

2.2 Определение регулярного теплового режима

В аналитической теории теплопроводности для тел простой конфигурации существуют точные решения вида (2.1.9) при различном начальном распределении температур. Каждое из таких решений представляет определенную ценность, но совокупность этих решений редко позволяет усмотреть общие закономерности пространственно-временного изменения температурных полей [1.6, 1.7]. А такие закономерности безусловно существуют; знание их может облегчить понимание особенностей процесса и решение конкретных практических задач. Одна из таких общих закономерностей была установлена в работах Г.М. Кондратьева [1.3, 1.4].

Процесс охлаждения (нагрева) тела можно разделить во времени на две стадии: стадию неупорядоченного (иррегулярного) процесса и стадию регулярного режима. Первая из них характеризуется сильным влиянием на температурное поле тела его начального теплового состояния. С течением времени влияние начальных особенностей температурного поля на его дальнейшее изменение сглаживается, процесс из стадии неупорядоченной переходит в стадию упорядоченную – “регулярную”. В регулярном тепловом режиме закон изменения температурного поля во времени приобретает простую экспоненциальную форму (рис. 2.2.1). Эти выводы можно усмотреть из анализа решения уравнения теплопроводности (2.1.9) для охлаждения изотропного тела в среде с постоянной температурой. Коэффициенты m_j связаны с собственными числами задачи μ_j соотношением $m_j = \mu_j^2 a$ и образуют возрастающую последовательность (2.1.12). Тогда последовательность $[\exp(-m_j \tau)]$ будет убывающей. С ростом времени τ скорость убывания будет увеличиваться, и при некотором значении $\tau \geq \tau^*$ первый член ряда (2.1.9) будет значительно превосходить сумму остальных членов этого ряда, то есть с этого момента температурное поле будет с удовлетворительной точностью описываться первым членом ряда (2.1.9). Этот режим охлаждения тела был назван Г.М. Кондратьевым регулярным тепловым режимом первого рода.

Итак, в основу теории регулярного теплового режима положена известная математическая теория, и в качестве решений берутся их приближенные значения в виде первого члена бесконечного ряда (2.1.9)

$$\vartheta_{\text{рег}} = t_{\text{рег}} - t_c = AUe^{-m\tau}, \quad (2.2.1)$$

где для первого члена этого ряда индексы “0” опущены.

Из формулы (2.2.1) вытекают важные для практики следствия:

1. В стадии регулярного теплового режима температурное поле во

всех точках тела изменяется по экспоненциальному закону (2.2.1), причем показатель экспоненты m не зависит от координат. Прологарифмировав эту формулу, получаем:

$$\mathcal{G}_{\text{пер}} = t_{\text{пер}} - t_c = AUe^{-m\tau}, \quad (2.2.2)$$

где $G(x, y, z)$ — функция координат точки, следовательно,

$$\frac{-\partial \ln \mathcal{G}_{\text{пер}}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \mathcal{G}_{\text{пер}}}{\mathcal{G}_{\text{пер}} \partial \tau} = m \neq m(x, y, z), \quad (2.2.3)$$

т.е. по истечении достаточного времени $\tau \geq \tau^*$ после охлаждения наступает регулярный режим, отличительной особенностью которого является постоянство скорости изменения логарифма перегрева во времени для всех точек тела.

2. В стадии регулярного режима в моменты времени τ' и τ'' значения избыточной температуры в какой-либо точке тела равны соответственно

$$\mathcal{G}'_{\text{пер}} = AUe^{-m\tau'}, \quad \mathcal{G}''_{\text{пер}} = AUe^{-m\tau''},$$

а их отношение

$$\frac{\mathcal{G}'_{\text{пер}}}{\mathcal{G}''_{\text{пер}}} = e^{-m(\tau' - \tau'')}. \quad (2.2.4)$$

Это означает, что в стадии регулярного режима поле избыточной температуры $\mathcal{G}_{\text{пер}}$ с изменением времени сохраняется подобным самому себе и становится автомодельным, независимым от начального распределения температур.

3. Показатель m в выражении (2.2.1) занимает центральное место в теории регулярного режима и называется темпом охлаждения (нагрева) тела. На всей стадии регулярного режима темп остается неизменным, не зависящим от времени и координат. На рис. 2.2.1 представлена графическая интерпретация изучаемого процесса, где в координатах: перегрев \mathcal{G} , время τ — построены кривые охлаждения для двух произвольных точек тела. Так как начальное поле температур может быть неравномерным, то в начальный момент времени перегревы $\mathcal{G}_1(0)$ и $\mathcal{G}_2(0)$ не совпадают. По виду кривых

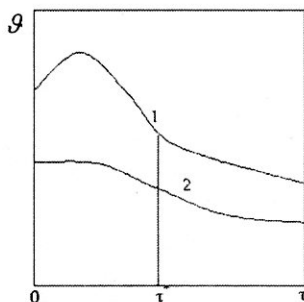


Рис. 2.2.1

вых затруднительно сделать вывод, являются ли эти кривые экспонентами. Но если те же кривые представить в полулогарифмических координатах $\ln(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}) = f(\tau)$, то получим кривые иного вида (рис. 2.2.2). Как и следует из зависимости (2.2.2), в регулярном режиме, при $\tau \geq \tau^*$, кривые переходят в прямые линии, что и свидетельствует об экспоненциальном характере изменения температуры. На основании уравнения (2.2.3) можно предложить практический способ определения темпа охлаждения. Применим уравнение (2.2.2) к двум произвольным моментам времени τ' и τ'' и, вычтя одно уравнение из другого, получим

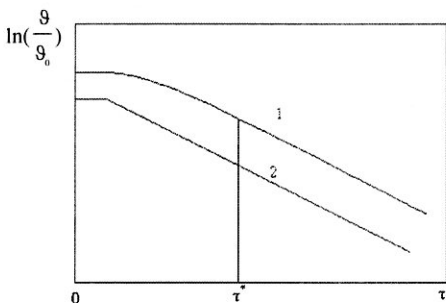


Рис. 2.2.2

$$m = \frac{\ln \vartheta_1' - \ln \vartheta_2''}{\tau'' - \tau'} \quad (2.2.5)$$

2.3. Теоремы Г.М. Кондратьева

Общие закономерности охлаждения (нагрева) тел или систем тел сформулированы в трех теоремах.

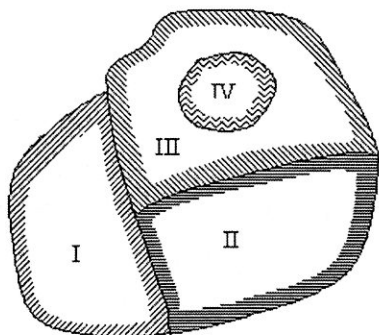


Рис. 2.3.1

Первая теорема Г.М. Кондратьева. В системе тел I, II, III, IV (рис. 2.3.1), охлаждающейся (нагревающейся) в термостатированной конвективной среде, как и в однородном теле, с течением времени неизбежно происходит регуляризация температурного поля, т.е. скорость изменения логарифма избыточной температуры $\partial (\ln \vartheta_{\text{пер}}) / \partial \tau$ от времени остается одинаковой для всех точек системы.

Доказательство этой теоремы очевидно для однородного изотропного тела и приведено выше;

для системы тел аналитическое обоснование этой теоремы приведено для

отдельных частных случаев, а также для некоторых систем подтверждено многочисленными экспериментами.

Вторая теорема Г.М. Кондратьева. Темп охлаждения (нагрева-ния) однородного изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи пропорционален произведению площади внешней поверхности S тела на коэффициент теплоотдачи α и обратно пропорционален полной теплоемкости C тела

$$m = \Psi \frac{\alpha S}{C}, \quad \Psi = \frac{(\vartheta_{\text{пер}})_S}{(\vartheta_{\text{пер}})_V}, \quad (2.3.1)$$

где Ψ — коэффициент пропорциональности, равный отношению среднеповерхностной избыточной температуры $(\vartheta_{\text{пер}})_S$ в стадии регулярного режима к его среднеобъемной температуре $(\vartheta_{\text{пер}})_V$

Коэффициент Ψ называют также критерием неравномерности температурного поля в теле. При равномерном распределении температур $\vartheta_S = \vartheta_V$ и $\Psi = 1$. Чем больше неравномерность поля температур, тем ϑ_S больше отличается от ϑ_V . В пределе температура поверхности тела может стать равной температуре среды, а их разность — нулю $\vartheta_S = 0$, и тогда критерий $\Psi = 0$. Температурное поле тела, в том числе и поверхностная температура, зависят от коэффициента теплоотдачи. При малых значениях этого коэффициента неравномерность поля температур небольшая и в пределе стремится к единице

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Psi = 1. \quad (2.3.2)$$

При больших значениях коэффициента теплоотдачи, в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$, температура перегрева поверхности принимает нулевое значение, а поле температур в теле становится сильно неравномерным, и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Psi = 0. \quad (2.3.3)$$

Для доказательства теоремы (2.3.1) рассмотрим однородное изотропное тело произвольной конфигурации, охлаждающееся в среде с постоянной температурой. На основании закона сохранения энергии количество энергии Q_1 , теряемое телом за время dt , равно количеству энергии Q_2 , отданной за то же время поверхностью тела в среду, то есть

$$Q_1 = Q_2, \quad (2.3.4)$$

где

$$Q_1 = - \int_V c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt V = -c\rho V \frac{\partial \vartheta_V}{\partial t} dt, \quad Q_2 = \int_S \alpha \vartheta dS dt = \bar{\alpha} S \vartheta_S dt.$$

Подставив эти выражения в равенство (2.3.4), получим

$$C \frac{d\vartheta_V}{dt} = \bar{\alpha} \vartheta_S S,$$

где $C = c\rho V$ — полная теплоемкость тела; $\bar{\alpha}$ — среднее значение коэффициента теплоотдачи тела.

Рассмотрим критерий неравномерности Ψ , используя соотношения (2.1.9),

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\vartheta_S}{\vartheta_V} = \frac{V}{S} \frac{\int_S \vartheta dS}{\int_V \vartheta dV} = \frac{V}{S} \frac{\int_{S_{n=1}}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau} dS}{\int_{V_{n=1}}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau} dV} = \\ &= \frac{V}{S} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n \tau} \int_S U_n dS}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n \tau} \int_V U_n dV}. \end{aligned}$$

Покажем, что в стадии регулярного режима оно не зависит от времени. Действительно последнее выражение в этой стадии принимает вид

$$\Psi = \frac{V}{S} \frac{A_n e^{-m_n \tau} \int_S U dS}{A_n e^{-m_n \tau} \int_V U dV} = \frac{\int_S U dS}{\int_V U dV} \neq f(\tau). \quad (2.3.5)$$

Используя это свойство, а также равенство (2.2.3), приходим к выражению (2.3.1), то есть теорема доказана.

Третья теорема Г.М.Кондратьева. При увеличении коэффициента теплоотдачи темп охлаждения стремится к конечному пределу

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} m = m_{\infty}, \quad (2.3.6)$$

который пропорционален коэффициенту температуропроводности

$$a = K m_{\infty}, \quad (2.3.7)$$

где коэффициент пропорциональности K зависит лишь от формы

и размеров тела, имеет размерность площади и поэтому называется коэффициентом формы тела.

