе механической пары в параллельную плоскость вытекает, что вектор момента механической пары можно приложить в любой точке пространства.

Возьмём на линиях действия сил точки *A* и *B* и соединим их вектором $\overline{BA}$. Покажем, что $\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F}$ (векторное произведение). Чтобы доказать, что два вектора равны, надо доказать, что они:

- равны по модулю,
- имеют одинаковое направление.

Модуль векторного произведения

$$\left|\overline{BA} \times \overline{F}\right| = BA \cdot F \cdot \sin\alpha ,$$

где α – угол между векторами (см. рис. 28), но $BA \cdot \sin\,\alpha =$ $= d \Rightarrow \left|\overline{BA} \times \overline{F}\right| = F \cdot d$. Так как $M = F \cdot d$, то модули этих векторов совпадают.

Что касается направления векторного произведения $\overline{BA} \times \overline{F}$, то этот вектор направлен перпендикулярно плоскости *P*, в которой лежат перемножаемые векторы. И он направлен перпендикулярно этой плоскости в ту сторону, откуда совмещение первого вектора $\overline{BA}$ со вторым вектором $\overline{F}$ видится поворотом против хода часовой стрелки на наименьший угол, т. е. так же, как $\overline{M}$.

3. Теорема о сложении механических пар, расположенных в пересекающихся плоскостях

Определение теоремы: две механические пары, расположенные в пересекающихся плоскостях, можно сложить в одну равнодействующую пару, вектор момента которой равен геометрической сумме векторов моментов исходных механических пар.

Доказательство. Пусть даны две пересекающиеся плоскости P и Q (рис. 29), и в них на некоторое твердое тело действуют две механические пары сил с моментами, соответственно, $\overline{M_1}$ и $\overline{M_2}$. Преобразуем исходные пары, заданные в плоскости P и Q, к одному плечу, равному длине отрезка AB, лежащего на линии пересечения плоскостей P и Q. Перенесём пары в их плоскостях так, чтобы силы, их составляющие, оказались приложенными в точках A и B. Сложим силы в точках A и B в равнодействующие $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ и $\overline{F'} = \overline{F_1'} + \overline{F_2'}$. Так как силы $\overline{F} = -\overline{F'}$, то эти силы составляют равнодействующую механическую пару. Найдём момент пары сил $\overline{F}, \overline{F'}$:

$$\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F} = \overline{BA} \times (\overline{F_1} + \overline{F_2}) = \underbrace{\overline{BA} \times \overline{F_1}}_{\overline{M_1}} + \underbrace{\overline{BA} \times \overline{F_2}}_{\overline{M}2} = \overline{M_1} + \overline{M_2}.$$

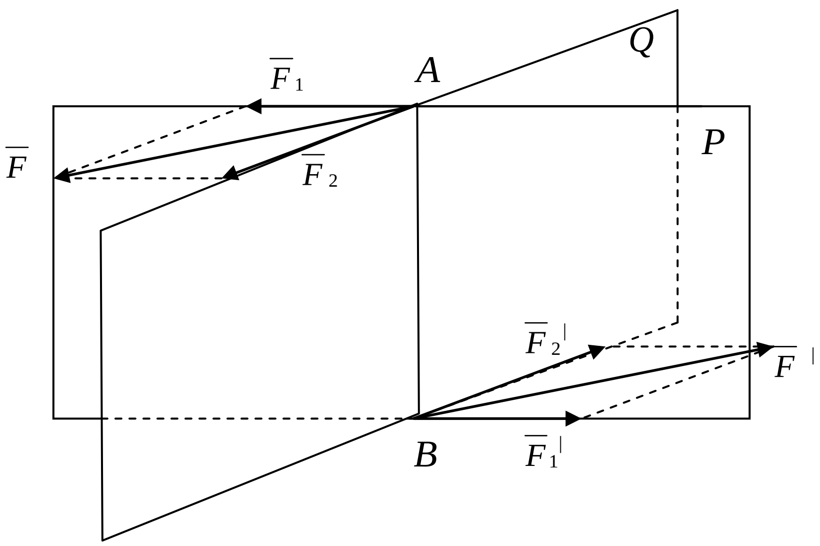


Рис. 29

Теорема легко обобщается на случай любого числа составляющих механических пар, лежащих в пересекающихся плоскостях, которые всегда приводятся к одной равнодействующей механической паре с моментом, равным геометрической сумме моментов составляющих пар: $\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_i}$.

Замечание: в случае, если твёрдое тело находится в равновесии под действием механических пар, лежащих в пересекающихся плоскостях, то векторная сумма моментов всех пар обращается в ноль: $\sum_{i=1}^{n}\overline{M_i}=0$, а многоугольник, составленный из векторов моментов исходных механических пар, является замкнутым. (Здесь рассмотрен только случай расположения пар в пересекающихся плоскостях; если пары находятся в параллельных плоскостях, то их всегда можно перенести в одну плоскость, а затем применить теорему о сложении механических пар в плоскости.)

VI. МОМЕНТЫ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ

1. Момент силы относительно центра на плоскости

Определение: моментом силы относительно центра на плоскости называется взятое с соответствующим знаком произведение модуля силы на кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы. Это кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы называется плечом силы относительно центра.

Момент силы считается положительным, если сила вращает плоскость чертежа относительно центра против часовой стрелки, и отрицательным, если она вращает картинку чертежа относительно центра по часовой стрелке. Момент силы равен нулю, если линия действия силы пересекает центр (плечо силы равно нулю).

Так, если $\overline{AB}$ – вектор силы $\overline{F}$ (рис. 30), то $M_O(\overline{F}) = F \cdot d$. Соединим концы вектора силы $\overline{AB}$ с центром O, тогда площадь треугольника $S_{\Delta OAB}$ = 1/2 Fd, следовательно, момент силы относительно центра на плоскости можно определить как $M_o(\overline{F})$= 2 $S_{\Delta OAB}$.

