

ГЛАВА 10. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОБОЛОЧЕК И ПОЛЫХ ТЕЛ

10.1. Математическая модель теплообмена оболочек

Обоснование выбора модели. Активная или пассивная система тепловой защиты объектов содержит различные элементы (прослойки, нагревательные устройства, токовводы и пр.), влияющие на тепловой режим объекта. Для анализа работы системы необходимо учитывать влияние каждого из элементов, поэтому возникают задачи математического описания процессов теплопроводности в этих элементах. Поскольку конструкции их разнообразны, желательно выбирать такие физические и математические модели, которые по возможности были бы пригодны для количественной оценки температурного поля элементов различной формы.

Рассмотрение различных вариантов конструктивного оформления системы тепловой защиты показывает, что одним из основных ее элементов являются оболочки (криволинейные стенки, прослойки). Оболочки могут быть однородными или состоять из отдельных частей, изготовленных из различных материалов. Они могут выполняться сплошными, пористыми или иметь внутренние каналы, через которые пропускается тепло- или хладоноситель. Кроме того, оболочки являются пассивными теплоизоляторами или имеют источники теплоты (нагреватели, тепловые полупроводниковые насосы).

Описание формы оболочек. Так же, как и для сплошных тел, формулировка процесса теплопередачи в элементах конструкции тепловой защиты в общем случае оказывается задачей не простой ввиду сложности формы оболочек, наличия многомерного поля температур и температурной зависимости теплофизических свойств объектов. Поэтому при разработке физической и геометрической моделей примем ряд допущений: 1) геометрической моделью реальной оболочки является криволинейная стенка, ограниченная (замкнутыми или разомкнутыми) внутренней S_1 и внешней S_2) поверхностями (рис. 10.1.1, а, б); 2) оболочка однородна, т.е. состоит из однородного материала с известными значениями теплофизических характеристик (a , λ , c , $\rho_{пл}$); 3) температурное поле в модели предполагается одномерным, что соответствует изменению температуры в реальной оболочке преимущественно по ее

толщине; 4) модель оболочки, как и реальный элемент, подвержена внешним и внутренним тепловым воздействиям, которые принимаются равномерно распределенными по ограничивающим поверхностям или по объему модели.

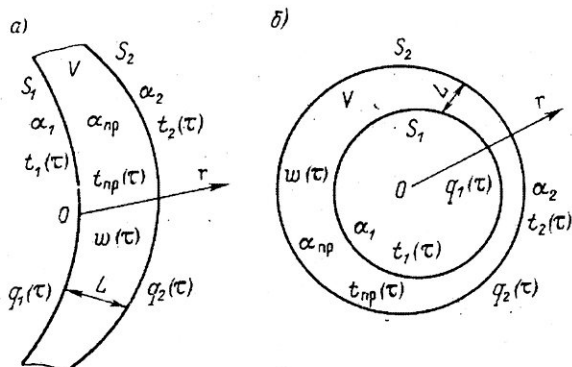


Рис. 10.1.1

На основе вышесказанного геометрический образ реальной оболочки создается некоторой образующей поверхностью $\sigma(r)$, где r —обобщенная координата, причем выполняются следующие условия при значениях $r=r_1$ и $r=r_2$:

$$\sigma(r)|_{r=r_1} = S_1, \quad \sigma(r)|_{r=r_2} = S_2, \quad (10.1.1)$$

где S_1 и S_2 — площади внутренней и внешней поверхности модели, численно равные площадям внутренней и внешней поверхности реальной оболочки. Элементарный объем модели (см. гл. 8) определяется по формуле

$$dv = \sigma(r)dr, \quad (10.1.2)$$

причем выполняется условие

$$V = \int_{r=r_1}^{r=r_2} \sigma(r)dr, \quad (10.1.3)$$

где V — объем модели, равный полному объему реальной оболочки. Условимся называть величину

$$L = r_2 - r_1 \quad (10.1.4)$$

определяющим размером оболочки.

Замкнутую оболочку (рис. 10.1.1, б) можно рассматривать как сплошное тело объема V_2 , из которого вырезана его сердцевина объемом V_1 , так что

$$V = V_2 - V_1. \quad (10.1.5)$$

В этом случае начало отсчета координаты r располагается в центре симметрии или центре тяжести однородного тела. Однако начало отсчета координаты r можно располагать и на поверхности S_1 оболочки, соответственно подобрав вид образующей поверхности $\sigma(r)$.

Оболочка подвержена воздействию следующих режимных факторов: а) жидких (газообразных) сред с температурами t_{c1} и t_{c2} , контактирующих соответственно с поверхностями S_1 и S_2 , интенсивность теплообмена которых α_{c1} и α_{c2} ; б) источников теплоты, равномерно распределенных на поверхностях S_1 и S_2 , плотность которых соответственно равна $q_1(\tau)$ и $q_2(\tau)$; в) внутреннего источника (стока) теплоты, равномерно распределенного в объеме V с удельной мощностью $w(\tau)$; г) внутренней (проточной) среды, имеющей среднюю температуру $t_{np}(\tau)$ между ее входом и выходом, удельная интенсивность теплообмена с которой составляет α_{np} .

Предполагается, что теплофизические свойства тела и коэффициенты теплообмена со всеми средами постоянны. Поле температур в оболочке $t(r, \tau)$ одномерное и определяется решением уравнения теплопроводности (8.2.5).

На основе закона сохранения энергии условия теплообмена на границах имеют вид

$$\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=r_1} + q_1 = \alpha_{c1}(t_{r=r_1} - t_{c1}), \quad -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=r_2} + q_2 = \alpha_{c2}(t_{r=r_2} - t_{c2}). \quad (10.1.6)$$

Начальное распределение температур в оболочке принимается равномерным

$$t(r, \tau) \Big|_{\tau=0} = t_n. \quad (10.1.7)$$

Уравнение (8.2.5) совместно с (10.1.6) и (10.1.7) является при сделанных выше допущениях исходной формулировкой математической модели оболочки как элемента системы тепловой защиты приборов. Общее решение задачи теплопроводности (8.2.5), (10.1.6) и (10.1.7) формально может быть записано в виде

$$T(\rho, s) = Y_1(\rho, s)Z_1(s) + Y_2(\rho, s)Z_2(s) + Y_3(\rho, s)[Z_3(s) + z_n]. \quad (10.1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= T_{c1}(s) + \alpha_{c1}^{-1} Q_1(s), & Z_2(s) &= T_{c2}(s) + \alpha_{c2}^{-1} Q_2(s), \\ Z_3(s) &= T_{np}(s) + \alpha_{np}^{-1} W(s) \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

являются лапласовскими изображениями тепловых воздействий

$$\begin{aligned} z_1(\tau) &= t_{c1}(\tau) + \alpha_{c1}^{-1} q_1(\tau); \\ z_2(\tau) &= t_{c2}(\tau) + \alpha_{c2}^{-1} q_2(\tau); \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

$$z_3(\tau) = t_{np}(\tau) + \alpha_{np}^{-1} w_1(\tau); \quad (10.1.11)$$

$$z_n = c\rho_{пл}\alpha_{np}^{-1} t_n; \quad (10.1.12)$$

$\rho_{пл}$ – плотность вещества тела; $\rho = r/L$ – относительная координата; Y_1, Y_2, Y_3 – передаточные функции для температуры оболочки по отношению к внешним $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, внутреннему $z_3(\tau)$ и начальному z_n тепловым воздействиям.

Точное значение передаточных функций было получено в работе [2.24], однако, имеет весьма громоздкую структуру, что затрудняет получение точных решений искомого значения температуры оболочки $t(r, \tau)$.

10.2. Приближенное уравнение теплообмена и передаточные функции стенок и полых тел

Формулировка задачи. Рассмотрим приближенный метод анализа нестационарного теплообмена оболочек, позволяющий одновременно учитывать геометрические особенности рассматриваемых объектов и влияние различных видов тепловых воздействий [2.8]. Дополнительно к сформулированным в п. 10.1 допущениям добавим еще два.

Будем предполагать, что геометрическая модель (образ) реальной оболочки или стенки создается образующей поверхностью

$$\sigma(\rho) = a_0 + b_0\rho + d_0\rho^2, \quad (10.2.1)$$

где a_0, b_0, d_0 – коэффициенты, зависящие от формы оболочки.

Относительная координата $\rho = r/L$ отсчитывается от одной из поверхностей стенки, например, от внутренней (рис. 10.2.1). Коэффициенты a_0, b_0, d_0 параболического уравнения (10.2.1) могут быть найдены при удовлетворении условий (10.1.1) в точках $r=0$ и $r=L$, т. е.

$$\sigma(\rho)|_{\rho=0} = a_0 = S_1; \quad \sigma(\rho)|_{\rho=1} = a_0 + b_0 + d_0 = S_2, \quad (10.2.2)$$

и дополнительного условия, определяющего значения $\sigma(\rho)$ в какой-то промежуточной (внутренней) точке $0 \leq \rho \leq 1$

$$\sigma(\rho) \Big|_{\rho=\rho_{\text{вн}}} = S_{\text{вн}}, \quad (10.2.3)$$

где, например, оболочка имеет экстремальное (максимальное или минимальное) значение внутренней поверхности $S_{\text{вн}}$ (рис. 10.2.1, а).

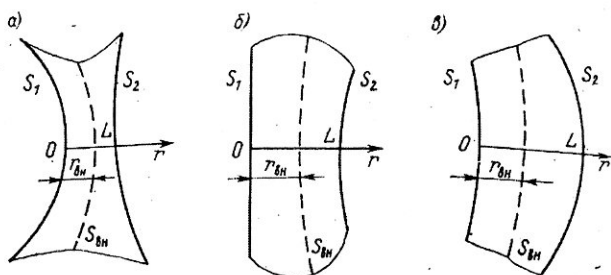


Рис. 10.2.1

Если образующая поверхность $\sigma(\rho)$, с ростом ρ монотонно возрастает или уменьшается (рис. 10.2, б, в), взамен условия (10.2.3) может быть предложено более простое интегральное соотношение

$$V = L \int_0^1 \sigma(\rho) d\rho = L(a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}d_0), \quad (10.2.4)$$

где V —полный объем оболочки.

В дальнейших рассуждениях будут использоваться условия (10.2.2) и (10.2.4), что соответствует форме стенок или оболочек, представленных на рис. 10.2, в.

После преобразования уравнений (10.2.2) и (10.2.4) получаем следующие соотношения:

$$\sigma(\rho) = S_1 + 6VL^{-1}(b\rho - d\rho^2); \quad (10.2.5)$$

$$b = 1 - \frac{2}{3}\phi_1 - \frac{1}{3}\phi_2; \quad d = 1 - \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2), \quad (10.2.6)$$

$$\phi_1 = \frac{LS_1}{V}; \quad \phi_2 = \frac{LS_2}{V}. \quad (10.2.7)$$

В частности, для оболочек канонической формы зависимость (10.2.5) является математически строгой:

для пластины

$$b = d = 0; \quad \sigma(\rho) = S_1 = \text{const}; \quad \phi_1 = \phi_2 = 1; \quad (10.2.8)$$

для цилиндрической стенки

$$b = 1 - \frac{L}{3V} (2S_1 + S_2); \quad d = 0; \quad (10.2.9)$$
$$\phi_1 = \frac{2R_1}{(R_1 + R_2)}; \quad \phi_2 = \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)};$$

для сферической стенки

$$\phi_1 = \frac{3R_1^2}{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}; \quad \phi_2 = \frac{3R_2^2}{R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2}, \quad (10.2.10)$$

где R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндрической и сферической оболочек. Определяющий размер L у канонических оболочек совпадает с реальной толщиной стенки. Для оболочек иной конфигурации размер L приближенно определяется по формуле [2.25, 2.26]

$$L = \frac{2V}{S_1 + S_2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{4} < \frac{S_2}{S_1} < 4. \quad (10.2.11)$$

Второе дополнительное предположение определяет профиль поля для изображения $T(\rho, s)$ температуры $t(\rho, \tau)$ в оболочке в виде полинома второго порядка относительно координаты ρ (параболическая аппроксимация):

$$T(\rho, s) = M(s) + N(s)\rho + P(s)\rho^2. \quad (10.2.12)$$

Естественно, что функция (10.2.12) не может в точности удовлетворить уравнению (8.2.5) и при соответствующем подборе коэффициентов M , N и P является лишь его приближенным решением.