Для обоснования теоремы рассмотрим произведение

$$\alpha\Psi = \alpha \frac{\vartheta_S}{\vartheta_V}.$$

Из условия (2.1.2) теплообмена на границе тела следует, что

$$\alpha \vartheta_S = -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right|_S$$

или для среднеповерхностной температуры

$$\alpha \vartheta_S = -\frac{\lambda}{S} \int_S \frac{\partial \vartheta}{\partial n} dS.$$

Из двух последних выражений получаем

$$\alpha\Psi = -\frac{\lambda}{S} \frac{\int_S \frac{\partial \vartheta}{\partial n} dS}{\vartheta_V}. \quad (2.3.8)$$

Рассмотрим пределы изменения числителя и знаменателя правой части (2.3.8). Среднеобъемный перегрев ϑ_V по физическому смыслу не может принимать бесконечно больших или нулевых значений; комплекс

$$\int_S \frac{\partial \vartheta}{\partial n} dS$$

является потоком теплоты, уносимым с поверхности тела, то есть *эта величина конечна.*

Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha\Psi = B,$$

где B – конечная величина. Принимая во внимание последний вывод и соотношение $cr = \lambda/a$, найдем предельное значение темпа охлаждения m_∞

$$m_\infty = \Psi \frac{\alpha S}{C} \Big|_{\alpha=\infty} = \frac{BS}{crV} = \frac{BS}{V\lambda} a,$$

обозначим комплекс $\frac{V\lambda}{BS} = K$, тогда $a = Km_{\infty}$, то есть прихо-

дим к формуле (2.3.7).

Опыты, проведенные с большим количеством тел различной формы в широком диапазоне изменений коэффициента теплоотдачи α , а также математический анализ отдельных частных случаев, показали, что темп m асимптотически возрастает с повышением коэффициента теплоотдачи (рис. 2.3.2).

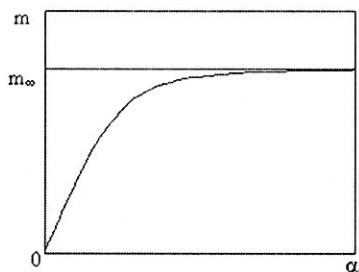


Рис. 2.3.2

2.4. Анализ температурного поля простейших тел в стадии регулярного теплового режима

Неограниченная пластина. Рассмотрим свободно охлаждающуюся пластину толщиной $2l$ в среде с постоянной температурой t_c и коэффициентом теплоотдачи α . Математическая формулировка задачи в общем виде для неоднородных тел любой конфигурации представлена с помощью уравнений (2.1.1)-(2.1.3). Эти уравнения для пластины примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} &= a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (\tau > 0, -l < x < l), & (a) \\ \vartheta(x, 0) &= f(x) - t_c \equiv \tilde{f}(x), & (b) \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{\lambda} \vartheta \right)_{x=l} &= 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

Разделяя пространственную и временную переменные, как было указано в разделе 2.1, получим задачу Штурма-Лиувилля для определения собственных функций и собственных чисел задачи.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 U_j}{dx^2} + \mu_j^2 U_j &= 0, \\ \left(\frac{dU_j}{dx} + \frac{\alpha}{\lambda} U_j \right)_{x=l} &= 0, \\ \left(\frac{dU_j}{dx} \right)_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

Решение системы уравнений приведено во многих книгах и учебниках, например в [1.6, 1.7, 1.8], и имеет следующий вид:

$$U_j = \cos \frac{\mu_j x}{\ell}. \quad (2.4.3)$$

Собственные значения μ_j определяются из решения трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \mu_j = \frac{\mu_j}{\operatorname{Bi}}, \quad \mu_j > 0. \quad (2.4.4)$$

Искомое распределение температур, согласно формуле (2.1.9)

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \frac{(2j-1)\pi x}{2\ell} \exp \left[-(2j-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{\alpha \tau}{\ell^2} \right], \\ A_j &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{f}(x) \cos \frac{(2j-1)\pi x}{2\ell} dx \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

Пользуясь решениями (2.4.5), решим уравнение (2.4.4) для определения собственных значений решения рассматриваемой задачи.

Темп охлаждения имеет из них наименьшее значение.

$$m \equiv m_1 = \frac{a\mu_1^2}{\ell^2}.$$

Обозначим μ_{∞} как предел, к которому стремится μ_1 при стремлении критерия Bi к бесконечности, и найдем из последнего выражения μ_{∞} :

$$\mu_{\infty} = \lim_{\operatorname{Bi} \rightarrow \infty} \mu_1, \quad \mu_{\infty} \operatorname{tg} \mu_{\infty} = \infty, \quad \operatorname{tg} \mu_{\infty} = \infty, \quad \mu_{\infty} = \frac{\pi}{2},$$

а величина m_{∞} равна

$$m_{\infty} = a \frac{\mu_{\infty}^2}{\ell^2} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{a}{\ell^2}. \quad (2.4.6)$$

Сопоставив это выражение с формулой (2.3.7), находим коэффициент формы пластины.

Для отыскания критерия неравномерности пластины Ψ преобразуем зависимость (2.3.1) к следующему виду

$$m = \alpha \Psi \frac{S}{C} = \alpha \Psi \frac{S}{c\rho V}, \quad \frac{a\mu_1^2}{\ell^2} = \alpha \Psi \frac{Sa}{V\lambda},$$

откуда учтем, что для пластины $V/S = \ell$:

$$\Psi = \frac{\mu_1^2 V \lambda}{\ell^2 \alpha S} = \frac{V}{S} \frac{\mu_1^2}{\ell \text{Bi}} = \frac{\mu_1^2}{\text{Bi}}. \quad (2.4.7)$$

Итак, основные параметры m_∞ , Ψ , K , характеризующие свободное охлаждение пластины в стадии регулярного режима, даны формулами (2.4.5)-(2.4.7).

Неограниченный цилиндр. Рассуждая аналогично, выпишем значения m_∞ , Ψ , K для задачи о свободном охлаждении неограниченного цилиндра радиусом R в среде с постоянной температурой [1.6, 1.7]:

$$\frac{\mu_1 \cdot J_1(\mu_1)}{J_0(\mu_1)} = \text{Bi}, \mu_\infty = 2,4048, K = \frac{R^2}{(2,4048)^2}; \quad (2.4.8)$$

$$\Psi = \frac{\mu_1 \cdot J_0(\mu_1)}{2J_1(\mu_1)},$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя вещественного аргумента нулевого и первого порядков.

Шар. Аналогично по постановке задачи для шара радиуса R получаем соотношения [1.7, 1.8]

$$1 - \mu_1 \text{ctg} \mu_1 = \text{Bi}, \mu_\infty = \pi, K = \frac{R^2}{\pi^2}, \Psi = \frac{1}{3} \frac{\mu_1^2}{\text{Bi}}. \quad (2.4.9)$$

Ограниченный цилиндр длиной 2ℓ и радиусом R . Известно, что для ограниченного цилиндра собственные значения μ_j складываются по формуле [1.6, 1.7]

$$\eta_{j,k}^2 = \frac{\mu_j^2}{\ell^2} + \frac{\beta_k^2}{R^2},$$

где μ_j и β_k собственные значения для пластины и неограниченного цилиндра, которые выше обозначались буквой μ_j .

Для предельного случая $\text{Bi} = \infty$

$$\eta_\infty^2 = \left(\frac{\pi}{2\ell} \right)^2 + \left(\frac{2,4048}{R} \right)^2,$$

и темп охлаждения $m_\infty = a \eta_\infty^2$, откуда

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^2 + \left(\frac{2,4048}{R}\right)^2}. \quad (2.4.10)$$

Коэффициент неравномерности Ψ определим из соотношений, аналогичных (2.4.7),

$$\Psi = \frac{\left(\frac{\mu_1}{Bi_1}\right)^2 + \left(\frac{\beta_1}{Bi_2}\right)^2}{2\left(\frac{1}{Bi_1} + \frac{1}{Bi_2}\right)}, \quad Bi_1 = \frac{\alpha_1 \ell}{\lambda}, \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 R}{\lambda}, \quad (2.4.11)$$

где Bi_1 и Bi_2 – критерии Био для поверхностей 1 и 2.

Аналогично находятся выражения для Ψ и K для других тел. Следует обратить внимание на громоздкость выражения для Ψ , который во многих случаях не удастся получить аналитически, поэтому ниже будут рассмотрены иные пути решения этой задачи.

2.5. Обобщенная зависимость между темпом охлаждения тела и воздействием на него внешней среды

Из соотношений (2.3.1) и (2.3.7) следует, что темп охлаждения тела увеличивается с ростом коэффициента теплоотдачи и стремится к своему асимптотическому значению $m|_{\alpha \rightarrow \infty} > m_\infty$ при бесконечно больших значениях α .

На рис. 2.3.2 показан вид этой зависимости: выпуклая кривая с асимптотой, параллельной оси абсцисс и находящейся от нее на расстоянии m_∞ . Так как зависимость (2.3.1) связывает физические (α , C) и геометрические (S) параметры тела, то каждому выбору этих параметров будет соответствовать своя кривая, т. е. их число бесконечно велико. Расчеты по формуле (2.3.1) затруднены из-за неизвестности критерия Ψ . Для группы простейших тел (пластина, цилиндр, шар и некоторые другие) вид этого критерия аналитически найден, но для тел более сложной формы его отыскание – порой неразрешимая задача. Однако, можно представить зависимость (2.3.1) в иной, более общей форме, что частично упростит проблему

вычисления критерия Ψ . При выводе формулы (2.4.7) зависимости (2.3.1) был придан вид

$$m = \alpha\Psi \frac{S}{C} = \alpha\Psi \frac{Sa}{V\lambda}.$$

Подставив в это выражение значение a из формулы (2.3.7), получим иной вид этой зависимости:

$$m = \Psi \frac{\alpha SK m_\infty}{\lambda V},$$

которую можно представить в виде

$$M = \Psi H, M = \frac{m}{m_\infty}, H = \frac{\alpha SK}{\lambda V}. \quad (2.5.1)$$

Безразмерные параметры M и H получили название обобщенного критерия тепловой инерции и обобщенного критерия Био, а сама зависимость (2.5.1) является обобщением уравнения (2.3.1). Структура критерия M такова, что независимо от конфигурации тела при $H = 0$ темп охлаждения $m = 0$ и $M = 0$, а при $H = \infty$ темп охлаждения $m = m_\infty$ и $M = 1$. Если зависимость (2.5.1) изобразить графически для трех простейших тел различной конфигурации (пластина, неограниченный цилиндр, шар), то все кривые начинаются из одной точки и при устремлении H к бесконечности стремятся к единой асимпote $M = 1$ (рис. 2.5.1). Можно представить пластину и шар как тела крайних геометрических форм (радиус кривизны пластины равен бесконечности, а у шара он конечная величина), и предположить, что тела всех иных форм займут промежуточное положение между кривыми 1 и 3 на рис. 2.5.1.

