

## ГЛАВА 12. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

В теории теплопроводности важное значение имеет задача о собственных числах и собственных функциях оператора Лапласа ( $-\nabla^2$ ) при краевых условиях третьего рода, отыскание которых сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U + \mu^2 U = 0, \quad (12.1.1)$$

в заданной области  $\Omega$ , при краевом условии

$$\left( \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda} U \right)_{\Gamma} = 0, \quad (12.1.2)$$

где  $n$  — направление внешней нормали к границе ( $\Gamma$ ) области  $\Omega$ .

Краевая задача (12.1.1), (12.1.2) представляет собой задачу Штурма-Лиувилля. Задача Штурма-Лиувилля возникает, в частности, при изучении темпа охлаждения (нагревания) в теории регулярного режима.

Метод осреднения и обобщение метода Акаева-Дульнева могут быть применимы к задаче Штурма-Лиувилля для призмы:

$$\Omega(-\ell_x \leq x \leq \ell_x; \ell_y \leq y \leq \ell_y).$$

Если учесть симметрию, задача Штурма-Лиувилля (12.1.1), (12.1.2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \nu^2 U = 0, \quad \Omega^*(0 < \xi, \eta < 1), \quad (12.1.3)$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial j} \right]_{j=0} = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial j} + \text{Bi}_j U \right]_{j=1} = 0, \quad j = (\xi, \eta), \quad (12.1.4)$$

$$\xi = \frac{x}{\ell_x}, \quad \eta = \frac{y}{\ell_y}, \quad \text{Bi}_x = \frac{\alpha \ell_x}{\lambda}, \quad \text{Bi}_y = \frac{\alpha \ell_y}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{\ell_x}{\ell_y}, \quad \nu = \ell_x \mu.$$

Краевую задачу (12.1.3), (12.1.4) решаем методом осреднения. На первом этапе к уравнению (12.1.3) применим осредняющий оператор  $I_\eta$ :

$$I_\eta[U] = \int_0^1 U d\eta = \langle U_\eta \rangle;$$

$$I_\eta \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] = \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} d\eta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \int_0^1 U d\eta \right] = \frac{d^2 \langle U_\eta \rangle}{d\xi^2};$$

$$I_\eta \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \right] = \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} d\eta = \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_0^1 =$$

$$= -\text{Bi}_y U(\eta=1) = -\text{Bi}_y \frac{U(\eta=1)}{\langle U_\eta \rangle} \langle U_\eta \rangle \cong -\text{Bi}_y \Psi_\eta \langle U_\eta \rangle,$$

$$\text{где } \Psi_\eta = \frac{U_\xi(\eta=1)}{\langle U_{\xi\eta} \rangle}.$$

Суммируя результаты почленного действия оператора  $I_\eta$ , получим преобразованное уравнение

$$\frac{\partial^2 \langle U_\eta \rangle}{\partial \xi^2} + p^2 \langle U_\eta \rangle = 0, \quad (12.1.6)$$

$$p^2 = v^2 - \varepsilon^2 \Psi_\eta \text{Bi}_y, \quad (12.1.7)$$

где  $\langle U_\eta \rangle$  подчиняется граничным краевым условиям

$$\left[ \frac{d \langle U_\eta \rangle}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \langle U_\eta \rangle}{\partial \xi} + \text{Bi}_x \langle U_\eta \rangle \right]_{\xi=1} = 0. \quad (12.1.8)$$

Общее решение уравнения (12.1.6)

$$\langle U_\eta \rangle = C_1 \cos p\xi + C_2 \sin p\xi, \quad (12.1.9)$$

$$C_2 = 0, \quad C_1(-p \sin p + \text{Bi}_x \cos p) = 0,$$

откуда ясно, что нетривиальные решения получаются, только если

$$\frac{p}{\text{Bi}_x} = \text{ctg} p, \quad p = p_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.1.10)$$

В литературе [2.10] имеются таблицы корней  $p_k$  для различных значений Био ( $0 \leq \text{Bi} \leq \infty$ ), поэтому в дальнейшем  $p_k$  будем считать известными.

Итак, нетривиальные решения уравнения (12.1.6), при граничных условиях (12.1.8) имеют вид:

$$\langle U_\eta \rangle_k = C_1 \cos p_k \xi. \quad (12.1.11)$$

Выразив из уравнения (12.1.6)

$$\frac{\partial^2 \langle U_\eta \rangle}{\partial \xi^2} = -p^2 \langle U_\eta \rangle$$

и выполнив замену

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \cong \frac{\partial^2 \langle U_\eta \rangle}{\partial \xi^2}$$

в исходном уравнении (12.1.3), для первого приближения собственных функций исходной задачи получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 \langle \tilde{U}_k \rangle}{\partial \eta^2} + q_k^2 \tilde{U}_k = \left( \frac{p_k}{\varepsilon} \right)^2 \langle U_\eta \rangle, \quad q_k = \frac{v_k}{\varepsilon} = \ell_y \mu_k, \quad (12.1.12)$$

где  $\tilde{U}_k$  подчиним граничным условиям (12.1.4):

$$\left[ \frac{d\tilde{U}_k}{d\eta} \right]_{\eta=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial \eta} + \text{Bi}_x \tilde{U}_k \right]_{\eta=1} = 0. \quad (12.1.13)$$

Интегрируя уравнение (12.1.12) и удовлетворяя граничным условиям (12.1.13), получим:

$$\tilde{U}_k = \left( \frac{p_k}{\varepsilon q_k} \right)^2 C_1 \cos p_k \xi \left( 1 + \frac{\cos q_k \eta}{\frac{q_k \sin q_k}{\text{Bi}_y} - \cos q_k} \right). \quad (12.1.14)$$

Постоянная  $C_1$ , как известно, определяется из условия нормировки

$$\| \tilde{U}_k \| = \int_{\Omega} \tilde{U}_k^2 d\xi d\eta = 1. \quad (12.1.15)$$