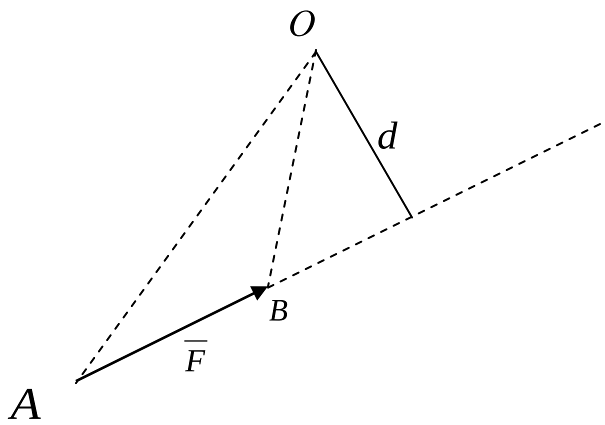


Рис. 30

2. Момент силы относительно оси

Определение: моментом силы относительно оси называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Согласно определению (рис. 31),

$$M_Z(\overline{F}) = M_O(\overline{f}) = \pm f \cdot d = \pm\, 2 \cdot S_{\Delta oab},$$

где $\overline{f}$ – проекция силы $\overline{F}$ на плоскость *P*, перпендикулярную оси *z* ($\overline{f}$ – вектор, начало и конец которого совпадают с проекцией начала и проекцией конца силы $\overline{F}$ на эту плоскость).

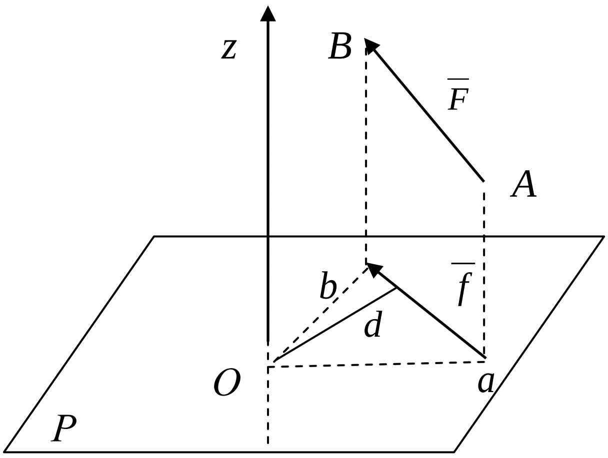


Рис. 31

Правило знаков: если наблюдатель расположен со стороны положительного направления оси *z* и видит вращение плоскости *P* вокруг оси *z* под действием силы $\overline{f}$, происходящим против хода часовой стрелки, то момент силы $\overline{F}$ относительно оси считается положительным. Если наблюдатель видит вращение по часовой стрелке, то $M_Z(\overline{F}) < 0$.

Момент силы относительно оси равен нулю [$M_Z(\overline{F}) = \pm f \cdot d = 0$] в двух случаях:

1. Проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю ($f = 0$), в этом случае сила $\overline{F}$ и ось *z* параллельны.

2. Плечо проекции силы равно нулю ($d = 0$), тогда линия действия силы пересекает ось.

Оба этих случая можно объединить в один: <u>момент силы относительно оси равен нулю тогда и только тогда, когда сила и ось лежат в одной плоскости.</u>

3. Представление момента силы относительно центра вектором

В пространстве правило знаков для момента силы относительно центра теряет смысл. Если смотреть на плоскость P (рис. 32) с одной стороны, то её вращение относительно точки O под действием силы $\overline{F}$ видится в одну сторону; если смотреть с другой стороны, то вращение будет представляться в противоположном направлении.

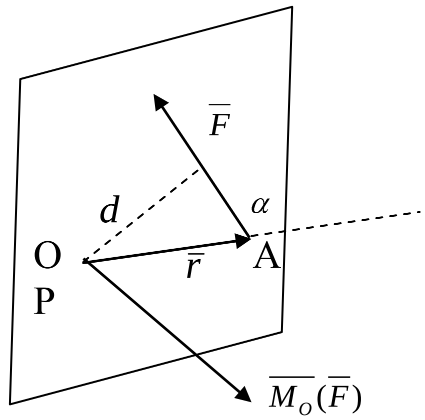


Рис. 32

Поэтому условились в пространстве момент силы $\overline{F}$ относительно центра O считать вектором $\overline{M_O}(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы на плечо [$M_O(\overline{F}) = F \cdot d$]. Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг центра, представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Построим $\overline{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки A – приложения силы $\overline{F}$. Покажем, что

$$M_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}\ , \tag{8}$$

т. е. момент силы относительно центра O равен векторному произведению радиуса-вектора $\overline{r}$ точки приложения силы $\overline{F}$ на сам вектор $\overline{F}$.

Согласно определению, модуль вектора момента силы $\overline{F}$ относительно центра O определяется выражением

$$M_O(\overline{F}) = F \cdot d = \ 2\ S\ \Delta OAB\,. \tag{9}$$

Покажем, что модуль векторного произведения $\overline{r} \times \overline{F}$ совпадает с (9). Действительно,

$$\left|\overline{r}\times\overline{F}\right| = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot \underbrace{r \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}_{d} = F \cdot d\ ,$$

следовательно, по модулю они совпадают.

Направлен вектор $\overline{r} \times \overline{F}$, согласно правилу для векторного произведения двух векторов, следующим образом: он перпендикулярен плоскости, проходящей через $\overline{r}$ и $\overline{F}$, и направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора $\overline{r}$ к направлению $\overline{F}$ представляется происходящим против хода часовой стрелки, т. е. совпадает с направлением $\overline{M_O}(\overline{F})$ согласно его определению.

4. Теорема о связи между моментом силы относительно центра и оси

<u>Определение теоремы:</u> момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента этой же силы относительно любого центра, взятого на оси:

$$M_Z(\overline{F}) = np_Z\left[\overline{M_O}(\overline{F})\right].$$

Доказательство. Пусть имеются ось z и сила $\overline{F}$. Возьмём на оси z произвольную точку O и построим плоскость P, перпендикулярную оси z. Спроецируем силу $\overline{F}$ на плоскость P, получим вектор $\overline{f}$. Построим треугольники ΔOAB и Δoab (рис. 33).

