

ГЛАВА 9. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СПЛОШНЫХ И ПОЛЫХ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

9.1. Теплопроводность объекта при интенсивном теплообмене со средой

Формулировка задачи. В этой главе будут рассмотрены приемы решения нестационарных задач теплопроводности в зависимости от условий теплообмена, вида воздействий, структуры передаточных функций, а также получены ряд параметрических соотношений, связывающих между собой характерные температуры тела. Учитывая педагогические аспекты книги, в частности, трудности освоения читателями новых подходов в формулировках и решениях задач теплопроводности, детально рассмотрим предельный случай, когда интенсивность конвективного теплообмена на границе тело-среда максимальна, т.е. $\alpha_c = \infty$, что означает выполнение условия равенства температур среды и поверхности тела.

Задача нестационарной линейной теплопроводности для однородного объекта, имеющего объем V , внешнюю поверхность S в одномерном варианте, когда поле температур $t(r, \tau)$ зависит от координаты r и времени τ , определяется решением уравнения Фурье

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial r} \right). \quad (9.1.1)$$

Для канонических тел (шар, неограниченные прямой круговой цилиндр и плоская пластина) эти задачи при граничных условиях первого рода рассмотрены в монографиях и учебных курсах по тепломассообмену [2.9, 2.10].

С учетом экстремума в центральной области объекта и задания температуры $t_s(\tau)$ на его поверхности, что соответствует максимальной интенсивности режима теплообмена, граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad t(r, \tau) \Big|_{r=L} = t_s(\tau). \quad (9.1.2)$$

В выражениях (9.1.1) и (9.1.2) a – коэффициент температуропроводности вещества тела, L – его определяющий размер, $\sigma(r)$ – изотермическая поверхность, связанная с координатой r соотношениями

$$\sigma(\rho) = S\rho^n, \quad \rho = \frac{r}{L}, \quad \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dr} = \frac{n}{r}, \quad (9.1.3)$$

где ρ – безразмерная координата, а n – фактор формы объекта [2.8, 2.18].

Полагая начальное распределение температуры в теле равномерным, равным нулю, и применяя интегральное преобразование Лапласа, получаем решение задачи в изображениях в виде

$$T(n, \rho, s) = Y(n, \rho, s)T_s(s), \quad (9.1.4)$$

$$Y(n, \rho, s) = \frac{\rho^{-\nu} I_\nu(\beta\rho)}{I_\nu(\beta)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{s}{a}}L, \quad (9.1.5)$$

где $T(n, \rho, s)$ и $T_s(s)$ – изображения температур тела $t(n, \rho, \tau)$ и его поверхности $t_s(\tau)$, s – параметр преобразования Лапласа, $Y(n, \rho, s)$ – передаточная функция, преобразующая внешнее тепловое воздействие $t_s(\tau)$ в температуру тела; $I_\nu(\beta\rho)$ и $I_\nu(\beta)$ – модифицированные функции Бесселя с произвольным вещественным индексом ν . Индекс ν функций Бесселя связан с показателем формы тела n соотношением

$$n = 2\nu + 1. \quad (9.1.6)$$

Выражения (9.1.4) и (9.1.5) являются обобщенной строгой операционной записью решений одномерных задач теплопроводности. Для канонических тел (шар, неограниченный цилиндр и пластина) $\nu = 0,5; 0$ и $-0,5$, что соответствует их фактору формы $n=2; 1$ и 0 ; определяющий размер L равен радиусам шара, цилиндра и полутолщине пластины. Варианты выбора L и n для тел иной формы рассмотрены в работе [2.8] и будут уточнены в п. 9.4 гл.9.

Для нахождения приближенных решений можно использовать асимптотические разложения передаточных функций при малых и больших значениях параметра s , что соответствует большим или малым значениям времени в реальной области τ [2.8, 2.10, 2.16]. Выражение (9.1.5) для $Y(n, \rho, s)$ можно представить, как предложено в гл. 8 п.3, в виде отношения степенных рядов

$$Y(n, \rho, s) = \frac{1 + \sum_{k=1}^m b_k s^k}{1 + \sum_{k=1}^n a_k s^k}, \quad (9.1.7)$$

подставив которое в решение (9.1.4) и сделав при нулевых начальных условиях обратный переход, получим взамен уравнения (9.1.1) обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее температуру тела $t(n, \rho, \tau)$ с тепловым воздействием $t_s(\tau)$:

$$\sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k t(n, \rho, \tau)}{d\tau^k} + t(n, \rho, \tau) = \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k t_s(\tau)}{d\tau^k} + t_s(\tau), \quad m \leq n. \quad (9.1.8)$$

Общая структура коэффициентов a_k и b_k приведена в табл. 8.3.1 гл. 8.

Двухпараметрическая передаточная функция. В качестве наиболее простого приближенного решения исследуем возможности аппроксимации передаточной функции (9.1.5), ограничиваясь в разложении (9.1.7) слагаемыми полиномов с номерами $k=1, 2$ с последующим представлением $Y(n, \rho, s)$ в виде [2.8, 2.19]

$$Y(n, \rho, s) = \frac{\exp[-\tau_e(n, \rho)s]}{1 + \varepsilon(n, \rho)s}. \quad (9.1.9)$$

Параметры $\varepsilon(n, \rho)$ и $\tau_e(n, \rho)$ в выражении (9.1.9) находятся по рекомендациям работ [2.8, 2.18] и имеют следующую структуру

$$\varepsilon(n, \rho) = \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{\frac{2(1-\rho^4)}{n+3}} \frac{L^2}{a}, \quad (9.1.10)$$

$$\tau_e(n, \rho) = \frac{1}{2(n+1)} \left[1 - \rho^2 - \sqrt{\frac{2(1-\rho^4)}{n+3}} \right] \frac{L^2}{a}. \quad (9.1.11)$$

После подстановки выражения (9.1.9) в (9.1.4) и обратного преобразования получаем уравнение первого порядка

$$\varepsilon(n, \rho) \frac{dt[n, \rho, \tau - \tau_e(n, \rho)]}{d\tau} + t[n, \rho, \tau - \tau_e(n, \rho)] = t_s(\tau), \quad (9.1.12)$$

решение которого при заданном виде воздействия $t_s(\tau)$ приближенно определяет температурное поле объекта. Входящие в уравнения (9.1.9) и (9.1.12) параметры $\varepsilon(n, \rho)$ и $\tau_e(n, \rho)$ определяют *локальные показатель тепловой инерции (постоянную времени) и временной сдвиг (запаздывание или опережение) температуры* $t(n, \rho, \tau)$ в выбранной точке тела с координатой ρ по отношению к изменению во времени температуры поверхности тела $t_s(\tau)$.

На основе обратного преобразования Лапласа выражений (9.1.4) и (9.1.9) или непосредственного решения уравнения (9.1.12) можно получать различные частные взаимосвязи между $t(n, \rho, \tau)$ и $t_s(\tau)$.

Переходный процесс нагрева объекта. Пусть воздействие $t_s(\tau)$ при $\tau=0$ мгновенно изменяется от нуля до постоянного значения $t_{s\text{ст}} = \text{const}$, тогда изменение температуры $t(n, \rho, \tau)$ определится уравнением

$$\frac{t(n, \rho, \tau)}{t_{s\text{ст}}} = \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau - \tau_e(n, \rho)}{\varepsilon(n, \rho)}\right) \right] \Phi[\tau - \tau_e(n, \rho)], \quad (9.1.13)$$

где $\Phi(\tau - \tau_e)$ — функция единичного скачка (функция Хевисайда) с временным запаздыванием τ_e , равная нулю при $\tau < \tau_e$ и единице при $\tau > \tau_e$, если значение $\tau_e > 0$. При отрицательных значениях τ_e функция $\Phi(\tau - \tau_e) = 1$ при $\tau > 0$.

Уравнение переходного процесса с учетом введения относительно-го (безразмерного) времени T и относительного временного сдвига τ_r примет вид

$$\frac{t(n, \rho, Fo)}{t_{s\text{ст}}} = \{1 - \exp[-(Fo - \tau_r)]\} \Phi(Fo - \tau_r), \quad (9.1.14)$$

$$Fo = \frac{\tau}{\varepsilon(n, \rho)}, \quad \tau_r(n, \rho) = \frac{\tau_e(n, \rho)}{\varepsilon(n, \rho)} = \sqrt{\frac{n+3}{2} \left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \right)} - 1. \quad (9.1.15)$$

В инженерных расчетах часто можно ограничиться поиском значений температуры в некоторых характерных точках (областях) объекта — в центре $t_{\text{ц}}(n, \tau)$, средней по объему $t_{\text{в}}(n, \tau)$ и регулярной $t_{\text{рег}}(n, \tau)$. Из названных только температура центра объекта для тел, имеющих правильную форму, жестко локализована. Местоположение среднеобъемной и регулярной температур в теле изменяется и стабилизируется лишь в регулярной стадии теплообмена.

Для расчета среднеобъемной температуры тела $t_{\text{в}}(n, \tau)$ может использоваться передаточная функция $Y_{eV}(n, s)$:

$$Y_{eV}(n, s) = \frac{\exp(-\tau_{eV}(n)s)}{1 + \varepsilon_V(n)s}, \quad (9.1.16)$$

коэффициенты которой имеют следующую структуру:

$$\varepsilon_V(n) = \frac{L^2}{a} \left[\frac{1}{(n+1)(n+3)} \sqrt{\frac{3n+7}{n+5}} \right]; \quad (9.1.17)$$

$$\tau_{eV}(n) = \frac{L^2}{a} \left[\frac{1}{(n+1)(n+3)} \left(1 - \sqrt{\frac{3n+7}{n+5}} \right) \right], \quad \tau_{rV}(n) = \sqrt{\frac{n+5}{3n+7}} - 1. \quad (9.1.18)$$

Приравнивая функции $Y(n, \rho, s)$ и $Y_r(n, s)$, при $s \rightarrow 0$ получаем условие

$$\varepsilon(n, \rho) + \tau_e(n, \rho) = \varepsilon_V(n) + \tau_{eV}(n) \quad (9.1.19)$$

для координаты $\rho_V(n)$, определяющей местоположение поверхности среднеобъемной температуры тела в регулярной стадии переходного процесса:

$$\rho_V = \frac{r_V}{L} = \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}. \quad (9.1.20)$$

Для пластины, цилиндра и шара значения ρ_V составляют 0,577; 0,707; 0,774.