Для определения коэффициентов уравнения (10.2.12) потребуем, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям (10.1.6), которые с учетом соотношения (10.2.1) принимают вид

$$\frac{\lambda}{L} \frac{\partial t}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} S_1 + q_1 S_1 = \alpha_{cl} S_1 (t|_{\rho=0} - t_{cl}), \quad (10.2.13)$$

$$-\frac{\lambda}{L} \frac{\partial t}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} S_2 + q_2 S_2 = \alpha_{c2} S_2 (t|_{\rho=1} - t_{c2}). \quad (10.2.14)$$

Третьим условием для определения неизвестных коэффициентов, взамен уравнения (8.2.5), является интегральное уравнение теплового баланса оболочки:

$$wV + q_1 S_1 + q_2 S_2 = c\rho_{пл} V \frac{dt_V}{d\tau} + \alpha_{c1} S_1 [t|_{\rho=0} - t_{c1}] + \alpha_{c2} S_2 [t|_{\rho=1} - t_{c2}] + \alpha_{np} V (t_V - t_{np}), \quad (10.2.15)$$

где t_V — среднеобъемная температура оболочки, равная

$$t_V = \frac{1}{V} \int_{v=0}^V t(\rho, \tau) dv. \quad (10.2.16)$$

Передаточные функции. Применяя к уравнениям (10.2.13)-(10.2.16) преобразование Лапласа и подставляя в них (10.2.12), можно найти значения коэффициентов M, N, P и изображение $T(\rho, s)$ температуры оболочки $t(\rho, \tau)$. Приближенное решение имеет тот же общий вид, что и точное, т.е. определяется выражениями (10.1.8)-(10.1.12). Как показано в работах [2.8, 2.25, 2.26] приближенные выражения передаточных функций, определяющих реакцию оболочки на тепловые воздействия, имеют следующую структуру:

$$Y_1(\rho, s) = \frac{B_0 + B_1 s}{1 + \varepsilon s}; \quad Y_2(\rho, s) = \frac{C_0 + C_1 s}{1 + \varepsilon s}; \quad (10.2.17)$$

$$Y_3(\rho, s) = \frac{D_0}{1 + \varepsilon s}. \quad (10.2.18)$$

Коэффициенты передаточных функций вычисляются по формулам

$$B_0 = E^{-1} \{ \phi_1 (1 + 2\zeta_2^{-1}) + \phi_2 + [(f_1 - f_2) + (2f_1 - f_2)\zeta_2^{-1}] \zeta_3 - \\ - E^{-1} \{ [2\phi_2 + (1 - f_2 + 2\zeta_2^{-1})\zeta_3] \rho + [(\phi_2 - \phi_1) + (1 - f_1 + \zeta_2^{-1})\zeta_3] \rho^2 \} \} \quad (10.2.19)$$

$$B_1 = \frac{1}{E} \frac{L^2}{a} \{ [(f_1 - f_2) + (2f_1 - f_2)\zeta_2^{-1}] - (1 - f_2 + 2\zeta_2^{-1}) \rho + (1 - f_1 + \zeta_2^{-1}) \rho^2 \}; \quad (10.2.20)$$

$$C_0 = E^{-1} \{ (2\phi_2 - f_2 \zeta_3) \zeta_3^{-1} + (2\phi_2 - f_2 \zeta_3) \rho + [(\phi_1 - \phi_2) + (f_1 + \zeta_1^{-1}) \zeta_3] \rho^2 \}; \quad (10.2.21)$$

$$C_1 = \frac{1}{E} \frac{L^2}{a} \left[-f_2 \zeta_1^{-1} - f_2 \rho + (f_1 + \zeta_1^{-1}) \rho^2 \right] \quad (10.2.22)$$

$$D_0 = E^{-1} \zeta_3 \left[(1 + 2\zeta_2^{-1}) \zeta_1^{-1} + (1 + 2\zeta_2^{-1}) \rho - (1 + \zeta_1^{-1} + \zeta_2^{-1}) \rho^2 \right]; \quad (10.2.23)$$

$$E = \left[\phi_1 (1 + 2\zeta_2^{-1}) + \phi_2 (1 + 2\zeta_1^{-1}) \right] + \\ + \left[(f_1 - f_2) + (1 - f_2) \zeta_1^{-1} + (2f_1 - f_2) \zeta_2^{-1} + 2\zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \right] \zeta_3 \quad (10.2.24)$$

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{6} (\phi_1 - \phi_2) \right]; \quad f_2 = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{2}{9} \phi_1 + \frac{1}{3} \phi_2 \right). \quad (10.2.25)$$

Коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ являются аналогами критериев Био по отношению к соответствующим средам:

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_{c1} L}{\lambda}; \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_{c2} L}{\lambda}; \quad \zeta_3 = \frac{\alpha_{np} L^2}{\lambda}. \quad (10.2.26)$$

Параметр ε может приближенно рассматриваться как показатель тепловой инерции оболочки:

$$\varepsilon = \frac{L^2}{a} \left[\zeta_3 + \frac{\phi_1 + \phi_2 + \frac{2\phi_2}{\zeta_1} + \frac{2\phi_1}{\zeta_2}}{(f_1 - f_2) + \frac{1 - f_2}{\zeta_2} + \frac{2f_1 - f_2}{\zeta_2} + \frac{2}{\zeta_1 \zeta_2}} \right]^{-1}, \quad (10.2.27)$$

где a — коэффициент температуропроводности вещества оболочки.

Как следует из (10.2.27), темп теплообмена оболочки, участвующей одновременно в поверхностном (наружном) и объемном (внутреннем) конвективно-лучистом теплообмене, является величиной аддитивной, т.е.

$$m = \frac{1}{\varepsilon} = m_s + m_v, \quad (10.2.28)$$

при этом составляющая

$$m_s = \frac{a}{L^2} \frac{\phi_1 + \phi_2 + \frac{2\phi_2}{\zeta_1} + \frac{2\phi_1}{\zeta_2}}{(f_1 - f_2) + \frac{1-f_2}{\zeta_2} + \frac{2f_1 - f_2}{\zeta_2} + \frac{2}{\zeta_1\zeta_2}} = \frac{1}{\varepsilon_s} \quad (10.2.29)$$

определяет темп теплообмена оболочки, обусловленный ее теплообменом с внешними средами через поверхности S_1 и S_2 , а составляющая

$$m_V = \frac{a\zeta_3}{L^2} = \frac{\alpha_{np}}{c\rho_{пл}} \quad (10.2.30)$$

характеризует темп теплообмена по отношению к среде, проходящей через весь объем V оболочки (внутренний объемный теплообмен).

Применяя к уравнению (10.1.8) совместно с (10.2.17), (10.2.18) и (10.2.19) обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных значениях температуры ($\tau=0$) функций $t(\rho, \tau)$, $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, $z_3(\tau)$ и их первых производных, получим искомое приближенное уравнение взаимосвязи между температурой $t(\rho, \tau)$ оболочки (криволинейной стенки) и воздействиями $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, $z_3(\tau)$:

$$\varepsilon \frac{dt}{d\tau} + t = \left(B_1 \frac{dz_1}{d\tau} + B_0 z_1 \right) + \left(C_1 \frac{dz_2}{d\tau} + C_0 z_2 \right) + D_0 z_3. \quad (10.2.31)$$

Из уравнения (10.2.31) с учетом формул (10.2.17)–(10.2.30) можно найти необходимые для инженерных расчетов, значения характерных температур оболочки: среднеповерхностных $t_{s1}(\tau)$, и $t_{s2}(\tau)$ при $\rho=0$ и $\rho=1$ соответственно; среднеобъемной температуры $t_V(\tau)$, для которой передаточные функции определяются согласно выражению

$$Y_{V_j} = \frac{1}{V} \int_V Y_j(\rho, s) dv, \quad (j=1,2,3). \quad (10.2.32)$$

При этом $B_{1V} = C_{1V} = 0$, E и ε не меняются, а

$$B_{0V} = E^{-1} \left[\phi_1 (1 - f_2) + \phi_2 (1 - 2f_1 + f_2) + 2\phi_1 \zeta_2^{-1} \right]; \quad (10.2.33)$$

$$C_{0V} = E^{-1} \left[\phi_1 f_2 + \phi_2 (2f_1 - f_2) + 2\phi_2 \zeta_1^{-1} \right]; \quad (10.2.34)$$

$$D_{0V} = \zeta_3 E^{-1} \left[(f_1 - f_2) + (1 - f_2) \zeta_1^{-1} + (2f_1 - f_2) \zeta_2^{-1} + 2\zeta_1^{-1} \zeta_2^{-1} \right]. \quad (10.2.35)$$

Внутренние стоки теплоты отсутствуют. Во многих практических случаях криволинейная стенка как элемент термостата не имеет внутренних стоков теплоты. Поэтому в расчетных формулах (10.2.19)–(10.2.25), (10.2.27), (10.2.33), (10.2.34) следует принять $\zeta_3 = 0$.

Коэффициенты D_0, D_{0V} преобразуются к виду

$$D_0 = \frac{1}{E} \left[\left(1 + \frac{2}{\zeta_2} \right) \frac{1}{\zeta_1} + \left(1 + \frac{2}{\zeta_2} \right) \rho - \left(1 + \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2} \right) \rho^2 \right], \quad (10.2.36)$$

$$D_{0V} = \frac{1}{E} \left[(f_1 - f_2) + \frac{1 - f_2}{\zeta_1} + \frac{2f_1 - f_2}{\zeta_2} + \frac{2}{\zeta_1 \zeta_2} \right]. \quad (10.2.37)$$

При $\zeta_3 = 0$ поверхностные воздействия $z_1(\tau), z_2(\tau)$, сохраняют свою структуру (10.1.10), а внутреннее тепловое воздействие состоит только из равномерно распределенного по объему оболочки источника энергии, т. е.

$$z_3(\tau) = \frac{L^2}{\lambda} w(\tau). \quad (10.2.38)$$

Частный случай теплообмена (коэффициенты теплоотдачи $\alpha_{c_1} \rightarrow \infty, \alpha_{c_2} \rightarrow \infty$). Как следует из (10.1.9) и (10.1.10), при этих условиях теплообмена ($\zeta_1 = \zeta_2 = \infty$) температуры поверхностей оболочки будут совпадать с температурами сред.

Коэффициенты передаточных функций (10.2.17), и (10.2.18) упрощаются и рассчитываются по формулам

$$B_0 = 1 - \left(\frac{1 - f_2}{f_1 - f_2} \frac{m_V}{m} + 2 \frac{m_{S_2}}{m} \right) \rho + \left(\frac{1 - f_1}{f_1 - f_2} \frac{m_V}{m} - \frac{m_{S_1}}{m} + \frac{m_{S_2}}{m} \right) \rho^2; \quad (10.2.39)$$

$$B_1 = \varepsilon \left(1 - \frac{1 - f_2}{f_1 - f_2} \rho + \frac{1 - f_1}{f_1 - f_2} \rho^2 \right); \quad (10.2.40)$$

$$C_0 = \left(2 \frac{m_{S_2}}{m} - \frac{f_2}{f_1 - f_2} \frac{m_V}{m} \right) \rho + \left(\frac{f_1}{f_1 - f_2} \frac{m_V}{m} + \frac{m_{S_1}}{m} - \frac{m_{S_2}}{m} \right) \rho^2; \quad (10.2.41)$$

$$C_1 = \varepsilon + \left(\frac{f_2}{f_1 - f_2} \rho - \frac{f_1}{f_1 - f_2} \rho^2 \right); \quad (10.2.42)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{m} = \frac{L^2}{a} \left(\zeta_3 + \frac{\phi_1 + \phi_2}{f_1 - f_2} \right)^{-1}; \quad (10.2.43)$$

$$D_0 = \frac{m_V \rho (1 - \rho)}{m f_1 - f_2}; \quad (10.2.44)$$

где m_V находится по (10.2.30), а

$$m_S = \frac{\lambda}{L c \rho_{\text{пл}} V} \frac{S_1 + S_2}{(f_1 - f_2)} = \frac{a}{L} \frac{S_1 + S_2}{(f_1 - f_2) V}, \quad (10.2.45)$$

$$m = \frac{1}{\varepsilon} = m_V + m_S = m_V + m_{S_1} + m_{S_2}, \quad (10.2.46)$$

$$m_{S_1} = \frac{aS_1}{(f_1 - f_2)LV}; \quad m_{S_2} = \frac{aS_2}{(f_1 - f_2)LV}. \quad (10.2.47)$$

По физическому смыслу величины $m_V, m_S, m_{S_1}, m_{S_2}, m$ приближенно определяют темпы теплообмена рассматриваемого тела относительно различных сред: m_V – по отношению к внутренней среде с температурой $t_{\text{пр}}(\tau)$; m_S – по отношению к поверхностям S_1 и S_2 , температуры которых совпадают с температурами $t_{c1}(\tau)$ и $t_{c2}(\tau)$ внешних сред; m_{S_1}, m_{S_2} – по отношению к каждой из поверхностей внешних сред отдельно.

Полный темп m характеризует теплообмен при одновременном комплексном воздействии сред, а ε – теплоинерционные свойства тела в целом. Если $\zeta_3 = 0$, то $m_V = 0$, а m_S приближенно определяет максимально возможный темп теплообмена криволинейной оболочки при теплообмене с двумя средами ($\zeta_1 = \infty, \zeta_2 = \infty$).

По теореме Г.М.Кондратьева [2.27] максимальный темп теплообмена тела m_∞ связан с коэффициентом температуропроводности a соотношением

$$a = Km_\infty. \quad (10.2.48)$$

Сравнивая выражения для (10.2.45) и (10.2.48), получаем формулу для оценки коэффициента формы K криволинейной стенки или полого тела:

$$K = \frac{(f_1 - f_2)LV}{S_1 + S_2}. \quad (10.2.49)$$

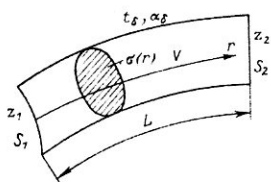


Рис. 10.2.2

Сплошное тело. Из выражений (10.1.8)-(10.1.11), (10.2.17) в результате выполнения соответствующих предельных переходов могут быть получены приближенные формулы для расчета температуры сплошного тела. Переход от криволинейной стенки к сплошному телу осуществляется при $S_1=0$ или $\phi_1=0$, что означает стягивание внутренней поверхности в линию или точку.

Физически переход к сплошному телу происходит при условии $\zeta_1 \rightarrow 0$. Совместно с геометрическим условием $S_1=0$ это означает, что $Y_1(\rho, s)$ и решение (10.1.8) принимает вид (8.2.11). Предпочтительнее, однако, для расчета поля температур в сплошных объектах пользоваться передаточными функциями второго приближения, которые были получены в гл.9.