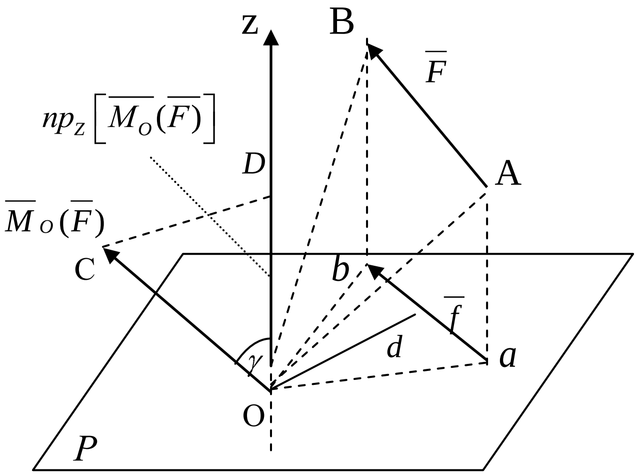


Рис. 33

Согласно ранее полученным соотношениям, имеем

$$\begin{aligned} M_z(\overline{F}) &= 2 \cdot S\Delta oab; \\ M_o(\overline{F}) &= 2 \cdot S\Delta OAB. \end{aligned} \qquad (10)$$

Существует теорема: площадь проекции равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус угла γ между плоскостями, т. е. $S_{\Delta oab} = S_{\Delta OAB} \cos\gamma$ или, согласно (10),

$$M_z(\overline{F}) = M_o(\overline{F}) \cdot \cos\gamma. \qquad (11)$$

Угол между плоскостями равен углу между нормалями к плоскостям. Нормалью к плоскости ΔOAB является вектор момента $\overline{M_O}(\overline{F})$, а нормалью к плоскости Δoab (плоскости P) является ось z.

Следовательно, если спроецировать вектор $\overline{M_O}(\overline{F})$ на ось z, то из прямоугольного треугольника ΔOCD (см. рис. 33) получим

$$np_Z\left[\overline{M_O}(\overline{F})\right] = M_O(\overline{F}) \cdot \cos\gamma . \tag{12}$$

Так как правые части выражений (11) и (12) равны, то должны быть равны и левые, т. е. $M_Z(\overline{F}) = np_Z\left[\overline{M_O}(\overline{F})\right]$. Теорема доказана.

Замечание: если имеется прямоугольная декартовая система координат и точка O – начало системы координат, то моменты силы $\overline{F}$ относительно других координатных осей (x и y) запишутся в виде

$$M_X(\overline{F}) = np_X\left[M_O(\overline{F})\right],$$
$$M_Y(\overline{F}) = np_Y\left[M_O(\overline{F})\right].$$

Следовательно, вектор $\overline{M_O}(\overline{F})$ через свои проекции на оси координат запишется в виде

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \bar{i} \cdot np_X\left[M_O(\overline{F})\right] + \bar{j} \cdot np_Y\left[\overline{M_O}(\overline{F})\right] + \bar{k} \cdot np_Z\left[\overline{M_O}(\overline{F})\right]$$

или с учетом доказанной теоремы

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \bar{i} \cdot M_X(\overline{F}) + \bar{j} \cdot M_Y(\overline{F}) + \bar{k} \cdot M_Z(\overline{F}) . \tag{13}$$

5. Аналитическое представление моментов силы относительно координатных осей

Пусть x, y, z – координаты точки приложения силы $\overline{F}$, а X, Y, Z – проекции вектора силы $\overline{F}$ на координатные оси. Тогда, если точка O находится в начале координат, момент силы $\overline{F}$ относительно центра O выражается следующим образом:

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F} ,$$

где

$$\overline{F} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} .$$

Векторное произведение можно записать в виде определителя:

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot (yZ - zY) + \bar{j} \cdot (-xZ + zX) + \bar{k} \cdot (xY - yX).$$

Вспоминая и сравнивая с выражением (13) из предыдущего подраздела, получим аналитические формулы для определения моментов силы относительно координатных осей:

$$\begin{cases} M_X(\overline{F}) = yZ - zY, \\ M_y(\overline{F}) = -xZ + zX, \\ M_Z(\overline{F}) = xY - yX. \end{cases}$$

VII. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

1. Лемма Пуансо о параллельном переносе силы

Определение: не меняя характера движения тела, силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку пространства, добавляя к ней присоединённую механическую пару, вектор момента которой равен моменту исходной силы относительно точки переноса.

Доказательство. Пусть имеются сила $\overline{F}$, приложенная в точке A тела, и произвольная точка O того же тела (рис. 34).

Мысленно приложим к точке O две силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F'}_1$ такие, что $\overline{F_1} = -\overline{F_1'} = \overline{F}$. Приложенные силы, согласно аксиоме I статики, уравновешивают друг друга. Согласно аксиоме II статики, их можно приложить к телу, не изменяя действия системы сил на тело. Силы $\overline{F}$ и $\overline{F_1^{|}}$ равны по модулю, направлены вдоль параллельных прямых, в противоположные стороны, они образуют присоединённую механическую пару. Сила $\overline{F_1}$ – есть результат параллельного переноса исходной силы из точки A в точку O. Введём радиус-вектор $\overline{OA}$, соединяющий точки на линиях действия сил $\overline{F}$ и $\overline{F_1^{|}}$. Тогда вектор момента присоединённой пары определяется по векторной формуле $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F}$.

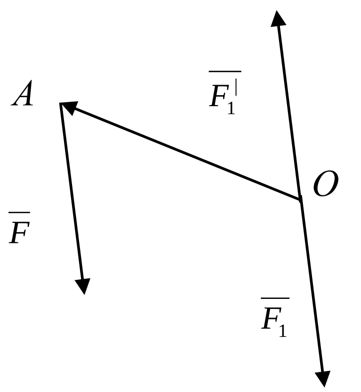


Рис. 34

Согласно другой векторной формуле, $\overline{OA} \times \overline{F} = \overline{M_O}(\overline{F})$ – вектор момента силы $\overline{F}$ относительно центра O (здесь вектор $\overline{OA}$ – радиус-вектор положения точки A относительно точки O). Следовательно, $\overline{M} = \overline{M_O}(\overline{F})$. В силу произвольности ориентации точки O в пространстве лемма доказана.