Исследование полулогарифмических кривых изменения температуры при нагреве (охлаждении), построенных по точным решениям, позволяет сделать вывод о наличии регулярной стадии процесса еще одной поверхности, температура $t_{reg}(n, \tau)$ которой изменяется от времени по простому экспоненциальному закону практически без временного сдвига $\tau_e(n, \rho)$. Координата ρ_{reg} такой поверхности находится из условия $\tau_r(n, \rho) = 0$ и рассчитывается по формуле

$$\rho_{reg} = \sqrt{\frac{n+1}{n+5}}. \quad (9.1.21)$$

Приближенное значение показателя тепловой инерции $\varepsilon_{reg}(n)$ для регулярной поверхности определяется при подстановке ρ_{reg} в формулу для $\varepsilon(n, \rho)$:

$$\varepsilon_{reg}(n) = \varepsilon(n, \rho_{reg}) = \frac{L^2}{a} \frac{2}{(n+1)(n+5)}. \quad (9.1.22)$$

Точные значения показателей тепловой инерции для пластины, цилиндра и шара превышают $\varepsilon_{reg}(n)$ соответственно на 1,2; 3,6 и 6,4%.

На рис 9.1.1 приведены графики изменения характерных температур в переходном процессе, построенные на основе приближенных (9.1.13)–(9.1.14) и точных в виде рядов решений задач теплопроводности для шара [2.10, 2.18]. Результаты точных решений показаны сплошными, а приближенных – пунктирными линиями. Последовательно снизу вверх сопоставлены графики расчета центральных, регулярных и средних по объему температур внутри шара.

В качестве безразмерного времени для всех кривых на рис.9.1.1 выбрано относительное время $\Gamma_T = m_T \tau$, где m_T — точное значение темпа регулярного режима шара, равное $9,870 a/L^2$. По оси ординат отложены относительные значения температур $\Theta(\Gamma_T) = t(n, \rho, \Gamma_T) / t_s$. Лучшее согласование наблюдается для средней (регулярной) зоны, соответствующей минимуму длительности иррегулярной стадии переходного процесса. Максимальное запаздывание (положительный сдвиг) наблюдается для центральной области объекта. Значения температуры периферийных участков тела (верхняя пара кривых), для которых $\tau_c(n, \varepsilon)$ отрицательно, наоборот, в начальной стадии опережают по значениям результаты точных решений. Для тела с $n=2$ относительная погрешность расчета температуры по приближенным формулам (9.1.13), (9.1.14) не превышает 6% при $Fo=0.8$ и снижается до нуля с ростом критерия Fo . Погрешность расчета снижается также с уменьшением фактора формы тела n .

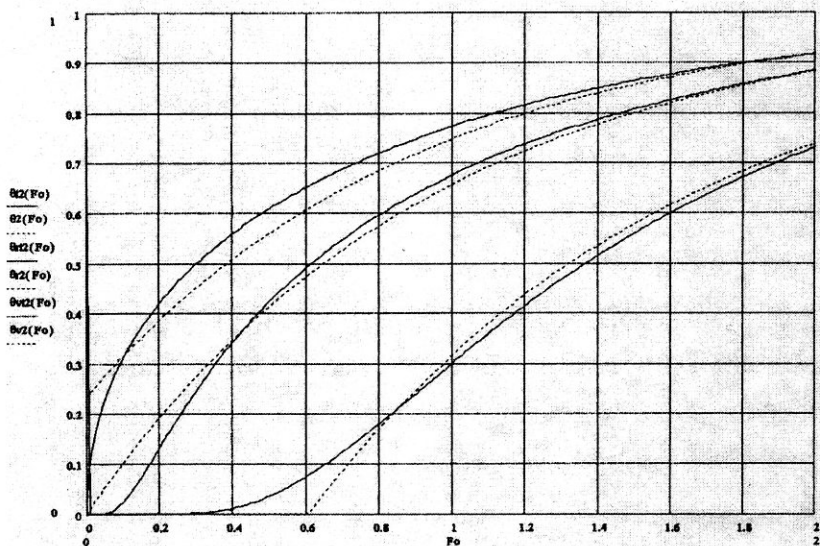


Рис. 9.1.1

Линейное изменение температуры среды. Процессы теплопроводности, при которых температура среды изменяется по прямолинейному закону, представляют практический интерес наряду с простым нагревом (охлаждением) тел. Пусть для упрощения температура поверхности тела $t_s(\tau)$ изменяется от первоначального нулевого значения по прямолинейному закону

$$t_S(\tau) = b\tau, \quad (9.1.23)$$

где b – скорость изменения температуры.

Температура $t(n, \rho, \tau)$ в объекте при $b > 0$ запаздывает относительно $t_S(\tau)$ и при стремлении $\tau \rightarrow \infty$ по окончании переходного процесса будет изменяться с той же скоростью b , что и $t_S(\tau)$. Общее приближенное решение находится при подстановке изображения $T_S(s) = b/s^2$ в выражение (9.1.4) с учетом (9.1.9) и после обратного перехода может быть представлено в виде отношения $\Theta(n, \rho, \tau)$ избыточных температур $\theta(n, \rho, \tau)$ и $\theta_{ct}(n, \rho)$:

$$\Theta(n, \rho, \tau) = \frac{\theta(n, \rho, \tau)}{\theta_{ct}(n, \rho)} = \frac{t_S(\tau) - t(n, \rho, \tau)}{[t_S(\tau) - t(n, \rho, \tau)]_{\tau \rightarrow \infty}}; \quad (9.1.24)$$

$$\theta_{ct}(n, \rho) = [t_S(\tau) - t(n, \rho, \tau)]_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{L^2}{a} \frac{b(1 - \rho^2)}{2(n+1)}, \quad (9.1.25)$$

где $\theta_{ct}(n, \rho)$ – установившееся запаздывание температуры объекта от температуры среды в квазистационарном состоянии (регулярном режиме второго рода) для одномерных задач теплопроводности.

Уравнение (9.1.25) определяет также стационарное от начального нулевого значения распределение температуры объекта с теплопроводностью λ при его нагреве равномерно распределенными по объему источниками теплоты, удельная плотность w которых связана с b соотношением $w = b\lambda/a$. Для канонических объектов ($n = 0; 1; 2$) выражение (9.1.25) совпадает с точным решением.

Для переходного процесса $\theta(n, \rho, \tau)$ справедливо приближенное уравнение

$$\theta(n, \rho, \tau) = b \left\{ \tau - \Phi(\tau - \tau_e) \left[\tau - \varepsilon \left(1 + \tau, - \exp\left(- \frac{\tau - \tau_e}{\varepsilon} \right) \right) \right] \right\}, \quad (9.1.26)$$

параметры которого $n, \rho, \varepsilon, \tau_e$ находятся по формулам (9.1.3), (9.1.6), (9.1.10), (9.1.11) и (9.1.15). С учетом характера изменения функции $\Phi(\tau - \tau_e)$ взамен выражений (9.1.25), (9.1.26) в расчетах можно использовать равноценные им более простые по форме соотношения

$$\Theta(n, \rho, \tau) = \frac{2(n+1)}{1 - \rho^2} \frac{a\tau}{L^2}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_e, \quad \tau_e \geq 0; \quad (9.1.27)$$

$$\Theta(n, \rho, \tau) = 1 - \frac{\exp \tau_r}{1 + \tau_r} \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \quad \tau \geq \tau_e, \quad (9.1.28)$$

$$\tau_r \geq 0 \quad \text{или} \quad \tau \geq 0, \tau_r \leq 0.$$

При определении температур $t_v(n, \tau)$ и $t_{reg}(n, \tau)$ в расчетные соотношения (9.1.24)–(9.1.28) вместо ρ , ε , τ и τ_r нужно подставлять значения ρ_v , ε_v , τ_{ev} , τ_{rv} , ρ_{reg} и ε_{reg} из выражений (9.1.17), (9.1.18), (9.1.20)–(9.1.22).

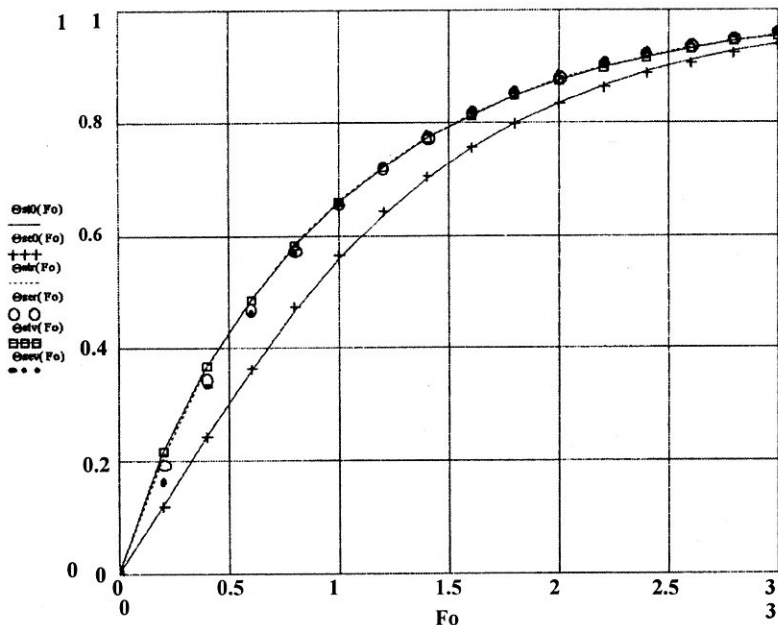


Рис. 9.1.2

Сопоставление динамики переходного процесса по результатам точных решений и выражения (9.1.26) выявило хорошее для практических расчетов согласование. В диапазоне значений критерия $Fo = \alpha t / L^2$ от 0,5 до ∞ относительная погрешность значений характерных температур не превышает 6%, а при $Fo > 1$ – не превышает 2%.

В качестве примера на рис. 9.1.2 показаны графики сопоставления переходных процессов, рассчитанные для характерных температур объекта шаровой формы. Сплошные кривые построены по точным решениям. Значками отмечено изменение центральной (+), регулярной (o) и средне-

объемной (●) температур, рассчитанных по приближенным формулам (9.1.24)–(9.1.26). Графики переходных процессов изменения регулярных и среднеобъемных температур для тел с факторами формы $n=0; 1$ образуют плотную связку кривых, практически сливающихся между собой.