Подстановка  $\tilde{U}_k$  (12.1.14) в формулу (12.1.15) с последующим интегрированием приведет к уравнению относительно  $C_{1k}$ , из которого

$$C_{1k} = \frac{1}{\kappa_k} \left( \frac{\varepsilon q_k}{p_k} \right)^2, \quad (12.1.16)$$

$$\kappa_k = \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2p_k}{4p_k} \right) \left( 1 + \frac{w_k^2}{2} + \frac{2w_k}{q_k} \sin q_k + \frac{w_k^2}{4q_k} \sin 2q_k \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$w_k = \left( \frac{q_k \sin q_k}{\text{Bi}_y} - \cos q_k \right)^{-1}.$$

Таким образом, первые приближения собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля (12.1.3), (12.1.4) имеют вид:

$$\tilde{U}_k = \frac{1}{\kappa_k} \cos p_k \xi (1 + w_k \cos q_k \eta). \quad (12.1.17)$$

Собственные числа задачи  $\mu_k$ , согласно формуле (12.1.7), определяются из уравнения:

$$\mu_k^2 = \left( \frac{p_k}{\ell_x} \right)^2 + \frac{\Psi_\eta \text{Bi}_y}{\ell_y^2}. \quad (12.1.18)$$

Здесь неизвестной величиной остается  $\Psi_\eta$ , которая находится по формуле (12.1.5). Имеем:

$$\Psi_\eta = \frac{\langle \tilde{U}_\xi(\eta=1) \rangle}{\langle U_{\xi\eta} \rangle} = \frac{1 + w_k \cos q_k}{1 + w_k \frac{\sin q_k}{q_k}}. \quad (12.1.19)$$

Примем  $\text{Bi}_x = \text{Bi}_y$ , тогда  $\text{Bi}_x = \varepsilon \text{Bi}$ . Учитывая последние обозначения и подставив выражения (12.1.19) и (2.1.12) в уравнение (12.1.8), получим:

$$\mu_k^2 = \left( \frac{p_k}{\ell_x} \right)^2 + \frac{\mu_k^2}{1 - \ell_y \mu_k \text{ctg} \ell_y \mu_k + \frac{(\ell_y \mu_k)^2}{\text{Bi}}}. \quad (12.1.20)$$

Итак, для определения собственных чисел  $\mu_k$  можно рекомендовать следующую схему:

1. Задаться конкретными значениями  $\ell_x$ ,  $\varepsilon$  и  $\text{Bi}$ ;
2. Определить  $p_k$  из уравнений

$$\text{ctg} p_k = \frac{p_k}{\varepsilon \text{Bi}}, \quad (k = 1, 2, \dots);$$

3. Решить уравнение (12.1.20) относительно  $\mu_k$ .

Чтобы получить представление о точности первого приближения для собственных чисел, были рассчитаны первые собственные числа в частном случае, при  $\ell_x = \ell_y = 1$ , когда имеют место наибольшие погрешности в их определении, для различных значений критерия  $V_i$ , результаты приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Значения первых собственных чисел для различных значений критерия  $B_i$ 

$B_i$	0	0,001	0,01	0,1	1	10	?
$\tilde{\mu}_1$	0,000	0,0447	0,141	0,44	1,21	1,95	2,11
$\mu_1$	0,0000	0,0447	0,1411	0,4400	1,2166	2,0208	2,2214
$\tilde{\delta}\mu_1 = \frac{\mu_1 - \mu_1}{\mu_1} \cdot 100\%$	0	0	0,07	0,0	0,6	3,6	5

# ГЛАВА 13. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ К НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЗАДАЧАМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

## 13.1. Нагревание тела

**Постановка задачи.** Рассмотрим схему приближенного анализа на следующем примере. Призма прямоугольного сечения, с начальной температурой  $T_0 = \text{const.}$  помещалась в среду с постоянной температурой  $T_c > T_0$ . Требуется найти распределение температуры в любой момент времени при условии, что теплообмен со средой происходит по закону Ньютона.

Математическая формулировка:

$$\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (13.1.1)$$

$$(\tau > 0, -l_x < x < l_x; l_y < y < l_y),$$

а)  $T(x, y, 0) = T_0, ,$

б)  $\left[ \mp \frac{\partial T}{\partial j} + \frac{\alpha}{\lambda} (T_c - T) \right]_{j=\pm l_j} = 0, \quad (j = x, y), \quad (13.1.2)$

Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{l_x}, \quad \eta = \frac{y}{l_y}, \quad \varepsilon = \frac{l_x}{l_y}, \quad \theta = \frac{T_c - T(\xi, \eta, \tau)}{T_c - T_0},$$

параметры  $Bi = Bi_y = \frac{\alpha l_y}{\lambda}, \quad Bi_x = \frac{\alpha l_x}{\lambda} = \varepsilon Bi,$

и учитывая симметрию задачи по пространственным координатам, исходную задачу (13.1.1), (13.1.2) приведем к более удобному виду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a}{l_x^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right), \quad \tau > 0, 0 < \xi, \eta < 1), \quad (13.1.3)$$

а)  $\theta(\xi, \eta, 0) = 1,$

$$6) \left[ \frac{\partial F}{\partial \bar{j}} \right]_{\bar{j}=0} = 0, \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{j}} + \text{Bi}_j \theta \right]_{\bar{j}=1} = 0, \quad (\bar{j} = \xi, \eta). \quad (13.1.4)$$

Решение поставленной задачи рационально строить [2.4] в следующей форме:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau}, \quad (13.1.5)$$

где

$$A_n = \frac{\int_V \theta(\xi, \eta, 0) U_n dV}{\int_V U_n^2 dV}; \quad (13.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\mu_n}{\ell_x} \right)^2 U_n = 0, \quad m_n = a \mu_n^2,$$

$$\left[ \frac{\partial U_n}{\partial \bar{j}} \right]_{\bar{j}=0} = 0, \left[ \frac{\partial U_n}{\partial \bar{j}} + \text{Bi}_j U_n \right]_{\bar{j}=1} = 0. \quad (13.1.7)$$

Таким образом, согласно приведенной схеме задача (13.1.3), (13.1.4) нахождения функции  $q(\xi, \eta, \tau)$  свелась к соответствующей задаче Штурма-Лиувилля (13.1.7) по отысканию собственных чисел и функций, которая была изучена во второй главе.