Стержни постоянного сечения. Решение (10.1.8) совместно с (10.2.17) и (10.2.18) описывает теплообмен стержней постоянного сечения (рис. 10.2.2).

Обозначим площадь поперечного сечения стержня S , а длину L . Пусть, как и в случае криволинейной стенки, тепловыми воздействиями z_1 и z_2 с торца $S_1=S$ является среда с температурой $t_{c1}(\tau)$, а с торца $S_2=S$ — среда с температурой $t_{c2}(\tau)$. Боковая поверхность стержня обменивается теплотой со средой, имеющей температуру $t_6(\tau)$. Коэффициент теплообмена с этой средой равен α_6 . Так как распределение температуры в стержне в каждом из его поперечных сечений S равномерное, то поле температур зависит только от координаты $\rho=r/L$ т.е. $t=t(\rho, \tau)$. Нетрудно показать, что для расчета температуры стержня можно использовать приведенные выше выражения, причем роль внутренней среды $t_{np}(\tau)$ выполняет внешняя среда с температурой $t_6(\tau)$. Коэффициент теплообмена α_6 с боковой поверхности стержня предварительно пересчитывается на α_{np} по формуле

$$\alpha_{np} = \frac{\alpha_6 p}{S}, \quad (10.2.50)$$

где p — периметр поперечного сечения стержня.

В частности, для стержней круглого сечения

$$\alpha_{np} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R} \alpha_6, \quad (10.2.51)$$

где R — радиус цилиндрического стержня.

Применение приведенной в п. 10.2 теории к расчету многослойных оболочек, термических сопротивлений и термостатов в целом подробно изложено в монографии [2.8] и приведенных в ней публикациях. Там же

сформулированы ограничения, которые необходимо учитывать в практических расчетах.

10.3. Модели теплообмена неоднородных объектов

Для более полного описания совместной задачи нестационарного теплообмена системы объект-среда необходима расширенная постановка одномерных задач теплопроводности с учетом неоднородности свойств объектов и условий их теплообмена со средами. В статье [2.28] одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности приближенно решено с использованием коллокационного метода. На этой основе дано решение нестационарной задачи сопряженного теплообмена тела переменного сечения в потоке несжимаемой жидкости (газа) [2.29]. В работе [2.30] приведены результаты анализа обобщенной неоднородной тепловой модели, полученные путем приближенного решения ее интегрального уравнения теплообмена.

Последовательно рассмотрим оба использованных метода решений.

Дифференциальный (коллокационный) метод. Объект в виде криволинейной стенки или ее элемента (см. рис. 10.1.1, 10.2.2) ограничен двумя поверхностями S_1 и S_2 и имеет определяющий размер L . Интегральные геометрические свойства объекта, как и в гл. 9, задаются образующей поверхностью $\sigma(\rho)$ при выполнении следующих условий:

$$\sigma(\rho)|_{\rho=0} = S_1, \quad \sigma(\rho)|_{\rho=1} = S_2,$$

$$dv = L\sigma(\rho)d\rho, \quad V = L \int_0^1 \sigma(\rho)d\rho, \quad (10.3.2)$$

где ρ – относительная координата объекта ($0 \leq \rho \leq 1$), начало которой расположено на поверхности S_1 , dV – элементарный, а V – полный объем рассматриваемого тела. Объект неоднороден по составу и характеризуется заданными значениями теплопроводности λ , объемной теплоемкости c_v и коэффициента температуропроводности a :

$$\lambda = \lambda(\rho); \quad c_v = c(\rho)\rho_{\text{пл}}(\rho) = c_v(\rho); \quad a = \frac{\lambda(\rho)}{c_v(\rho)} = a(\rho), \quad (10.3.3)$$

где $c(\rho)$ и $\rho_{\text{пл}}(\rho)$ – удельная теплоемкость и плотность вещества тела. Теплообмен объекта определяется комплексом из трех групп изменя-

ющихся во времени τ режимных факторов: 1) воздействием со стороны поверхности S_1 среды с температурой $t_{c1}(\tau)$ и равномерно распределенного по поверхности S_1 источника теплоты $q_1(\tau)$; 2) воздействием со стороны поверхности S_2 среды с температурой $t_{c2}(\tau)$ и равномерно распределенного по поверхности S_2 источника теплоты $q_2(\tau)$; 3) внутренними воздействиями — объемно распределенными источниками теплоты, плотность которых в расчете на единицу объема составляет $w(\rho, \tau)$, и средой с температурой $t_{np}(\rho, \tau)$, которая проходит через объект.

Интенсивность конвективно-лучистого теплообмена со средами 1 и 2 определяется численными значениями коэффициентов теплоотдачи α_{c1} и α_{c2} ; интенсивность теплообмена с внутренней средой задается объемным коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{np}(\rho)$, который является заданной функцией от координаты ρ .

Указанные тепловые воздействия формируют в объекте нестационарное тепловое поле, которое предполагается близким к одномерному. Следовательно, температура объекта $t=t(\rho, \tau)$.

На основе закона сохранения энергии уравнение теплопроводности объекта запишется в виде:

$$\frac{L^2}{a} \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} + \left[\frac{1}{\sigma(\rho)} \frac{d\sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right] \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \rho} - \zeta_3(\rho) t(\rho, \tau) + \zeta_3(\rho) \left[t_{np}(\rho, \tau) + \frac{1}{\alpha_{np}(\rho)} w(\rho, \tau) \right], \quad (10.3.4)$$

где

$$\zeta_3(\rho) = \alpha_{np}(\rho) \frac{L^2}{\lambda(\rho)} \quad (10.3.5)$$

является безразмерным комплексом (критерием Био), определяющим объемную интенсивность теплообмена объекта с внутренней проточной средой, имеющей температуру $t_{np}(\rho, \tau)$.

Условия теплообмена на границах объекта S_1 и S_2 следующие:

$$\left[t(\rho, \tau) - \frac{1}{\zeta_1(\rho)} \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right]_{\rho=0} = t_{c1}(\tau) + \frac{1}{\alpha_{c1}} q_1(\tau);$$

$$\left[t(\rho, \tau) + \frac{1}{\zeta_2(\rho)} \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right]_{\rho=L} = t_{c2}(\tau) + \frac{1}{\alpha_{c2}} q_2(\tau), \quad (10.3.6)$$

где $\zeta_1(\rho)$ и $\zeta_2(\rho)$ – критерии Био по отношению к средам 1 и 2:

$$\zeta_1(\rho) = \frac{\alpha_{c1}L}{\lambda(\rho)}; \quad \zeta_2(\rho) = \frac{\alpha_{c2}L}{\lambda(\rho)}. \quad (10.3.7)$$

Значения этих критериев при $\rho=0$ и $\rho=1$ в дальнейшем обозначаются ζ_1 и ζ_2 :

$$\zeta_1 = \frac{\alpha_{c1}L}{\lambda(0)}, \quad \zeta_2 = \frac{\alpha_{c2}L}{\lambda(1)}. \quad (10.3.8)$$

В начальный момент времени распределение температур в объекте предполагается неравномерным

$$t(r, \tau)_{\tau=0} = t_n(\rho). \quad (10.3.9)$$

Уравнение (10.3.4) совместно с условиями (10.3.6), (10.3.7) определяют математическую модель процесса сложного теплообмена большой группы объектов. Применяя к (10.3.4), (10.3.6), (10.3.9) преобразование Лапласа, получаем трансформированную запись формулировки задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2T(\rho, s)}{d\rho^2} + \left[\frac{1}{\sigma(\rho)} \frac{d\sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right] \frac{dT(\rho, s)}{d\rho} + [\zeta_3(\rho) + \beta^2] T(\rho, s) = \\ & = \zeta_3(\rho) \left[T_{np}(\rho, s) + \frac{1}{\alpha_{np}} W(\rho, s) \right] - \frac{L^2}{a(\rho)} t_n(\rho); \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

$$\left[T(\rho, s) - \frac{1}{\zeta_1(\rho)} \frac{dT(\rho, s)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=0} = T_{c1}(s) + \frac{1}{\alpha_{c1}} Q_1(s); \quad (10.3.11)$$

$$\left[T(\rho, s) + \frac{1}{\zeta_2(\rho)} \frac{dT(\rho, s)}{d\rho} \right] \Big|_{\rho=1} = T_{c2}(s) + \frac{1}{\alpha_{c2}} Q_2(s); \quad (10.3.12)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{s}{a(\rho)}} L, \quad (10.3.13)$$

где $T(\rho, s)$ – изображение температуры $t(\rho, \tau)$; $T_{c1}(s)$, $T_{c2}(s)$, $T_{np}(\rho, s)$, $Q_1(s)$, $Q_2(s)$ и $W(\rho, s)$ – соответственно изображения воздействий $t_{c1}(\tau)$, $t_{c2}(\tau)$, $t_{np}(\rho, \tau)$, $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ и $w(\tau)$; s – параметр преобразования Лапласа.

Конкретный вид зависимости $\sigma(\rho)$ определяется выражением (10.2.1), коэффициенты a_0 , b_0 и d_0 находятся из условий (10.2.2), (10.2.3) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= S_1; \\ b_0 &= \frac{1}{\rho_{\text{вн}}(1-\rho_{\text{вн}})} \left[S_{\text{вн}} - S_1(1-\rho_{\text{вн}}^2) - S_2\rho_{\text{вн}}^2 \right] \\ d_0 &= \frac{1}{\rho_{\text{вн}}(\rho_{\text{вн}}-1)} \left[S_{\text{вн}} + S_1(\rho_{\text{вн}}-1) - S_2\rho_{\text{вн}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.14)$$

С помощью уравнения (10.2.1), как отмечалось в п.10.2, приближенно описываются геометрические свойства многих тел. В частности, из выражений (10.3.14) получаем для плоской стенки $b_0=d_0=0$, для цилиндрической стенки $d_0=0$, $b_0=S_2-S_1$, а для сферической стенки $b_0=0$, $d_0=S_2-S_1$. В качестве точки $\rho_{\text{вн}}$ можно рекомендовать выбор экстремальной точки, если функция $\sigma(\rho)$ имеет максимум или минимум. Если функция $\sigma(\rho)$ монотонная, то рекомендуется использовать соотношение (10.2.4).

Приближенный способ интегрирования системы уравнений (10.3.10)-(10.3.13) основывается на возможности аппроксимации искомого поля температур в виде параболической зависимости (10.2.12) и коллокационного метода решения уравнения (10.3.10). Для нахождения коэффициентов M , N и P необходимо, чтобы выражение (10.2.12) удовлетворяло условиям (10.3.11) и (10.3.12) и локально, т.е. в любой точке ρ внутри интервала $0 \leq \rho \leq 1$, уравнению (10.3.10).

После выполнения необходимых преобразований находится приближенное решение задачи для изображения $T(\rho, s)$ температуры $t(\rho, \tau)$ объекта, которое имеет вид, аналогичный выражению (10.1.8):

$$T(\rho, s) = Y_1(\rho, s)Z_1(s) + Y_2(\rho, s)Z_2(s) + Y_3(\rho, s)[Z_3(s) + z_{\text{н}}(\rho)].$$

Воздействия $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ и их оригиналы $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$ имеют прежнюю структуру и определяются по зависимостям (10.1.9), (10.1.10). Воздействие $z_3(\tau)$ и его изображение $Z_3(s)$ имеют вид:

$$z_3(\rho, \tau) = t_{\text{нп}}(\rho, \tau) + \frac{1}{\alpha_{\text{нп}}(\rho)} w(\rho, \tau), \quad (10.3.15)$$

$$Z_3(\rho, s) = T_{\text{нп}}(\rho, s) + \frac{1}{\alpha_{\text{нп}}(\rho)} W(\rho, s). \quad (10.3.16)$$

Начальное тепловое воздействие в отличие от (10.1.12) находится по формуле

$$z_n(\rho) = \frac{1}{\zeta_3(\rho)} \frac{L^2}{a(\rho)} t_n(\rho) = \frac{c_v(\rho)}{\alpha_{np}(\rho)} t_n(\rho). \quad (10.3.17)$$

Передаточные функции, определяющие вклад каждого из воздействий в формирование изображения $T(\rho, s)$ температуры тела $t(\rho, \tau)$, имеют следующую структуру:

$$Y_1(\rho, s) = \frac{B_0(\rho)}{1 + \varepsilon_0(\rho)s}; \quad Y_2(\rho, s) = \frac{C_0(\rho)}{1 + \varepsilon_0(\rho)s}; \quad Y_3(\rho, s) = \frac{D_0(\rho)}{1 + \varepsilon_0(\rho)s}. \quad (10.3.18)$$

Коэффициенты передаточных функций рассчитываются по формулам

$$B_0(\rho) = \frac{\zeta_1}{E(\rho)} \left\{ 2(1 + \zeta_2) - (2 + \zeta_2)K(\rho) + \right. \\ \left. + 2[(1 + \zeta_2)K(\rho) - \zeta_2] \rho - \zeta_2 K(\rho) \rho^2 \right\}, \quad (10.3.19)$$

$$C_0(\rho) = \frac{\zeta_2}{E(\rho)} \left\{ 2 + 2[\zeta_1 + K(\rho)] \rho + \zeta_1 K(\rho) \rho^2 \right\}, \quad (10.3.20)$$

$$D_0(\rho) = \frac{\zeta_3(\rho)}{E(\rho)} \left\{ (2 + \zeta_2)(1 + \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2 \right\}, \quad (10.3.21)$$

$$\varepsilon_0(\rho) = \frac{L^2}{a(\rho)} \left\{ \zeta_3(\rho) + \frac{2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2)[1 + K(\rho)\rho] - \zeta_1(2 + \zeta_2)K(\rho)}{(2 + \zeta_2)(\zeta_1 + \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2)\rho^2} \right\}^{-1}, \quad (10.3.22)$$

в которых

$$E(\rho) = 2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) + (2 + \zeta_2)[\zeta_3(\rho) - \zeta_1 K(\rho)] + \\ + [2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2)K(\rho) + \zeta_1 \zeta_3(\rho)(2 + \zeta_2)] \rho - \\ - \zeta_3(\rho)[(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2]; \quad (10.3.23)$$

$$K(\rho) = \frac{1}{\sigma(\rho)} \frac{d\sigma(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} = \\ = \frac{b_0 + 2d_0\rho}{a_0 + b_0\rho + d_0\rho^2} + \frac{1}{\lambda(\rho)} \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho}. \quad (10.3.24)$$

Величина $\varepsilon_0(\rho)$ по смысловому значению определяет показатель тепловой инерции локальной области тела с координатой ρ . Комплексы ζ_1 , ζ_2 и $\zeta_3(\rho)$ находятся по соотношениям (10.3.8) и (10.3.5).