Циклическое изменение температуры среды. В регулярном режиме третьего рода температура поверхности тела $t_s(\tau)$ изменяется по гармоническому закону

$$t_s(\tau) = t_{sa} \cos \omega\tau, \quad (9.1.29)$$

температура $t(n, \rho, \tau)$ внутри тела определяется соотношением

$$t(n, \rho, \tau) = t_{sa} A(n, \rho, \Omega) \cos[\omega\tau + \phi(n, \rho, \Omega)], \quad (9.1.30)$$

где t_{sa} – амплитуда колебаний температуры поверхности, ω – циклическая частота. Входящие в решение (9.1.30) амплитудная $A(n, \rho, \Omega)$ и фазовая $\phi(n, \rho, \Omega)$ частотные характеристики изменения температуры находятся по формулам

$$A(n, \rho, \Omega) = \frac{t_a(n, \rho)}{t_{sa}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}; \quad (9.1.31)$$

$$\phi(n, \rho, \Omega) = \operatorname{arctg} \left[-\frac{\Omega \cos(\tau, \Omega) + \sin(\tau, \Omega)}{\cos(\tau, \Omega) - \sin(\tau, \Omega)} \right], \quad (9.1.32)$$

$$\Omega(n, \rho) = \omega \varepsilon(n, \rho) = z \varepsilon(n, \rho) \frac{a}{L^2}. \quad (9.1.33)$$

В выражениях (9.1.31)–(9.1.33) $t_a(n, \rho)$ – амплитуда колебаний температуры внутри тела, $z = \omega L^2/a$ – частотный критерий Предводителя.

Сопоставление результатов расчета по точным решениям [2.10] и приближенным формулам (9.1.29)–(9.1.33) показало, что общим критерием использования приближенных зависимостей является требование

$$\frac{2\pi}{\omega \varepsilon(n, \rho)} \geq 2,5, \quad (9.1.34)$$

где $2\pi/\omega$ – период колебаний температуры.

На рис. 9.1.3 показаны графики изменения характерных относительных температур $\Theta(Fo)$ в шаре (сплошные кривые – точные решения, кривые со значками – приближенные решения по формулам (9.1.29)–(9.1.33))

для параметра $z=25$, при котором амплитуды колебаний среднеобъемной, регулярной и центральной температур соответственно равны 0,5; 0,45; и 0,3. С учетом условия (9.1.34) расчет среднеобъемной (кривые 1) и регулярной (кривые 2) температур для шара выполняется с относительной погрешностью на уровне одного процента. Для температуры центра тела (кривые 3) величина погрешности составляет 20% от ее максимального значения $A \approx 0,3$. Кривая 4 отображает изменение температуры поверхности. При $n \leq 2$ и соблюдении условия (9.1.34) точность расчетов по формулам (9.1.30)–(9.1.33) возрастает, в частности, для пластины при $z=6$ погрешность расчета центральной температуры составляет $\approx 4\%$.

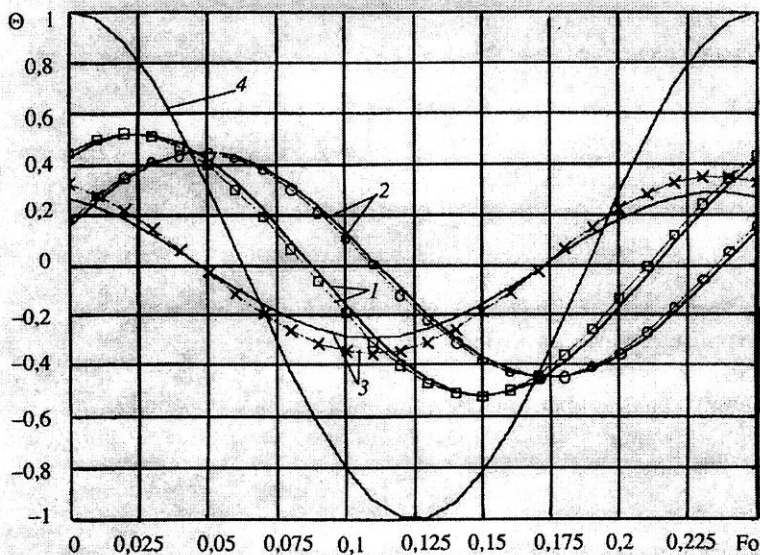


Рис. 9.1.3

Следовательно, простые по структуре уравнения, получаемые на основе передаточной функции (9.1.9), позволяют с достаточной для многих практических целей точностью проводить расчет температур в сплошных объектах в различных режимах экстремального внешнего теплообмена, когда коэффициент теплоотдачи тела со средой $\alpha \approx \infty$. Ограничения по использованию полученных выше зависимостей для периферийных участков тел будут даны в п. 9.2.

9.2. Передаточные функции для температуры тела в условиях конвективно-лучистого теплообмена

Структура передаточной функции. Точное решение задачи нахождения одномерного нестационарного поля температур для сплошных тел при конвективно-лучистом теплообмене (граничное условие третьего рода на поверхности и экстремальное значение температуры в центральной области тела при нулевых начальных условиях) в операторной форме имеет вид [2.7]

$$T(n, \rho, \zeta, s) = Y(n, \rho, \zeta, s) T_c(s), \quad (9.2.1)$$

$$Y(n, \rho, \zeta, s) = \frac{\zeta \rho^{-\nu} I_\nu(\beta \rho)}{\zeta I_\nu(\beta) + \beta I_{\nu+1}(\beta)}, \quad (9.2.2)$$

где $T(n, \rho, \zeta, s)$ и $T_c(s)$ – лапласовские изображения температуры тела $t(n, \rho, \zeta, \tau)$ и среды $t_c(\tau)$, $Y(n, \rho, \zeta, s)$ – передаточная функция, определяющая реакцию тела на изменение температуры среды, τ – текущее время, n – фактор формы тела. Относительная координата ρ , критерий Био ζ и β – безразмерные параметры, связанные с геометрическими и теплофизическими величинами соотношениями

$$\rho = \frac{r}{L}, \quad \zeta = \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad \beta = L \sqrt{\frac{s}{a}}, \quad (9.2.3)$$

в которых r – координата, отсчитываемая от центральной точки (поверхности) тела, L – его определяющий размер, α – коэффициент теплоотдачи, a и λ – коэффициенты температуро- и теплопроводности материала тела, s – параметр преобразования Лапласа, $I_\nu(\beta)$ и $I_{\nu+1}(\beta)$ – модифицированные функции Бесселя с вещественным индексом ν , связанным с фактором формы тела n соотношением

$$n = 2\nu + 1. \quad (9.2.4)$$

Как видно, в отличие от формул (9.1.4) и (9.1.5), в решениях (9.2.1) и (9.2.2) появился критерий ζ , а структура передаточной функции (9.1.4) усложнилась.

Реальное значение температуры объекта $t(n, \rho, \zeta, \tau)$ в зависимости от характера изменения температуры среды $t_c(\tau)$ может быть найдено в результате обратного преобразования Лапласа, примененного к уравнению (9.2.1), и выражается в виде бесконечных экспоненциальных рядов, сложность ко-

торых зависит от вида воздействия $t_c(\tau)$ и формы тела n . Для канонических тел (шар, бесконечные цилиндр и пластина соответственно $n=2, 1$ и 0) эти решения приведены в монографиях по теории теплопроводности [2.9, 2.10].

Ниже в развитие теории, рассмотренной в параграфе 9.1 гл. 9, предлагаются два варианта упрощения структуры передаточной функции $Y(n, \rho, \zeta, s)$, основанные на ее степенном разложении в ряд по параметру s [2.20].

Двухпараметрическая передаточная функция. Для температуры в центральных областях тела приемлемую точность расчетов обеспечивающая двухпараметрическая передаточная функция

$$Y_e(n, \rho, \zeta, s) = \frac{\exp(-\tau_e(n, \rho, \zeta)s)}{1 + \varepsilon(n, \rho, \zeta)s}, \quad (9.2.5)$$

в которой показатель тепловой инерции тела $\varepsilon(n, \rho, \zeta)$ находится по формуле

$$\varepsilon(n, \rho, \zeta) = \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{\frac{2}{n+3} \left(1 + \frac{4}{\zeta} - \rho^4\right) + \frac{4}{\zeta^2} \frac{L^2}{a}}, \quad (9.2.6)$$

а экспоненциальный параметр

$$\tau_e(n, \rho, \zeta) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\left(1 + \frac{2}{\zeta} - \rho^2\right) - \sqrt{\frac{2}{n+3} \left(1 + \frac{4}{\zeta} - \rho^4\right) + \frac{4}{\zeta^2} \frac{L^2}{a}} \right]. \quad (9.2.7)$$

Погрешности экспоненциального представления $Y(n, \rho, \zeta)$ в виде (9.2.5) подробно исследованы в работе [2.18] для случая экстремального теплового воздействия среды при $\zeta = \infty$. По мере уменьшения ζ и n эти погрешности снижаются.

Расчет поля температур в переходном процессе (температура среды мгновенно изменяется от нулевого до стационарного значения $t_{c\text{ст}}$) ведется по уравнению

$$\begin{aligned} \Theta(n, \rho, \zeta, \tau) &= \frac{t(n, \rho, \zeta, \tau)}{t_{c\text{ст}}} = \\ &= \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\tau - \tau_e(n, \rho, \zeta)}{\varepsilon(n, \rho, \zeta)} \right] \right\} \Phi[\tau - \tau_e(n, \rho, \zeta)], \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

в котором $\Phi(\tau - \tau_e)$ – функция единичного скачка с временным запаздыванием $\tau_e(n, \rho, \zeta)$, равная нулю при $\tau \leq \tau_e$ и единице при $\tau \geq \tau_e$.