2. Метод Пуансо. Приведение к простейшему виду произвольной пространственной системы сил

Рассмотрим твёрдое тело, находящееся под действием произвольной пространственной системы сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, как угодно расположенных в пространстве.

Выберем произвольный центр – точку O и, пользуясь леммой Пуансо, перенесём все силы системы параллельно самим себе в точку O. В результате переноса получим:

1. Систему сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, сходящихся в точке O.

2. Систему присоединённых механических пар, векторы моментов которых равны моментам исходных сил относительно точки O:

$$\overline{M_O}(\overline{F_1}), \overline{M_O}(\overline{F_2}), \ldots \overline{M_O}(\overline{F_n}).$$

Система сходящихся сил, согласно теореме о равнодействующей сходящейся системы сил, приводится к равнодействующей силе, равной их геометрической сумме:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} \, .$$

Геометрическая сумма всех сил системы называется *главным вектором системы сил.*

Система присоединённых механических пар, согласно теоремам о сложении пар на плоскости и в пересекающихся плоскостях, приводится к равнодействующей механической паре, вектор момента которой равен геометрической сумме векторов моментов составляющих пар: $\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_O}(\overline{F_i})$.

Геометрическая сумма векторов моментов всех сил системы относительно некоторой точки называется *главным моментом системы сил в этой точке.*

Таким образом, произвольная пространственная система сил всегда может быть приведена только к одной силе, равной главному вектору системы, и к одной механической паре, вектор момента которой равен главному моменту системы сил в этой точке.

Отметим, что главный вектор системы не зависит от положения центра приведения (точки *O*), а главный момент системы с изменением положения центра приведения меняется и по модулю, и по направлению.

3. Различные случаи приведения пространственной системы сил

Случай I: $\overline{F}$ =0, $\overline{M_O}$ = 0 – имеем уравновешенную систему сил.

Случай II: $\overline{F}$ =0, $\overline{M_O} \neq 0$ – система сил приводится к равнодействующей паре, вектор момента которой равен главному моменту системы сил. В этом случае в силу известных теорем о механических парах величина и направление вектора главного момента не зависят от положения центра приведения.

Случай III: $\overline{F} \neq 0$, $\overline{M_O} = 0$ – система приводится к равнодействующей силе, равной главному вектору, приложенной к центру приведения.

Случай IV: $\overline{F} \neq 0$, $\overline{M_O} \neq 0$, $\overline{F} \perp \overline{M_O}$, т. е. главный вектор и главный момент системы сил не равны нулю, но они взаимно перпендикулярны. В этом случае главный вектор системы сил и силы, составляющие механическую пару, лежат в одной плоскости. Докажем это.

Построим плоскость *P*, проходящую через центр *O* и перпендикулярную вектору $\overline{M_O}$ (рис. 35). В качестве плеча механической пары выберем отрезок $OO' = \dfrac{M_O}{F}$, причём так, что $OO' \perp \overline{F}$. Тогда силы $\overline{F'}_1$ и $\overline{F_1}$ составляют механическую пару, такую, что $\overline{F'}_1 = -\overline{F_1} = \overline{F}$. Так как модули сил $F_1' = F_1 = \dfrac{M_O}{OO'} = \dfrac{M_O}{M_O} \cdot F = F$, то силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F}$ уравновешивают друг друга и могут быть отброшены (аксиома II статики). Оставшаяся сила $\overline{F'}_1$ является результатом параллельного переноса главного вектора системы сил из центра *O* в точку O'. Таким образом, в точке O' система сил сводится к одной равнодействующей силе.

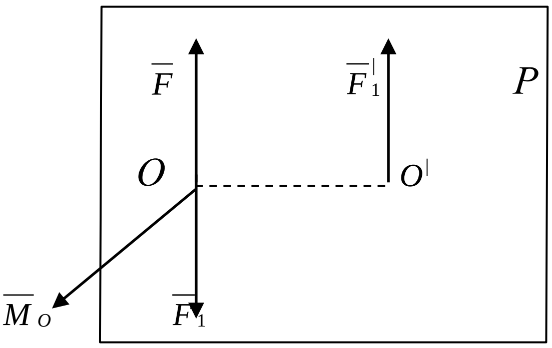


Рис. 35

В итоге надо помнить, что пространственная система сил всегда может быть сведена только к равнодействующей силе, если для произвольного центра *O* главный вектор и главный момент системы сил получились взаимно перпендикулярными друг к другу. Точка приложения равнодействующей O' удалена от центра приведения *O* на расстояние, равное отношению модуля главного момента к модулю главного вектора, и $OO' \perp \vec{F}$.

Случай V: $\overline{F} \neq 0, \overline{M_O} \neq 0$, $\overline{F}$ и $\overline{M_O}$ не перпендикулярны друг другу – в этом общем случае система сил приводится к главному вектору и главному моменту системы сил.

4. Жёсткая заделка

Рассмотрим призматический брус, жёстко заделанный в вертикальную стенку (рис. 36).