Укажем на некоторые следствия, вытекающие из общего решения (10.1.8).

1. Уравнению (10.1.8) динамики теплообмена объекта в изображенных соответствует приближенное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_0(\rho) \frac{dt(\rho, \tau)}{d\tau} + t(\rho, \tau) = B_0(\rho, \tau)z_1(\tau) + C_0(\rho, \tau)z_2(\tau) + D_0(\rho, \tau)z_3(\rho, \tau), \quad (10.3.25)$$

которое получается в результате обратного перехода из (10.1.8), (10.3.15)-(10.3.22) и должно интегрироваться при условии (10.3.9).

2. Полученные результаты пригодны для определения температуры стержней переменного сечения, боковая поверхность которых находится в теплообмене со средой, имеющей температуру $t_6(\rho, \tau)$. При этом в уравнениях (10.3.4), (10.3.10), (10.3.15) и (10.3.25) производится замена $t_{\text{пр}}(\rho, \tau)$ на $t_6(\rho, \tau)$ и перерасчет коэффициента теплоотдачи стержней $\alpha_6(\rho)$ на $\alpha_{\text{пр}}(\rho)$:

$$\alpha_{\text{пр}}(\rho) = \alpha_6(\rho) \frac{p(\rho)}{\sigma(\rho)}, \quad (10.3.26)$$

где $p(\rho)$ и $\sigma(\rho)$ — периметр и поперечное сечение стержня при значении ρ .

3. В ряде практических задач воздействие $t_{\text{пр}}(\rho, \tau)$ отсутствует, что эквивалентно условию $\zeta_3(\rho) = 0$. Для этого частного случая вместо (10.3.15) получаем

$$z_3(\rho, \tau) = \frac{L^2}{\lambda(\rho)} w(\rho, \tau). \quad (10.3.27)$$

Структура передаточных функций $Y_1(\rho, s)$ и $Y_2(\rho, s)$ из (10.3.18) сохраняется, коэффициенты $D_0(\rho)$ и $E(\rho)$ взамен (10.3.21) и (10.3.23) находятся по формулам

$$D_0(\rho) = \frac{1}{E(\rho)} \left[(2 + \zeta_2)(1 + \rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \rho^2 \right]; \quad (10.3.28)$$

$$E(\rho) = 2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2) \left[1 + K(\rho) \rho^2 \right] - \zeta_1(2 + \zeta_2)K(\rho),$$

а в выражении (10.3.22) необходимо принять $\zeta_3(\rho) = 0$.

Интегральный метод. В отличие от предыдущего варианта объект формируется не только изменением образующей поверхности $\sigma(\rho)$, но также

изменением его боковой поверхности, т.е. к условию (10.3.2) добавляется следующее:

$$dF = Lp(\rho)d\rho; \quad F = L \int_0^1 p(\rho)d\rho, \quad (10.3.29)$$

где dF – элементарная, а F – полная боковая поверхность тела; $p(\rho)$ – периметр сечения $\rho(\rho)$. Величины L , $\sigma(\rho)$, $p(\rho)$ определяются спецификой геометрии конкретного объекта с учетом соотношений (10.3.1), (10.3.2), (10.3.29) и рекомендаций, данных в гл. 8 и 9.

Неоднородность теплофизических свойств задается величинами $\rho_{\text{пл}}(\rho)$, $c(\rho)$, $\lambda(\rho)$, $\alpha(\rho)$. К перечисленной выше системе тепловых воздействий добавляется воздействие через боковую поверхность F среды с температурой $t_6(\rho, \tau)$ и источников теплоты с плотностью $q_6(\rho, \tau)$. Интенсивность теплообмена поверхности F со средой характеризуется коэффициентом теплоотдачи $\alpha_6(\rho)$.

При сделанных допущениях и принятии для объекта одномерности поля температур $t(\rho, \tau)$ получаем интегральное уравнение теплообмена [2.30]:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{c1} S_1}{L} t(0, \tau) + \frac{\alpha_{c2} S_2}{L} t(1, \tau) + \int_0^1 [\alpha_{\text{np}}(\rho) \sigma(\rho) + \alpha_6(\rho) p(\rho)] t(\rho, \tau) d\rho + \\ & + \int_0^1 c(\rho) \rho_{\text{пл}}(\rho) \sigma(\rho) \frac{\partial t(\rho, \tau)}{\partial \tau} d\rho = \frac{\alpha_{c1} S_1}{L} t_{c1}(\tau) + \frac{\alpha_{c2} S_2}{L} t_{c2}(\tau) + \\ & + \int_0^1 \alpha_{\text{np}}(\rho) \sigma(\rho) t_{\text{np}}(\rho, \tau) d\rho + \int_0^1 \alpha_6(\rho) p(\rho) t_6(\rho, \tau) d\rho + \\ & + \frac{S_1}{L} q_1(\tau) + \frac{S_2}{L} q_2(\tau) + \int_0^1 p(\rho) q_6(\rho, \tau) d\rho + \int_0^1 \sigma(\rho) w(\rho, \tau) d\rho. \end{aligned} \quad (10.3.30)$$

Теплообмен на границах S_1 и S_2 объекта отвечает условиям (10.3.6). Структура решения для изображения $T(\rho, s)$ температуры объекта $t(\rho, \tau)$ при параболической аппроксимации (10.2.12) имеет вид (10.1.8), где $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$ находятся согласно (10.1.9),

$$Z_3(s) = \varphi_{\text{np}} T_{\text{np}}(s) + \varphi_6 T_6(s) + \varphi_w W(s) + \varphi_q Q_6(s); \quad (10.3.31)$$

$$z_{\text{H}}(\rho) = \varphi_{\text{H}} t_{\text{H}}(\rho), \quad (10.3.32)$$

а функции $Y_i(\rho, s)$, где $i=1, 2, 3$, являются передаточными по отношению к соответствующему воздействию со структурой, определяемой выражениями (10.2.17) и (10.2.18).

Коэффициенты передаточных функций находятся из соотношений, полученных в работе [2.30]:

$$B_0 = \frac{\zeta_1}{E} \left\{ \begin{array}{l} [2\Lambda_1 + 2I_1 - I_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2 + I_1 - I_2)\zeta_2] - \\ - [2I_0 + (2\Lambda_2 + I_0 - I_2)\zeta_2] \rho + \\ + [I_0 + (\Lambda_2 - \Lambda_1 + I_0 - I_1)\zeta_2] \rho^2 \end{array} \right\}; \quad (10.3.33)$$

$$B_1 = \frac{\zeta_1}{E} \left\{ \begin{array}{l} [2J_1 - J_2 + (J_1 - J_2)\zeta_2] - [2J_0 + (J_0 - J_2)\zeta_2] \rho + \\ + [J_0 + (J_0 - J_1)\zeta_2] \rho^2 \end{array} \right\}; \quad (10.3.34)$$

$$C_0 = \frac{\zeta_2}{E} \left\{ (2\Lambda_2 - I_2)(1 + \zeta_1\rho) + [I_0 + (\Lambda_1 - \Lambda_2 + I_1)\zeta_1] \rho^2 \right\}; \quad (10.3.35)$$

$$C_1 = \frac{\zeta_2}{E} \left[-J_2(1 + \zeta_1\rho) + (J_0 + J_1\zeta_1)\rho^2 \right]; \quad (10.3.36)$$

$$D_0 = \frac{\Lambda_0}{E} \left[(2 + \zeta_2)(1 + \zeta_1\rho) - (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_1\zeta_2)\rho^2 \right], \quad (10.3.37)$$

$$E = [2\Lambda_1\zeta_1 + 2\Lambda_2\zeta_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\zeta_1\zeta_2] + [2I_0 + (2I_1 - I_2)\zeta_1 + (I_0 - I_2)\zeta_2 + (I_1 - I_2)\zeta_1\zeta_2] \quad (10.3.38)$$

Коэффициент ε и обратная ему величина m имеют смысл показателя тепловой инерции и соответственно темпа теплообмена объекта при комплексных тепловых воздействиях:

$$\varepsilon = \frac{1}{m} = \frac{2J_0 + (2J_1 - J_2)\zeta_1 + (J_0 - J_2)\zeta_2 + (J_1 + J_2)\zeta_1\zeta_2}{[2\Lambda_1\zeta_1 + 2\Lambda_2\zeta_2 + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\zeta_1\zeta_2] + [2I_0 + (2I_1 - I_2)\zeta_1] + [(I_0 - I_2)\zeta_2 + (I_1 - I_2)\zeta_1\zeta_2]}. \quad (10.3.39)$$

В выражениях (10.3.31), (10.3.32)-(10.3.39) для сокращения записи введены обозначения:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda(0)S_1}{L}; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda(1)S_2}{L}; \quad \Lambda_0 = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad (10.3.40)$$

$$J_0 = L \int_0^1 \mu(\rho) d\rho; \quad J_1 = L \int_0^1 \mu(\rho) \rho d\rho; \quad J_2 = L \int_0^1 \mu(\rho) \rho^2 d\rho; \quad (10.3.41)$$

$$I_0 = L \int_0^1 v(\rho) d\rho; \quad I_1 = L \int_0^1 v(\rho) \rho d\rho; \quad I_2 = L \int_0^1 v(\rho) \rho^2 d\rho; \quad (10.3.42)$$

$$\mu(\rho) = c(\rho) \rho_{\text{пл}}(\rho) \sigma(\rho); \quad v(\rho) = \alpha_{\text{нр}}(\rho) \sigma(\rho) + \alpha_6(\rho) p(\rho). \quad (10.3.43)$$

Ранее введенные, зависящие от ρ , тепловые воздействия и начальное распределение температуры в объекте $t_{\text{н}}(\rho)$ целесообразно представить в виде произведений координатных $f(\rho)$ и временных $t(\tau)$ функций:

$$\left. \begin{aligned} t_{\text{нр}}(\rho, \tau) &= f_{\text{нр}}(\rho) t_{\text{нр}}(\tau); & t_6(\rho, \tau) &= f_6(\rho) t_6(\tau); \\ w(\rho, \tau) &= f_w(\rho) w(\tau); \\ q_\sigma(\rho, \tau) &= f_q(\rho) q_6(\tau); & t_{\text{н}}(\rho) &= f_{\text{н}}(\rho) t_{\text{н}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.44)$$

С учетом (10.3.44) коэффициенты воздействия $Z_3(s)$ [см. (10.3.31)] имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{нр}} &= \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 \alpha_{\text{нр}}(\rho) \sigma(\rho) f_{\text{нр}}(\rho) d\rho; & \Phi_6 &= \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 \alpha_6(\rho) p(\rho) f_6(\rho) d\rho; \\ \Phi_w &= \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 \sigma(\rho) f_w(\rho) d\rho; & \Phi_q &= \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 p(\rho) f_q(\rho) d\rho; \\ \Phi_{\text{н}} &= \frac{L}{\Lambda_0} \int_0^1 c(\rho) \rho_{\text{пл}}(\rho) \sigma(\rho) f_{\text{н}}(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (10.3.45)$$

Приближенное уравнение взаимосвязи температуры объекта $t(\rho, \tau)$ с воздействиями $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$, $z_3(\tau)$, сохраняется [см. выражение (10.2.31)], причем воздействие $z_3(\tau)$, на основе (10.3.31) запишется в виде

$$z_3(\tau) = \Phi_{\text{нр}} t_{\text{нр}}(\tau) + \Phi_6 t_6(\tau) + \Phi_w w(\tau) + \Phi_q q_6(\tau). \quad (10.3.46)$$

В отличие от выражений (10.3.25), (10.3.22) показатель тепловой инерции ε в формуле (10.3.39) не зависит от ρ . Динамика теплообмена в выб-

ранной точке внутри объекта определяется координатной зависимостью коэффициентов B_0, B_1, C_0, C_1, D_0 в соотношениях (10.3.33)—(10.3.37).