**Метод осреднения.** Полученные по данному методу собственные функции (12.1.18) имеют вид:

$$\tilde{U}_n = \frac{1}{\kappa_n} \cos p_n \xi (1 + w_n \cos q_n \eta). \quad (13.1.8)$$

Подставив (13.1.8) в (13.1.6) и учитывая, что согласно (12.1.15) знаменатель в (13.1.6) равен единице, получим

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{\kappa_n} \frac{\sin p_n}{p_n} \left( 1 + w_n \frac{\sin q_n}{q_n} \right). \quad (13.1.9)$$

Далее, подставляя (13.1.8) и (12.1.9) в (13.1.5), получим первое приближение искомой функции  $q(\xi, \eta, \tau)$  в виде:

$$\tilde{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_n \cos p_n \xi (1 + w_n \cos q_n \eta) \exp \left[ -(\mu_n \ell_y)^2 F_0 \right], \quad (13.1.10)$$



где

$$\vartheta_n = \frac{\tilde{A}_n}{\kappa_n} = \frac{2 \sin p_n \left( 1 + w_n \frac{\sin q_n}{q_n} \right)}{p_n \left( 1 + \frac{\sin 2p_n}{p_n} \right) \left( 1 + \frac{w_n^2}{2} + \frac{2w_n}{q_n} \sin q_n + \frac{w_n^2}{4q_n} \sin 2q_n \right)}$$

$$w_n = \left( \frac{q_n \sin q_n}{\text{Bi}} - \cos q_n \right)^{-1}; \quad F_0 = \frac{a\tau}{\ell_y^2}.$$

**Метод Акаева-Дульнева.** Собственные функции имеют вид (12.2.8):

$$\tilde{U}_{k,S} = C \cos p_k \xi \cos q_S \eta. \quad (13.1.11)$$

Подставив (13.1.11) в (13.1.6) и учитывая условие (12.1.5) нормировки собственных функций, получим:

$$\tilde{A}_{k,S} = C_{k,S} \frac{\sin p_k}{p_k} \cdot \frac{\sin q_S}{q_S}. \quad (13.1.12)$$

Следовательно, согласно формуле (13.1.5) первое приближение искомого решения

$$\theta = \sum_{k,S=1}^{\infty} \vartheta_{k,S} \cos p_k \xi \cos q_S \eta \exp \left[ -(\mu_{k,S} \ell_y)^2 F_0 \right] \quad (13.1.13)$$

$$\vartheta_{k,S} = \frac{4 \sin p_k \sin q_S}{(p_k + \sin p_k \cos p_k)(q_S + \sin q_S \cos q_S)}.$$

Решение (13.1.13) является точным, вследствие того, что собственные функции и числа задачи Штурма-Луивилля (13.1.7), уже в первом приближении совпадали с точными.

## 13.2. Призма с источниками

**Постановка задачи и схема ее решения.** Рассмотрим нестационарную краевую задачу (13.1.1), (13.1.2) при добавочном условии, что внутри призмы действуют источники тепла, удельная мощность которых  $w = \text{const}$ .

Математическая постановка задачи в безразмерных величинах, принятых в п. 13.1, имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a}{\ell_x^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) - \frac{w}{c\gamma(T_c - T_0)}, \quad (\tau > 0, 0 < \xi, \eta < 1), \quad (13.2.1)$$

$$a) \theta(\xi, \eta, 0) = \theta_0 = 1,$$

$$б) \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{j}} \right]_{\bar{j}=0} = 0, \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \bar{j}} + \text{Bi}_j \theta \right]_{\bar{j}=1} = 0, \quad (\bar{j} = \xi, \eta).$$

Для решения данной задачи, воспользуемся, как и прежде, схемой представления искомого решения в виде ряда по собственным функциям  $\{U_n\}$  соответствующей задачи Штурма-Лиувилля (11.3.7). Имеем [2.4]:

$$\theta = \theta_{\text{ст}} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau}, \quad (13.2.2)$$

$$A_n = \frac{\int_V (\theta_{\text{ст}} - \theta_0) U_n dV}{\int_V U_n^2 dV}, \quad m_n = a \mu_n^2, \quad (13.2.3)$$

где  $U_n$  – собственные функции задачи (13.1.7);

$\mu_n$  – собственные числа задачи (13.1.7);

$\theta_{\text{ст}}$  – стационарное температурное поле, описываемое уравнением

$$\frac{\partial^2 \theta_{\text{ст}}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta_{\text{ст}}}{\partial \eta^2} = \frac{w \ell_x^2}{\lambda(T_c - T_0)} \quad (13.2.4)$$

при краевых условиях (13.2.1).

Следовательно, исходная нестационарная задача (13.2.1) свелась к определению собственных функций и  $\theta_{\text{ст}}$ , которые были изучены в предыдущих главах. Пользуясь соответствующими результатами, дадим приближенное решение поставленной задачи (13.2.1).

**Метод осреднения.** Краевая задача (13.2.4), (13.2.1), описывающая стационарное температурное поле поперечного сечения призмы была изучена в разделе 1-1. Ограничимся первым приближением  $\theta_{\text{ст}}$ , которое получается из решения (11.1.3), при соответствующей интерпретации обозначений. В безразмерных величинах  $\theta_{\text{ст}}$  имеет вид:

$$\tilde{\theta}_{\text{ст}} = -\frac{1}{2} \frac{w \ell_y^2 \varphi_x \varphi_y}{\lambda(T_c - T_0)}, \quad (13.2.5)$$

$$\varphi_x = 1 - \Omega \frac{\text{ch} p_0 \xi}{\text{ch} p_0}, \quad \Omega = \left( 1 + \frac{p_0 \text{th} p_0}{\varepsilon \text{Bi}} \right)^{-1},$$

$$\varphi_y = 1 + \frac{2}{\text{Bi}} - \eta^2, \quad p_0^2 = \frac{\varepsilon^2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\text{Bi}}}, \quad \varepsilon = \frac{\ell_x}{\ell_y}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha \ell_y}{\lambda}.$$