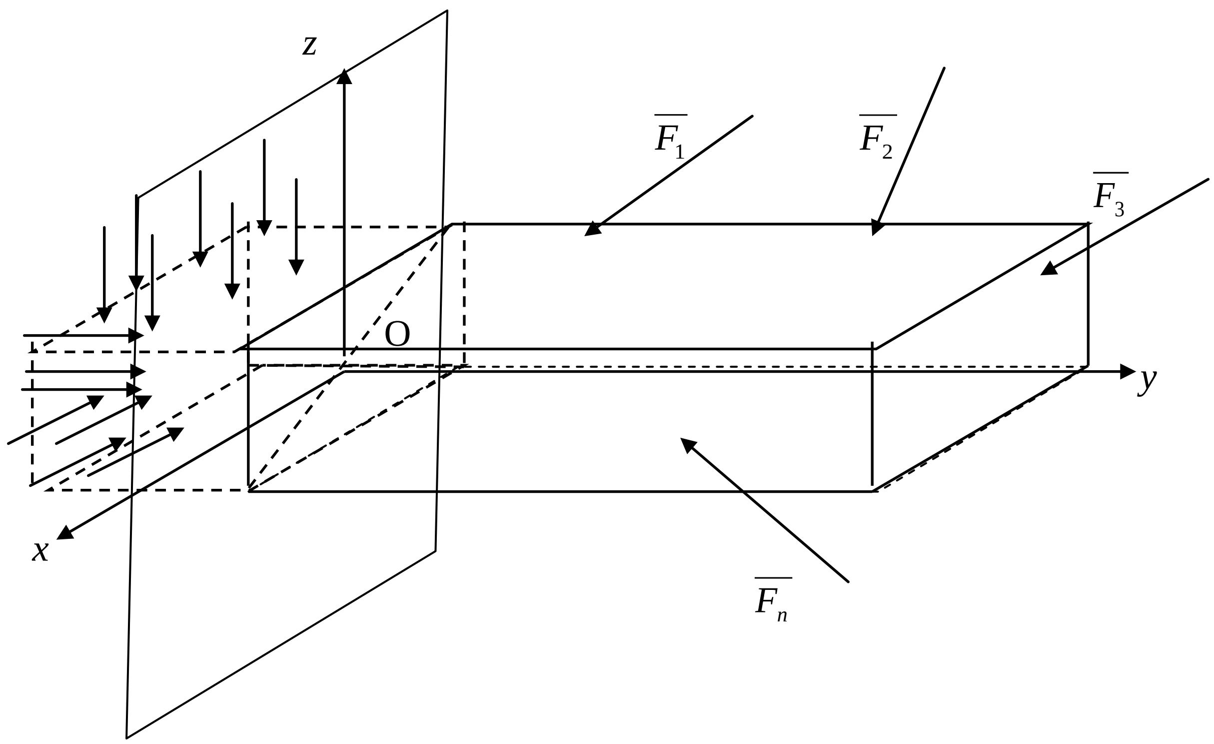


Рис. 36

На брус действуют:

1. Внешние активные силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, …, $\overline{F_n}$.

2. Распределённая пространственная система <u>контактных реакций</u>, действующих со стороны стенки.

Введём прямоугольную декартовую систему координат *Oxyz*. За начало системы координат возьмем точку *O* – геометрический центр сечения бруса стенкой, ось *y* направим вдоль оси бруса, а оси *x* и *z* – перпендикулярно соответствующим сторонам бруса. Пользуясь методом Пуансо, приведём систему контактных реакций к центру *O*.

После приведения получим реактивную силу $\overline{F}$, равную главному вектору контактных реакций, и реактивную механическую пару, вектор момента которой $\overline{M_O}$ равен главному моменту контактных реакций в точке *O*. Оба этих вектора заранее не известны ни по модулю, ни по направлению. Представим эти векторы в координатном виде через их проекции на оси координат:

$$\overline{F} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k},$$
$$\overline{M}_O = M_{XO}\bar{i} + M_{YO}\bar{j} + M_{ZO}\bar{k}.$$

где Y – продольная реактивная сила; X и Z – перерезывающие реактивные силы; M_{YO} – крутящий реактивный момент; M_{XO}, M_{ZO} – изгибающие реактивные моменты.

Таким образом, при решении задачи определения реакций жёсткой заделки возникают шесть неизвестных параметров: *X*, *Y*, *Z* и M_{YO}, M_{XO}, M_{ZO}.

Замечание: в частном случае – «плоской» жесткой заделки (на свободную часть балки действует плоская система сил, например лежащих в координатной плоскости *zOy*) имеем три неизвестных параметра: M_{XO}, Y и Z .

5. Аналитические уравнения равновесия твердого тела под действием пространственной системы сил

Рассмотрим пространственную систему, состоящую из *n* сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}, \ldots, \overline{F}_n$, действующих на твёрдое тело. Если пространственная система сил уравновешенная, то при произвольном центре приведения (точка *O*) и главный вектор, и главный момент систем сил обращаются в ноль. Отсюда приходим к векторным уравнениям:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = 0 . \tag{14}$$

Главный вектор (геометрическая сумма всех сил) системы равен нулю;

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_O}(\overline{F_i}) = 0 . \tag{15}$$

Главный момент (геометрическая сумма моментов всех сил) системы относительно произвольно выбранного центра *O* равен нулю.

Введём декартовую прямоугольную правую систему координат *Oxyz*; совместим центр приведения системы сил – точку *O* с началом системы координат *Oxyz*; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты осей системы координат. Как мы знаем, векторы силы и момента через свои проекции на декартовые оси запишутся в виде

$$\overline{F_i} = X_i \cdot \bar{i} + Y_i \cdot \bar{j} + Z_i \cdot \bar{k},$$
$$\overline{M_O}(\overline{F_i}) = M_X(\overline{F_i}) \cdot \bar{i} + M_Y(\overline{F_i}) \cdot \bar{j} + M_Z(\overline{F_i}) \cdot \bar{k}, \qquad (16)$$

где X_i, Y_i, Z_i – проекции вектора силы $\overline{F_i}$ на оси координат; $M_X(\overline{F_i}),\ M_Y(\overline{F_i}),\ M_Z(\overline{F_i})$ – проекции вектора момента i-й силы на оси координат x, y, z или то же самое, что и моменты силы $\bar{F}$ относительно координатных осей x, y, z.

Спроецируем уравнения (14) и (15) на координатные оси с учетом выражений (16). В результате приходим к следующим шести аналитическим уравнениям равновесия твердого тела под действием пространственной системы сил:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad (1) & \sum\limits_{i=1}^{n} M_X(\overline{F_i}) = 0, \quad (4) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad (2) & \sum\limits_{i=1}^{n} M_y(\overline{F_i}) = 0, \quad (5) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i = 0, \quad (3) & \sum\limits_{i=1}^{n} M_Z(\overline{F_i}) = 0. \quad (6) \end{cases} \qquad (17)$$

Поскольку уравнений статики в пространстве шесть, то *статически определёнными* задачами на равновесие твёрдого тела в пространстве называются задачи, число неизвестных реакций в которых не превышает шести. Задачи, в которых число неизвестных превышает число независимых уравнений равновесия, называются *статически неопределёнными*.