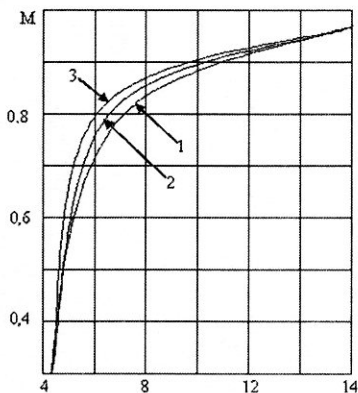


Рис. 2.5.1

Исследования показали, что для тел разной конфигурации кривые $M = M(H)$ при значениях $0 \geq H \geq \infty$ настолько близко располагаются друг к другу, что все их многообразие можно заменить одной осредненной кривой [1.9]. Зависимости $M = M(H)$ были аналитически рассчитаны по методу, изложенному в разделе 2.4 для тел различных конфигураций: 0г-48

раниченные цилиндры, параллелепипеды, конусы, плоские тела треугольного сечения, конусы с шаровым основанием, полушары и т. д. [1.10]. Для некоторых тел экзотической формы, для которых аналитическое решение невозможно, кривые $M = M(H)$ были получены экспериментальным путем [1.11]. Осредненная кривая $M = M(H)$ была представлена в табличной форме (табл. 2.5.1) и приведена в работе [1.3].

Аналитический вид зависимости $M = M(H)$ был получен на основе переформулировки задачи регулярного охлаждения (нагрева) однородного изотропного тела в среде с постоянной температурой [1.16]. Для этого применялись уравнения (2.1.8) с граничными условиями (2.1.10) для отыскания собственных функций неограниченной пластины, неограниченного цилиндра и шара. Введем безразмерную координату ρ , изменяющуюся в пределах $0 \leq \rho \leq 1$; тогда граничное условие (2.1.10) переходит в следующее:

$$\left. \frac{dU}{d\rho} + \text{Bi}U \right|_{\rho=1} = 0, \quad \left. \frac{dU}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0. \quad (2.5.2)$$

Уравнение (2.1.8) с граничными условиями (2.5.2) эквивалентно интегральному уравнению [1.17]

$$U(\rho) = \mu^2 \int_0^1 K(\rho, s) U(s) ds, \quad (2.5.3)$$

где $U(\rho)$ — собственная функция, $K(\rho, s)$ — ядро интегрального уравнения, μ^2 — безразмерный параметр, s — переменная интегрирования.

Входящие в выражение темпа регулярного режима числа представлены в (2.1.6):

$$m = \frac{a\mu_1^2}{L^2}.$$

Собственные числа можно определить через след ядра A_2 по формуле [1.17]

$$\mu_1^2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}, \quad (2.5.4)$$

в которой

$$A_2 = 2 \int_0^1 d\rho \int_0^\rho K^2(\rho, s) ds, \quad (2.5.5)$$

Связь критериев Н, Ψ и М

Н	Ψ	М
0,00	1,000	0,00000
0,01	0,993	0,00993
0,02	0,986	0,01972
0,04	0,972	0,0389
0,06	0,958	0,0575
0,08	0,944	0,0755
0,10	0,931	0,0931
0,12	0,918	0,110
0,14	0,905	0,123
0,16	0,892	0,143
0,18	0,880	0,158
0,20	0,868	0,174
0,22	0,856	0,188
0,24	0,844	0,203
0,26	0,833	0,219
0,28	0,822	0,230
0,30	0,811	0,243
0,32	0,800	0,256
0,34	0,789	0,268
0,36	0,779	0,280
0,38	0,769	0,292
0,40	0,759	0,304
0,42	0,749	0,314
0,44	0,740	0,326
0,46	0,731	0,336
0,48	0,722	0,346
0,50	0,713	0,356
0,52	0,704	0,366
0,54	0,695	0,375
0,56	0,687	0,385
0,58	0,679	0,394
0,60	0,671	0,403
0,62	0,663	0,411
0,64	0,655	0,419
0,66	0,648	0,428
0,68	0,640	0,435
0,70	0,633	0,443

Н	Ψ	М
0,72	0,626	0,451
0,74	0,619	0,458
0,76	0,612	0,465
0,78	0,605	0,472
0,80	0,599	0,479
0,82	0,592	0,485
0,84	0,586	0,492
0,86	0,580	0,499
0,88	0,574	0,505
0,90	0,568	0,511
0,92	0,562	0,517
0,94	0,556	0,523
0,96	0,550	0,528
0,98	0,545	0,534
1,00	0,539	0,539
1,05	0,526	0,552
1,10	0,514	0,565
1,15	0,502	0,577
1,20	0,490	0,588
1,25	0,479	0,599
1,30	0,468	0,608
1,35	0,458	0,618
1,40	0,448	0,627
1,45	0,439	0,636
1,50	0,430	0,645
1,55	0,421	0,653
1,60	0,413	0,661
1,65	0,405	0,668
1,70	0,397	0,675
1,75	0,390	0,682
1,80	0,383	0,689
1,85	0,376	0,696
1,90	0,369	0,701
1,95	0,363	0,708
2,00	0,356	0,712
2,1	0,344	0,722
2,2	0,333	0,733

H	Ψ	M
2,3	0,323	0,742
2,4	0,313	0,751
2,5	0,304	0,760
2,6	0,295	0,768
2,7	0,287	0,755
2,8	0,279	0,781
2,9	0,271	0,786
3,0	0,264	0,792
3,1	0,257	0,797
3,2	0,251	0,803
3,3	0,245	0,809
3,4	0,239	0,814
3,5	0,234	0,819
3,6	0,229	0,824
3,7	0,224	0,828
3,8	0,219	0,832
3,9	0,214	0,836
4,0	0,210	0,839
4,1	0,205	0,841
4,2	0,201	0,844
4,3	0,197	0,847
4,4	0,193	0,851
4,5	0,190	0,854
4,6	0,186	0,857
4,7	0,183	0,860
4,8	0,180	0,863
4,9	0,177	0,866
5,0	0,174	0,869
5,5	0,160	0,880
6,0	0,148	0,889
6,5	0,138	0,897
7,0	0,129	0,903

H	Ψ	M
7,5	0,121	0,908
8,0	0,114	0,913
8,5	0,108	0,918
9,0	0,1026	0,929
9,5	0,0976	0,927
10,0	0,0931	0,931
10,5	0,0890	0,934
11,0	0,0852	0,937
11,5	0,0817	0,940
12,0	0,0785	0,942
12,5	0,0755	0,944
13,0	0,0728	0,946
13,5	0,0703	0,948
14,0	0,678	0,950
14,5	0,0655	0,952
15,0	0,0636	0,954
16,0	0,0598	0,957
17,0	0,0564	0,959
18,0	0,0534	0,961
19,0	0,0507	0,963
20	0,0482	0,965
21	0,0460	0,967
22	0,0440	0,968
23	0,0421	0,969
24	0,0404	0,970
25	0,0389	0,972
30	0,0325	0,975
40	0,0245	0,980
50	0,0197	0,986
100	0,00993	0,993
∞	0,00000	1,000

что и было выполнено в [1.16] для трех канонических тел (в 2.5.3 a – температуропроводность вещества тела, L – его определяющий размер).

Для неограниченного цилиндра ядро уравнения (2.5.2) имеет вид

$$K(\rho, s) = \begin{cases} \sqrt{\rho s} \left(\ln s - \frac{1}{\xi} \right), & \rho \leq s, \\ \sqrt{\rho s} \left(\ln \rho - \frac{1}{\xi} \right), & \rho \geq s. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Подставляя (2.5.6) в (2.5.5) и затем в (2.5.4), после преобразований получаем

$$\mu_1^2 = \frac{\sqrt{32\xi}}{\sqrt{\xi^2 + 4\xi + 8}}. \quad (2.5.7)$$

Аналогичный вид с другими численными коэффициентами имеют формулы для неограниченного прямого кругового цилиндра и плоской пластины. Вводя в них на основе (2.5.1) безразмерные критерии M и H , получаем уравнения

$$M(H) = \frac{H}{\sqrt{H^2 + NH + 1}}, \quad \Psi(H) = \frac{1}{\sqrt{H^2 + NH + 1}}, \quad (2.5.8)$$

в которых $N = 1,633$; $1,414$ и $1,256$ соответственно для пластины, цилиндра и шара [1.16]. Так как разница между коэффициентами не велика, то для N можно выбрать среднее арифметическое значение этих чисел $N = 1,437$, что и используется в унифицированной записи (2.5.7).

Уравнения (2.5.8) обладают следующим свойством

$$\Psi(H) = M\left(\frac{1}{H}\right) \quad \text{или} \quad \Psi\left(\frac{1}{H}\right) = M(H).$$

Максимальная погрешность при вычислении Ψ по (2.5.7) не превышает 3% в интервале $0,5 < H < 2$; при других H эта погрешность еще меньше и стремится к нулю при $H > 0$ и $H > \infty$.

Отметим, что для сложных объектов неправильной формы поле температур в них не будет одномерным и возможно увеличение отклонения Ψ от зависимости (2.5.8). В частности это наблюдается для полых тел с двухсторонним охлаждением или при адиабатической изоляции внутренней полости.

2.6. Коэффициент формы тела

Эта величина является одним из основных параметров в теории регулярного теплового режима. Для тех тел, температурное поле которых поддается математическому описанию, коэффициент формы можно найти аналитическим путем. Для тел сложных очертаний этот коэффициент определяется из опыта методом моделирования. С этой целью изготавливается из материала с известным значением температуропроводности модели, которая копирует в выбранном масштабе данное тело. Интенсивно охлаждая тело так чтобы критерий $Bi \rightarrow \infty$, определяем из опыта значение m_∞ и по формуле (2.3.7) вычисляем коэффициент формы модели K_M . Следуя формуле (2.4.8), можно записать [1.3, 1.4] для тела и его модели:

$$K = \frac{\ell^2}{\mu_\infty}, K_M = \frac{\ell_M^2}{\mu_\infty}.$$

Из этих зависимостей следует, что

$$K = n^2 \cdot K_M, \quad (2.6.1)$$

если модель по линейным размерам в n раз меньше объекта.

Введем безразмерный коэффициент формы

$$E_N = \frac{K}{K_N}, \quad (2.6.2)$$

где K_N – коэффициент формы основного тела данного класса конфигураций.

К первому классу (классу пластинки) принадлежат тела, длина и ширина которых значительно превосходят их толщину, причем толщина в разных местах может претерпевать незначительные колебания около средней величины.

Ко второму классу (классу цилиндра) условно отнесены тела, длина которых значительно превосходит их ширину и толщину.

Третий класс (класс шара) составляют тела, все три измерения которых одного порядка.

В соответствии с данной классификацией

$$E_I = \frac{K_I}{K_{пл}}, E_{II} = \frac{K_{II}}{K_{ц}}, E_{III} = \frac{K_{III}}{K_{ш}},$$

где

$$K_{пл} = \left(\frac{2\ell}{\pi}\right)^2, K_{ц} = \left(\frac{R}{2,4048}\right)^2, K_{ш} = \left(\frac{R}{\pi}\right)^2$$

– коэффициенты форм пластины, цилиндра и шара.

Так как в силу теоремы

$$a = K \cdot m_{\infty} = K_N \cdot m_{\infty N},$$

то отсюда следует, что

$$\frac{m_{\infty N}}{m_{\infty}} = \frac{K}{K_N} = E. \quad (2.6.3)$$

Введением параметра E мы освободились от влияния размеров сравниваемых форм; коэффициент E определяется только формой тела и является одинаковым для геометрически подобных тел. Его можно назвать относительным коэффициентом формы.

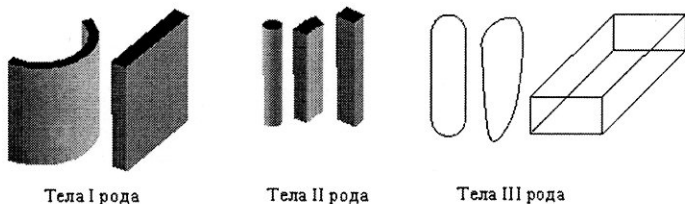


Рис. 2.6.1

На рис. 2.6.1 представлены некоторые тела I, II и III классов.