Подставив  $\tilde{U}_n$  (13.1.8) и  $\tilde{\theta}_{\text{cr}}$  (13.2.5) в (13.2.3) и учитывая нормированность собственных функций, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n &= \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\theta}_{\text{cr}} - \theta_0) \tilde{U}_n = \\ &= -\frac{1}{\kappa_n} \left\{ \frac{1}{2} p_0 \left[ \frac{\sin p_n}{p_n} - \frac{\Omega}{\text{ch} p_0} \cdot \frac{1}{p_0^2 + p_n^2} (p_0 \text{sh} p_0 \cos p_n + p_n \text{ch} p_0 \sin p_n) \right] \times \right. \\ &\times \left[ \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} \right) \left( 1 + w_n \frac{\sin q_n}{q_n} \right) - \frac{2}{q_n^2} \cos q_n - \left( 1 - \frac{2}{q_n^2} \right) \frac{\sin q_n}{q_n} - \frac{1}{3} \right] + \\ &\left. + \frac{\sin p_n}{p_n} \left( 1 + w_n \frac{\sin q_n}{q_n} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

Итак, первое приближение искомого решения получим, подставив (13.2.5), (13.2.6) и (13.1.8) в (13.2.2):

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{1}{2} p_0 \left( 1 - \Omega \frac{\text{ch} p_0 \xi}{\text{ch} p_0} \right) \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} - \eta^2 \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n \cos p_n \xi \left( 1 + w_n \cos q_n \eta \right) \exp \left[ -(\mu_n \ell_y)^2 F_0 \right], \end{aligned}$$

$$p_0 = \frac{w \ell_y^2}{\lambda(T_c - T_0)}, \quad F_0 = \frac{\alpha \tau}{\ell_y^2}, \quad \mathcal{G}_n = -\frac{1}{\kappa_n} \tilde{A}_n \quad (13.2.7)$$

**Метод Акаева-Дульнева.** В качестве функции, описывающей стационарное температурное поле, возьмем первое приближение (13.2.5), полученное по методу осреднения. Подставив  $\tilde{\theta}_{\text{cr}}$  (13.2.5) и  $\tilde{U}_{k,s}$  (13.1.11) в формулу (13.2.3) и выполнив необходимые интегрирования, получим:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{k,S} &= \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{\theta}_{\text{CT}} - \theta_0) \tilde{U}_{k,S} d\xi \xi d = \\
&= -C_{k,S} \left\{ \frac{1}{2} p_0 \left[ \frac{\sin p_k}{p_k} - \frac{\Omega}{\text{ch} p_0} \cdot \frac{1}{p_0^2 + p_k^2} (p_0 \text{sh} p_0 \cos p_k + p_k \text{ch} p_0 \sin p_k) \right] \times \right. \\
&\times \left[ \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} \right) \frac{\sin q_S}{q_S} - \frac{2}{q_S^2} \cos q_S - \left( 1 - \frac{2}{q_S^2} \right) \frac{\sin q_S}{q_S} \right] + \\
&\left. + \frac{\sin p_k}{p_k} \cdot \frac{\sin q_S}{q_S} \right\}. \tag{13.2.8}
\end{aligned}$$

Наконец, подстановка  $\tilde{A}_{k,S}$  (13.2.8),  $\tilde{\theta}_{\text{CT}}$  (13.2.5) и  $\tilde{U}_{k,S}$  (13.1.4) в (13.2.2) даст нам первое приближение искомого решения:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta} &= -\frac{1}{2} p_0 \left( 1 - \Omega \frac{\text{ch} p_0 \xi}{\text{ch} p_0} \right) \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} - \eta^2 \right) + \\
&+ \sum_{k,S=1}^{\infty} \vartheta_{k,S} \cos p_k \xi \cos q_S \eta \exp \left[ -(\mu_{k,S} \ell_y)^2 F_0 \right], \quad \vartheta_{k,S} = -C_{k,S} \tilde{A}_{k,S}. \tag{13.2.9}
\end{aligned}$$

**Заключение.** Представленные здесь результаты показывают, что методы осреднения и Акаева-Дульнева с успехом могут применяться для приближенного изучения полей тел без источников или с источниками, не зависящими от времени. Особенно важным является эффективность метода в применении к задачам со сложным начальным распределением температур. Известно, что применение интегрального преобразования Лапласа к данному классу задач встречает значительные трудности [2.10].

Отметим, что линейные нестационарные задачи с внутренними и граничными источниками, изменяющимися во времени, также могут быть решены изложенными методами, так как использование теорем Дюамеля и функций Грина позволяет свести их к задачам рассмотренных выше типов [2.37, 2.41].

С помощью метода осреднения было решено достаточно много практических задач. Отметим некоторые из них.

Г.Н.Дульнев, Б.В.Польщиков, И.А.Польщикова, Э. И. Ермолина в 1976 году рассмотрели стационарный тепловой режим аппарата с комбинированным охлаждением [2.37-2.40]. В этих исследованиях был приведен анализ сточного аппарата с высокой плотностью; стойка набирается из однотипных комплектов, расположенных друг под другом. Комплект собирается из одинаковых блоков – плат с элементами. Отвод тепла от источников осуществляется естественной, вынужденной вентиляцией, с помощью теплостоков.

Тепловая модель представлена в виде однородного анизотропного параллелепипеда со сложно расположенными источниками тепла, математическая модель может быть представлена в виде

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} =$$

$$= -1\{U_1\}w_1 - 1\{U_2\}w_2 - 1\{U_2\}\alpha_v(\vartheta - \vartheta_f) = w \frac{\partial^2 \vartheta_f}{\partial y^2},$$

$$w = \frac{c_p G_p}{F}.$$

Здесь  $1\{U_i\}$  – единичные функции дискретных источников тепла для области  $i = 1, 2, \dots$ ;

$c_p$  – удельная теплоемкость,  $G_p$  – массовый расход воздуха через аппарат;  $F$  – площадь поперечного сечения вентиляционной части аппарата;  $\alpha_v$  – объемный коэффициент теплообмена.