Уравнения (10.1.8), (10.2.17), (10.2.18) при использовании выражений (10.3.33)—(10.3.45) обобщают в пределах сделанных ограничений результаты, изложенные в гл. 8 и 9. При этом общая структура зависимостей сохраняется. Например, в стационарном режиме из выражения (10.2.31) находим

$$t_{\text{ст}}(\rho) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} t(\rho, \tau) = B_0 z_{1\text{ст}} + C_0 z_{2\text{ст}} + D_0 z_{3\text{ст}}. \quad (10.3.47)$$

Амплитудные характеристики температуры объекта в соответствии с видом передаточных функций (10.2.17), (10.2.18) находятся по обычным правилам:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\omega) &= B_0 \sqrt{\frac{1 + [(B_1/B_0)\omega]^2}{1 + \varepsilon^2 \omega^2}}; \\ A_2(\omega) &= C_0 \sqrt{\frac{1 + [(C_1/C_0)\omega]^2}{1 + \varepsilon^2 \omega^2}}; \\ A_3(\omega) &= \frac{D_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \omega^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.48)$$

Поле тепловых потоков и их значения на границах объекта оцениваются по рекомендациям, приведенным в [2.8]. Детальный анализ динамики теплообмена рассмотренных выше моделей выходит за рамки объема данной книги.

ГЛАВА 11. МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

11.1. Решение основных краевых задач для уравнения Пуассона

Рассмотрим существо этого метода на примере анализа уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad (11.1.1)$$

для прямоугольника $-a, a; -b, b$ при однородных граничных условиях третьего рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0, \quad (11.1.2)$$

где n – направление внешней нормали к границе, $\sigma = \sigma_0 = \text{const} > 0$.

Для упрощения примем $f = f_0 = \text{const}$, что не является ограничением. Далее будет рассмотрен пример, когда $f \neq \text{const}$. Ввиду симметричности поставленной краевой задачи, а также учитывая ограничение, наложенное на правую часть, целесообразно рассматривать эквивалентную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f_0 \quad (11.1.3)$$

внутри прямоугольника $0, a; 0, b$ и граничных условиях

$$\begin{aligned} \text{а) } \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} &= 0, & \text{б) } \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_0 u \right]_{x=a} &= 0, \\ \text{в) } \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} &= 0, & \text{г) } \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_0 u \right]_{y=b} &= 0. \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

на контуре.

Суть предлагаемого метода в применении к краевой задаче (11.1.3)-(11.1.4) заключается в следующем. На первом этапе осредняем искомую функцию по одной из независимых переменных, например, по y , для чего к уравнению (11.1.3) и условиям (11.1.4, а), (11.1.4, б) на контуре применяем осредняющий оператор I_y :

$$I_y [u(x, y)] = \frac{1}{b} \int_0^b u(x, y) dy = \langle u_y(x) \rangle = \langle u_y \rangle.$$

Благодаря линейности оператор I_y применяется к уравнению (11.1.3) почленно.

$$I_y \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{b} \int_0^b u dy \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle u_y \rangle,$$

$$I_y \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \frac{1}{b} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b}.$$

Согласно граничным условиям (11.1.4, в) и (11.1.4, з)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=b} = -\sigma_0 u(x, y=b),$$

следовательно,

$$I_y \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = -\frac{\sigma_0}{b} u(x, y=b) = -\frac{\sigma_0}{b} \frac{u(x, y=b)}{\langle u_y \rangle} \langle u_y \rangle = -\frac{\sigma_0}{b} \Psi \langle u_y \rangle.$$

Здесь введен коэффициент

$$\Psi = \Psi(x) = \frac{u(x, y=b)}{\langle u_y \rangle},$$

характеризующий неравномерность функции на прямой $X = x$. Коэффициент Ψ является функцией переменной x , однако, как показали расчеты для ряда конкретных задач, зависимость эта слабая и в первом приближении хорошо аппроксимируется отношением средних значений соответствующих функций, то есть

$$\Psi \cong \langle \Psi \rangle = \frac{u_x(y=b)}{\langle u_{yx} \rangle}. \quad (11.1.5)$$

Наконец, $I_y : [f_0] = f_0$. Суммируя результаты почленного применения оператора I_y к левой части уравнения (11.1.3) и приравнявая к преобразованию правой, получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\langle u_y \rangle$:

$$\frac{d^2 \langle u_y \rangle}{dx^2} - p^2 \langle u_y \rangle = -f_0, \quad p^2 = \frac{\sigma_0 \langle \Psi \rangle}{b}.$$

Граничные условия (11.1.4, а)-(11.1.4, б) примут вид:

$$\left. \frac{d^2 \langle u_y \rangle}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{d \langle u_y \rangle}{dx} + \sigma_0 \langle u_y \rangle \right]_{x=a} = 0. \quad (11.1.7)$$

Интегрируя уравнение (11.1.6) и удовлетворяя граничным условиям (11.1.7) получим:

$$\langle u_y \rangle = \frac{f_0}{p^2} \varphi_x, \quad \varphi_x = 1 - \Omega \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} pa}, \quad \Omega = \left(1 + \frac{p \operatorname{th} pa}{\sigma_0} \right)^{-1}.$$

Обратимся к исходному уравнению (11.1.3) и перепишем его в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f_0.$$

Преобразуем правую часть последнего выражения, пользуясь уравнением (11.1.6) и проводя приближенную замену

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{\partial^2 \langle u_y \rangle}{\partial x^2} = p^2 \langle u_y \rangle - f_0 = f_0 (\varphi_x - 1). \quad (11.1.9)$$

Приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = -f_0 \varphi_x, \quad (11.1.10)$$

где \tilde{u} – приближенное решение краевой задачи (11.1.3)-(11.1.4) с учетом принятых допущений (11.1.5) и (11.1.9).

Таким образом, если рассматривать переменную x как параметр, исходная краевая задача сведена к одномерной задаче для уравнения (11.1.10) и граничных условий

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \sigma_0 \tilde{u} \right]_{y=b} = 0, \quad (11.1.11)$$

которые обеспечивают выполнение условий (11.1.4, в)-(11.1.4, з).

Уравнение (11.1.10) легко интегрируется и при граничных условиях (11.1.11) имеет решение:

$$\tilde{u} = \frac{1}{2} f_0 \varphi_x \varphi_y, \quad \varphi_y = b \left(\frac{2}{\sigma_0} + b \right) - y^2. \quad (11.1.12)$$

Остается определить величину p , которая выражается через коэффициент $\langle \Psi \rangle$, и тем самым будет завершено нахождение приближенного решения рассматриваемой краевой задачи.

Пользуясь приближенным решением (11.1.12), согласно формуле (11.1.5) находим

$$\langle \Psi \rangle = \frac{\langle u_x(y=b) \rangle}{\langle u_{yx} \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_0 b}{3}}.$$

Следовательно,

$$p^2 = \frac{1}{b \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{b}{3} \right)}.$$

Таким образом, приближенное решение краевой задачи (11.1.3)-(11.1.4) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2} f_0 \varphi_x \varphi_y, \quad \varphi_x = 1 - \Omega \frac{\operatorname{ch} p x}{\operatorname{ch} p a}, \quad \Omega = \left(1 + \frac{p t h p a}{\sigma_0} \right)^{-1} \\ \varphi_y &= b \left(\frac{2}{\sigma_0} + b \right) - y^2, \quad p^2 = \frac{1}{b \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{b}{3} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (11.1.13)$$

Погрешность полученного приближенного решения рассмотрим на примерах.

11.2. Уточнение приближенного решения (второе приближение)

Решение (11.1.13) можно рассматривать как первое приближение решения краевой задачи (11.1.3), (11.1.4). Укажем способ уточнения первого приближения. Идея второго приближения заключается в следующем: пользуясь полученным приближенным решением (11.1.13), и производя замену в уравнении (11.1.3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2},$$

что значительно лучше, чем (11.1.1)-(11.1.9), сводим исходную двумерную задачу к одномерной.

Так как

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \right] = -\frac{1}{2} f_0 p^2 (1 - \varphi_x) \varphi_y,$$

после выполнения указанной выше замены, уравнение (11.1.3) примет вид

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial y^2} \right] = -f_0 + \frac{1}{2} f_0 p^2 (1 - \varphi_x) \varphi_y. \quad (11.2.1)$$

Подчиним \tilde{u}_2 граничным условия типа (11.1.4, в) и (11.1.4, з):

$$\left[\frac{d\tilde{u}_2}{dy} \right]_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{d\tilde{u}_2}{dy} + \sigma_0 \tilde{u}_2 \right]_{y=b} = 0. \quad (11.2.2)$$

Интегрируя уравнение (11.2.1) и удовлетворяя условиям (11.2.2), получаем второе приближение:

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2} f_0 \left[\varphi_y + p^2 (1 - \varphi_x) (\varphi_{1y} - Q) \right],$$

$$\varphi_{1y} = b \left(\frac{2}{\sigma_0} + b \right) \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12},$$

$$Q = b^2 \left[\frac{2}{\sigma_0} \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{b}{3} \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{2}{\sigma_0} + \frac{5b}{6} \right) \right]. \quad (11.2.3)$$

В качестве p можно воспользоваться его выражением, полученным из первого приближения, но можно и уточнить, определяя его из второго приближения

$$p^2 = \frac{a - p\Omega bthpa \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{b}{3} \right)}{b^2 \left\{ a \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{b}{3} \right) - bp\Omega thpa \left[\frac{2}{15} b^2 + \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{1}{\sigma_0} + \frac{2b}{3} \right) \right] \right\}}. \quad (11.2.4)$$

Для иллюстрации возможностей метода, а также для сравнения с известными приближенными методами, рассмотрим следующий пример.

Пусть требуется найти решение краевой задачи $\Delta u = -1$ внутри квадрата $|x| \leq 1, |y| \leq 1, u + \partial u / \partial n = 0$ на контуре $|x| = 1, |y| = 1, n$ — направление внешней нормали к границе.

Физически u можно интерпретировать как избыток температуры в точках поперечного сечения призмы с равномерно распределенными источниками тепла относительно температуры окружающей среды. При этом предполагается, что теплообмен на гранях подчиняется закону Ньютона.

Приближенное решение данной задачи по изложенному выше методу осреднения может быть получено из решения краевой задачи (11.1.3)-(11.1.4) при $\sigma_0 = 1, a = b = 1, f_0 = 1$.

Выпишем первое и второе приближения решения, пользуясь, соответственно, формулами (11.1.13) и (11.2.3):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \Omega \frac{\text{ch}px}{\text{ch}p} \right) (3 - y^2), \\ \tilde{u}_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \Omega \frac{\text{ch}px}{\text{ch}p} \right) (3 - y^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 3 - y^2 + \frac{1}{2} \Omega p^2 \frac{\text{ch}px}{\text{ch}p} \left[y^2 \left(3 - \frac{y^2}{6} \right) - \frac{49}{6} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\Omega = (1 + pthp)^{-1}, \quad p = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для сравнения приведем решения рассматриваемой задачи, полученные другими методами. Решения эти заимствованы из книги [2.34].

а) Метод Ритца

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{64} [52 - 15(x^2 + y^2)],$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{168} [139 - 45(x^2 + y^2) + 15x^2y^2].$$

б) Метод Бубнова-Галеркина

$$\tilde{u}_3 = \frac{5}{54} [9 - 3(x^2 + y^2) + x^2y^2].$$

в) Метод наименьших квадратов

$$\tilde{u}_3 = \frac{15}{161} [9 - 3(x^2 + y^2) + x^2y^2].$$

В таблице 11.2.1 приведены значения $\tilde{u}(0,0)$, рассчитанные по приведенным выше приближенным формулам и даны их относительные погрешности $\delta \tilde{u}_2 = (\tilde{u}_2 - \tilde{u}_2) / \tilde{u}_2 \cdot 100\%$.

Как видно из таблицы, метод осреднения, уже в первом приближении, дает ту же точность, что и решения Ритца, Бубнова-Галеркина и наименьших квадратов, полученные во втором и третьем приближениях. Таким образом, изложенный способ уточнения приближенного решения, полученного по методу осреднения, дает значительное улучшение.