Для изготовления моделей тел в качестве эталонного вещества удобно использовать натуральный необработанный пчелиный воск, температуропроводность которого при температуре $0 \div 5^{\circ}\text{C}$ равна $a = 0,92 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Таблица 2.6.1
Относительный коэффициент формы E

№	Описание формы	E	Метод
1	Длинная призма с квадратным сечением	0,92	расчет
2	Длинная призма с сечением в виде правильного треугольника	0,95	опыт
3	Архимедов цилиндр (высота равна основанию)	0,912	расчет
4	Куб	0,865	расчет
5	Трехгранная призма, все ребра которой равны между собой	0,692	опыт
6	Конус; в проходящем через высоту сечении правильный треугольник	0,668	опыт
7	Правильный тетраэдр	0,635	опыт
8	Тело вращения, образованное диском с полушариями на основаниях	0,96	опыт
9	Яйцевидное тело, близкое к эллипсоиду вращения с отношением осей 1,4	0,9	опыт
10	Тело вращения, состоящее из архимедова цилиндра с полушариями на основаниях цилиндра	0,83	опыт

В отдельных случаях критерий E можно найти также и аналитически. В табл. 2.6.1 для некоторых тел представлены значения критерия E , определенные опытным или расчетным путем.

2.7. Регулярные тепловые режимы второго и третьего рода

Наряду с простым нагревом и охлаждением тел в среде с постоянной температурой, большой практический интерес имеет изучение закономерностей теплообмена в условиях переменной температуры среды, в частности при изменении ее по прямолинейному закону

$$t_c(\tau) = t_0 + b\tau, \quad (2.7.1)$$

где t_0 – начальное значение, а b – скорость изменения температуры среды от времени.

По прошествии достаточного времени при допущении постоянства теплофизических свойств и коэффициента теплоотдачи от температуры на режим тела (системы) не будут влиять особенности начального теплового состояния, и температура во всех точках рассматриваемого объекта будет изменяться с той же скоростью b , отставая (опережая) $t_c(\tau)$ в зависимости от знака b ($b > 0$ или $b < 0$). Такой режим называют *регулярным режимом второго рода*. Его особенности исследованы в работах Г.М. Кондратьева [1.3], а для канонических тел с одномерным полем температуры – в книге А.В. Лыкова [1.6].

Формально изменение температуры $t(x, y, z, \tau)$ внутри тела можно записать в виде

$$t(x, y, z, \tau) = t_c(\tau) - f(x, y, z) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i U_i(x, y, z) \exp(-m_i \tau), \quad (2.7.2)$$

где $f(x, y, z)$ некоторая функция координат, зависящая от геометрических, теплофизических и теплообменных характеристик тела. Начиная с некоторого времени членами ряда, кроме первого, можно пренебречь и получить соотношения между температурой тела и среды в регулярном режиме второго рода. Расчеты показывают, что этот режим наступает быстрее по сравнению с простым охлаждением (нагреванием) тела.

По аналогии с регулярным режимом первого рода можно ввести критерий *неравномерности распределения температур*

$$\Psi_2 = \frac{\mathcal{G}_S}{\mathcal{G}_V} = \frac{t_c - t_S}{t_c - t_V}, \quad (2.7.3)$$

определив его как отношение среднеповерхностной избыточной температуры ϑ_s к среднеобъемной избыточной температуре ϑ_v . По наступлении регулярного режима, температуры ϑ_s и ϑ_v определяются соотношениями

$$\vartheta_s = \frac{b}{m_0}, \quad \vartheta_v = \frac{b}{m_0 \Psi_2}. \quad (2.7.4)$$

Средний градиент температур на поверхности однородного изотропного тела в регулярном режиме второго рода не зависит от величины коэффициента теплоотдачи α тела со средой и рассчитывается по формуле

$$\left. \frac{dt}{dn} \right|_S = \frac{V b}{S a} = \frac{C b}{S \lambda}, \quad (2.7.5)$$

где V и S – объем и поверхность тела, a и λ – коэффициенты его температуро- и теплопроводности, а C – полная теплоемкость.

В работе [1.14] показано, что критерий неравномерности распределения Ψ_2 для однородных изотропных тел в регулярном режиме второго рода можно представить в виде

$$\Psi_2 = \frac{\vartheta_s}{\vartheta_v} = \frac{1}{1 + H_2}. \quad (2.7.6)$$

Здесь H_2 – обобщенный критерий Био в регулярном режиме второго рода:

$$H_2 = \frac{\alpha}{\lambda} L_2 = \frac{\alpha}{\lambda} K_2 \frac{S}{V}, \quad (2.7.7)$$

где L_2 – определяющий размер, K_2 – коэффициент формы тела в регулярном режиме второго рода

$$K_2 = \frac{a}{b} \vartheta_\infty V = \frac{a}{b} (t_c - t_{\infty V}) = \frac{a}{b} (\vartheta_s - \vartheta_v). \quad (2.7.8)$$

Значения величин L_2 и K_2 для тел простейшей формы приведены в работах [1.3. 1.14]. Установлено, что обобщенные критерии H в регулярных режимах второго и первого рода соотносятся как их коэффициенты формы

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{L_2}{L_1}. \quad (2.7.9)$$

Критериальные закономерности для двухсоставных тел простой формы в регулярном режиме второго рода подробно рассмотрены Г.М. Кондратьевым в статье [1.18].

Регулярный режим третьего рода. Если температура среды $t_c(\tau)$ изменяется по гармоническому закону с частотой ω (периодом T)

$$t_c(\tau) = a_i \cos \omega \tau, \quad \omega = 2\pi/T, \quad (2.7.10)$$

то аналогично (2.7.3) в установившемся циклическом режиме теплообмена можно записать

$$\Psi(\tau) = \frac{\vartheta_S(\tau)}{\vartheta_V(\tau)} = \frac{t_c - t_S}{t_c - t_V} = \frac{B_S \cos(\omega\tau - \beta_S)}{B_V \cos(\omega\tau - \beta_V)}, \quad (2.7.11)$$

где $B_S, B_V, \beta_S, \beta_V$ – амплитуды и фазы изменения температур $\vartheta_S(\tau)$ и $\vartheta_V(\tau)$ соответственно. Из (2.7.11) следует, что отношение $\vartheta_S / \vartheta_V$ не постоянно и является некоторой периодической функцией времени. В работе [1.14] показано, что критерий

$$\Psi_3 = \frac{B_S}{B_V} \approx \Psi_2(1 + \delta). \quad (2.7.12)$$

При заданных малых δ и N_2 даны рекомендации по определению диапазона частот ω , в котором для расчета $t_v(\tau)$ могут быть применены формулы элементарной тепловой инерции (см. раздел 1.4).

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНОГО ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА К СИСТЕМАМ ТЕЛ

3.1. Основная теорема о регулярном тепловом режиме системы тел

Рассмотрим составное тело, состоящее из нескольких частей, материалы которых существенно отличаются по тепловым свойствам. Такие составные тела для краткости будем называть *системами*. Пусть на наружной стороне S системы теплообмен подчиняется закону Ньютона:

$$\lambda_i \left(\frac{\partial(t_i - t_c)}{\partial n_i} \right) \Big|_S + \alpha_i (t_i - t_c) \Big|_S = 0, \quad t_i - t_c = \vartheta_i, \quad i=1,2,\dots, \quad (3.1.1)$$

где i – номер какой-нибудь части системы, соприкасающейся с внешней средой. Будем считать, что параметры λ_i , α_i не зависят от температуры. Это позволит применить к этой системе первую теорему Г.М.Кондратьева, т. е. считать, что в системе

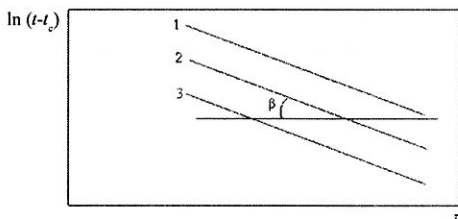


Рис. 3.1.1

происходит регуляризация температурного поля. Графически температурное поле системы $\vartheta = f(\tau)$ изобразится в полулогарифмических координатах семейством параллельных прямых (рис. 3.1.1), т. е. оно остается подобным самому себе, как и для случая простого тела.

Для системы темп охлаждения m зависит от большого числа параметров:

- от формы и размеров системы и взаимного расположения ее частей;
- от теплофизических свойств материалов λ_i , α_i , c_i , из которых состоит система;
- от условий теплообмена на наружных поверхностях системы;
- от условий на границах раздела соседних частей системы.

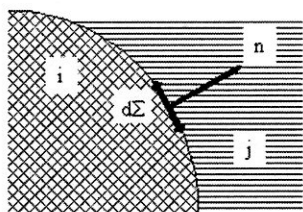
Для системы, как и для простого тела, выполняется закон асимпто-

тического возрастания m с увеличением α , а предел $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} m = m_\infty$ есть величина конечная.

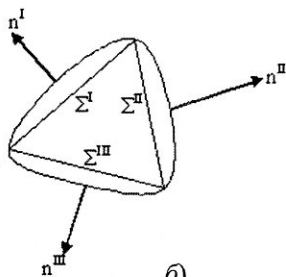
3.2. Общий метод аналитического решения задачи о системе тел

Введем упрощающее предположение: коэффициент теплоотдачи α , являющийся функцией координат точек поверхности S , заменим осредненной по поверхности величиной $\bar{\alpha} = \alpha$. Далее предположим, что каждое из тел I, II, III ... системы состоит из однородного и изотропного материала, поэтому их физические параметры λ, a, c, ρ , меняются разрывно на границах тел Σ . Положительное направление нормали к Σ обозначим через n (рис. 3.2.1), и используем условие равенств потоков на границах [1.4]

$$\lambda_i \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial n} \right)_{\Sigma} = \lambda_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial n} \right)_{\Sigma}. \quad (3.2.1)$$



a)



б)

Рис. 3.2.1

Равенство температур на этой границе Σ имеет вид:

$$(\vartheta_i)_{\Sigma} = (\vartheta_j)_{\Sigma}. \quad (3.2.2)$$

Условие на наружной поверхности S системы

$$\left(\lambda_k \frac{d\vartheta_k}{dn} + \alpha \vartheta_k \right)_{S'} = 0. \quad (3.2.3)$$

Для установления математической зависимости между темпом охлаждения m и определяющими его параметрами используем уравнение теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \tau} = a_i \nabla^2 \vartheta_i \quad (3.2.4)$$

и условия (3.2.1) - (3.2.3).