К дифференциальному уравнению записаны обычные граничные условия [2.4]. Интегрирование системы уравнений приведено с помощью метода осреднения

Для оценки точности определения температурных полей был проведен эксперимент на реальных изделиях аппаратов, среднеквадратичная погрешность 15% при доверительной вероятности 0,95, что удовлетворительно для инженерной практики.

В [2.41] Б.В. Польщиковым и В.В. Гасановой представлено решение задачи методом осреднения для температурного поля параллелепипеда с линейным источником тепла. Для определения погрешности решения проводилось сопоставление приближенного и точного решения в широком диапазоне изменяемых параметров. Среднеквадратическая погрешность по результатам этого сопоставления составляла 14% при доверительной вероятности 0,95.

Б.В. Польщиков и И.В. Левбарг рассмотрели решение задачи о температуре локального источника тепла на пластине, полученное по методу Акаева-Дульнева [2.42, 2.43]. Среднеквадратичная погрешность составила в этом случае 6,6%.

Приближенные методы осреднения были применены Г.Н. Дульневим, М.Б. Барабаш, О.А. Колесниковой, Т.И. Новицкой, Б.В. Польщиковым при анализе температурного поля сложного радиоэлектронного аппарата с тепловыми трубами [2.44, 2.45]. Сопоставление данных расчета и опыта привели к среднеквадратичной погрешности 15%. Испытание аппаратуры с тепловыми приборами и без них привело примерно к возможности двукратного увеличения мощности тепловыделений в вентилируемом кассетном радиоэлектронном аппарате при сохранении максимальной температуры нагретой зоны на уровне  $70^{\circ}\text{C}$ .

Методы осреднения были использованы Г.Н. Дульневим и А.О. Сергеевым при выборе оптимального распределения потоков теплоносителя в вентилируемом кассетном радиоэлектронном аппарате [2.46].

- 2.1. *Эйххофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния: Пер. с англ.. – М.: Мир.. 1975.
- 2.2. *Кондратьев Г. М.* Тепловые измерения.– М.–Л.: Машгиз, 1957.
- 2.3. *Дульнев Г. Н., Тарновский Н. Н.* Тепловые режимы электронной аппаратуры.– Л.: Энергия, 1971.
- 2.4. *Дульнев Г. Н., Семяшкин Э. М.* Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах.– Л.: Энергия, 1968.
- 2.5. *Дульнев Г. Н.* Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре: Учебник для вузов.–М.: Высш.шк.,-1984.-247 с.
- 2.6. *Платунов Е.С.* Теплофизические измерения в монотонном режиме.– Л.: Энергия, 1973-144 с.
- 2.7. *Ярышев Н. А.* Теоретические основы измерения нестационарной температуры.– 2-е изд.,перераб.–Л.: Энергоатомиздат, 1990-256 с.
- 2.8. *Ярышев Н. А., Андреева Л.Б.* Тепловой расчет термостатов-Л.: Энергоатомиздат, 1984-176 с.
- 2.9. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. Под ред. А. А. Померанцева.– М.: Наука, 1964.
- 2.10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.– М.: Высшая школа, 1967.
- 2.11. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами.– М.: Наука, 1979.
- 2.12. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования.– М.: Наука, 1977.

- 2.13. *Вейник А.И.* Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.: Госэнергоиздат, 1959.
- 2.14. *Темкин А. Г.* Обратные методы теплопроводности. – М.: Энергия, 1973.
- 2.15. *Ярышев Н.А.* Передаточные функции для температуры тела при обобщенных тепловых воздействиях//Инженерно-физический журнал. Т. 18. № 5. 1970.
- 2.16. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования: Пер. с нем.– М.: Наука, 1971.
- 2.17. *Столяров А. С., Ярышев Н. А.* Определяющий размер и фактор формы для сплошного однородного тела//Инженерно-физический журнал. Т. 24. № 3. 1973.
- 2.18. *Ярышев Н.А.* Приближенный анализ одномерных процессов теплопроводности//Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. № 3. С. 54-61.
- 2.19. *Ицхоки Я. С.* Приближенный метод анализа переходных процессов в сложных линейных цепях.– М. : Советское радио, 1969.
- 2.20. *Ярышев Н.А.* Расчет температуры однородного объекта при конвективном теплообмене//Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43. № 4. С. 61-66.
- 2.21. *Столяров А, С., Ярышев Н. А.* Обобщенный переходный процесс теплообмена однородного тела//Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО. Вып. 1. 1973.
- 2.22. *Ярышев Н. А., Андреева Л. Б.* Расчет термических сопротивлений элементов термостатирующих устройств//Вопросы радиоэлектроники, Сер. ТРТО. Вып. 2. 1970.
- 2.23. *Ярышев Н. А.* Факторы формы тел в задачах нестационарной теплопроводности//Изв.вузов. Приборостроение. Т. 44. № 3. 2001. С. 40-44.
- 2.24. *Андреева Л. Б., Ярышев Н. А.* Передаточные функции для температуры криволинейных стенок и полых тел при обобщенных тепловых воздействиях//Инженерно-физический журнал. Т. 19. № 6. 1970.
- 2.25. *Манжикова С. Ц., Ярышев Н. А.* Приближенное уравнение теплообмена



и передаточные функции для криволинейных стенок и полых тел// Известия вузов. Приборостроение. Т. 17. № 3. 1974.

2.26. *Ярышев Н. А., Манжикова С. Ц., Заровная Н. Н.* Тепловые потоки в одномерном объекте при комплексных тепловых воздействиях//Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО. Вып. 3. 1977.

2.27. *Кондратьев Г.М.* Тепловые измерения.–М.–Л.: Машгиз, 1957.

2.28. *Горохов С. М., Ярышев Н. А.* Нестационарная теплопроводность неоднородных объектов в условиях сложного теплообмена//Известия вузов. Приборостроение. Т. 20. № 12. 1977.

2.29. *Горохов С. М., Ярышев Н. А.* Нестационарный теплообмен тела переменного сечения в потоке жидкости (газа)//Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТРТО. Вып. 2. 1977.

2.30. *Ярышев Н.А., Столяров А. С.,* Обобщенная одномерная модель нестационарного теплообмена объектов с распределенными параметрами//Изв.вузов. Приборостроение. Т. 25. № 8. 1982.