6. Частные случаи системы сил

Плоская система сил. Пусть все силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости. Введем пространственную систему координат *Oxyz* таким образом, чтобы все силы системы лежали в одной координатной плоскости, например *Oxy* (рис. 37).

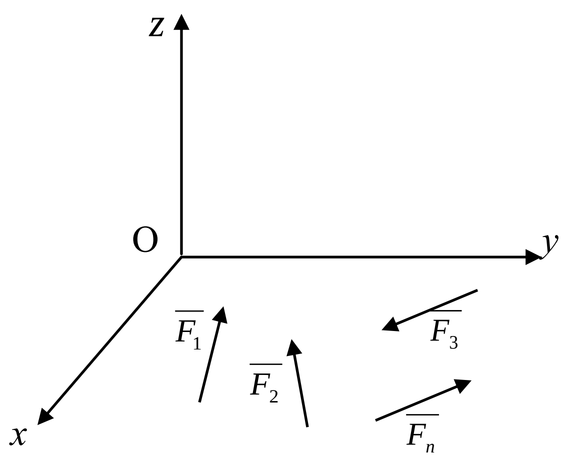


Рис. 37

В этом случае уравнение (3) системы уравнений (17) равновесия тела под действием пространственной системы сил (получена в предыдущем подразделе) вырождается в тождество, так как проекция каждой силы системы на ось *z* равна нулю. Также вырождаются в тождества уравнения (4) и (5), так как моменты всех сил системы относительно осей *x* и *y* равны нулю: $\overline{M}_X(\overline{F_i}) = M_Y(\overline{F_i}) = 0$ (сила и ось лежат в одной плоскости). Моменты всех сил относительно оси *z* – это моменты сил относительно точки *O* – начала системы координат: $M_Z(\overline{F_i}) = M_O(\overline{F_i})$. В итоге для плоской системы сил уравнения (3), (4), (5) статики отпадают, а уравнения (1), (2), (6) дают три уравнения равновесия тела под действием плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_O(\overline{F_i}) = 0 \end{cases}$$

Система параллельных сил. Пусть все силы системы, например, параллельны оси *Oz* (рис. 38).

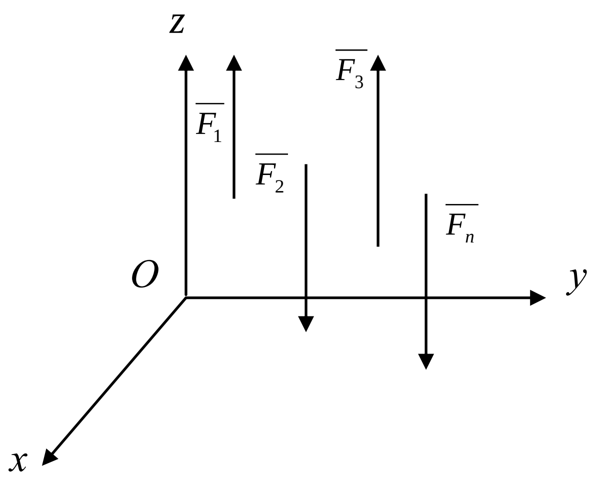


Рис. 38

В этом случае уже проекции всех сил на оси *x* и *y* будут равны нулю ($X_i = Y_i = 0$) и моменты всех сил относительно оси *z* также будут равны нулю ($M_z(\overline{F_i}) = 0$). Следовательно, уравнения (1), (2), (6) выродятся в тождества, а уравнения (3), (4), (5) составят систему уравнений равновесия тела под действием системы параллельных сил:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_x(\overline{F_i}) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_y(\overline{F_i}) = 0 \end{cases}$$

7. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы

<u>Определение:</u> если пространственная система сил в некоторой точке сводится только к равнодействующей силе, то вектор момента равнодействующей силы относительно другого произвольного центра равен геометрической сумме векторов моментов составляющих сил системы относительно того же центра:

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_O}(\overline{F_i}).$$

<u>Доказательство</u>. Допустим, что произвольная система сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, …, $\overline{F}_n$ приводится к равнодействующей силе $\overline{F}$, приложенной в точке O. Согласно случаю IV (см. подразд. 3), это означает, что в любом другом центре O' главный вектор $\overline{F'} \perp \overline{M_{O'}}$. Построим плоскость P, перпендикулярную главному моменту $\overline{M_{O'}}$ (рис. 39).

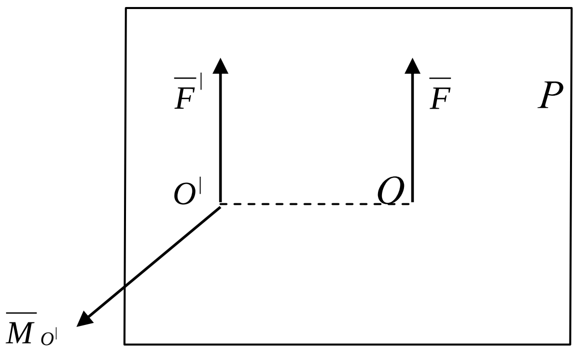


Рис. 39

В этом случае равнодействующая $\overline{F} = \overline{F'}$ приложена в точке O, лежащей на плоскости P, такой, что $OO' = \dfrac{M'_O}{F'}$ и $OO' \perp \overline{F'}$. Покажем, что вектор момента равнодействующей силы, приложенной в точке O относительно центра O' ($\overline{M_{O'}}(\overline{F})$), равен главному моменту ($\overline{M}_{O'} = \sum_{i-1}^{n} \overline{M_{O'}}(\overline{F_i})$) системы сил, приведенных к центру O'.