Таблица 11.2.1

Сравнение точности решения основных краевых задач различными методами

Метод	Точное решение	Осреднения		Ритца		Бубнова-Галеркина	Наименьших квадратов
		\check{y}_1	\check{y}_2	\check{y}_2	\check{y}_3		
приближение	—		\check{y}_2	\check{y}_2	\check{y}_3	\check{y}_3	\check{y}_3
$\check{y}(0, 0)$	0,8212	0,8322	0,8183	0,8125	0,8274	0,8333	0,8385
$\delta\check{y}(\%)$	—	+1,34	-0,35	-1,1	+0,7	+1,5	+2,1

11.3. Приближенное построение функции Грина

Исследование тепловых режимов некоторых электронных приборов (вычислительных устройств с высокой плотностью монтажа, накопителей оперативных запоминающих устройств и др.) приводит к необходимости математического анализа температурного поля анизотропного однородного параллелепипеда с внутренним источником тепла, различным образом распределенного внутри параллелепипеда. Наиболее часто возникает необходимость анализа температурного поля моделей, представленных на рис. 11.3.1. В общем случае задача сводится к отысканию функции $t(x, y, z)$, которая внутри параллелепипеда удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = -q_V \cdot 1\{I\}, \quad (11.3.1)$$

а на границе краевым условиям третьего рода

$$\left[\frac{\partial t}{\partial i} \pm \frac{\alpha_i}{\lambda_i} (t - t_c) \right]_{i=\pm \frac{L_i}{2}} = 0. \quad (11.3.2)$$

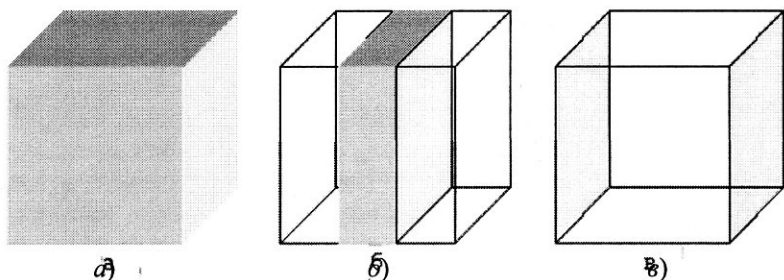


Рис. 11.3.1

Здесь $i = (x, y, z)$ – координаты; λ_i – коэффициент теплообмена в соответствующем направлении; α_i – коэффициент теплообмена на грани $i = \pm L_i/2$; t_c – температура среды; q_V – удельная мощность источников тепла;

$$1\{I\} = \begin{cases} 1, & \text{в области } I, \text{ занятой источником теплоты,} \\ 0, & \text{– всюду вне области } I; \end{cases}$$

Введем следующие безразмерные величины и параметры:

$$\bar{i} = \pm \frac{2i}{L_i}, \text{Bi}_i = \frac{\alpha_i L_i}{2\lambda_i}, \varepsilon_i = \frac{\lambda_i L_m^2}{\lambda_m L_i^2}, N = \frac{4\lambda_m(t-t_c)}{q_m L_m^2}, \quad (11.3.3)$$

где, q_m, λ_m, L_m – масштабные значения соответствующих величин, которые выбираются исходя из соображений упрощающих окончательное выражение искомого решения. В дальнейшем будем считать, точно $q_m = q_v$. Учитывая симметричное расположение источников тепла, симметрию граничных условий и используя безразмерные величины и параметры (11.3.3), краевую задачу (11.3.1)–(11.3.2) можно сформулировать следующим способом:

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 N}{\partial \bar{x}^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 N}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 N}{\partial \bar{z}^2} = -1 \{I\} \quad (11.3.4)$$

с граничными условиями

$$\left[\frac{\partial N}{\partial \bar{i}} \right]_{\bar{i}=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial \bar{i}} + \text{Bi}_i N \right]_{\bar{i}=1} = 0 \quad (11.3.5)$$

Обсудим пути решения поставленной краевой задачи.

Точное аналитическое решение данной задачи может быть получено методом конечных интегральных преобразований [2.36]. Решение при этом получается громоздким в виде суммы двойного ряда, которая медленно сходится при больших значениях критерия Био (Bi), а также в случае источников занимающих области ступенчатой формы.

Опыт применения методов Ритца, Бубнова-Галеркина и Канторовича показал, что они позволяют получить удовлетворительные решения только в частных случаях, например, в случае, когда источники теплоты распределены по всему объему. При применении к задачам с локальными источниками тепла, выяснилось, что для обеспечения требуемой точности необходимо брать высокие приближения, в результате чего решение становится громоздким, а вычислительные трудности, связанные с нахождением неопределенных параметров, резко возрастают. Таким образом, решения Ритца, Бубнова-Галеркина и Канторовича задач с локальными источниками тепла теряют преимущества перед точными.

Применение метода осреднения к рассматриваемой краевой задаче позволило получить, даже в случае источника, занимающего ступенчатую область, простое по форме и удовлетворительное по точности решение, уже в первом приближении. В ближайших параграфах излагаются полученные результаты.

Рассмотрим различные виды занимаемой источником области И в сформулированной в предыдущем параграфе задаче.

Удобно найти функцию Грина краевой задачи (11.3.4)-(11.3.5) так как с ее помощью легко построить решение для специальных видов области И.

Функция Грина рассматриваемой краевой задачи удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{x}^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} = -\delta(\bar{x} - x)\delta(\bar{y} - y)\delta(\bar{z} - z) \quad (11.3.6)$$

и граничным условиям

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \bar{i}} \right]_{\bar{i}=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial G}{\partial \bar{i}} + \text{Bi}_i G \right]_{\bar{i}=1} = 0. \quad (11.3.7)$$

Здесь $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, x, y, z)$ – функция Грина; $\delta(\bar{i} - i)$ – дельта-функции Дирака с особенностью в точке M с координатой $\bar{i} = (x, y, z) \in \Omega$.

Используя принцип суперпозиции, решение краевой задачи (11.3.4), (11.3.5) для произвольной области И строим в виде:

$$N = \iiint_{\Omega} 1 \{ \text{И} \} G d\Omega = \iiint_{\text{И}} G d\Omega, \quad d\Omega = dx dy dz. \quad (11.3.8)$$

Физически задача отыскания функции Грина эквивалентна нахождению стационарного температурного поля единичного источника тепла, локализованного в точке $M(x, y, z) \in \Omega$.

Для нахождения приближенной функции Грина к левой и правой частям уравнения (11.3.6) применим оператор осреднения

$$I_{\bar{y}\bar{z}}[f] = \int_0^1 \int_0^1 f d\bar{y} d\bar{z} = \langle f_{\bar{y}\bar{z}} \rangle.$$

Виду линейности оператор $I_{\bar{y}\bar{z}}$ применяется к левой части уравнения (11.3.6) почленно:

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \left[\varepsilon_x \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{x}^2} \right] = \varepsilon_x \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{x}^2} d\bar{y} d\bar{z} = \varepsilon_x \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \int_0^1 \int_0^1 G d\bar{y} d\bar{z} = \varepsilon_x \frac{\partial^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{x}^2},$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \left[\varepsilon_y \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} \right] = \varepsilon_y \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} d\bar{y} d\bar{z} = \varepsilon_y \int_0^1 \left[\frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} - \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \right] d\bar{z},$$

но согласно граничным условиям (11.3.7)

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} - \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = -\text{Bi}_y G \Big|_{\bar{y}=1}.$$

Следовательно,

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \left[\varepsilon_y \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} \right] = -\varepsilon_y \text{Bi}_y \int_0^1 G \Big|_{\bar{y}=1} d\bar{z}.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \left[\varepsilon_y \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} \right] = -\varepsilon_y \text{Bi}_y \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle \frac{\int_0^1 G \Big|_{\bar{y}=1} d\bar{z}}{\langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle} = -\varepsilon_y \text{Bi}_y \Psi_y \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle.$$

Здесь $\Psi_y(\bar{x})$ коэффициент, характеризующий неравномерность температурного поля в направлении $O\bar{x}$ и вычисляемый по формуле

$$\Psi_y(\bar{x}) = -\frac{\int_0^1 G \Big|_{\bar{y}=1} d\bar{z}}{\langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle}.$$

Предположим, что имеет место следующее приближенное равенство (допущение типа (11.1.5)):

$$\Psi_y \cong -\frac{\int_0^1 \int_0^1 G \Big|_{\bar{y}=1} d\bar{z} d\bar{x}}{\int_0^1 G \Big|_{\bar{y}\bar{z}} d\bar{x}} = \frac{\langle G_{\bar{x}\bar{z}}(\bar{y}=1) \rangle}{\langle G_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \rangle}, \quad (11.3.9)$$

где $G_{\bar{x}\bar{z}}(\bar{y} = 1)$ – среднее интегральное значение функции на поверхности $\bar{y} = 1$; $G_{\bar{x}\bar{y}\bar{z}}$ – среднеобъемное значение функции.

Таким образом, окончательно

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \left[\varepsilon_y \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} \right] = -\varepsilon_y \Psi_y \text{Bi}_y \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle,$$

и аналогично

$$I_{\bar{y}\bar{z}} \left[\varepsilon_z \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} \right] = -\varepsilon_z \Psi_z \text{Bi}_z \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle.$$

Применяя оператор $I_{\bar{y}\bar{z}}$ к правой части, получим

$$I_{\bar{y}\bar{z}} [-\delta(\bar{x} - x)\delta(\bar{y} - y)\delta(\bar{z} - z)] = -\delta(\bar{x} - x) = -\delta(\bar{x} - x).$$

Суммируя результаты почленного действия оператора $I_{\bar{y}\bar{z}}$ в левой части и приравнявая к преобразованию $\delta(\bar{x} - x)$ правой части, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $G_{\bar{y}\bar{z}}$

$$\frac{\partial^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{x}^2} - p_x^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_x} \delta(\bar{x} - x), \quad (11.3.10)$$

$$p_x^2 = \frac{\varepsilon_{\bar{y}}}{\varepsilon_{\bar{x}}} \Psi_y \text{Bi}_y + \frac{\varepsilon_{\bar{z}}}{\varepsilon_{\bar{x}}} \Psi_z \text{Bi}_z.$$

Применяя оператор $I_{\bar{y}\bar{z}}$ к граничным условиям (11.3.7) при $\bar{x} = 0; 1$, получим граничные условия для уравнения (11.3.11)

$$\left. \frac{dG_{\bar{y}\bar{z}}}{d\bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \left[\frac{dG_{\bar{y}\bar{z}}}{d\bar{x}} + \text{Bi}_x \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle \right]_{\bar{x}=1} = 0. \quad (11.3.12)$$

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных, получим общее решение уравнения (11.3.12)

$$G_{\bar{y}\bar{z}} = C_1 \text{sh} p_x \bar{x} + C_2 \text{ch} p_x \bar{x} - 1(\bar{x} - x) \frac{\text{sh} p_x (\bar{x} - x)}{\varepsilon_x p_x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (11.3.12),

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{\varepsilon_x p_x} \frac{\operatorname{ch} p_x \left(1 - x + \frac{\operatorname{Bi}_x}{p_x} \operatorname{sh} p_x (1 - x) \right)}{\operatorname{sh} p_x + \frac{\operatorname{Bi}_x}{p_x} \operatorname{ch} p_x}.$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \langle G_{\bar{y}\bar{z}}(\bar{x}, x) \rangle = & \frac{1}{\varepsilon_x p_x} \left\{ a_x \left[\operatorname{ch} p_x (1 - x) + \frac{\operatorname{Bi}_x}{p_x} \operatorname{sh} p_x (1 - x) \right] \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{ch} p_x \bar{x} - 1(\bar{x} - x) \operatorname{sh} p(\bar{x} - x) \right\} \end{aligned} \quad (11.3.13)$$

где $a_x = \left(\operatorname{sh} p_x + \frac{\operatorname{Bi}_x}{p_x} \operatorname{ch} p_x \right)^{-1}$, $1(\bar{x} - x)$ – единичная функция.

Вернемся к уравнению (11.3.6), которое перепишем в виде

$$\varepsilon_y \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} = -\varepsilon_x \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{x}^2} \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) \delta(\bar{z} - z).$$

Далее заменяя $\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{x}^2}$ приближенно выражением для

$$\frac{\partial^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{x}^2} = p_x^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle - \frac{1}{\varepsilon_x} \delta(\bar{x} - x), \quad (11.3.14)$$

получим

$$\varepsilon_y \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial \bar{z}^2} = -\varepsilon_x p_x^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle + \delta(\bar{x} - x) - \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) \delta(\bar{z} - z). \quad (11.3.15)$$

Здесь \bar{G} – приближение G с учетом допущений (11.3.9) и (11.3.14).

Применяя к уравнению (11.3.5) оператор осреднения I_z и допущения типа (11.3.9) и (11.3.14), получим систему уравнений относительно $\langle \bar{G}_y \rangle$:

$$\frac{\partial^2 \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{y}^2} - p_x^2 \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_y} \left\{ \varepsilon_x p_x^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle - \delta(\bar{x} - x) \right\} + \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y)$$

$$\left[\frac{\partial \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{y}} \right]_{\bar{y}=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{y}} + \text{Bi}_y \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle \right]_{\bar{y}=1} = 0, \quad (11.3.18)$$

откуда

$$\langle G_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_y p_y} \left\{ a_y \delta(\bar{x} - x) \left(\text{ch} p_y (y-1) + \frac{\text{Bi}_y}{p_y^2} \text{sh} p_y (1-y) \right) - a_y \frac{b_x}{p_y} \frac{\text{Bi}_y}{p_y} \text{ch} p_y \bar{y} - \delta(\bar{x} - x) [(\bar{y} - y) \text{sh} p_y (\bar{y} - y) + \frac{b_x}{p_y}] \right\}, \quad (11.3.19)$$

где

$$a_y = \left(\text{ch} p_y + \frac{\text{Bi}_y}{p_y} \text{sh} p_y \right)^{-1}, \quad p_y^2 = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} \text{Bi}_z \Psi_z,$$

$$b_x = \varepsilon_x p_x^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle - \delta(\bar{x} - x).$$

И, наконец, заменяя в уравнении (11.3.15)

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{y}^2} \text{ на } \frac{\partial^2 \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle}{\partial \bar{y}^2}, \text{ равное}$$

$$p_y^2 \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle - \frac{1}{\varepsilon_y} \left\{ \varepsilon_x p_x^2 \langle G_{\bar{y}\bar{z}} \rangle - \delta(\bar{x} - x) + \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) \right\},$$

приходим к следующему уравнению для функции \tilde{G} :

$$\varepsilon_z \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \bar{z}^2} = -\varepsilon_y p_y^2 \langle \bar{G}_{\bar{z}} \rangle + \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) - \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) \delta(\bar{z} - z)$$

при граничных условиях

$$\left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{z}} + \text{Bi}_z \tilde{G} \right]_{\bar{z}=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{z}} \right]_{\bar{z}=0} = 0,$$

где \tilde{G} – приближение функции G с учетом допущений (11.3.9) и (11.3.14), принятых на всех этапах.