Сопоставление расчетов характеристик переходного процесса по выражению (9.2.8) и точным решениям выявляет хорошее согласие при всех значениях $0 < \zeta < \infty$ для центральных областей тела в диапазоне изменения координаты $0 \leq \rho \leq \rho_{reg}$ при $\tau > \tau_c$. Координата ρ_{reg} определяет местоположение внутри тела регулярной поверхности, для которой $\tau_c(n, \rho_{reg}, \zeta) = 0$ и переходная характеристика которой описывается в соответствии с решением (9.2.8) простой экспоненциальной зависимостью. В терминах теории регулярного теплового режима это означает, что точки тела с $\rho = \rho_{reg}$ быстрее других вступают в регулярный режим. Для расчета $\rho_{reg}(n, \zeta)$ и $\sigma_{reg}(n, \zeta)$ найдены следующие формулы:

$$\rho_{reg}(n, \zeta) = \sqrt{\frac{n+3}{n+5} \left(1 + \frac{2}{\zeta}\right) - \frac{2}{n+5} \sqrt{1 + \frac{4}{\zeta} + (n+3)^2 \frac{1}{\zeta^2}}}, \quad (9.2.9)$$

$$\varepsilon_{reg}(n, \zeta) = \frac{1}{(n+1)(n+5)} \sqrt{2 + \frac{8}{\zeta} + \frac{n^2 + 6n + 13}{\zeta^2} + \left(2 + \frac{4}{\zeta}\right) \sqrt{1 + \frac{4}{\zeta} + \frac{(n+3)^2}{\zeta^2}} \frac{L^2}{a}}. \quad (9.2.10)$$

При $\zeta = \infty$ выражения (9.2.9) и (9.2.10) переходят в ранее полученные зависимости [2.18] — см. формулы (9.1.21) и (9.1.22):

$$\rho_{reg}(n) = \sqrt{\frac{n+1}{n+5}}, \quad \varepsilon_{reg}(n) = \frac{2}{(n+1)(n+5)} \frac{L^2}{a}. \quad (9.2.11)$$

При $\zeta \rightarrow 0$ расчет $\rho_{reg}(n)$ и $\varepsilon_{reg}(n)$ проводится по формулам:

$$\rho_{reg}(n, 0) = \sqrt{\frac{n+3}{n+5}}, \quad \varepsilon_{reg}(n, 0) = \frac{1}{(n+1)\zeta} \frac{L^2}{a}, \quad (9.2.12)$$

что соответствует равномерному распределению температуры по объему тела. Максимальное отличие точных значений показателей тепловой инерции при $\zeta = \infty$ от вычисленных по формуле (9.2.11) составляет для пластины, цилиндра и шара 1,2; 3,6 и 6,4% и снижается с уменьшением ζ . Для этих же тел координата $\rho_{reg}(n)$ определяется по первой из формул (9.2.11) и соответственно равна 0,447; 0,577 и 0,654 при $n=0; 1; 2$. Для расчета среднеобъемной температуры $t_v(n, \zeta, \tau)$ передаточная функция (9.2.5) преобразуется к виду:

$$Y_{eV}(n, \zeta, s) = \frac{\exp(-\tau_{eV}(n, \zeta)s)}{1 + \varepsilon_V(n, \zeta)s}, \quad (9.2.13)$$

$$\varepsilon_V(n, \zeta) = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \sqrt{\frac{3n+7}{n+5} + \frac{2(n+3)}{\zeta} + \frac{(n+3)^2}{\zeta^2}} \frac{L^2}{a}, \quad (9.2.14)$$

$$\tau_V(n, \zeta) = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left[1 + \frac{n+3}{\zeta} - \sqrt{\frac{3n+7}{n+5} + \frac{2(n+3)}{\zeta} + \frac{(n+3)^2}{\zeta^2}} \right] \frac{L^2}{a}. \quad (9.2.15)$$

Местоположение координаты ρ_V изотермической поверхности средней температуры изменяется в процессе теплообмена, однако, в упорядоченной его стадии приближенно определяется по формуле

$$\rho_V(n) = \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}, \quad (9.2.16)$$

аналогичной (9.1.20) и не зависит от интенсивности теплообмена ζ .

Трехпараметрическая передаточная функция. Изменение температуры периферийных областей тела в диапазоне значений $\rho_{reg} \leq \rho \leq 1$ подчиняется более сложным закономерностям, учитывающим особенности дорегулярного режима теплообмена тела с внешней средой. Для расчета динамики теплообмена этих областей предлагается трехпараметрическая передаточная функция [2.20]

$$Y_d(n, \rho, \zeta, s) = \frac{1 + \varepsilon_d(n, \infty) \rho^2 s}{[1 + \varepsilon_d(n, \zeta) s][1 + \tau_d(n, \rho, \zeta) s]}, \quad (9.2.17)$$

$$\varepsilon_d(n, \zeta) = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2(n+3)}} \sqrt{1 + \frac{4}{\zeta} + \frac{2(n+3)}{\zeta^2}} \frac{L^2}{a}, \quad (9.2.18)$$

$$\varepsilon_d(n, \infty) = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2(n+3)}} \frac{L^2}{a}, \quad (9.2.19)$$

$$\tau_d(n, \rho, \zeta) = \varepsilon_d(n, \infty) \left[\rho^2 + \sqrt{\frac{n+3}{2}} \left(1 + \frac{2}{\zeta} - \rho^2 \right) - \sqrt{1 + \frac{4}{\zeta} + \frac{2(n+3)}{\zeta^2}} \right]. \quad (9.2.20)$$

Символом d в выражениях (9.2.17)—(9.2.20) отмечено то, что в отличие от функции (9.2.5), передаточная функция (9.2.17) обладает диффе-

ренцирующими свойствами, определяющими ускоренную реакцию периферийных областей тела на воздействие температуры внешней среды.

Подставляя функцию (9.2.17) в выражение (9.2.1) и переходя к оригиналам при $T_c(s) = t_{cст}/s$, получаем уравнение для расчета переходных характеристик изменения температуры периферийных областей тела в диапазоне $\rho_{reg} \leq \rho \leq 1$:

$$\Theta_d(n, \rho, \zeta, \tau) = 1 - D \exp\left(-\frac{\tau}{\varepsilon_d(n, \zeta)}\right) - (1 - D) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_d(n, \rho, \zeta)}\right), \quad (9.2.21)$$

$$\Theta_d(n, \rho, \zeta, \tau) = \frac{t_d(n, \rho, \zeta, \tau)}{t_{cст}},$$

$$D(n, \rho, \zeta) = \frac{\varepsilon_d(n, \zeta) - \varepsilon_d(n, \infty) \rho^2}{\varepsilon_d(n, \zeta) - \tau_d(n, \rho, \zeta)}. \quad (9.2.22)$$

Из условия $\tau_d(n, \rho, \zeta) = 0$ находим формулу для координаты $\rho_{d.reg}$:

$$\rho_{d.reg}(n, \zeta) = \sqrt{1 + \frac{2}{\zeta} - \sqrt{\frac{2}{n+3} \left(1 + \frac{4}{\zeta} + \frac{2(n+3)}{\zeta^2}\right)}}, \quad (9.2.23)$$

из которой в предельном случае $\rho = \infty$ находим:

$$\rho_{d.reg}(n, \infty) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{2}{n+3}}}. \quad (9.2.24)$$

Расчет $\rho_{d.reg}(n, \infty)$ при $n=0; 1; 2$ дает соответственно значения 0,428; 0,541; 0,606, которые несколько отличаются от вышеприведенных значений $\rho_{reg}(n, \infty)$, что объясняется разницей структуры передаточных функций (9.2.5) и (9.2.17).

С учетом того, что при больших ζ значения $\rho_v > \rho_{reg}$, для расчета среднеобъемной температуры $t_{dV}(n, \zeta, s)$ предпочтительнее использовать передаточную функцию на основе выражения (9.2.17):

$$Y_{dV}(n, \zeta, s) = \frac{1 + b_{dV}(n)s}{[1 + \varepsilon_d(n, \zeta)s][1 + \tau_{dV}(n, \zeta)s]}, \quad (9.2.25)$$

параметры которой находятся по формулам

$$b_{dV}(n) = \varepsilon_d(n, \infty) \frac{1}{(n+3)\sqrt{2(n+5)}} \frac{L^2}{a}, \quad (9.2.26)$$

$$\tau_d(n, \zeta) = \varepsilon_d(n, \infty) \left[\sqrt{\frac{n+3}{2}} \left(1 + \frac{2}{\zeta} \right) - \sqrt{1 + \frac{2(n+3)}{\zeta} + \frac{2(n+3)}{\zeta^2}} - \frac{n+1}{\sqrt{2(n+3)}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n+5}} \right) \right], \quad (9.2.27)$$

а $\varepsilon_d(n, \infty) = \varepsilon_d(n)$ рассчитывается согласно (9.2.19).

При $\zeta = \infty$ из формулы (9.2.27) получаем

$$\tau_{dV}(n, \infty) = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2(n+3)}} \left[\sqrt{\frac{n+3}{2}} - 1 - \frac{n+1}{\sqrt{2(n+3)}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n+5}} \right) \right] \frac{L^2}{a}. \quad (9.2.28)$$

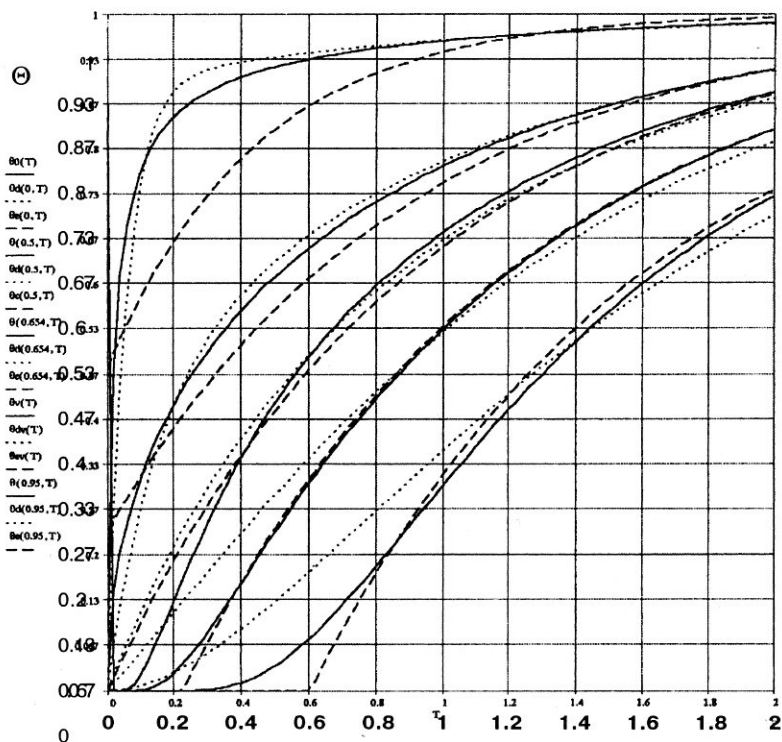


Рис. 9.2.1

F_0

Расчет $t_{dv}(n, \zeta, \tau)$ в переходном процессе проводится по уравнениям (9.2.21) и (9.2.22), в которых параметры $\tau_{dv}(n, \rho, \zeta)$ и $\epsilon_{dv}(n, \infty)\rho^2$ заменяются соответственно на $\tau_{dv}(n, \zeta)$ и $b_{dv}(n)$. Координата $\rho_{dv}(n)$ среднеобъемной температуры находится по формуле (9.2.16) и не зависит от критерия ζ .

Среднеобъемную температуру можно также определять непосредственно на основе передаточных функций (9.2.5) и (9.2.17), а в переходном процессе – по уравнениям (9.2.8) и (9.2.21), подставляя в них значения ρ_V из формулы (9.2.16).