Мы знаем, что вектор момента равнодействующей силы $M_{O'}(\overline{F})$:

1) перпендикулярен плоскости, в которой находятся точка O' и вектор $\overline{F}$, т. е. он перпендикулярен плоскости P. Следовательно, линии действия векторов $\overline{M'_O}$ и $\overline{M_{O'}}(\overline{F})$ параллельны;

2) вектор $\overline{M_{O'}}(\overline{F})$ направлен в ту сторону перпендикулярно этой плоскости, откуда вращение вектора $\overline{F}$ вокруг центра O' видится против хода часовой стрелки. Следовательно, направления векторов $\overline{M'_O}$ и $\overline{M'_O}(\overline{F})$ совпадают;

3) модуль момента равнодействующей силы относительно центра O'

$$M_{O'}(\overline{F}) = OO' \cdot F = \frac{M_{O'}}{F'} \cdot F = M_{O'}, \text{ т. е. } M_{O'}(\overline{F}) = M_{O'}.$$

Тогда с учётом (1)–(3) $\overline{M_{O'}}(\overline{F}) = \overline{M_{O'}}$ – главному моменту системы сил относительно точки O'.

Таким образом, вектор момента равнодействующей относительно произвольного центра равен главному моменту системы исходных сил относительно того же центра. Но главный момент по определению равен $\overline{M_{O'}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{M_{O'}}(\overline{F_i})$, следовательно, $\overline{M'_O}(\overline{F}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{M'_O}(\overline{F_i})$. Теорема доказана.

VIII. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

1. Геометрический способ построения равнодействующей системы параллельных сил одного направления

Рассмотрим систему, состоящую из n параллельных сил одного направления $\overline{F_1} // \overline{F_2} // \cdots // \overline{F_n}$. Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – точки приложения сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F}_n$ (рис. 40).

Пользуясь правилом сложения двух параллельных сил одного направления, найдём равнодействующую силу сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$. Ею будет сила $\overline{F'}$, модуль которой $F' = F_1 + F_2$; она параллельна силам $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$

и направлена в ту же сторону. Точка её приложения A' лежит на линии A_1A_2, причём

$$\frac{A_1A'}{A_2A'} = \frac{F_2}{F_1}.$$

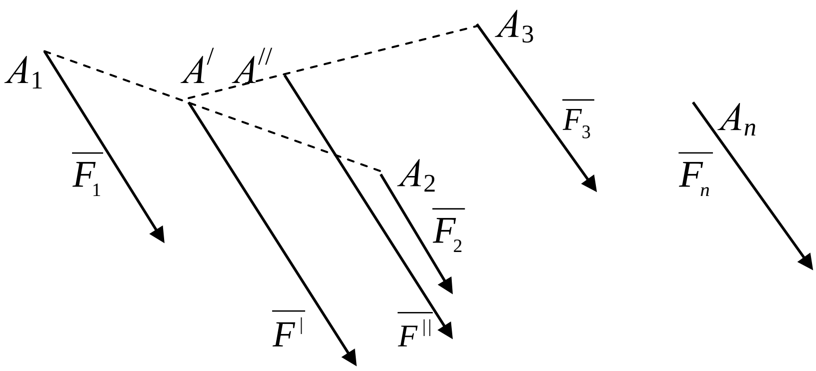


Рис. 40

Таким же образом сложим параллельные силы $\overline{F'}$ и $\overline{F_3}$. Равнодействующая этих сил – сила $\overline{F}^{||}$ имеет модуль $F^{||} = F^{|} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$, им параллельна и в ту же сторону направлена. Точка приложения силы $\overline{F}^{||}$ лежит в точке $A^{//}$, лежащей на прямой $A'A_3$, причём $\frac{A^{||}A'}{A_3A^{||}} = \frac{F_3}{F'}$. В результате такого последовательного геометрического суммирования сил мы придём к равнодействующей силе $\overline{F}$, имеющей то же направление, что и силы $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}, \ldots, \overline{F}_n$, с модулем, равным сумме модулей сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ($\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$).

В процессе сложения сил однозначно определяется и точка приложения равнодействующей силы, называемая *центром параллельных сил*.

Заметим, что:

1) величина и направление равнодействующей силы не зависят от порядка геометрического суммирования;

2) положение центра параллельных сил также не зависит от порядка суммирования;

3) положение центра параллельных сил не изменится, если все силы системы параллельно повернуть на один и тот же угол.

2. Аналитическое определение положения центра параллельных сил в пространстве

Рассмотрим систему, состоящую из *n* параллельных сил одного направления. Пусть $\overline{F}$ – равнодействующая рассматриваемой системы сил. Точка *C* – центр приложения равнодействующих параллельных сил. Введём декартовую прямоугольную систему координат *Oxyz* (рис. 41).

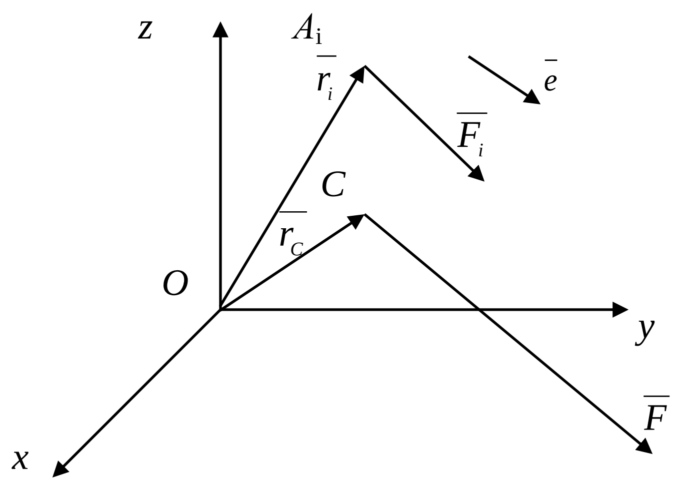


Рис. 41

Пусть точка A_i – точка приложения силы $\overline{F_i}$ данной системы, состоящей из *n* параллельных сил одного направления. Введём радиусы-векторы $\overline{r_i}$ и $\overline{r_C}$, соответственно, точек A_i и C – точек приложения сил $\overline{F_i}$ и $\overline{F}$.