Интегрируя последнее уравнение и удовлетворяя граничным условиям, получим

$$\tilde{G} = \frac{1}{\varepsilon_z} \left\{ \left[\delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) - \varepsilon_y p_y^2 < \bar{G}_z > \right] \frac{\bar{z}^2}{2} + \varepsilon_y p_y^2 < \bar{G}_z > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\text{Bi}_z} \right) + \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) \left(\frac{1}{2} - z \right) - \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) l(\bar{z} - z) \right\}. \quad (11.3.17)$$

Функция \tilde{G} (11.3.17) является приближенным решением краевой задачи (11.3.6), (11.3.7) и тем самым приближением функции Грина краевой задачи (11.3.4), (11.3.5).

Подставив (11.3.13) и (11.3.16) в (11.3.17) получим приближенное выражение для функции Грина:

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & \frac{1}{2\varepsilon_z} \left\{ \left(\frac{2}{\text{Bi}_z} + 1 - \bar{z}^2 \right) \left[p_y \delta(\bar{x} - x) \left\{ a_y \left[\text{ch} p_y (1 - y) + \frac{\text{Bi}_y}{p_y} \text{sh} p_y (1 - y) \right] \text{sh} p_y \bar{y} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - l(\bar{y} - y) \text{sh} p_y (\bar{y} - y) \right\} + \left\{ a_x p_x \left[\text{ch} p_x (1 - x) + \frac{\text{Bi}_x}{p_x} \text{sh} p_x (1 - x) \right] \text{sh} p_x \bar{x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - p_x l(\bar{x} - x) \text{sh} p_x (\bar{x} - x) - \delta(\bar{x} - x) \right\} \left(1 - a_y \frac{\text{Bi}_y}{p_y} \text{ch} p_y \bar{y} \right) + \right. \\ & \left. + \delta(\bar{x} - x) \delta(\bar{y} - y) \left[\bar{z}^2 - 2z - 2(\bar{z} - z) l(\bar{z} - z) + 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

11.4. Частные решения для параллелепипеда с источниками тепла

Пользуясь принципом суперпозиции (11.3.8) и интегрирую приближенную функцию Грина (11.3.18) по области, занятой конкретным источником тепла, находим распределение температуры для различных частных случаев.

Источники тепла равномерно распределены в параллелепипеде (рис. 11.3.1, а)

Распределение температуры строится приближенно по формуле (11.3.8)

$$\tilde{N} = \iiint_{\text{И}} \tilde{G} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G} dx dy dz.$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$\tilde{N} = \frac{1}{2\varepsilon_x} \varphi_x \varphi_y \varphi_z, \quad \varphi_x = 1 - \Omega_x \frac{\text{ch} p_x \bar{x}}{\text{ch} p_x}, \quad \varphi_y = 1 - \Omega_y \frac{\text{ch} p_y \bar{y}}{\text{ch} p_y},$$

$$\varphi_z = \frac{2}{\text{Bi}_z} + 1 - \bar{z}^2, \quad \Omega_i = \left(1 + \frac{p_i \text{th} p_i}{\text{Bi}_i} \right)^{-1}. \quad (11.4.1)$$

Необходимо еще определить параметры p_x и p_y , которые, в свою очередь, согласно формулам (11.3.10) и (11.3.16), определяются через коэффициенты неравномерности Ψ_x, Ψ_y . Последние легко находятся их допущения (11.3.9) и с использованием приближенного решения (11.4.1)

$$\Psi_z = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_z}{3}}, \quad \Psi_y = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_y}{m}}, \quad m = \frac{p_y^2 \text{th} p_y}{p_y - \text{th} p_y}.$$

Расчет температурного поля, по формулам (11.4.1) целесообразно проводить по следующей схеме:

1-ый шаг (исходная информация):

$$\text{Bi}_i = \frac{\alpha_i L_i}{2\lambda_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_m} \left(\frac{L_m}{L_i} \right)^2;$$

в дальнейшем всюду примем

$$\lambda_m = \lambda_z, \quad L_m = 2l_z;$$

тогда

$$\varepsilon_z = 1, \quad \varepsilon_x = \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \left(\frac{l_z}{l_x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \left(\frac{l_z}{l_y} \right)^2;$$

2-ой шаг:

$$\Psi_z = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_z}{3}}, \quad p_y^2 = \frac{\text{Bi}_z \Psi_z}{\varepsilon_y};$$

3-й шаг:

$$\Psi_y = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_y}{m}}, \quad m = \frac{p_y^2 \text{th} p_y}{p_y - \text{th} p_y}, \quad p_x^2 = \frac{1}{\varepsilon_x} (\varepsilon_x \text{Bi}_y \Psi_y + \text{Bi}_z \Psi_z);$$

4-й шаг:

$$\Omega_i = \left(1 + \frac{p_i \text{th} p_i}{\text{Bi}_i} \right)^{-1}, \quad (i = x, y);$$

5-й шаг:

$$\varphi_x = 1 - \Omega_x \frac{\text{ch} p_x \bar{x}}{\text{ch} p_x}, \quad \varphi_y = 1 - \Omega_y \frac{\text{ch} p_y \bar{y}}{\text{ch} p_y},$$

$$\varphi_z = \frac{2}{\text{Bi}_z} + 1 - \bar{z}^2, \quad \tilde{N} = \frac{1}{2\varepsilon_x} \varphi_x \varphi_y \varphi_z;$$

6-й шаг:

$$\tilde{t} = t_c + \frac{\tilde{N} q_V \ell_z^2}{\lambda_z}. \quad (11.4.2)$$

Источники тепла равномерно распределены в ступенчатой области толщиной $2\Delta_x$ (рис. 11.3.1, б).

Согласно формуле (11.3.8)

$$\tilde{N} = \iiint_{\Omega} \tilde{G} d\Omega = \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_{\bar{x}-\Delta_x}^{\bar{x}+\Delta_x} \tilde{G} dx.$$

Выполнив интегрирование и определив коэффициенты Ψ_x, Ψ_y , придем к следующей расчетной схеме:

1-й шаг:

$$\text{Bi}_i = \frac{\alpha_i L_i}{2\lambda_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_z} \left(\frac{\ell_z}{\ell_i} \right)^2, \quad (i = x, y),$$

$$\varepsilon_z = 1, \bar{\xi}_x = \frac{2\xi_x}{L_x}, \bar{\Delta}_x = \frac{2\Delta_x}{L_x};$$

2-ой шаг:

$$\Psi_z = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_z}{3}}, p_y^2 = \frac{\text{Bi}_z \Psi_z}{\varepsilon_y};$$

3-ий шаг:

$$\Psi_y = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_y}{m}}, m = \frac{p_y^2 \text{th} p_y}{p_y - \text{th} p_y}, p_x^2 = \frac{1}{\varepsilon_x} (\varepsilon_x \text{Bi}_y \Psi_y + \text{Bi}_z \Psi_z);$$

4-й шаг:

$$A = \frac{\text{sh} p_x \bar{\Delta}_x \left[1 + \frac{\text{Bi}_x \text{th} p_x (1 - \bar{\xi}_x)}{p_x} \right] \text{ch} p_x (1 - \bar{\xi}_x)}{\frac{\text{Bi}_x}{p_x} + \text{th} p_x},$$

$$\Omega_y = \left(1 + \frac{p_y \text{th} p_y}{\text{Bi}_y} \right)^{-1};$$

5-й шаг:

$$\tilde{N} = \varphi_x \varphi_y \varphi_z, \quad (11.4.3)$$

$$\varphi_x = \begin{cases} A \frac{\text{ch} p_x \bar{x}}{\text{ch} p_x}, & \text{при } \bar{x} \in [0, \bar{\xi}_x - \bar{\Delta}_x), \\ A \frac{\text{ch} p_x \bar{x}}{\text{ch} p_x} - \text{sh}^2 p_x \frac{\bar{x} - (\bar{\xi}_x - \bar{\Delta}_x)}{2}, & \text{при } \bar{x} \in [\bar{\xi}_x - \bar{\Delta}_x, \bar{\xi}_x + \bar{\Delta}_x), \\ A \frac{\text{ch} p_x \bar{x}}{\text{ch} p_x} - \text{sh}^2 p_x \bar{\Delta}_x (\bar{x} - \bar{\xi}_x), & \text{при } \bar{x} \in [\bar{\xi}_x + \bar{\Delta}_x, 1), \end{cases}$$

$$\varphi_y = 1 - \Omega_y \frac{\text{ch} p_y \bar{y}}{\text{ch} p_y}, \quad \varphi_z = \frac{2}{\text{Bi}_z} + 1 - \bar{z}^2; \quad (11.4.4)$$

6-ой шаг:

$$\tilde{t} = t_c + \frac{\tilde{N} q_V \ell_z^2}{\lambda_z}.$$

Источники тепла равномерно распределены на грани $x = l$, с поверхностной плотностью мощности, равной q_s (рис. 11.3.1, в).

Распределение температуры в данном случае получается как частный случай для предыдущей модели, если $\bar{\Delta}_x \rightarrow 0$ и $\bar{\xi}_x = 1$. Кроме этого необходимо учесть, что

$$q_V = \frac{Q}{2\Delta_x L_x L_y} \quad \text{и} \quad q_s = \frac{Q}{L_x L_y},$$

откуда следует

$$q_V \rightarrow \frac{q_s}{2\Delta_x} = \frac{q_s}{2\bar{\Delta}_x \ell_x}.$$

Здесь Q — полная мощность источника.

Расчетные формулы:

1-й шаг:

$$\text{Bi}_i = \frac{\alpha_i L_i}{2\lambda_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_z} \left(\frac{\ell_z}{\ell_i} \right)^2, \quad (i = x, y);$$

2-ой шаг:

$$\Psi_z = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_z}{3}}, \quad p_y^2 = \frac{\text{Bi}_z \Psi_z}{\varepsilon_y};$$

3-ий шаг:

$$\Psi_y = \frac{1}{1 + \frac{\text{Bi}_y}{m}}, \quad m = \frac{p_y^2 \text{th} p_y}{p_y - \text{th} p_y}, \quad p_x^2 = \frac{1}{\varepsilon_x} (\varepsilon_y \text{Bi}_y \Psi_y + \text{Bi}_z \Psi_z);$$

4-ый шаг:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{t} &= t_c + \frac{q_s \ell_z^2}{2\lambda_z \lambda_x} \varphi_x \varphi_y \varphi_z; \\ \varphi_x &= \frac{p_x}{\frac{Bi_z}{p_x} + thp_x} \cdot \frac{chp_x \bar{x}}{chp_x}, \quad \varphi_y = 1 - \Omega_y \frac{chp_y \bar{y}}{chp_y}, \\ \varphi_z &= \frac{2}{Bi_z} + 1 - \bar{z}^2, \quad \Omega_y = \left(1 + \frac{p_y thp_y}{Bi_y} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} (11.4.5)$$

Исследуем погрешности приближенных решений, полученных в разделе 11.3 с помощью функции Грина (11.3.16). Как уже отмечалось во введении, теоретические методы оценки погрешностей приближенных решений краевых задач находятся в столь неудовлетворительном состоянии, что удастся их получить только в наиболее простых частных случаях, практически же, для выяснения эффективности интересующего метода, проводят сравнение на примерах задач с известными точными решениями [2.32, 2.33, 2.34].

В рассматриваемой задаче, важной величиной, характеризующей термическое сопротивление, является среднеинтегральное значение величины N на поверхности источника [2.4]. В табл. 11.4.1 приведены погрешности

$$\delta \tilde{N} = \frac{\tilde{N} - N}{N} \cdot 100\%.$$

Оказалось, что указанная величина практически не зависит от параметра L_z/L_y , поэтому результаты приведены только для $L_z/L_y = 1$.

В заключение отметим, что и изучение погрешностей приближенных решений (11.4.2) и (11.4.5), в наиболее невыгодных частях случаев показывает, что метод осреднения уже в первом приближении дает решение с практически приемлемой точностью. Для получения большей точности возможно строить второе приближение по схеме, изложенной в п. 11.1 и 11.2.

Зависимость погрешности вычисления от параметра L_z/L_y

L_z/L_y	1	1,25	1,5	2	3	5	10	∞
1	10,0	8,3	61,9	5,5	4,5	4,2	5,0	4,8

11.5. Метод Акаева-Дульнева

Используем некоторые идеи, изложенные в предыдущих разделах, сделаем обобщение метода Л.В. Канторовича применительно к краевым задачам стационарной теплопроводности [2.33]. При этом появляется возможность учесть свойства оператора краевой задачи по всем независимым переменным и получить уже в первом приближении более высокую точность. Этот метод известен как метод Акаева-Дульнева.

Переходим к изложению существа вопроса. Рассмотрим стационарное поле внутри анизотропного параллелепипеда с равномерно распределенными источниками энергии, при граничных условиях третьего рода. Температурное поле описывается уравнением (11.3.4), в котором $1\{I\} = 1$ и граничными условиями (11.3.5).