На рис. 9.2.1 в качестве примера приведены графики переходных характеристик температуры $\Theta(Fo)$ внутри шара ($n=2, \zeta=\infty$) при следующих координатах (снизу вверх): $\rho=0$ (центр), $\rho=0,5$; $\rho=\rho_{reg}=0,654$; $\rho_V=0,774$; $\rho=0,95$; критерий Фурье $Fo = \pi^2 \alpha t / L^2$. Сплошными, пунктирными и штриховыми линиями показаны соответственно результаты точных расчетов, а также расчетов на основе зависимостей (9.2.21) и (9.2.8). Сопоставление точных значений среднеобъемной температуры с приближенными, вычисленными на основе (9.2.13) и (9.2.25), подтвердило преимущество использования передаточной функции (9.2.25) по сравнению с (9.2.13), поскольку $\rho_V > \rho_{reg}$.

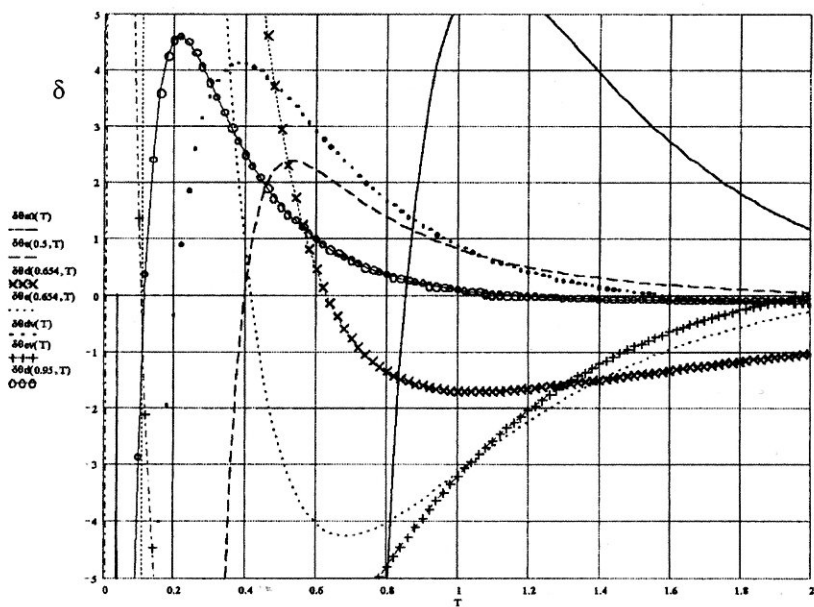


Рис. 9.2.2

Fo

На рис. 9.2.2 приведены кривые относительной погрешности расчета температуры $\delta\Theta$ для того же объекта. С уменьшением фактора формы n и критерия Био (до $\zeta < 5$) область применения передаточной функции (9.2.5) расширяется до $\rho = \rho_v$, а функции (9.2.17) – до $\rho \geq \rho_{reg}$ и при $\zeta \rightarrow 0$ (равномерное распределение температур по объему тела) перекрывает весь диапазон $0 \leq \rho \leq 1$.

Учитывая простую структуру передаточных функций (9.2.5) и (9.2.17), на их основе можно получать приближенные решения при различных интенсивностях внешнего теплообмена и законах изменения температуры среды. Процедура получения результатов значительно упрощается при использовании символических возможностей системы MathCAD.

9.3. Параметрические взаимосвязи между температурами и критериальными характеристиками теплопроводности

Формулировка задачи. Часто применяемой на практике является одномерная тепловая модель нестационарного теплообмена, когда однородное сплошное тело имеет внутри равномерно распределенные по объему источники теплоты с удельной мощностью $w(\tau)$, подвергается воздействию внешнего теплового потока с плотностью на единицу площади $q(\tau)$ и находится в конвективно-лучистом теплообмене с внешней средой с температурой $t_c(\tau)$. Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности для температуры $t(r, \tau)$ такого объекта является частным случаем уравнения (8.2.5) и записывается в виде

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{c\gamma} w. \quad (9.3.1)$$

Граничные условия с учетом экстремальности температуры в центре тела и теплоотдачи с поверхности примут вид аналогично (8.2.6) и (8.2.7):

$$\left. \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left(\lambda \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} + \alpha t(r, \tau) \right) \Big|_{r=L} = q(\tau) + \alpha t_c(\tau), \quad (9.3.2)$$

где α – коэффициент теплоотдачи (остальные обозначения сохраняются). Начальное распределение температуры в теле принимается равномерным

$$t(r, \tau)_{r=0} = t_n. \quad (9.3.3)$$

Обобщенное операторное решение уравнения (9.3.1) при условиях (9.3.2) и (9.3.3) в соответствии с (8.2.10), (8.2.24) – (8.2.26) примет вид [2.7]

$$T(\rho, s) = Y(\rho, s) \left(T_c(s) + \frac{1}{\alpha} Q(s) \right) + \left(1 - Y(\rho, s) \frac{1}{s} \left(\frac{1}{c\gamma} W(s) + t_n \right) \right), \quad (9.3.4)$$

передаточная функция $Y(\rho, s)$ определяется выражением (9.2.2), а ее параметры – в соответствии с формулами (9.2.3) – см. п. 9.2.

Решению (9.3.4) можно придать вид

$$T(\rho, s) = Y(\rho, s) Z(s) + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{c\gamma} W(s) + t_n \right), \quad (9.3.5)$$

если ввести объединенное воздействие

$$Z(s) = T_c(s) + \frac{1}{\alpha} Q(s) - \frac{1}{s} \left(\frac{1}{c\gamma} W(s) + t_n \right). \quad (9.3.6)$$

В выражениях (9.3.4)–(9.3.6) $T(\rho, s)$ — изображение температуры тела $t(\rho, \tau)$.
Функция $Z(s)$ и ее оригинал

$$z(\tau) = t_c(\tau) + \frac{1}{\alpha} q(\tau) - \frac{1}{c\gamma} \int_0^\tau w(\tau) d\tau - t_n \quad (9.3.7)$$

в совокупности описывают влияние тепловых воздействий $t_c(\tau)$, $q(\tau)$, $w(\tau)$ и t_n преобразуемых в температуру тела $t(\rho, \tau)$ через передаточную функцию $Y(\rho, s)$. Остальные обозначения соответствуют описанию структуры функции (9.2.2). Формальный переход от решения (9.3.5) к значениям температуры тела $t(\rho, \tau)$ при непрерывно изменяющихся тепловых воздействиях $z(\tau)$, $w(\tau)$ может быть выполнен на основе теоремы о свертке функций [2.16]

$$t(\rho, \tau) = \int_0^\tau y(\rho, \eta) z(\tau - \eta) d\eta + \frac{1}{c\gamma} \int_0^\tau w(\eta) d\eta + t_n, \quad (9.3.8)$$

где $y(\rho, \tau) = L^{-1} Y(\rho, s)$ – оригинал функции $Y(\rho, s)$; L^{-1} – операция обратного преобразования Лапласа; η – переменная, по которой производится интегрирование; $y(\rho, \tau)$ – импульсная переходная функция по отношению к специальному виду воздействий – единичной импульсной функции.

Заметим, что техника применения теоремы Дюамеля (9.3.8) не столь проста, как ее формулировка, поскольку в системах с распределенными параметрами импульсная переходная функция аналитически записыва-

ется в виде экспоненциальных пространственно-временных бесконечных рядов, которые нужно «пропускать через интеграл» (9.3.8). Многие авторы предпочитают решать задачу непосредственно для каждого конкретного вида воздействий.

Стационарный процесс теплопроводности. Если тепловые воздействия на объект не меняются со временем и имеют значения $t_{c\text{ст}}, q_{c\text{ст}}, w_{c\text{ст}}$, то поле температур в теле стабилизируется, уравнение (9.3.1) переходит в стационарное одномерное уравнение Пуассона, решение которого при граничных условиях (9.3.2) имеет вид

$$t_{c\text{ст}}(\rho) = t_{c\text{ст}} + \frac{1}{\alpha} q_{c\text{ст}} + \frac{1}{(n+1)\zeta} \left(1 + \frac{1}{2} \zeta (1 - \rho^2) \right) \frac{L^2}{\lambda} w_{c\text{ст}}, \quad (9.3.9)$$

где $\rho = r/L$ – безразмерная координата, n – фактор формы тела.

С помощью (9.3.9) можно получить несколько полезных для практических оценок параметрических соотношений между средней по поверхности тела $t_{S\text{ст}}$, центральной $t_{ц\text{ст}}$, среднеобъемной $t_{V\text{ст}}$ температурами и температурой среды $t_{c\text{ст}}$ в стационарном режиме [2.7]:

$$\frac{t_{S\text{ст}} - t_{c\text{ст}} - \frac{1}{\alpha} q_{c\text{ст}}}{t_{ц\text{ст}} - t_{c\text{ст}} - \frac{1}{\alpha} q_{c\text{ст}}} = \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{2}}, \quad (9.3.10)$$

$$\frac{t_{V\text{ст}} - t_{S\text{ст}}}{t_{ц\text{ст}} - t_{S\text{ст}}} = \frac{2}{n+3}. \quad (9.3.11)$$

Формула (9.3.11) показывает, что отношение среднеобъемной и центральной температур тела, отсчитываемых от температуры его поверхности, не зависит от источников теплоты $q_{c\text{ст}}, w_{c\text{ст}}$ и определяется только геометрическими особенностями тел—его фактором формы n .

Используя (9.3.9), введем обобщенную критериальную зависимость

$$\Psi_{c\text{ст}}(H_{c\text{ст}}) = \frac{t_{S\text{ст}} - t_{c\text{ст}} - \frac{q_{c\text{ст}}}{\alpha}}{t_{V\text{ст}} - t_{c\text{ст}} - \frac{q_{c\text{ст}}}{\alpha}} = \frac{1}{1 + H_{c\text{ст}}(n, \zeta)}. \quad (9.3.12)$$

В выражении (9.3.12) $\Psi_{c\text{ст}}$ – критерий неравномерности распределения температур по объему тела в стационарном режиме, $H_{c\text{ст}}$ – обобщенный критерий теплообмена, равный

$$H_{\text{ст}}(n, \zeta) = \frac{\alpha L}{\lambda(n+3)} = \frac{\zeta}{n+3}. \quad (9.3.13)$$

Выражения (9.3.12) и (9.3.13) расширяют область применения ранее полученной в регулярном режиме второго рода (см. гл.6)

$$\Psi_2 = \frac{\theta_S}{\theta_V} = \frac{t_c(\tau) - t_S(\tau)}{t_c(\tau) - t_V(\tau)} = \frac{1}{1 + H_2}, \quad H_2 = H_{\text{ст}}. \quad (9.3.14)$$