В силу положений, сформулированных в 3.1, для системы тел с достаточно сильными тепловыми связями, для каждой из частей I, II, III ... системы будут справедливы следующие выражения (рис. 3.2.1 б):

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_I &= A_I U_I e^{-m\tau}, \\ \vartheta_{II} &= A_{II} U_{II} e^{-m\tau}, \\ \dots\dots\dots \\ \vartheta_i &= A_i U_i e^{-m\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

Каждая из функций U удовлетворяет своему уравнению типа (2.4.2), а именно:

$$\nabla^2 U_i + \frac{m}{a_i} U_i = 0. \quad (3.2.6)$$

Уравнение (3.2.6) является следствием (3.2.5) и основной теоремы. Предположим, что для всех частей системы i общие интегралы (3.2.6) найдены и все функции (3.2.5) известны. В их выражения войдут в качестве параметров произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, \dots , а также начальные значения температур для каждой из частей системы, так как они связаны с коэффициентами $A_I, A_{II}, A_{III}, \dots$ в уравнениях (3.2.5). Для их исключения воспользуемся условиями (3.2.1), (3.2.2) на поверхностях раздела соприкасающихся тел, что приведет к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (A_I U_I)_\Sigma &= (A_{II} U_{II})_\Sigma, & a) \\ \lambda_i A_i \left(\frac{dU_I}{dn} \right)_\Sigma &= \lambda_j A_{II} \left(\frac{dU_{II}}{dn} \right)_\Sigma. & б) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

Разделив одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{\lambda_i \left(\frac{dU_I}{dn} \right)_\Sigma}{(U_I)_\Sigma} = \frac{\lambda_j \left(\frac{dU_{II}}{dn} \right)_\Sigma}{(U_{II})_\Sigma} \quad (3.2.8)$$

и таким способом исключим амплитуды A .

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, \dots , входящих в U , послужат условия (3.4) на наружной поверхности S . Вводя в них выражения (3.2.5) для ϑ_i и сокращая на $A_i \exp(-m\tau)$ приходим к уравнениям вида:

$$\left(\lambda_k \frac{dU_k}{dn} + \alpha U_k \right)_S = 0. \quad (3.2.9)$$

Для случая $\alpha \rightarrow \infty$ это условие примет вид $(U_k)_S = 0$.

Комбинация уравнений (3.2.7) и (3.2.8) или (3.2.9) приведет к условиям для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, \dots , а в конечном итоге, для определения зависимости m от α . В некоторых случаях, когда какая-нибудь часть системы обладает равномерной температурой, уравнения (3.2.7) приходится заменить иными. Тогда функция U_i сводится к постоянной, которую без нарушения общности можно считать равной единице. В этих случаях условия на поверхности Σ^* , ограничивающей область равномерной температуры, напишем в следующем виде (рис. 3.2.1):

$$-C^* m = +\lambda_i \left(\frac{dU_i}{U_i} \right)_{\Sigma_i} + \lambda_j \left(\frac{dU_j}{U_j} \right)_{\Sigma_j} + \dots \quad (3.2.10)$$

Здесь C^* – полная теплоемкость области равномерной температуры; Σ_i, Σ_j – поверхности тел систем, окружающих её отовсюду (рис. 3.2.1, б),

$$\Sigma^* = \Sigma_i + \Sigma_j + \dots$$

Последующие разделы посвящены различным частным случаям, где может быть получено приближенное или частное выражение о регулярном охлаждении.

В дальнейшем нам придется рассматривать частные случаи системы, в которых одна из частей является областью с равномерной температурой. Для избежания громоздких выражений воспользуемся условно терминами *металл*, *металлический*, противопоставляя их термину *теплоизолятор*.

В дальнейшем будут рассмотрены различные варианты двух и трехслойных тел, состоящих из металла и теплоизолятора.

3.3. Двухсоставная система тел типа “ядро-оболочка”

Обозначим собственные функции для ядра – U_1 , оболочки – U_2 , это, вообще говоря, функции трех координат.

Введем средние объемные температуры ϑ_{1V} ядра и ϑ_{2V} оболочки, а их полные теплоемкости обозначим C_1 и C_2 . Тогда выделенная при охлаждении этих тел теплота dQ_1 :

$$dQ_1 = -C_1 \frac{d\vartheta_{1V}}{d\tau} - C_2 \frac{d\vartheta_{2V}}{d\tau},$$

отдается в среду dQ_2 :

$$dQ_2 = \alpha \vartheta_{S2} S.$$

Приравнявая на основе закона сохранения энергии $dQ_1 = dQ_2$, получим:

$$-\left(C_1 \frac{d\vartheta_{1V}}{d\tau} + C_2 \frac{d\vartheta_{2V}}{d\tau} \right) = \alpha_S \vartheta_S S,$$

где ϑ_{2V} — средняя поверхностная температура оболочки.

Подстановка в последнюю формулу вместо ϑ_{1V} их выражения из (3.2.5) приводит к уравнению

$$\alpha S U_{S2} = m \left(\frac{A_1}{A_2} U_{1V} C_1 + U_{2V} C_2 \right). \quad (3.3.1)$$

Условие (3.2.7) непрерывности температуры на поверхности между телами 1 и 2 имеет для этого случая вид

$$A_1 U_{1\Sigma} = A_2 U_{2\Sigma}.$$

Подставив вытекающее отсюда отношение амплитуд A_1/A_2 в уравнение (3.3.1), получим выражение

$$\alpha S U_{S2} = m \left(\frac{U_{2\Sigma}}{U_{1\Sigma}} U_{1V} C_1 + U_{2V} C_2 \right), \quad (3.3.2)$$

которое не меняется, каковы бы ни были тела 1 и 2, т.е. металлы или теплоизоляторы.

Рассмотрим теперь регулярный режим ядра 1 из металла, заключенного в теплоизолятор 2, и определим их температуры в каких-либо точках M_1 и M_2 этих тел. Так как для металлического ядра температура во всех точках одинакова, то $U_{1\Sigma} = U_{1V} = U_1 = 1$ и температуры ядра и оболочки примут вид

$$\vartheta_1 = A_1 e^{-m\tau}, \quad \vartheta_2 = A_2 U_2 e^{-m\tau}. \quad (3.3.3)$$

Выразим аналитически тот факт, что полное количество теплоты

$$\left(-C_1 \frac{d\vartheta_1}{d\tau} \right),$$

потерянное там за время охлаждения, проходит сквозь поверхность Σ и поступает в оболочку 2:

$$-C_1 \frac{d\vartheta_1}{d\tau} = \int_{\Sigma} \lambda_2 \frac{d\vartheta_2}{dn} d\Sigma = \lambda_2 \overline{\frac{d\vartheta_2}{dn}} \Sigma.$$

Подставим в это выражение значения температур из (3.3.3):

$$mC_1 U_{\Sigma} = \lambda \left(\overline{\frac{\partial U_2}{\partial n}} \right)_{\Sigma} \Sigma. \quad (3.3.4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\overline{\frac{d\vartheta_2}{dn}}, \quad \overline{\frac{dU}{dn}}$$

– средние значения производной по нормали температуры и функции U . Заменяем снова U_2 через ϑ_2 , получим иную форму для выражения (3.3.4):

$$-\lambda \left(\overline{\frac{d\vartheta_2}{dn}} \right)_{\Sigma} = m\Phi, \quad \Phi = \frac{C_1}{\Sigma}, \quad (3.3.5)$$

где Φ – константа ядра.

Второе из граничных условий для функции U получится из (3.2.9).

ГЛАВА 4. РЕГУЛЯРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ДВУХСОСТАВНЫХ СИСТЕМ ТЕЛ ПРОСТЕЙШЕЙ ФОРМЫ

4.1. Двухсоставной шар

Для шара собственные функции зависят от координаты r и имеют следующую форму [1.4]:

$$U_1 = \frac{\sin(\mu_1 r)}{r}, \quad U_2 = \frac{\sin(\mu_2 r + \omega)}{r}. \quad (4.1.1)$$

В силу основной теоремы раздела 3.1 и зависимости (2.1.6) числа μ_1 и μ_2 связаны между собой зависимостью

$$a_1 \mu_1^2 = a_2 \mu_2^2 = m, \quad (4.1.2)$$

Обозначим собственные функции для шара и цилиндра в следующем виде:

$$U = U(\mu_1 r), \quad W = W(\mu_2 r + \omega);$$

Запишем уравнения (3.2.8) для границы раздела Σ .

$$\lambda_1 \cdot \mu_1 \cdot \frac{U'(p_1)}{U(p_1)} = \lambda_2 \cdot \mu_2 \cdot \frac{W'(q, \omega)}{W(q, 0)}, \quad (4.1.3)$$

где введены обозначения

$$p_1 = \mu_1 \cdot R_1 \quad p_2 = \mu_2 \cdot R_2 \quad q = \mu_2 \cdot R_1$$

радиусы ядра и оболочки R_1 и R_2

Применив уравнение (3.2.9), получим второе соотношение между μ_1 , μ_2 и прочими величинами

$$\frac{W'(p_2, \omega)}{W(p_2, \omega)} = -\frac{\alpha}{\lambda_2 \cdot \mu_2}. \quad (4.1.4)$$

Уравнения необходимы и достаточны для нахождения связи между m и остальными параметрами. Дальнейший вывод можно найти в работах [1.3, 1.4].

Перепишем формулы (4.1.1) для шара в следующем виде:

$$U = \mu_1 \cdot \frac{\sin(\mu_1 r)}{\mu_1 r} \quad W = \mu_2 \cdot \frac{\sin(\mu_2 r + \omega)}{\mu_2 r} \dots$$

Условия (4.1.3) и (4.1.4) примут вид:

$$(1 - p_1 \cdot \operatorname{ctg} p_1) \cdot \lambda_1 = [1 - q \cdot \operatorname{ctg}(q + \omega)] \cdot \lambda_2,$$

$$1 - p_2 \cdot \operatorname{ctg}(p_2 + \omega) = \frac{\alpha \cdot R_2}{\lambda_2}. \quad (4.1.5)$$

Введем $\Phi(x) = 1 - x \cdot \operatorname{ctg} x$ и исключим из предыдущих уравнений $\operatorname{ctg} \omega$. В результате получим формулу

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda} \cdot R_2\right) \cdot (1 + Y \cdot \operatorname{tg} s) = p_2 \cdot (Y - \operatorname{tg} s)$$

$$Y = \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \Phi(p_1)}{q}.$$

Здесь использован параметр $s = p_2 - q = p_2(1 - k)$.

Пусть теплопроводность и температуропроводность оболочки шара λ_2, a_2 во много раз меньше теплопроводности и температуропроводности ядра λ_1, a_1 : $\lambda_2 \ll \lambda_1, a_2 \ll a_1$.

Рассмотрим отношение p_1/p_2 . В силу (4.1.2)

$$p_1 = k \cdot p_2 \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}.$$

Так как $k < 1, p_2$ – конечное, то p_1 – число небольшое, поэтому входящая в уравнение (4.1.5) функция $\Phi(p_1)$ может быть заменена приближенным выражением $p_1^2/3$. Действительно, $\Phi(p_1)$ может быть представлено приближенной формулой

$$\Phi(p_1) \approx \frac{p_1^2}{3} + \frac{p_1^4}{45} + \frac{2 \cdot p_1^6}{945}. \quad (4.1.6)$$

Преобразуем фигурирующее в (4.1.5) выражение $\Phi(p_1)(\lambda_1/\lambda_2)$:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \Phi(p_1) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{p_1^2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{c_1 \cdot \rho_1}{c_2 \cdot \rho_2} \cdot \frac{k^2}{(1-k)^2} \cdot s^2 = M \cdot s^2$$

Первое из уравнений (4.1.5) примет вид

$$\frac{\alpha}{\lambda} \cdot R_2 \cdot [1 - k \cdot \Phi(s) - (1 - k) \cdot M \cdot s^2] =$$

$$= (1 - k) \cdot \Phi(s) + \frac{k}{1 - k} \cdot s^2 - M \cdot s^2 [\Phi(s) - k]$$

$$\delta = R_2 - R_1, \quad s = \delta \cdot \sqrt{\frac{m}{a_2}}. \quad (4.1.7)$$

Введем величины Ж и Б

$$Ж = \frac{1 + k + k^2}{3k} \cdot \frac{C_1}{C_2}, \quad Б = k \cdot \Phi \cdot P \cdot m,$$

$$\text{где } k = \frac{R_1}{R_2}, \quad \Phi = \frac{C_1}{s}, \quad P = \frac{\delta}{\lambda}.$$

Можно показать, что имеет место приближенное равенство

$$Б \approx \frac{3Ж}{3Ж + К}.$$

Зависимость $Б = f(Ж, К)$ представлена на рис. 4.1.1 и в табл. 4.1.