В качестве масштабных параметров λ_m, L_m выберем соответственно величины λ_z и L_z . Учитывая симметрию задачи, запишем уравнения (11.3.4) и (11.3.5) в виде

$$\varepsilon_x \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \varepsilon_y \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 N}{\partial \zeta^2} = -1, \quad (11.5.1)$$

$$\left[\frac{\partial N}{\partial j} \right]_{j=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial N}{\partial j} + \text{Bi}_j N \right]_{j=1} = 0, \quad (11.5.2)$$

где

$$i = (x, y, z); \quad j = \frac{i}{\ell_i}; \quad j = (\xi, \eta, \zeta); \quad \text{Bi} = \frac{\alpha_i L_i}{\lambda_i};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\lambda_i L_z^2}{\lambda_z L_i^2}; \quad N = \frac{(t - t_c) \lambda_z}{q_V L_z^2}. \quad (11.5.3)$$

Сущность применительно метода к краевой задаче (11.5.1), (11.5.2) заключается в следующем. Осредняем искомую функцию $N(\xi, \eta, \zeta)$ по двум переменным, например, по η и ζ , для чего к дифференциальному уравнению (11.5.1) применяем осредняющий оператор $I_{\eta\zeta}$:

$$I_{\eta\zeta} [N] = \int_0^1 \int_0^1 N d\eta d\zeta = \langle N_{\eta\zeta} \rangle,$$

$$I_{\eta\zeta} \left[\varepsilon_x \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \right] = \varepsilon_x \frac{d^2 \langle I_{\eta\zeta} \rangle}{d\zeta^2},$$

$$I_{\eta\xi} \left[\varepsilon_x \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \right] = \varepsilon_y \int_0^1 d\xi \int_0^1 \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \partial \eta = \varepsilon_y \int_0^1 \left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]_{\eta=1}^{\eta=0} d\xi.$$

Согласно граничным условиям (11.5.2)

$$\left[\frac{\partial N}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}^{\eta=1} = -\text{Bi}_j N(\eta=1),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} I_{\eta\xi} \left[\varepsilon_x \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} \right] &= -\varepsilon_y \text{Bi}_j \int_0^1 N(\eta=1) d\xi = \\ &= -\varepsilon_y \text{Bi}_j \frac{\int_0^1 N(\eta=1) d\xi}{\langle N_{\eta\xi} \rangle} = -\varepsilon_y \text{Bi}_j \Psi_y \langle N_{\eta\xi} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь введен коэффициент

$$\Psi_y = \frac{\int_0^1 N(\eta=1) d\xi}{\langle N_{\eta\xi} \rangle},$$

характеризующий неравномерность температурного поля в сечении с абсциссой ξ . В дальнейшем будем пользоваться его средним значением, допуская приближенное равенство

$$\Psi_y = \frac{\langle N_{\xi\xi}(\eta=1) \rangle}{\langle N_{\xi\eta\xi} \rangle} = \text{const.}$$

Действуя совершенно аналогично, получим:

$$I_{\eta\xi} \left[\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \right] = -\Psi_z \text{Bi}_z \langle N_{\eta\xi} \rangle, \quad \Psi_z = \frac{\langle N_{\xi\xi}(\xi=1) \rangle}{\langle N_{\xi\eta\xi} \rangle} = \text{const}, \quad I_{\eta\xi}[1] = 1.$$

Объединяя результаты почленного действия оператора к дифференциальному уравнению (11.5.2), придем к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\langle N_{\eta\xi} \rangle$:

$$\left[\frac{\partial^2 \langle N_{\eta\xi} \rangle}{\partial \xi^2} \right] - p_x^2 \langle N_{\eta\xi} \rangle = -\frac{1}{\varepsilon_x}; \quad (11.5.4)$$

$$p_x^2 = \frac{\varepsilon_y \text{Bi}_j \Psi_y + \text{Bi}_z \Psi_z}{\varepsilon_x}. \quad (11.5.5)$$

Применение оператора $N_{\eta\xi}$ к граничным условиям (11.5.2) при $\xi = 0, 1$ дает следующие условия для $\langle N_{\eta\xi} \rangle$ на границе:

$$\left[\frac{\partial \langle N_{\eta\xi} \rangle}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \langle N_{\eta\xi} \rangle}{\partial \xi} + \text{Bi}_x \langle N_{\eta\xi} \rangle \right]_{\xi=1} = 0. \quad (11.5.6)$$

Интегрируя уравнение (11.5.4) и удовлетворяя граничным условиям (11.5.6), получим

$$\langle N_{\eta\xi} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_x p_x^2} \varphi_\xi, \quad \varphi_\xi = 1 - \Omega_x \frac{\text{ch} p_x \xi}{\text{ch} p_x}, \quad \Omega_x = \left(1 + \frac{p_i \text{th} p_x}{\text{Bi}_x} \right)^{-1}. \quad (11.5.7)$$

Итак, нам известен характер зависимости решения по переменной ξ . Далее, пользуясь идеей метода Л.В.Канторовича [2.33], приближенное решение будем разыскивать в виде

$$\tilde{N} = M(\eta, \xi) \langle N_{\eta\xi} \rangle. \quad (11.5.8)$$

Решение краевой задачи (11.5.1), (11.5.2) эквивалентно нахождению минимума следующего функционала:

$$J[N] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \varepsilon_x \left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon_y \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^2 + \varepsilon_z \left(\frac{\partial N}{\partial \zeta} \right)^2 - 2N \right\} d\xi d\eta d\zeta + \\ + \varepsilon_x \int_0^1 \int_0^1 \text{Bi}_x N^2 \Big|_{\xi=1} d\eta d\zeta + \varepsilon_y \int_0^1 \int_0^1 \text{Bi}_y N^2 \Big|_{\eta=1} d\xi d\zeta + \int_0^1 \int_0^1 \text{Bi}_z N^2 \Big|_{\zeta=1} d\xi d\eta.$$

Подставив \tilde{N} в форме (11.5.8) в интеграл и выполнив интегрирование по ξ , получим задачу о минимуме уже двойного интеграла:

$$J[M] = \int_0^1 \int_0^1 a_1 \left\{ \varepsilon_x \left(\frac{\partial M}{\partial \zeta} \right)^2 + \varepsilon_y \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^2 \right\} + a_2 M^2 - 2a_3 M \Big| d\eta d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + a_1 \left(\varepsilon_y \text{Bi}_y \int M^2 \Big|_{\eta=1} d\zeta + \text{Bi}_z \int_0^1 M^2 \Big|_{\zeta=1} d\eta \right), \\
a_1 &= \frac{1}{\varepsilon_x p_x^2} \left[1 - 2\Omega_x \frac{\text{th} p_x}{p_x} + \frac{\Omega_x}{2} \left(\frac{\text{th} p_x}{p_x} + \frac{1}{\text{ch}^2 p_x} \right) \right], \\
a_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\text{th} p_x}{p_x} + \frac{1}{\text{ch}^2 p_x} \right) \Omega_x^2 + \frac{\text{Bi}_x}{\varepsilon_x p_x^4} (1 - \Omega_x)^2, \\
a_3 &= 1 - \Omega_x \frac{\text{th} p_x}{p_x}. \tag{11.5.10}
\end{aligned}$$

Функция M , реализующая минимум функционала (11.5.10), является решением краевой задачи для уравнения

$$\varepsilon_y \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta^2} - \sigma_1 M = -\sigma_2 \tag{11.5.11}$$

внутри квадрата $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \zeta \leq 1$ и граничных условий

$$\left[\frac{\partial M}{\partial j} \right]_{j=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial M}{\partial j} + \text{Bi}_j M \right]_{j=1} = 0 \tag{11.5.12}$$

на контуре. Здесь $\sigma_1 = a_2/a_1$, $\sigma = a_3/a_1$.

Следовательно, исходная краевая задача (11.5.1), (11.5.2) сведена к двумерной задаче (11.5.11)-(11.5.12), для решения которой применим метод осреднения.

Применяя оператор I_ξ

$$I_\xi [M] = \int_0^1 M d\xi = \langle M_\xi \rangle$$

к уравнению (11.5.11) и условиям (11.5.12), получим обыкновенное уравнение относительно $\langle M_\xi \rangle$:

$$\frac{\partial^2 \langle M_\xi \rangle}{\partial \eta^2} - p^2 \langle M_\xi \rangle = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}, \quad p_y^2 = \frac{\text{Bi}_z \Psi_z + \delta_1}{\varepsilon_y}.$$

Решая уравнение (11.5.13) при граничных условиях

$$\left[\frac{\partial M}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \langle M_\xi \rangle}{\partial \eta} + \text{Bi}_y \langle M_\xi \rangle \right]_{\eta=1} = 0,$$

получим

$$\langle M_\zeta \rangle = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_y p_y^2} \varphi_\eta, \quad \varphi_\eta = 1 - \Omega_y \frac{\text{ch} p_y \eta}{\text{ch} p_y}, \quad \Omega_y = \left(1 + \frac{p_y \text{th} p_y}{\text{Bi}_y} \right)^{-1}. \quad (11.5.14)$$

Таким образом, остается найти зависимость исходной функции N переменной ξ , и, тем самым, получим решение в первом приближении.

Представим M , так же как и на первом этапе в виде произведения:

$$\tilde{M} = \langle M_\xi(\eta=1) \rangle Q(\xi). \quad (11.5.15)$$

Подставляя \tilde{M} в интеграл (11.5.10) и выполнив интегрирование по переменной ζ , сводим задачу к минимуму уже простого интеграла:

$$\mathbb{J}[Q] = \int_0^1 \left\{ b_1 \left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta} \right)^2 + b_2 Q^2 - 2b_2 Q \right\} d\zeta + b_1 \text{Bi}_y Q^2 (\zeta=1), \quad (11.5.16)$$

$$b_1 = a_1 \frac{\sigma_2^2}{\varepsilon_y p_y^2} \left[1 - 2\Omega_y \frac{\text{th} p_y}{p_y} + \frac{\Omega_y}{2} \left(\frac{\text{th} p_y}{p_y} + \frac{1}{\text{ch}^2 p_y} \right) \right],$$

$$b^2 = \sigma_2^2 \left\{ a_1 \frac{\Omega_y^2}{2} \left(\frac{\text{th} p_y}{p_y} - \frac{1}{\text{ch}^2 p_y} \right) + \right. \\ \left. \left[\frac{a_2}{\varepsilon_y p_y^2} \left[1 - 2\Omega_y \frac{\text{th} p_y}{p_y} + \frac{\Omega_y^2}{2} \left(\frac{\text{th} p_y}{p_y} + \frac{1}{\text{ch}^2 p_y} \right) \right] \right] + \right. \\ \left. + a_1 \frac{\text{Bi}_y}{\varepsilon_y p_y^2} \left(\frac{1 - \Omega_x}{p_y} \right)^2 \right\}.$$

Выпишем уравнения Эйлера для функционала (11.5.16):

$$\frac{\partial Q^2}{\partial \zeta^2} - p_z^2 Q = -\sigma_3,$$

$$p_z^2 = \frac{b_2}{b_1}, \quad \sigma_3 = \frac{b_3}{b_1}, \quad b_3 = a_3 \sigma_2 \left(1 - \Omega_y \frac{\text{th} p_y}{p_y} \right). \quad (11.5.17)$$

Решая уравнение (11.5.17) при граничных условиях

$$\left[\frac{dQ_\xi}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \text{Bi}_z Q \right]_{\xi=1} = 0,$$

обеспечивающих выполнение условий на границах $\xi = 0; 1$, находим

$$Q = \frac{\sigma_3}{p_z^2} \varphi_\zeta, \quad \varphi_\zeta = \left(1 - \Omega_z \frac{\text{ch} p_z \zeta}{\text{ch} p_z} \right), \quad \Omega_z = \left(1 + p_z \frac{\text{th} p_z}{\text{Bi}_z} \right)^{-1}. \quad (11.5.18)$$

Итак решение рассматриваемой краевой задачи (11.5.1)-(11.5.2) согласно формул (11.5.7), (11.5.8), (11.5.15), (11.5.16), (11.5.18) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \frac{\sigma_2 \sigma_3}{\varepsilon_z \varepsilon_y p_z^2 p_y^2 p_z^2} \varphi_\xi \varphi_\eta \varphi_\zeta, \quad \varphi_j = \left(1 - \Omega_i \frac{\text{ch} p_i j}{\text{ch} p_i} \right), \\ \Omega_i &= \left(1 + p_i \frac{\text{th} p_i}{\text{Bi}_i} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (11.5.19)$$

Изучим погрешности. Воспользуемся приведенным в [2.4] точным решением рассмотренной задачи при граничных условиях первого рода и сравним полученное приближенное решение с точным.

Соответствующие погрешности для центральной точки параллелепипеда были рассчитаны по формуле

$$\delta \tilde{N} = \frac{\tilde{N} - N}{N} \cdot 100\%.$$

Они приведены в табл.11.5.1. Там же приведены погрешности решений в первом приближении по методам Ритца, Бубнова-Галеркина (Г-Р), Канторовича (К) и методу Акаева-Дульнева (А-Д).

Как видно из таблицы, метод Акаева-Дульнева дает более высокую точность, чем методы Канторовича, Ритца и Бубнова-Галеркина. Кроме того, решение строго выдерживает предельный переход к пластине, то есть приводит к точному решению. Наконец, в отличие от указанных классических методов ни одно из координатных направлений не имеет преимущества перед другими.

Таблица 11.3

Погрешности, рассчитанные для центральной точки параллелепипеда

$L_z \setminus L_y$	0			0,2			0,5			1		
	А-Д	К	Г-Р	А-Д	К	Г-Р	А-Д	К	Г-Р	А-Д	К	Г-Р
0	0,0	25,0	56,6	-1,6	22,3	53,7	-2,8	9,4	36,8	-3,7	4,0	30,4
0,2	-1,6	27,6	53,7	-0,8	24,4	50,2	-2,9	11,6	35,3	-5,4	4,7	26,8
0,5	-2,8	25,2	36,8	-2,7	23,0	35,3	-5,8	12,8	25,8	-6,7	6,7	22,1
1	-3,7	26,1	30,4	-5,1	24,2	27,8	-6,0	17,2	22,1	-7,6	9,8	15,6