2.31. *Ярышев Н.А.* Нестационарный теплообмен объектов с внутренними адиабатически изолированными полостями//Научно-технический вестник СПбГИТМО (ТУ). Вып. 3. Физические процессы, системы и технологии. 2001. С. 24-31.

2.32. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

2.33. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа, М.: ГИФМЛ, 1962.

2.34. *Коллату Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: ИЧЛ, 1953.

2.35. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970.

- 2.36. Кошляков Н.С., Глишер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970.
- 2.37. Дульнев Г.Н., Польщиков Б. В., Польщикова И. А. Стационарный тепловой режим электронного аппарата с комбинированным охлаждением//Сб. научн. ст. «Расчет температурных полей твердых тел и систем». Труды ЛИТМО. Вып. 86. Л.: 1976. С. 36-49.
- 2.38. Дульнев Г.Н., Польщиков Б.В. Температурное поле пластины с дискретным источником энергии. Минск: ИФЖ. Т. XXIX. №4. 1975. С. 722-728.
- 2.39. Дульнев Г.Н., Польщиков Б. В. Тепловой режим электронного аппарата с твердыми теплостоками//Сб. научн. ст. «Приближенные методы решения задач теплопроводности и их приложение в технике». Труды ЛИТМО. Вып. 70. Л.: 1972. С. 48-59.
- 2.40. Дульнев Г.Н., Ермолина Э. И. Приближенный анализ температурного поля параллелепипеда с локальным источником энергии. Минск: ИФЖ. Т. XXVII. №4. 1975. С. 685-693.
- 2.41. Польщиков Б. В., Гасанова В.В. Температурное поле параллелепипеда с линейчатым источником//Расчет температурных полей твердых тел и систем». Труды ЛИТМО. Вып. 86. Л. 1976. С. 49-59.
- 2.42. Польщиков Б.В, Левборг Е.С. Расчет температуры локального источника тепла на пластине. Там же, стр. 54-63.
- 2.43. Дульнев Г.Н., Польщиков Б.В., Левборг Е.С. Температурное поле пластины с локальным источником тепла//Вопросы радиоэлектроники, Сер. ТРТО. Вып. 1, 1976. С. 98-103.
- 2.44. Дульнев Г.Н, Колесникова О. А., Новицкая Т.И, Польщиков Б.В. Температурное поле одиночной РЭА с тепловым стоком//Вопросы радиоэлектроники, Сер. ТРТО. Вып. 1. 1981. С. 21-29.

2.45. Дульнев Г.Н., Барабаш М.Б., Польщиков Б.В., Новицкая Т.И. Обобщенная тепловая модель РЭА с тепловым стоком//Известия вузов. Приборостроение. Т. XXVII. №4. Л. 1980. С. 83-89.

2.46. Дульнев Г.Н., Сергеев А.О. Выбор оптимального распределения потоков теплоносителя в вентилируемом РЭА. Минск: ИФЖ. Т. L. №2. 1986. С. 249-256.

# РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ. МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

## Введение

Аналитические уравнения теплопроводности, являясь феноменологическими, содержат в себе эмпирические коэффициенты, отражающие теплоемкость  $c$ , теплопроводность  $\lambda$  и температуропроводность  $a$  рассматриваемого объекта. Используя их при анализе реального теплового процесса, исследователь обязан подставлять в уравнения конкретные значения тепловых коэффициентов, чтобы довести расчет до количественных оценок. Без этого теоретический анализ теряет практический смысл и не выходит за рамки математических упражнений.

Опыт показывает, что тепловые свойства реальных веществ и материалов сложным образом связаны с их химическим составом, внутренней структурой и при этом существенно зависят от внешних условий (температуры, давления, влажности и др), поэтому остаются практически недоступными для количественных теоретических оценок. Достоверные сведения о них пока может дать только специально поставленный эксперимент. По этой причине параллельно с развитием аналитической теории теплопроводности физики и инженеры для экспериментального определения тепловых свойств веществ и материалов вынуждены создавать методы и средства, максимально приближенные к условиям их эксплуатации.

Первые шаги в этом направлении были сделаны в начале XIX в. непосредственно творцами теории теплопроводности, французскими физиками Ж.Б.Ж. Фурье (1768–1830) и Ж.Б. Био (1774–1862). Затем разработкой методов определения тепловых свойств многие десятилетия занимались только физики, среди которых следует особо отметить В. Томсона (лорда Кельвина), Д.К. Максвелла, А. Ангстрёма, Р. Бёрдже, Ф. Кольрауша, И. Ленгмюра, К. Христиансена. Однако уже к концу XIX в. тепловые свойства стали активно интересовать технику, нуждающуюся в материалах с заданными свойствами, поэтому к созданию методов подключились такие выдающиеся инженеры-теплотехники, как Г. Грёбер, В. Нуссельт,

М. Якоб, Э. Гриффитс, П. Вернотт и др. Благодаря их фундаментальным работам в начале XX в. тепловые измерения оформились в самостоятельный раздел теплофизики.

Трудности измерения тепловых свойств материалов объясняются рядом причин. Выделим пока среди них две основные. Во-первых, по теплопроводности все материалы различаются лишь на четыре порядка, а по объемной теплоемкости всего на один порядок, тогда как, к примеру, по электропроводности те же материалы могут различаться на двадцать порядков и более. По этой причине существенно затруднена пространственная и временная локализация реализуемых в теплоизмерительной ячейке тепловых потоков. Во-вторых, тепловые процессы отличаются от многих других физических процессов очень большой инерционностью. По этой причине формирование заданных температурных полей внутри ячейки может растягиваться на десятки минут и даже часы.