Разности между температурами $t_{\text{уст}}$, $t_{V\text{ст}}$ и $t_{S\text{ст}}$ в стационарном режиме во всем диапазоне изменения критерия Био $0 < \zeta < \infty$ оцениваются по формулам [2.7]

$$t_{\text{уст}} - t_{S\text{ст}} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{L^2}{\lambda} w_{\text{ст}} = \frac{LV}{2\lambda S} w_{\text{ст}}, \quad (9.3.15)$$

$$t_{V\text{ст}} - t_{S\text{ст}} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \frac{L^2}{\lambda} w_{\text{ст}}, \quad t_{S\text{ст}} = t_{\text{уст}} + \frac{1}{\alpha} q_{\text{ст}} + \frac{1}{(n+1)\zeta} \frac{L^2}{\lambda} w_{\text{ст}}. \quad (9.3.16)$$

Переходный процесс. Пусть до некоторого момента времени $\tau=0$ тепловые воздействия $t_c(\tau)$, $q(\tau)$, $w(\tau)$ отсутствовали, а при $\tau=0$ мгновенно изменили свои значения до некоторых постоянных величин $t_{\text{уст}}$, $q_{\text{ст}}$, $w_{\text{ст}}$. С течением времени температура $t(\rho, \tau)$ различных точек тела будет изменяться от начального $t_{\text{н}}$ до соответствующего стационарного значения $t_c(\rho)$. Строгое обратное преобразование выражения (9.3.5) приводит к следующему уравнению переходного процесса:

$$t_{\text{ст}}(\rho) - t(\rho, \tau) = \rho^{-\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left(t_{\text{уст}} + \frac{1}{\alpha} q_{\text{ст}} + \frac{1}{\mu_k^2} \frac{L^2}{\lambda} w_{\text{ст}} - t_{\text{н}} \right) A_k J_{\nu}(\mu_k \rho) \exp(-m_k \tau), \quad (9.3.17)$$

$$A_k = \frac{2\zeta}{[\zeta(\zeta - 2\nu) + \mu_k^2] J_{\nu}(\mu_k)}; \quad m_k = \frac{\alpha \mu_k^2}{L^2}. \quad (9.3.18)$$

Спектр собственных чисел μ_k определяется решениями (корнями) трансцендентного уравнения

$$\zeta J_{\nu}(\mu) = \mu J_{\nu+1}(\mu), \quad (9.3.19)$$

где $J_{\nu}(\mu)$ и $J_{\nu+1}(\mu)$ – функции Бесселя порядка ν и $\nu+1$, а индекс ν связан с фактором формы n соотношением $\nu=(n-1)/2$. Выражение (9.3.17) является обобщенной записью переходного процесса для всей совокуп-

ности тел с одномерным или близким к нему полем температур. С учетом (9.3.7) оно раскрывает особенности формирования поля температур при комплексном влиянии воздействий в виде ступенчатых функций (функций единичного скачка).

Приближенные расчеты поля температур для рассматриваемой тепловой модели выполняются при подстановке в операторное соотношение (9.3.5) двухпараметрических $Y_e(n, \rho, \zeta, s)$, $Y_\lambda(n, \zeta, s)$ взамен $Y(\rho, s)$ – см. (9.2.5) и (9.2.13) – или трехпараметрических $Y_d(n, \rho, \zeta, s)$, $Y_{d\lambda}(n, \zeta, s)$ – см. (9.2.17) и (9.2.25) – передаточных функций. Операторные выражения тепловых воздействий находятся согласно (9.3.4) – (9.3.7).

Регулярный режим. Начиная с некоторого момента τ_{reg} из всех слагаемых ряда (9.3.17) преобладающее влияние приобретает первый член ряда, определяющий упорядоченную стадию переходного процесса, которую можно назвать обобщенным регулярным режимом первого рода, когда объект одновременно подвергается воздействию нескольких тепловых факторов: t_{cr} , q_{cr} , w_{cr} . В отличие от нагрева (охлаждения) в среде с постоянной температурой отсчет “избыточной температуры” тела $\theta(\rho, \tau)$ проводится от стационарного значения $t_{cr}(\rho)$ в соответствующей точке тела.

Темп теплообмена (темп регулярного режима) находится по формуле

$$m = m_1 = \frac{a\mu_1^2}{2}, \quad (9.3.20)$$

где μ_1 – первый корень уравнения (9.3.19). Таблицы корней этого уравнения в зависимости от ζ и величин A_k для канонических тел приведены в [2.9, 2.10].

Максимально возможный темп регулярного режима m_∞ и минимальное значение показателя тепловой инерции ε_∞ при $\alpha \rightarrow \infty$ находятся по формуле

$$m_\infty = \frac{1}{\varepsilon_\infty} = \frac{a\mu_{1\infty}^2}{L^2}, \quad (9.3.21)$$

в которой $\mu_{1\infty}$ являются первыми корнями уравнения $J_\nu(\mu) = 0$. Зависимость $\mu_{1\infty}(v)$ в пределах изменения $-0,5 \leq v \leq 0,5$, что соответствует изменению фактора формы n в пределах $0 \leq n \leq 2$, описывается формулами (индекс 1 в записи заменен на точное значение первого корня уравнения $J_\nu(\mu) = 0$):

$$\mu_{\tau_\infty}(v) = 2,4048 + 1,5708 v - 0,1944 v^2, \quad (9.3.22)$$

$$\mu_{\tau_\infty}(n) = 1,5708 + 0,8826 n - 0,0486 n^2. \quad (9.3.23)$$

Предлагаемые ниже приближенные значения m_a темпа регулярного режима однородных тел с одномерным распределением температуры (a – индекс аппроксимации) находятся по уравнению,

$$m_a = \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 2a_2}}, \quad (9.3.24)$$

в котором коэффициенты a_1 и a_2 берутся из табл.8.3.1.

Показатель тепловой инерции ε_a уже был определен в п. 9.2 в виде (9.2.18) как параметр $\varepsilon_a(n, \zeta)$, входящий в выражение трехпараметрической функции (9.2.17). Следовательно с учетом (9.2.17) и (9.2.18) можно переписать

$$m_a = \frac{1}{\varepsilon_a} = \frac{1}{\varepsilon_a(n, \zeta)}, \quad m_{a\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{a\infty}} = \frac{1}{\varepsilon_{a\infty}(n, \infty)}. \quad (9.3.25)$$

Приближенные значения $\mu_a(n, \zeta)$, и $\mu_a(n, \infty)$, определяются формулами [2.7]

$$\mu_a(n, \zeta) = \sqrt{\frac{(1+n)\sqrt{2(3+n)} \zeta}{\sqrt{2(3+n) + 4\zeta + \zeta^2}}}, \quad (9.3.26)$$

$$\mu_a(n, \infty) = \sqrt{(1+n)\sqrt{2(3+n)}}. \quad (9.3.27)$$

Используя решение (9.3.17), введем критерий неравномерности температурного поля

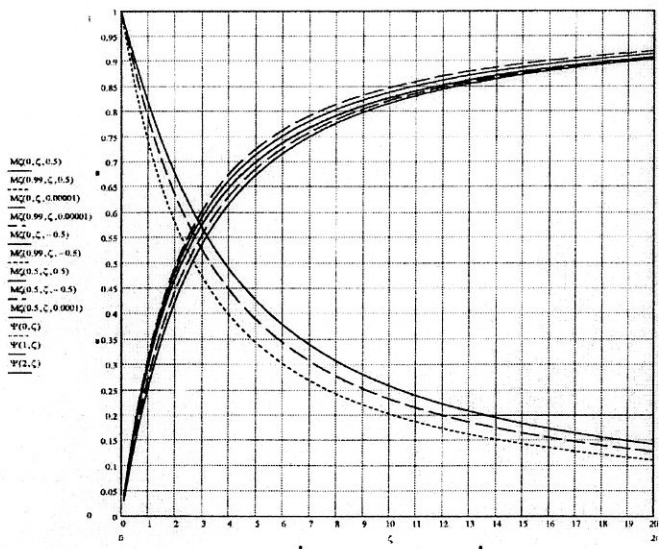
$$\Psi(n, \zeta) = \frac{t_{S_{ст}} - t_S(\tau)}{t_{V_{ст}} - t_V(\tau)} = \frac{\mu_1^2}{2(\nu+1)\zeta} = \frac{\mu_1^2}{(n+1)\zeta}. \quad (9.3.28)$$

Так как

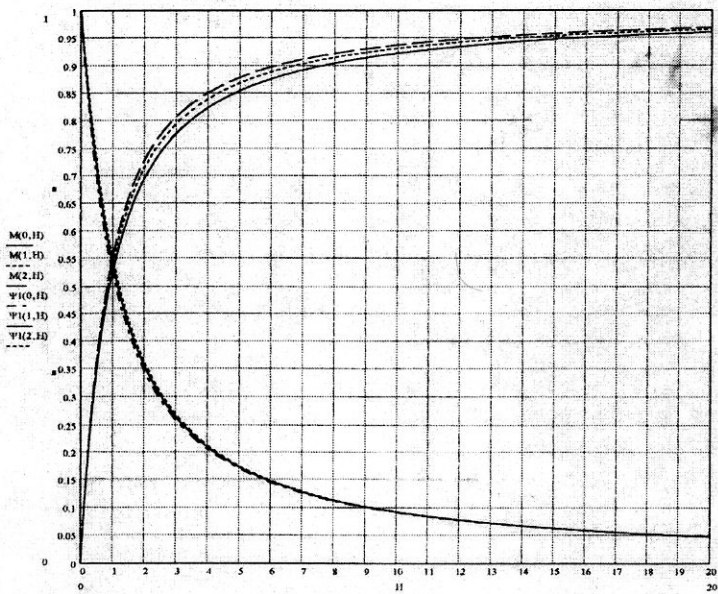
$$m_a = \mu_a(n, \zeta)^2 \frac{a}{L^2}, \quad m_{a\infty} = \mu_a(n, \infty)^2 \frac{a}{L^2}, \quad (9.3.29)$$

$$m_0 = \frac{\alpha S}{c\rho_{пл}V} = (n+1)\zeta \frac{a}{L^2}, \quad (9.3.30)$$

то, подставляя (9.3.29), (9.3.30) в (9.3.28), получаем приближенное аналитическое выражение критерия неравномерности распределения температур в однородных сплошных телах



Puc. 9.3.1



Puc. 9.3.2

$$\Psi(n, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n+3} \zeta + \frac{1}{2(n+3)} \zeta^2}}, \quad (9.3.31)$$

обобщающее ранее предложенную его формулировку – см. гл. 2. Фактор n учитывает влияние формы тела, что показано на рис. 9.3.1.