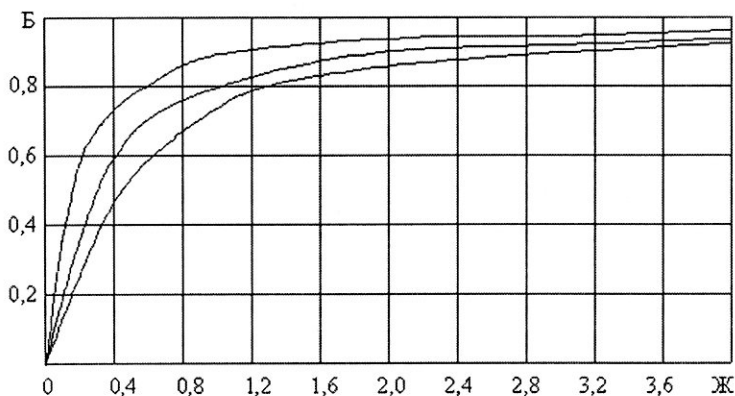


Рис. 4.1.1

Функция $B = f(J, K)$ для шарового и плоского бикалориметров

К Ж	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	0,412	0,362	0,320	0,292	0,268	0,242	0,220	0,208
0,2	0,602	0,540	0,490	0,452	0,425	0,932	0,370	0,350
0,3	0,712	0,658	0,602	0,565	0,528	0,500	0,472	0,450
0,4	0,788	0,725	0,680	0,640	0,600	0,578	0,545	0,522
0,5	0,818	0,770	0,730	0,692	0,660	0,632	0,605	0,580
0,6	0,842	0,800	0,765	0,732	0,702	0,672	0,648	0,625
0,7	0,865	0,825	0,792	0,762	0,735	0,708	0,682	0,660
0,8	0,880	0,845	0,815	0,788	0,762	0,735	0,712	0,692
0,9	0,895	0,862	0,835	0,810	0,785	0,760	0,738	0,720
1,0	0,905	0,875	0,850	0,828	0,805	0,780	0,760	0,742
1,1	0,915	0,885	0,862	0,842	0,820	0,798	0,778	0,762
1,2	0,920	0,895	0,875	0,855	0,835	0,815	0,792	0,778
1,3	0,928	0,902	0,882	0,862	0,845	0,828	0,805	0,790
1,4	0,932	0,908	0,888	0,870	0,854	0,835	0,818	0,800
1,5	0,935	0,915	0,895	0,878	0,862	0,845	0,828	0,810
1,6	0,940	0,920	0,900	0,885	0,870	0,852	0,838	0,820
1,7	0,942	0,925	0,908	0,890	0,875	0,860	0,845	0,830
1,8	0,946	0,928	0,910	0,895	0,880	0,870	0,852	0,838
1,9	0,950	0,932	0,912	0,900	0,888	0,872	0,860	0,845
2,0	0,952	0,935	0,918	0,905	0,892	0,878	0,866	0,855
2,1	0,955	0,938	0,920	0,908	0,898	0,885	0,872	0,860
2,2	0,958	0,940	0,922	0,912	0,902	0,888	0,878	0,866
2,3	0,962	0,942	0,928	0,915	0,906	0,892	0,882	0,870
2,4	0,962	0,945	0,930	0,920	0,910	0,898	0,888	0,875
2,5	0,962	0,948	0,934	0,922	0,912	0,900	0,890	0,880
2,6	0,965	0,950	0,936	0,925	0,915	0,902	0,894	0,885
2,7	0,965	0,950	0,938	0,928	0,918	0,906	0,898	0,888
2,8	0,965	0,952	0,940	0,930	0,918	0,910	0,900	0,890
2,9	0,968	0,954	0,941	0,931	0,920	0,912	0,902	0,895
3,0	0,968	0,955	0,942	0,932	0,922	0,914	0,905	0,898
3,1	0,968	0,956	0,944	0,935	0,925	0,916	0,908	0,901
3,2	0,970	0,958	0,945	0,938	0,928	0,920	0,910	0,905
3,3	0,970	0,960	0,948	0,939	0,930	0,920	0,912	0,908
3,4	0,970	0,960	0,949	0,940	0,932	0,925	0,915	0,910
3,5	0,970	0,960	0,950	0,942	0,935	0,928	0,918	0,912

Примечание. Предполагается, что $\alpha \rightarrow \infty$.

4.2. Двухсоставная симметричная пластина

Так как в этом случае тело 2 не охватывает целиком тело 1 и состоит из двух отдельных частей (рис.4.2.1), то применять формулы (4.1.3) и (4.1.4) нельзя.

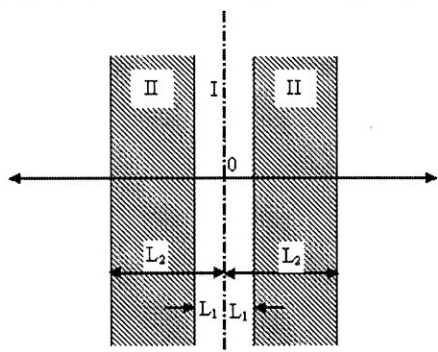


Рис. 4.2.1

Выражения для температур каких-либо двух точек M_1 и M_2 будут

$$\vartheta_1 = A_1 \cdot \cos(\mu_1 x) \cdot e^{-m x}$$

$$\vartheta_2 = A_2 \cdot \cos(\mu_2 x + \omega) \cdot e^{-m x}$$

Условие (3.2.8) образуется на поверхности Σ , где $x = L_1$, в условие

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \mu_1 \cdot \operatorname{tg}(\mu_1 \cdot L_1) &= \\ &= \lambda_2 \cdot \mu_2 \cdot \operatorname{tg}(\mu_2 \cdot L_1 + \omega). \end{aligned}$$

Условие на поверхности S , где $x = L_2$, в силу (3.2.9) напишем в форме

$$\mu_2 \cdot L_2 \cdot \operatorname{tg}(\mu_2 \cdot L_2 + \omega) = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot L_2.$$

Исключая ω из двух предыдущих уравнений, находим связь между m и прочими параметрами

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\lambda} \cdot L_2 \cdot \left[\frac{k}{1-k} \cdot s - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot F(p_1) \cdot \operatorname{tg} s \right] &= \\ = \frac{1}{1-k} \cdot s \cdot \left[\frac{k}{1-k} \cdot F(s) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot F(p_1) \right]. \end{aligned}$$

Дальнейший вывод приведен в [1.3, 1.4] в виде связи между критериями Б, Ж, П.

$$Б \approx \frac{1 - П - \frac{П}{Ж}}{\frac{1 - П}{3Ж} + 1}, \quad Ж = \frac{C_1}{C_2}, \quad П = \frac{m \cdot \Phi}{\alpha}, \quad \Phi = \frac{C_1}{2s}.$$

Помимо шарового и плоского бикалориметров рассмотрена также система бесконечно длинного двухсоставного цилиндра с металлическим сердечником и оболочкой из теплоизолятора (цилиндрический бикалориметр).

ГЛАВА 5. РЕГУЛЯРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ТРЕХСОСТАВНЫХ ТЕЛ

5.1. Охлаждение простейшей трехсоставной системы

Рассмотрим охлаждение в среде с постоянной температурой системы тел, состоящей из металлического ядра 1, нетеплоемкого зазора 2 и металлической оболочки 3. Иными словами, предположим, что в ядре и оболочке температурное поле в течение всего процесса охлаждения остается равномерным, а теплоемкость зазора C_2 мала по сравнению с теплоемкостью ядра C_1 и оболочки C_3 (рис. 5.1.1, а).

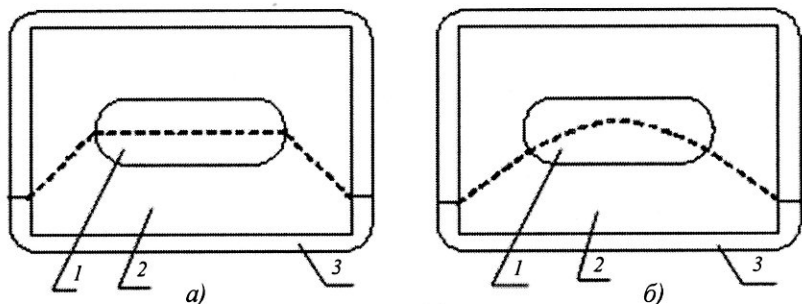


Рис. 5.1.1

Используем закон сохранения энергии при анализе процесса простого охлаждения такой системы в среде с постоянной температурой.

Количество тепла, теряемое при охлаждении ядра за время $\partial\tau$, передается через зазор оболочке, то есть

$$C_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} = \sigma_2 (\vartheta_1 - \vartheta_3), \quad t_i - t_c, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1.1)$$

где σ_2 – тепловая проводимость зазора, Вт/К; $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ – перегревы тел 1, 2, 3

Тепловой поток, прошедший через зазор 2, частично расходуется на нагревание оболочки, а его остаток рассеивается поверхностью оболочки в окружающую среду:

$$\sigma_2 (\vartheta_1 - \vartheta_2) - C_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \tau} = \alpha S_3 (\vartheta_3), \quad (5.1.2)$$

где σ_3 – площадь поверхности оболочки 3.

Исключая из системы уравнений (5.1.1)-(5.1.2) температуру ϑ_3 , получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно температуры ϑ_1

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\sigma_2}{C_3} + \frac{\sigma_2}{C_1} + \alpha \frac{S_3}{C_3} \right) \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau} + \frac{\sigma_2 \alpha S_3}{C_1 C_2} \vartheta_1 = 0, \quad (5.1.3)$$

$$\text{обозначим } a = \frac{\sigma_2}{C_3} + \frac{\sigma_2}{C_1} + \frac{\alpha S_3}{C_3}, \quad b = \frac{\sigma_2 \alpha S_3}{C_1 C_2}.$$

Для нахождения общего решения необходимо определить корни характеристического уравнения:

$$m^2 + am + b = 0.$$

Число действительных решений этого уравнения зависит от знака дискриминанта $D = a^2 - 4b$. При $D > 0$ имеется два действительных корня:

$$m_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}), \quad m_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}). \quad (5.1.4)$$

Каждому корню соответствует решение $\exp(-m_1 \tau)$, $\exp(-m_2 \tau)$, линейная комбинация которых

$$\vartheta_1 = A_1 e^{-m_1 \tau} + A_2 e^{-m_2 \tau}, \quad (5.1.5)$$

является общим решением однородного уравнения (5.1.3).