На раннем этапе тепловых измерений наибольшее внимание исследователей привлекли *импульсные методы* измерения теплоемкости и *стационарные методы* измерения теплопроводности. При измерениях теплоемкости особое распространение, в частности, получил метод смешения в адиабатическом водяном калориметре, а при измерениях теплопроводности – стационарный метод одномерного поперечного теплового потока в пластине. К сожалению, при реализации указанных (ставших классическими) методов к теплоизмерительному устройству приходится предъявлять весьма жесткие требования, обусловленные необходимостью обеспечивать перед началом опыта и в его конце равновесные состояния в объеме всей калориметрической ячейки, что существенно усложняет ее конструкцию и увеличивает продолжительность измерений. При измерении теплопроводности методом пластины появляется необходимость использовать сложные приемы локализации одномерных тепловых потоков, существенно затруднена регистрация температуры в теле образца, причем даже такими миниатюрными локальными контактными датчиками, как термопары. В итоге первые образцы тепловых приборов оказались громоздкими, сложными в изготовлении и дорогостоящими, а процедура измерений оставалась длительной и нуждалась в квалифицированном обслуживании. Достаточно сказать, что продолжительность одного опыта на таком приборе могла достигать нескольких часов, а иногда и суток.

Качественный сдвиг в области измерения тепловых свойств произошел в 30-х годах XX в., когда были найдены строгие аналитические решения для целого ряда практически интересных линейных задач нестационарной теплопроводности. При этом обнаружилось, что во многих нестационарных тепловых процессах удается выделить по крайней мере

две стадии, внутри которых температурное поле исследуемого объекта с удовлетворительной точностью описывается относительно простыми математическими функциями. Так, например, удастся описать первую, начальную стадию теплового процесса в телах простой геометрической формы, если ему предшествует равновесное тепловое состояние. Затем в теле обычно наступает переходный нестационарный процесс, плохо поддающийся простому математическому описанию, так как на него начинают воздействовать краевые условия теплообмена. Однако за ним вновь возникает упорядоченная нестационарная стадия, подчиняющаяся весьма простым математическим закономерностям. На этой стадии, в отличие от первой, температурное поле тела полностью “забывает” о своем начальном состоянии (*регуляризуется*) и формируется уже только под влиянием краевых условий, однозначно определяясь условиями теплообмена со средой и внутренними тепловыми источниками. В большинстве тепловых задач регулярная стадия асимптотически завершается стационарным температурным или тепловым состоянием.

В нашей стране в 30-е годы XX в. началось бурное развитие народного хозяйства. Промышленность стала проявлять большой интерес к научным разработкам. Возникла потребность в экспрессных, дешевых в изготовлении и простых в обслуживании приборах для аттестации создаваемых предприятиями новых технических материалов. В связи с этим в России несколько раньше, чем в Европе, уже частично оснащенной теплоизмерительными приборами, специалисты в области теплофизических измерений обратили внимание на начальную и регулярную стадии нестационарных тепловых процессов. Первопроходцами в этих научных поисках стали видные российские теплофизики: Г.М. Кондратьев [3.11, 3.12], А.В. Лыков [3.18] и А.Ф. Чудновский [3.35]. Благодаря их активной творческой научной деятельности в нескольких институтах страны возникли самостоятельные научные школы, занимающиеся разработкой методов начальной стадии (*нестационарных методов*), методов регулярного режима первого рода (*регулярных методов*) и методов регулярного режима второго рода (*квазистационарных методов*).

Г.М. Кондратьев, работая во ВНИИМе и ЛИТМО, к этому времени завершил создание аналитической теории регуляризации температурных полей в телах, охлаждаемых в изотермической термостатированной конвективной среде, и удачно использовал ее некоторые практически интересные следствия для разработки методов определения теплофизических свойств. Созданные им и его учениками методы оказались простыми в реализации, поэтому получили широкое распространение. Особую известность среди них приобрели *акалориметры*, *бикалориметры* и *микрокалоримет-*

ры регулярного режима, обеспечивающие простоту, экспрессность и надежность измерения температуропроводности, теплопроводности и теплоемкости разнообразных групп материалов. В ранних разработках калориметров регулярного режима принимали активное участие ученики Г.М. Кондратьева М.П. Стаценко, Н.Г. Резцов, О.И. Рауш, Г.Н. Данилова, М.Ф. Казанский, А.Ф. Бегункова, Л.А. Комкова, Б.Н. Олейник, М.П. Емченко и Р.А. Мустафаев [3.11].

В последующие десятилетия развитие методов регулярного режима шло по нескольким направлениям. В частности, изыскивались новые области применения методов, использовались последние достижения электроизмерительной техники, совершенствовалась конструкция калориметрических ячеек. В процессе этих работ окончательно выяснилось, что регулярные методы, как и методы начальной стадии, целесообразно использовать в основном при измерениях вблизи комнатной температуры, где естественным образом обеспечивается изотермичность среды и начального состояния образцов. По мере удаления от нормальных климатических условий опыта регулярные методы по длительности перестают отличаться от стационарных. Для исследования тепловых свойств в широкой области температур более перспективными оказались квазистационарные методы, линейная теория которых впервые была детально разработана А.В. Лыковым [3.18]. Однако их широкому внедрению мешали две основные причины: сложность реализации линейного разогрева и отсутствие надлежащего теоретического обоснования, позволяющего корректно учитывать произвольную температурную зависимость теплофизических характеристик образца. Поэтому возникла идея объединить положительные качества регулярных и квазистационарных методов, теоретически обосновав возможность их применения в условиях монотонного (близкого к линейному) изменения температуры, когда удается равноправно учитывать как нелинейность уравнения теплопроводности, так и изменение скорости изменения температуры.