Следуя Г.М. Кондратьеву и Г.Н. Дульневу, используем введенные ими критерии M и H и определим их структуру с учетом влияния параметра n , тогда на основе

(9.3.29) и (9.3.30) находим

$$H(n, \zeta) = \frac{m_0}{m_{a\infty}} = \frac{\zeta}{\sqrt{2(n+3)}}, \quad (9.3.32)$$

$$M(n, \zeta) = \frac{m_a}{m_{a\infty}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 4\zeta + 2\sqrt{n+3}}}. \quad (9.3.33)$$

Подстановка значения критерия H из (9.3.32) в (9.3.33) позволяет вывести новую обобщенную формулу

$$M(n, H) = \Psi(n, H)H(n, \zeta), \quad (9.3.34)$$

в которой

$$\Psi(n, H) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{8}{n+3}}H + H^2}}. \quad (9.3.35)$$

Графики зависимости критериев M и Ψ от H приведены на рис. 9.3.2. Из сравнения рисунков 9.3.1 и 9.3.2 видно преимущество введения новой структуры критериев $H(n, \zeta)$, $\Psi(n, H)$ и $M(n, H)$.

Уравнения (9.3.34) и (9.3.35) могут использоваться для приближенных расчетов величины критериев M и Ψ в сплошных однородных телах разной формы. Слабое влияние фактора формы n на величину Ψ подтверждается графиками рис.9.3.2. Выбор $n \approx 1$ практически переводит зависимость $\Psi(n, H)$ в $\Psi(H)$ [2.7].

Коэффициент формы тела в регулярном режиме первого рода определяется по формуле

$$K_a = \frac{a}{m_{a\infty}} = \frac{L^2}{(n+1)\sqrt{2(n+3)}}. \quad (9.3.36)$$

9.4. Факторы формы тел в многомерных задачах нестационарной теплопроводности

Идея метода. Параметр n для канонических тел (шар, неограниченные цилиндр и пластина) соответственно равен 2, 1, 0 и определяет структуру точного и приближенных на основе передаточных функций (9.2.3), (9.2.5), и (9.2.17) решений одномерных задач нестационарной теплопроводности этих тел.

Учитывая хорошее согласие приближенных решений, полученных на основе выражений (9.2.5) и (9.2.17), с точными решениями одномерных задач теплопроводности, можно выдвинуть предположение о возможности их использования для расчета характерных температур тел более сложной формы, температурные поля которых не являются одномерными и описываются в виде комбинаторики двойных или тройных бесконечных рядов, определяющих температуру тела в функции координат x, y, z и времени τ . Естественно, такое расширение диапазона действия приближенных одномерных решений не претендует на точное описание температурного поля тела в целом, но с известным приближением может оказаться пригодным для расчета характерных температур тела, например, в его центре, на поверхности, среднеобъемной, если предварительно задать определяющий размер тела L и некоторый численный коэффициент n , называемый фактором формы тела [2.8].

Здесь предлагается новый вариант поиска фактора формы, основанный на использовании комплексной характеристики динамики изменения поля температур в телах ограниченных размеров – темпа регулярного режима тела [2.23]. В отличие от геометрического подхода, темп регулярного режима тела m или обратная ему величина – показатель тепловой инерции ε – включают в себя комплекс геометрических, теплофизических и теплообменных параметров, определяющих временную реакцию тела в целом на воздействие температуры окружающей среды в упорядоченной (регулярной) стадии теплообмена. Для различных тел относительно простой формы темп m определен в виде аналитических зависимостей или может быть найден экспериментально [2.8, 2.10, 2.23].

При использовании решений одномерных задач для расчета характерных температур тел с двух- и трехмерным температурным полем в качестве первоосновы при определении фактора формы реального тела постулируется условие равенства темпов тела сравнения m_c , имеющего одномерное поле температур, и реального тела m_p :

$$m_c = m_p. \quad (9.4.1)$$

Прямоугольные параллелепипеды и призмы. Дальнейшие преобразования выполним для группы тел, образуемых в результате пересечения трех взаимно перпендикулярных плоских пластин.

Основным представителем этой группы при анализе задач теплопроводности является куб с размерами $2L_x \times 2L_y \times 2L_z$ (система координат x, y, z расположена в центре тела), который может обладать тремя видами анизотропии:

1) анизотропия размеров, преобразующая куб в группу прямоугольных параллелепипедов при $L_x \neq L_y \neq L_z$, призм прямоугольного сечения при $L_x \neq L_y, L_z = \infty$ и пластин при $L_y = L_z = \infty$;

2) анизотропия условий охлаждения на гранях тела, характеризующихся значениями коэффициентов теплоотдачи $\alpha_x \neq \alpha_y \neq \alpha_z$;

3) анизотропия коэффициентов переноса – теплопроводности $\lambda_x \neq \lambda_y \neq \lambda_z$ или температуропроводности $a_x \neq a_y \neq a_z$. Так как вещество тела предполагается однородным, произведение плотности $\rho_{\text{пл}}$ и удельной теплоемкости c постоянно.

С учетом сказанного темп теплообмена реального тела рассматриваемой группы можно записать в виде

$$m_p = m_x + m_y + m_z = \frac{a_x \mu_x^2}{L_x^2} + \frac{a_y \mu_y^2}{L_y^2} + \frac{a_z \mu_z^2}{L_z^2}, \quad (9.4.2)$$

где m_x, m_y, m_z – составляющие полного темпа m_p ; μ_x, μ_y, μ_z – первые корни соответствующих трансцендентных уравнений точного решения задачи [2.10, 2.27]. Предполагается, что главные оси анизотропии вещества тела совпадают с направлениями координат x, y, z . Темп тела сравнения m_c в соответствии с результатами работ [2.8, 2.23] определяется зависимостями

$$m_c = \frac{a \mu_c^2}{L^2} = \frac{a}{L^2} \frac{\mu_{c\infty}^2 \zeta}{\sqrt{2(n+3) + 4\zeta + \zeta^2}}, \quad (9.4.3)$$

$$\mu_{c\infty}^2 = (n+1)(2,467 + 0,40n), \quad \zeta = \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad (9.4.4)$$

в которых L и n – определяющий размер и фактор формы тела сравнения; α, λ и a – его теплофизические характеристики.

Проведя по формулам (9.4.2)–(9.4.4.) предварительную численную оценку составляющих m_i полного темпа m_p , где $i=x, y, z$, выбираем максимальное их значение $m_x = m_{\text{max}}$, определяющее максимальный теплооб-

мен с соответствующих граней тела ($m_y \leq m_x, m_z \leq m_x$), и полагаем, что

$$\zeta = \zeta_x, \quad \alpha = \alpha_x, \quad L = L_x, \quad a = a_x. \quad (9.4.5)$$

Преобразуя далее требование (9.4.1) с учетом соотношений (9.4.2)-(9.4.5) и используя условие

$$0 \leq \frac{2n}{6 + 4\zeta + \zeta^2} \leq \frac{2}{3},$$

получаем искомую зависимость для нахождения фактора формы тел рассматриваемой группы

$$n = 3,086 N \left[\sqrt{1 + \frac{0,648(\chi - 1)}{N^2}} - 1 \right], \quad (9.4.6)$$

где

$$\chi = 1 + \frac{m_y}{m_x} + \frac{m_z}{m_x}, \quad (9.4.7)$$

$$N = 1,162 - \frac{\chi}{6 + 4\zeta_x + \zeta_x^2}. \quad (9.4.8)$$

Для оценки составляющих m_x, m_y и m_z можно взамен их точных значений (9.4.2) использовать приближенную формулу

$$m_i = \frac{a_i}{L_i^2} \frac{2,467\zeta_i}{\sqrt{6 + 4\zeta_i + \zeta_i^2}}, \quad (i = x, y, z). \quad (9.4.9)$$

В частных случаях структура формул (9.4.6)-(9.4.9) упрощается. Так при $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z = \infty$ с учетом условий $L_x \leq L_y \leq L_z$ и $L = L_x$ имеем

$$N = 1,162, \quad \chi = 1 + \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{L_x}{L_z} \right)^2. \quad (9.4.10)$$

Цилиндрические тела. Факторы формы для цилиндрических объектов (ограниченные прямые цилиндры, диски с различными соотношениями размеров, условий теплообмена на границах и анизотропией теплофизических характеристик по осям r и z) рассчитываются по формулам:

при $m_r \geq m_z$

$$n = 3,086 N_r \left[\sqrt{1 + \frac{0,648(N_r - 2,162 + 2,34\chi_r)}{N_r^2}} - 1 \right], \quad (9.4.11)$$

$$\chi_r = 1 + \frac{m_z}{m_r}, \quad N_r = 1,162 - \frac{2,34\chi_r}{8 + 4\zeta_r + \zeta_r^2}; \quad (9.4.12)$$

при $m_z \geq m_r$

$$n = 3,086 N_z \left[\sqrt{1 + \frac{0,648(\chi_z - 1)}{N_z^2}} - 1 \right], \quad (9.4.13)$$

$$\chi_z = 1 + \frac{m_r}{m_z}, \quad N_z = 1,162 - \frac{\chi_z}{6 + 4\zeta_z + \zeta_z^2}. \quad (9.4.14)$$

Составляющие m_r и m_z темпа m_p реального объекта, входящие в выражения (9.4.11)-(9.4.14), рассчитываются по формулам

$$m_r = \frac{a_r}{R^2} \frac{5,783\zeta_r}{\sqrt{8 + 4\zeta_r + \zeta_r^2}}, \quad m_z = \frac{a_z}{L_z^2} \frac{2,467\zeta_z}{\sqrt{6 + 4\zeta_z + \zeta_z^2}}, \quad (9.4.15)$$

$$\zeta_r = \frac{\alpha_r R}{\lambda_r}, \quad \zeta_z = \frac{\alpha_z L_z}{\lambda_z}. \quad (9.4.16)$$

Индексы r и z соответствуют значениям параметров цилиндрических объектов в направлениях осей r и z ; R и L_z – радиус и полувысота цилиндра (начало координат расположено в центре тела).

Сопоставление расчетов. Как следует из структуры формул (9.4.6), (9.4.11) и (9.4.13), при выборе условия (9.4.1) фактор формы n становится не только геометрической, но и комплексной характеристикой теплообмена реального тела с многомерным температурным полем.

С целью проверки действенности предлагаемой методики были сопоставлены результаты расчета переходных характеристик для тел прямоугольной формы по точным и приближенным, полученным на основе передаточных функций (9.2.5) и (9.2.17), решениям, в экстремальных условиях теплообмена, когда $\zeta_x = \zeta_y = \zeta_z = \infty$ [2.23].

Относительная погрешность $\delta\theta(T)$ расчета относительной температуры $\theta(T)$ в процентах, где $T=2,467\alpha\tau/L_x^2$ – безразмерное, а τ – текущее время, в процессе нагрева при различных соотношениях коэффициентов теплопроводности для тела кубической формы, квадратной призмы ($L_x = L_y, L_z = \infty$) и неограниченной пластины в диапазоне изменения $0,6 \leq T \leq \infty$ для температуры в центре соответственно не превышает 9; 8 и 1%, а для температуры регулярной поверхности – 6; 4; 3%. Расчет среднеобъемной температуры выполняется при $0,2 \leq T \leq \infty$ с погрешностями не более 5,5; 3; 1,5%.