Так как система параллельных сил приводится к равнодействующей силе, то к этой системе применима теорема Вариньона, из которой следует, что

$$\overline{M_O}(\overline{F}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{M_O}(\overline{F_i}). \tag{18}$$

Согласно векторной формуле, момент i-й силы относительно центра O равен, $\overline{M}_O(\overline{F}_i)=\overline{r}_i\times\overline{F}_i$, а момент силы $\overline{F}$ – $\overline{M}_O(\overline{F})=\overline{r}_C\times\overline{F}$. Тогда равенство (18) можно переписать в виде

$$\overline{r}_C\times\overline{F}=\sum_{i=1}^{n}\overline{r}_i\times\overline{F}_i. \qquad (19)$$

Введём в рассмотрение орт $\overline{e}$ – указатель направления действия сил системы (его модуль $e=1$). Тогда очевидно, что силы $\overline{F}_i$ и $\overline{F}$ можно представить в виде

$$\overline{F}_i=F_i\cdot\overline{e} \text{ и } \overline{F}=F\cdot\overline{e}.$$

Подставим эти выражения в (19), перенесём все величины влево и вынесем общий сомножитель за скобку:

$$\underbrace{\left(F\cdot\overline{r_C}-\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\overline{r}_i\right)}_{\overline{a}}\times\overline{e}=0.$$

Или, если обозначить вектор в скобках за $\overline{a}$, имеем следующее векторное произведение:

$$\overline{a}\times\overline{e}=0.$$

Мы знаем, что векторное произведение равно нулю, если:

1) второй сомножитель равен нулю ($\overline{e}=0$), но это отпадает, так как $\overline{e}$ – единичный вектор;

2) векторы $\overline{e}$ и $\overline{a}$ параллельны, но, повернув все силы в исходной системе параллельно на некоторый угол, мы уже не получим, что $\overline{e}\,//\,\overline{a}$. Следовательно, $\overline{e}$ будет уже не параллелен $\overline{a}$;

3) если $\overline{a}$ = 0, т. е. $F\cdot\overline{r}_c-\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\overline{r}_i=0$. Откуда получаем формулу для определения радиуса-вектора центра параллельных сил одного направления:

$$\vec{r}_c=\frac{1}{F}\cdot\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\overline{r}_i. \qquad (20)$$

Формула (20) связывает местоположение центра параллельных сил с началом декартовых координат точкой *O*.

Как мы знаем, декартовое представление радиуса-вектора точки A_i имеет вид $\overline{r_i} = x_i \cdot \overline{i} + y_i \cdot \overline{j} + z_i \cdot \overline{k}$, где x_i, y_i, z_i – координаты точки A_i. Аналогично $\overline{r_C} = x_C \cdot \overline{i} + y_C \cdot \overline{j} + z_C \cdot \overline{k}$, где x_C, y_C, z_C – координаты точки *C*. Спроецируем векторное равенство (20) на координатные оси. В результате приходим к аналитическим формулам для определения декартовых координат центра параллельных сил одного направления:

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{F}\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i \\ y_c = \dfrac{1}{F}\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot y_i \\ z_c = \dfrac{1}{F}\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \cdot z_i \end{cases} \qquad (21)$$

3. Понятие о центре тяжести тела

Рассмотрим твёрдое тело, находящееся в однородном поле сил тяжести. Введём декартовую систему координат *Oxyz*. Мысленно поперечными сечениями разобьём тело на *n* элементарных частей (рис. 42).

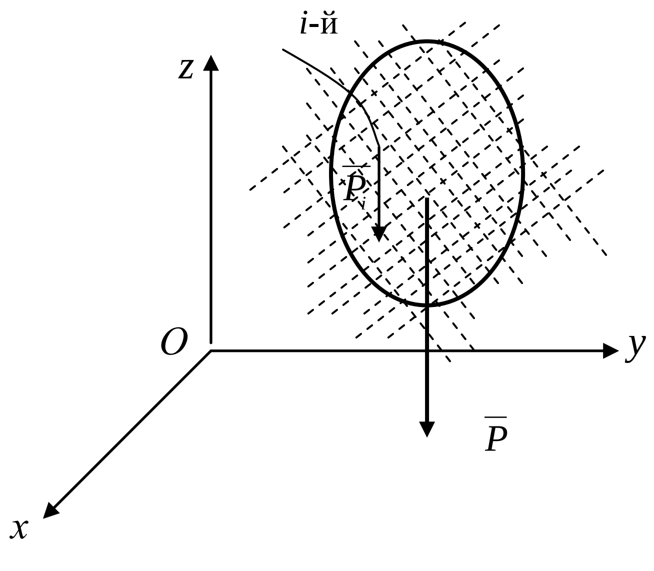


Рис. 42

Будем считать, что число n разбиений настолько велико, что размером каждой элементарной части можно пренебречь, т. е. можно рассматривать её как материальную точку.

Пусть $\overline{P_i}$ – сила веса i-й элементарной части. Совокупность элементарных сил веса образует систему параллельных сил одного направления. Равнодействующая элементарных сил веса называется *весом тела* $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$. Центр параллельных сил веса называется *центром тяжести тела*.

Отметим, что по свойству центра параллельных сил положение центра тяжести относительно тела не меняется при поворотах этого тела. Исходя из выражения (21) аналитические формулы для определения координат центра тяжести имеют вид

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i x_i \\ y_c = \dfrac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i y_i \\ z_c = \dfrac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} P_i z_i \end{cases}.$$

С помощью выражений (22) также вычисляются координаты центра тяжести материальной системы, состоящей не только из материальных точек, но и из тел, для которых известны значения веса и их координаты в пространстве.

Григорьев Александр Юрьевич
Малявко Дмитрий Пантелеймонович
Григорьев Константин Александрович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Статика

Учебное пособие

Ответственный редактор
Т.Г. Смирнова

Титульный редактор
Е.О. Трусова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуральник

Дизайн обложки
Н.А. Потехина

Печатается
в авторской редакции

Подписано в печать 10.10.2014. Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л. 3,49. Печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 3,56
Тираж 300 экз. Заказ № С 62

НИУ ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
ИИК ИХиБТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9