Подставляя решение (5.1.5) в уравнение (5.1.3), можно найти выражение для ϑ_3

$$\vartheta_3 = A_1 \left(1 - \frac{C_1}{\sigma_2} m_1\right) e^{-m_1 \tau} + A_2 \left(1 - \frac{C_1}{\sigma_2} m_2\right) e^{-m_2 \tau}. \quad (5.1.6)$$

Значение постоянных интегрирования A_1 и A_2 найдем из начальных условий

$$\vartheta_1(0) = \vartheta_{10}, \quad \vartheta_3(0) = \vartheta_{30}.$$

Если начальная температура системы тела везде одинакова, $\vartheta_{10} = \vartheta_{20}$, то из (5.1.5) и (5.1.6) следует, что

$$A_1 m_1 + A_2 m_2 = 0,$$

и уравнение (5.1.5) принимает вид

$$\vartheta_1 = A_1 e^{-m_1 \tau} \left[1 - \frac{m_1}{m_2} e^{-(m_2 - m_1) \tau} \right]. \quad (5.1.7)$$

Итак, изменение температурного поля рассматриваемой системы характеризуется двумя экспоненциальными членами; для оценки их относительного влияния необходимо определить соотношение между m_1 и m_2 .

Перепишем выражения (5.1.4), раскрыв значения коэффициентов a и b ,

$$m_1 = \frac{a}{2} \cdot (1 - \sqrt{1-n}) \quad m_2 = \frac{a}{2} \cdot (1 + \sqrt{1-n}),$$

$$n = \frac{4 \cdot b}{a^2} = \frac{4 \cdot \alpha \cdot S_3 \cdot \frac{c_3}{c_1}}{\sigma_2 \cdot \left(1 + \frac{c_1}{c_3} + \frac{\alpha \cdot S_3}{\sigma_2}\right)^2}. \quad (5.1.8)$$

Для оценки величин m_1 и m_2 уместно рассмотреть конкретный случай.

Пусть ядро – параллелепипед из дюралюминия с размерами 10г20г5 см, $c_1 = 460$ Дж/К, оболочка из дюралюминия, $c_3 = 140$ Дж/К; охлаждение проходит в условиях естественной конвекции $\alpha = 20$ Вт/(м²·К). Тогда

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot S_3 = \frac{0,03}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,06 = 0,36 \text{ Вт/К};$$

$$n = \frac{4 \cdot b}{a^2} = 0,4; \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \sqrt{1-0,4}}{1 + \sqrt{1-0,4}} = 0,13,$$

$$m_1 = 8,54 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad m_2 = 6,74 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1},$$

$$\vartheta_1 = A_1 \cdot e^{-m_1 \tau} \cdot [1 - 0,13 \cdot e^{-6,9 \cdot m_1 \tau}].$$

При $\tau = 0$ второй член отличается от первого на 13 %, а через 3 мин. это отличие составляет уже 4 %.

Когда второй член станет малым по сравнению с первым, то придем по определению к регулярному тепловому режиму.

5.2. Тепловой регулярный режим системы “теплоизоляционное ядро – зазор – оболочка”

Пусть ядро 1 (рис. 5.1.1, б) изготовлено из теплоизолятора, т.е. его температурное поле неравномерное, зазор 2 малотеплоемкий, а оболочка 3 – металлическая.

Сформулируем на основании закона сохранения энергии перенос теплоты от ядра к оболочке

$$c_1 \frac{d\vartheta_{IV}}{dt} = \sigma_2 \cdot (\vartheta_{Is} - \vartheta_3) \quad (5.2.1)$$

далее нагрев оболочки и рассеяние теплоты в окружающую среду

$$\sigma_2 \cdot (\vartheta_{Is} - \vartheta_3) - c_3 \cdot \frac{d\vartheta_3}{dt} = \alpha \cdot S_3 \cdot \vartheta_3, \quad (5.2.2)$$

где ϑ_{Is} и ϑ_{IV} — среднеповерхностные и среднеобъемные температуры ядра.

Заметим, что уравнения (5.2.1), (5.2.2) отличаются от уравнений (5.1.1), (5.1.2) предыдущей задачи только появлением вместо одной температуры ϑ_1 двух — ϑ_{Is} и ϑ_{IV}

В двух уравнениях (5.2.1), (5.2.2) фигурируют три неизвестных температуры ϑ_{Is} , ϑ_{IV} , ϑ_3 ; для замыкания задачи необходимо получить еще одно дополнительное уравнение, связывающее какие-нибудь два параметра.

Сделаем предположение, что температурное поле системы с самого начального момента времени входит в стадию регулярного теплового режима. Тогда для любой точки i тела будет справедливо основное соотношение теории регулярного режима, аналогичное выражению (2.2.3),

$$\frac{d\vartheta_i}{\vartheta_i \cdot dt} = -m = \text{const.} \quad (5.2.3)$$

где m — темп охлаждения системы, общей для любой ее части.

Введем обозначение критерия неравномерности температурного поля в ядре

$$\Psi_1 = \frac{\vartheta_{s1}}{\vartheta_{V1}}. \quad (5.2.4)$$

В разделе 2.3 формула (2.3.5) показано, что этот критерий не зависит от времени $\Psi_1 \neq f(\tau)$.

Перепишем уравнения (5.2.1) и (5.2.2) с учетом зависимостей (5.2.3) и (5.2.4):

$$\frac{1}{\Psi_1} \cdot c_1 \cdot m = \sigma_2 \cdot \left(1 - \frac{\vartheta_3}{\vartheta_{Is}}\right), \quad c_3 \cdot m + \sigma_2 \cdot \left(\frac{\vartheta_{Is}}{\vartheta_3} - 1\right) = \alpha \cdot S_3$$

и исключим из последней системы уравнений параметр $\vartheta_{1s}/\vartheta_3$, что приведет к алгебраическому уравнению

$$a \cdot m^2 - b \cdot m + c = 0,$$

$$a = c_1 \cdot c_3;$$

$$b = c_1 \cdot \sigma_2 + c_3 \cdot \sigma_2 \cdot \Psi_1 + \alpha \cdot S_3 \cdot c_1;$$

$$c = \alpha \cdot S_3 \cdot \Psi_1 \cdot \sigma_2. \quad (5.2.5)$$

Это уравнение имеет два решения, но в условиях регулярного теплового режима по определению следует брать наименьшее значение параметра m , поэтому

$$m = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}. \quad (5.2.6)$$

Критерий Ψ_1 может быть определен по формуле

$$\Psi_1 = \frac{M}{H_1} = \frac{1}{\sqrt{H_1^2 + 1.437 \cdot H + 1}}, \quad H_1 = \frac{\alpha_{\text{эф}} \cdot K_1 \cdot S_1}{\lambda_1 \cdot V_1},$$

$$M = \frac{m}{m_\infty}. \quad (5.2.7)$$

Параметр $\alpha_{\text{эф}}$ – эффективный коэффициент теплообмена ядра с окружающей средой, $\alpha_{\text{эф}} = d/\lambda_2$, d – толщина зазора, λ_2 – теплопроводность зазора. Если известны H_1 и m , то по формуле (5.2.7) находим m_∞ и по формуле (2.3.7) температуропроводность a материала.

5.3. Частные случаи системы тел “ядро - зазор - оболочка”

Случай 1. Рассмотрим *изоляционное ядро, окруженное металлической оболочкой* (рис. 5.3.1, а). Выражение для темпа охлаждения такой системы тел можно получить, полагая в (5.2.6) проводимость $\sigma_2 = \infty$. Для этого запишем уравнение (5.2.5) в виде

$$\frac{a}{c} m^2 - \frac{b}{c} m + 1 = 0. \quad (5.3.1)$$

При $\sigma = \infty$, коэффициенты этого уравнения принимают вид

$$\frac{a}{c} = \frac{C_1 C_3}{\alpha S_3 \sigma_2 \Psi_1} = 0, \quad \frac{b}{c} = \frac{C_1}{\Psi_1 \alpha S_3} + \frac{C_3}{\alpha S_3} = 0,$$

и уравнение (5.2.8) примет вид

$$\frac{b}{c} m = 1, \quad \text{и} \quad m = \frac{c}{b} = \frac{\alpha S_3}{\frac{C_1}{\Psi_1} + C_3}. \quad (5.3.2)$$

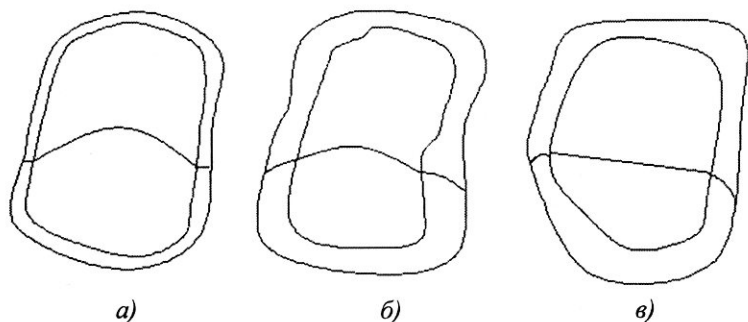


Рис. 5.3.1

Случай 2. **Ядро и оболочка выполнены из теплоизолятора.** Пусть теплоизоляционное ядро окружено *тонкой* оболочкой, в которой имеется некоторый перепад температур (рис. 5.3.1, б), то есть оболочка обладает тепловым сопротивлением R , тогда полное тепловое сопротивление R_1 между поверхностью ядра и средой будет равно

$$R_1 = R + \frac{1}{\alpha \cdot S_3}. \quad (5.3.3)$$

При расчете теплоемкости ядра можно учесть и теплоемкость оболочки, т.е. вместо C_1 брать $(C_1 + C_3)$. Эта операция будет вносить некоторую погрешность, но при $C_3 \ll C_1$ ошибка будет незначительной. Окончательно получим

$$m = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{\alpha \cdot S_3} \right) \cdot \frac{C_1 + C_3}{\Psi_1}} = \frac{\alpha \cdot \Psi_1 \cdot S_3}{(C_1 + C_3) \cdot (1 + R \cdot \alpha \cdot S_3)}. \quad (5.3.4)$$

Случай 3. *Металлическое ядро окружено теплоизоляционной оболочкой.* Этот случай представлен на (рис. 5.3.1, в), и зависимость темпа охлаждения от определяющих его параметров легко определить из формулы (5.2.11), если положить в ней критерий неравномерности $\Psi_1 = 1$, с учетом $C_3 \ll C_1$

$$m = \frac{\alpha \cdot S_3}{(C_1 + C_3) \cdot (1 + R \cdot \alpha \cdot S_3)}. \quad (5.3.5)$$

Формулы (5.3.3), (5.3.4) и (5.3.5) широко используются в различных методах регулярного теплового режима для определения теплофизических параметров.

ГЛАВА 6. РЕГУЛЯРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ ТЕЛ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

6.1. Идея о регуляризации температурного поля системы тел с источниками энергии

В работах Г.М. Кондратьева и Г.Н. Дульнева изложенная ранее теория регулярного теплового режима при простом нагреве или охлаждении тел и систем получило дальнейшее развитие и обобщена на случай нагрева или охлаждения тел или систем с внутренними источниками или стоками энергии [1.12].

Предполагается, что мощность источников или стоков неизменна во времени, температура среды постоянна, а теплофизические свойства тела и коэффициент теплопередачи не зависят от температуры, то есть будем рассматривать задачу в линейной постановке.