При значениях относительной координаты $\rho=0,95$, то есть в непосредственной близости от поверхности тела, режим изменения температуры значительно отклоняется от регулярного и погрешности расчета возрастают, однако, в пределах $0,03 \leq T \leq \infty$ не превышают соответственно 12; 6 и 4,5%.

Оценка погрешностей была выполнена также для тел с различными соотношениями размеров L_x, L_y и L_z или их коэффициентов теплопроводности λ_x, λ_y и λ_z . Выявлено увеличение погрешности для случаев, когда тело занимает промежуточное положение и не может быть отнесено к классу кубических ($L_x \approx L_y \approx L_z$), призматических ($L_x \approx L_y; L_z = \infty$) или плоских ($L_y \approx L_z = \infty$) тел. В качестве примера для тела с размерами $L_x/L_y=1/2$ и $L_x/L_z=1/3$ расчеты дают следующие результаты: для температур центра, регулярной и среднеобъемной погрешность $\delta\theta(T)$ при $1,2 \leq T \leq \infty$ составляет 14; 8 и 4%, а непосредственно у поверхности тела при $\rho=0,95$ и $0,10 \leq T \leq \infty$ погрешность по модулю не превышает 6%.

Для тела с соотношением размеров $L_x/L_y=1, L_x/L_z=1/2$ температуры центра, в регулярной точке и средняя по объему при $0,6 \leq T \leq \infty$ рассчитываются с погрешностями не более 17; 8 и 4%, быстро снижаясь с ростом T . Погрешность $\delta\theta(T)$ по модулю не превышает 7%, если $\rho=0,95$ и $0,03 \leq T \leq \infty$.

С учетом неточности задания исходных значений теплофизических свойств тел полученные выше погрешности могут считаться приемлемыми при многих оценочных расчетах поля температур в сплошных телах.

Найденные значения факторов формы дают возможность использовать решения одномерных задач теплопроводности для расчета характерных температур тел с многомерным температурным полем [2.20]. Предлагаемая методика может быть применена для определения фактора формы тел с гладкими поверхностями (эллипсоиды, эллиптические цилиндры), а также для группы тел с внутренними теплоизолированными полостями.

9.5. Температурное поле объектов с внутренними адиабатически изолированными полостями

Введение. Обобщенное операторное решение нестационарных задач теплопроводности квазиодномерных объектов при двухстороннем внешнем конвективно-лучистом воздействии было получено в работе [2.24], однако, не нашло практического применения из-за сложной структуры передаточных функций. Точные аналитические решения опубликованы только для цилиндрических и сферических оболочек и приведены в монографиях [2.9, 2.10].

В случае адиабатической теплоизоляции внутренней полости тела задача упрощается и сводится к нахождению структуры лишь одной передаточной функции $Y(r, s)$, связывающей лапласовское изображение $T(r, s)$ температуры $t(r, \tau)$ с внешним воздействием $T_c(s)$ температуры окружающей среды $t_c(\tau)$:

$$T(r, s) = Y(r, s)T_c(s), \quad (9.5.1)$$

$$Y(r, s) = \left(\frac{\beta}{\beta_1} \right)^{-\nu} \frac{K_{\nu+1}(\beta_1)I_\nu(\beta) + I_{\nu+1}(\beta_1)K_\nu(\beta)}{\Phi(s)}, \quad (9.5.2)$$

$$\Phi(s) = f_3(s) + \frac{\beta_1\beta_2}{\zeta} f_4(s), \quad (9.5.3)$$

$$f_3(s) = I_\nu(\beta_2)K_{\nu+1}(\beta_1) + I_{\nu+1}(\beta_1)K_\nu(\beta_2), \quad (9.5.4)$$

$$f_4(s) = I_{\nu+1}(\beta_2)K_{\nu+1}(\beta_1) - I_{\nu+1}(\beta_1)K_{\nu+1}(\beta_2). \quad (9.5.5)$$

В выражениях (9.5.2)-(9.5.5)

$$\beta = \sqrt{\frac{s}{a}}r, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{s}{a}}r_1, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{s}{a}}r_2, \quad \zeta_2 = \frac{\alpha r_2}{\lambda}; \quad (9.5.6)$$

$I_\nu, I_{\nu+1}, K_\nu, K_{\nu+1}$ – модифицированные функции Бесселя с произвольным вещественным индексом ν , s – параметр преобразования Лапласа, a и λ – температуро- и теплопроводность тела, r_1 и r_2 – его внутренний и внешний определяющие размеры, r – локальная координата ($r_1 \leq r \leq r_2$), τ – время, ζ – безразмерный критерий теплообмена, α – коэффициент теплоотдачи между внешней поверхностью тела и средой.

Приближенное решение. Сохраняющаяся громоздкость решения задачи (9.5.1)—(9.5.6) может быть устранена, если учесть качественное подобие процессов теплообмена сплошных тел и объектов с теплоизолированной внутренней полостью, поверхность которой является поверхностью экстремального значения температуры аналогично центральной области (центру) сплошного тела при условии неизменности их внешней формы. Задача приближенного анализа тел с полостями (оболочек) сводится к поиску зависимостей, определяющих значения их факторов формы n и определяющих размеров L с последующим использованием двух- и трехпараметрических передаточных функций (9.2.5), (9.2.17) сплошного тела для приближенного расчета характерных температур оболочек при различных видах воздействия температуры внешней среды — см. п.п. 9.2 и 9.4.

Приближенное значение (a — символ приближения) темпа регулярного режима m_a тел с внутренними адиабатически изолированными полостями найдем, заменив $\Phi(s)$ согласно (9.5.3) полиномом второй степени относительно s :

$$\Phi(s) = 1 + A_1 s + A_2 s^2. \quad (9.5.7)$$

Коэффициенты A_1 и A_2 определяются на основе работы [2.24] и имеют следующий вид:

$$A_1(\kappa, \zeta, \nu) = \frac{\kappa^{2+2\nu} \left[1 - \frac{2\nu(1-\kappa)}{\zeta} \right]}{\nu(1+\nu)} + \frac{1 + \frac{2(1-\kappa)}{\zeta}}{1+\nu} - \frac{\kappa^2}{\nu}, \quad (9.5.8)$$

$$A_2(\kappa, \zeta, \nu) = \frac{\kappa^{2+2\nu} \left[1 + \frac{2(1-\nu)(1-\kappa)}{\zeta} \right]}{\nu(1-\nu^2)} + \frac{\kappa^{4+2\nu} \left[1 - \frac{2\nu(1-\kappa)}{\zeta} \right]}{\nu(2+\nu)(1+\nu)} +$$

$$+ \frac{1 + \frac{4(1-\kappa)}{\zeta}}{2(1+\nu)(2+\nu)} - \frac{\kappa^2 \left[1 + \frac{2(1-\kappa)}{\zeta} \right]}{\nu(1+\nu)} - \frac{\kappa^4}{2\nu(1-\nu)}, \quad (9.5.9)$$

в которых

$$\kappa = \frac{r_1}{r_2}, \quad \zeta = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{\alpha(r_2 - r_1)}{\lambda}, \quad (9.5.10)$$

где r_1 и r_2 – монокоординаты (“радиусы”) внутренней S_1 и внешней S_2 поверхностей тела, L – его определяющий размер (толщина), ζ – критерий теплообмена (критерий Био) по отношению к определяющему размеру тела L .

Искомое значение темпа теплообмена полого тела

$$m_a = \frac{4a}{r_2^2 \sqrt{A_1^2 - 2A_2^2}} = \frac{a\mu_a^2}{L^2}, \quad (9.5.11)$$

где безразмерный параметр μ_a находится по формуле

$$\mu_a(\kappa, \zeta, \nu) = \frac{2(1-\kappa)}{\sqrt[4]{A_1^2 - 2A_2^2}}. \quad (9.5.12)$$

Параметр κ , значения которого согласно (9.5.10) изменяются в пределах $0 \leq \kappa \leq 1$, определяет размер полости и переход от сплошного тела ($\kappa=0$, $r_1=0$, $r_2=L$) к стенке ($\kappa=1$) с определяющим размером $L=r_2-r_1$. Отметим, что $\mu_a(\kappa, \zeta, \nu)$ является приближенным значением первого корня (первого собственного числа) трансцендентного уравнения $\Phi(s)=0$ – см. (9.5.3)-(9.5.5).

Фактор формы полых тел. Дальнейшие действия сводятся к расчету параметра $\mu_a(\kappa, \zeta, \nu)$ и нахождению на его основе значений фактора формы n_a тела с внутренней полостью при выполнении следующих требований:

1) индекс ν реального тела с полостью приравняется индексу $\nu_{\text{спл}}$ сплошного тела, имеющего такую же внешнюю форму и размеры, что и полое тело, причем величина $\nu_{\text{спл}}$ связана с фактором формы $n_{\text{спл}}$ соотношением $\nu_{\text{спл}} = (n_{\text{спл}} - 1)/2$ и рассчитывается отдельно для разных групп тел – см. п 9.4 [2.23];

2) темп m_a реального полого тела равен темпу m_{ac} сплошного тела сравнения с одномерным температурным полем, откуда при равенстве значений температуропроводности a и определяющих размеров L этих тел имеем:

$$m_a = m_c, \quad \mu_a(\kappa, \zeta, \nu) = \mu_{ac}(n, \zeta). \quad (9.5.13)$$

Приближенное значение параметра μ_{ac} сплошного тела находятся по формуле

$$\mu_{ac} = \frac{\sqrt{(1+n)}\sqrt{2(3+n)}}{\sqrt[4]{1 + \frac{4}{\zeta} + \frac{2(3+n)}{\zeta^2}}}, \quad (9.5.14)$$

в которой $n=n_a(\kappa, \zeta, \nu, n)$ является искомым фактором формы тела с внутренней полостью. Подставляя выражение (9.5.14) в (9.5.13) и решая с помощью операции `root` MathCad трансцендентное уравнение (9.5.13), находим:

$$n_a(\kappa, \zeta, \nu, n) := \text{root}(\mu_a(\kappa, \zeta, \nu) - \mu_{ac}(n, \zeta), n, 0, 0.001, 2). \quad (9.5.15)$$

Детальный анализ теплообмена этой группы тел представлен в статье [2.31]. Выявлено хорошее согласие с результатами точных решений для цилиндрических и сферических тел с полостями, и даны практические рекомендации по приближенному расчету температурного поля этих объектов.