В этом случае процесс нагрева можно разделить во времени на стадию неупорядоченного (иррегулярного) и регулярного режима. В стадии регулярного режима процесс нагрева приобретает простейшую форму, а именно: с момента наступления регулярного режима натуральный логарифм разности стационарной $t_{ст}$ и текущей t температур ($t_{ст} - t$) любой точки тела или системы тел изменяются во времени по линейному закону

$$\ln(t_{ст} - t) = -m^* \tau + G^*(x, y, z), \quad (6.1.1)$$

где m^* — темп нагревания системы, знак (*) подчеркивает, что темпы простого нагрева m и под действием источников могут быть различными, так как обратное утверждение пока не доказано, то же замечание относится и к постоянной величине $G(x, y, z)$ и $G^*(x, y, z)$.

Сопоставив формулы (2.2.2) и (6.1.1) видим, что в первом случае закон формулируется для избыточной температуры $\vartheta = t - t_0$, во втором случае — для разности температуры в стационарном и нестационарном режимах системы.

Зависимость (6.1.1) может быть получена из анализа режимов уравнения теплопроводности однородного изотропного тела с источником энергии $W(x, y, z)$, распределенным по объему этого тела. Уравнение теплопроводности для данного случая имеет вид:

$$\frac{\partial \vartheta(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 \cdot \vartheta(x, y, z, \tau) + \frac{W(x, y, z)}{c \cdot \rho}, \quad (6.1.2)$$

где $\vartheta(x, y, z, \tau) = t(x, y, z, \tau) - t_c$ — избыточная над средней температура. Пусть теплообмен на границе тела S со средой происходит по закону Ньютона, то есть

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \vartheta \right)_S = 0, \quad (6.1.3)$$

а начальное распределение температур в этом теле равно $\vartheta(x, y, z, 0) = \vartheta_0(x, y, z)$. (6.1.4)

В теле с источником энергии стационарная избыточная температура $\vartheta_{\text{ст}}$ является предельным значением перегрева ϑ , то есть

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \vartheta(x, y, z, \tau) = \vartheta_{\text{ст}}(x, y, z), \quad (6.1.5)$$

что позволяет представить избыточную температуру в любой момент времени в виде графика рис. 6.1.1

$$\vartheta(x, y, z, \tau) = \vartheta_{\text{ст}}(x, y, z) - \eta(x, y, z, \tau),$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \eta(x, y, z, \tau) = 0. \quad (6.1.6)$$

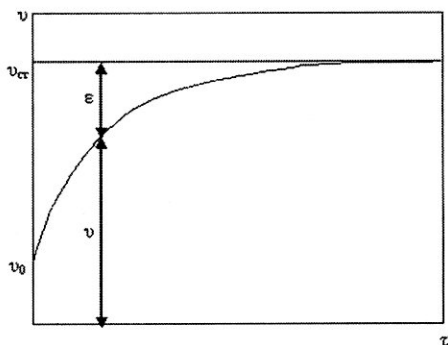


Рис. 6.1.1

В начальный момент времени параметр

$$\eta(x, y, z, 0) = \vartheta_{\text{ст}}(x, y, z) - \vartheta_0(x, y, z).$$

Воспользуемся этим свойством функции η для определения интеграла уравнения (6.1.2); подставим в это уравнение ϑ из (6.1.2):

$$-\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta_{\text{ст}} - a \nabla^2 \eta + \frac{W}{c\rho}. \quad (6.1.7)$$

Так как стационарное температурное поле в теле подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = - \frac{W}{c\rho},$$

то из (6.1.7) получаем дифференциальное уравнение для функции η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -a \nabla^2 \eta. \quad (6.1.8)$$

Следовательно, задача сводится к определению общего интеграла уравнения (6.1.8), который представим в той же форме, как и в случае простого охлаждения тела, то есть

$$\eta(x, y, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* U_n^* e^{-m_n^* \tau}, \quad (6.1.9)$$

где числа $m_n^* = m_0^*, m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*$ образуют возрастающую последовательность; в отличие от аналогичных чисел в (2.1.12). Записываем их со звездочкой.

Числа m_n^* не зависят ни от координат, ни от времени; это строго доказывается при условии, что η имеет форму (6.1.9) [1, 8].

Функция U_n^* зависит от координат и удовлетворяет уравнениям, аналогичным (2.1.8) и (2.1.10)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 U_n^* + \mu_n^2 U_n^* &= 0, \\ \left(\frac{\partial U_n^*}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda} U_n^* \right)_S &= 0; (\mu_n)^2 = \frac{m_n^*}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.10)$$

Величина A_n^* зависит от начального распределения температур:

$$A_n^* = \frac{\int_V (\vartheta_{\text{ст}} - \vartheta_0) U_n^* dV}{\int_V (U_n^*)^2 dV}. \quad (6.1.11)$$

Система уравнений (6.1.6)-(6.1.11) является решением поставленной задачи. Однако получить рабочие расчетные формулы на основании этой системы уравнений удастся лишь в отдельных случаях для однородных тел простой формы.

Найдем приближенное решение задачи, предположив, что температурное поле системы вошло в стадию регулярного режима. На основании неравенств (2.1.12) и решения (6.1.9) для η сделали следующее предположение: для моментов времени, удаленных от начального, в (6.1.9) можно пренебречь всеми членами ряда, кроме первого, еще задолго до наступления стационарного состояния, то есть:

$$\eta_{\text{рег}}(x, y, z, \tau) = A_n^* U_n^* e^{-m_n^* \tau}. \quad (6.1.12)$$

Как только уравнение (6.1.12) станет справедливым для всех точек тела, будем считать по аналогии с обычной теорией регулярного теплового режима и употреблявшейся там терминологией, что температурное поле тела вошло в стадию регулярного теплового режима. Подставляя в (6.1.12) значения η из (6.1.6) и производя логарифмирование, приходим к уравнению (6.1.1).

Следовательно, анализ дифференциального уравнения для температурного поля однородного изотропного тела с источниками энергии позволяет сделать вывод о регуляризации поля в таких телах.

6.2. Темп нагревания тела и критерий неравномерности температуры

Как и в обычной теории регулярного режима, для тел с источниками энергии центральное место занимает темп m^* нагревания тела. Рассмотрим более подробно свойства m^* и, в первую очередь, установим связь между воздействием на тело внешней среды (α) и темпом нагревания (m^*) тела, который является реакцией на это воздействие. Связь между этими параметрами имеет вид, аналогичный (2.3.1):

$$m^* = \Psi^* \frac{\alpha S}{C}, \quad \Psi^* = \frac{(t_{\text{ст}} - t)_S}{(t_{\text{ст}} - t)_V}. \quad (6.2.1)$$

Вывод этой формулы может быть выполнен по аналогии с зависимостью (2.3.1).

Пусть в теле выделяется за время dt количество тепла $dQ = Q dt$, которое частично аккумулируется в этом объеме $dQ_1 = c \rho dt_V$, а частично через элемент поверхности S рассеивается в окружающую среду $dQ_2 = \alpha t_S S dt$; здесь через t_V , t_S – обозначены среднеобъемные и среднеповерхностные температуры тела. На основании закона сохранения энергии

$$dQ = dQ_1 + dQ_2,$$

подставим значения этих величин и после преобразований получим

$$P = C \frac{dt_V}{d\tau} + \alpha S t_S.$$

Используя выражение (6.1.6) и уравнение для рассеивающейся в установившемся режиме мощности $P = \alpha S t_S$, получим

$$C \frac{d\eta_V}{d\tau} + \alpha S \eta_S = 0. \quad (6.2.2)$$

Для моментов времени, не очень близких к начальному, для η справедливо выражение (6.1.12), что приводит к зависимости

$$\frac{1}{\eta_S} \frac{d\eta_V}{d\tau} = -m. \quad (6.2.3)$$

Введем обозначение

$$\Psi^* = \frac{\eta_S}{\eta_V} = \frac{V}{S} \frac{\int_S (t_{ct} - t) dS}{\int_V (t_{ct} - t) dV}, \quad (6.2.4)$$

подставим в уравнение (6.2.2) вместо η_S его выражение $\eta_S = \Psi \eta_V$ и примем во внимание (6.2.3), получим после преобразований зависимость (6.2.1).

Возникает вопрос, существует ли связь между критериями Ψ^* и Ψ . Для ответа на него сопоставим охлаждение тела в среде с постоянной температурой и нагрев тела под влиянием источников энергии. Собственные функции U для этих двух случаев будем обозначать U_1 и U_2 . Пусть при этом условия во внешней среде охлаждения и нагрева тел будут одинаковыми и описываться на границе тела S граничными условиями типа

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda} U_1 \right)_S = 0. \quad (6.2.5)$$

Обозначим через ϑ_1 перегрев в некоторой точке охлаждающегося тела в момент времени τ , а через ϑ_2 – перегрев в аналогичной точке во втором теле. Для первого случая будет справедливо уравнение теплопроводности Фурье (2.2.3) и при наступлении регулярного режима станет справедливым характеристическое уравнение (2.2.8)

$$\nabla^2 U_1 + \mu_1^2 U_1 = 0, \quad \mu_1^2 = \frac{m_1}{a}. \quad (6.2.6)$$

Из уравнений (6.2.5) и (6.2.6) следует, что собственное число μ_1 является функцией критерия Био $Bi = (\alpha\lambda)/L_0$, где L_0 – определяющий размер тела, то есть $\mu_1 = \mu_1(Bi)$.

Рассмотрим теперь нагрев тела под влиянием источников энергии, он описывается уравнением (6.1.2), для нахождения его общего интеграла используем условие (6.1.6), что приведет к уравнению (6.1.8) для η . Далее будем считать, что наступает регулярная стадия нагрева тела, то есть окажется справедливым условие (6.1.11). Тогда характеристическое уравнение и условие на границе тела имеют вид

$$\nabla^2 U_2 + \mu_2^2 U_2 = 0, \quad \left(\frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda} U_2 \right) = 0, \quad (6.2.7)$$

где n – направление внешней нормали, U_2 – собственная функция для тела 2, $\mu_2^2 = m_2/a$, m_2 – темп нагревания второго тела.

Структура уравнений (6.2.5)–(6.2.7) совершенно одинакова, следовательно, и вид зависимостей

$$\mu_1 = \mu_1(Bi) \quad \text{и} \quad \mu_2 = \mu_2(Bi)$$

должен быть одинаковым. Иными словами, $\mu_1 = \mu_2$, а из этого вытекает, что темп охлаждения и темп нагревания численно равны между собою, то есть

$$m_1 = m_2 = m. \quad (6.2.8)$$

Сравнивая уравнения зависимости (2.3.1) и (6.2.3) и принимая во внимание условие (6.2.8), приходим к выводу, что критерии Ψ и Ψ^* должны быть численно равны между собою, т.е.

$$\Psi = \Psi^*. \quad (6.2.9)$$

Необходимо отметить, что физический смысл этих критериев различен: первый равен отношению среднеповерхностного перегрева тела к среднеобъемному, а критерий Ψ^* по определению равен отношению величин η_s и η_v .

Из равенства (6.2.8) вытекает важное следствие, а именно: темп нагревания тела не зависит от мощности источников и их расположения в теле и численно равен темпу охлаждения.

Далее доказано, что для систем с источниками коэффициент формы тела K имеет тот же смысл и то же численное значение, что и в обычной теории регулярного режима. Этот вывод дает возможность использовать при анализе нагрева тел в стадии регулярного теплового режима рассмотренные в разделе 2.6 критерии M , H , Ψ .