В рамках реализации этой идеи в 60-х годах в ЛИТМО на кафедре теплофизики, в созданной Г.М. Кондратьевым в 1957 г. проблемной лаборатории тепловых приборов, которую с 1958 г. (после кончины Кондратьева) возглавил профессор Г.Н. Дульнев, доценту Е.С. Платунову и аспирантам В.В. Курепину, С.Е. Буравому удалось обосновать условия регуляризации температурных полей в нелинейных задачах теплопроводности и в течение последующих 17 лет с коллективом более молодых сотрудников лаборатории создать комплекс динамических методов (*методов монотонного режима*), синтезировавших в себе основные признаки регулярных и квазистационарных методов [3.5, 3.14, 3.15, 3.22–3.25, 3.30, 3.36]. Разработанные на этой теоретической основе приборы позволили в сово-

купности проводить теплофизические измерения в области температур от 4,2 до 3000 К, а приборы, предназначенные для измерений в интервале температур (-100...400) °С, благодаря массовому спросу, в 70-х годах были переданы на доработку в Ленинградское ГСКТБ теплофизического приборостроения и до 1992 г. выпускались серийно, в заводском оформлении (г. Актюбинск, Казахстан). В разработке, создании и изготовлении первых динамических теплоизмерительных приборов в разные годы активно участвовали выпускники, аспиранты и сотрудники кафедры теплофизики В.Б. Федоров, Ю.П. Шрамко, Л.В. Левкович (Литвинова), И.Ф. Шубин, Г.Н. Кошаровский, В.Б. Ясюков, В.И. Цветков, В.А. Милосердов, конструкторы Г.Р. Гольдберг, Ю.В. Алешкевич, А.И. Королькова, К.А. Кузьмин и Э.Е. Ярышева.

С 1975 г., в связи с переходом Е.С. Платунова, В.В. Курепина и С.Е. Буравого на кафедру физики ЛТИХП (ныне Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий) научным центром разработки новых динамических методов и приборов стала организованная Минприбором СССР при ЛТИХП отраслевая теплофизическая лаборатория динамических методов. К созданию приборов нового поколения в ней активно подключились В.М. Козин [3.10], Ю.В. Левочкин [3.16], В.А. Береговой, В.А. Самолетов [3.32], Е.А. Белов [3.3], Н.В. Ниженский [3.21], а несколько позднее И.В. Баранов [3.1] и С.С. Прошкин [3.31]. Лаборатория активно функционировала до распада СССР и расформирования Минприбора.

Многие из разработок, выполненных в ЛИТМО, ЛТИХП и ГСКБ ТФП, были обобщены в двух монографиях [3.26, 3.33].



# ГЛАВА 14. ТЕОРИЯ РЕГУЛЯРНЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

## 14.1. Исходные положения

Регулярная тепловая стадия, как было показано в первом разделе, возникает, если исследуемое тело находится в теплообмене с термостатированной изотермической средой. При теплофизических измерениях начальное температурное поле образца обычно оказывается близким к равномерному, поэтому начало наступления регулярной стадии в его центральной зоне можно приближенно оценивать критерием Фурье, близким к значению  $Fo_p \approx 0,1$ .

Перепад температуры образца  $\vartheta(x, y, z, \tau)$  относительно среды изменится на этой стадии, подчиняясь универсальной зависимости

$$\vartheta(x, y, z, \tau) = AU(x, y, z) \exp(-m\tau), \quad (14.1.1)$$

где  $m$  – темп регулярного охлаждения (нагрева) образца,  $c^{-1}$ ;  $U(x, y, z)$  – безразмерная координатная функция, характеризующая температурное поле в образце;  $A$  – коэффициент, косвенно отражающий начальный перепад температуры образца относительно среды. Зависимость (14.1.1) остается справедливой в условиях охлаждения образца и при нагреве.

Конкретный вид координатной функции  $U(x, y, z)$  определяется геометрией и теплопроводностью образца, а также условиями его теплообмена с другими телами и внешней средой. От их сочетания зависят облик и эксплуатационные характеристики *тепловой ячейки* каждого конкретного *калориметра* – прибора, обеспечивающего измерение теплофизических свойств веществ и материалов. Поэтому наиболее важные из этих признаков целесообразно использовать для систематизации тепловых ячеек регулярного режима. Ниже мы убедимся, что на этапе теоретического обоснования методов определения теплофизических свойств такой подход вполне оправдан.

Занимаясь прикладными задачами теории регулярного теплового режима, Г.М. Кондратьев выделил пять исходных методов определения теплофизических свойств и дал им условные названия – *метод акалориметра*, *метод двух точек*, *метод лямбдакалориметра*, *метод микрокалориметра* и *метод бикалориметра* [3.11, 3.12].

*Метод акалориметра* предназначается для определения *теплопроводности*. Опыт проводится в режиме предельно интенсивного

охлаждения образца в изотермической термостатированной среде, обеспечивающей ему высокую тепловую активность, при значениях критерия Био, удовлетворяющих условию  $Bi > 50$ . Для измерений этим методом пригодны однородные изотропные образцы произвольной формы. Чтобы вычислить коэффициент температуропроводности, необходимо знать лишь “коэффициент формы” образца и определить экспериментально темп  $m$  его регулярного охлаждения (нагрева).

**Метод двух точек** также предназначается для определения *температуропроводности*. В опыте производится регистрация отношения температур перегрева в двух характерных точках образца, охлаждаемого в изотермической термостатированной среде, которая обеспечивает образцу среднюю тепловую активность, с значениями критерия Био в интервале  $(0,5 < Bi < 5)$ . Отношение перегрева в двух фиксированных точках образца сохраняется в условиях опыта постоянным, а коэффициент температуропроводности функционально связан с темпом охлаждения и геометрией образца. Это универсальное свойство регулярных температурных полей широко используется при расчете коэффициента температуропроводности. Метод нуждается в образцах правильной формы.

**Метод лямбдакалориметра** предназначается для определения *теплопроводности*. По условиям опыта этот метод является фактически обобщением метода двух точек, так как в опыте, как и прежде, регистрируется отношение температурных перегревов в двух точках образца, но дополнительно фиксируется коэффициент теплоотдачи и тем самым учитывается тепловой поток между образцом и средой.

**Метод микрокалориметра** предназначается для независимого определения *теплоемкости*. Опыт проводится в термостатированной среде с очень малой тепловой активностью ( $Bi < 0,3$ ), обеспечивающей равномерное температурное поле образца. Для определения теплоемкости следует знать коэффициент теплоотдачи и темп регулярного охлаждения (нагрева) образца.

**Метод бикалориметра** предназначается для независимого определения *теплопроводности*. В опыте регистрируется темп регулярного охлаждения массивного металлического ядра с известной теплоемкостью через отделяющий его от среды тонкий слой исследуемого материала. Тепловая активность среды подбирается большой ( $Bi > 50$ ).

Все перечисленные методы наиболее просто реализуются при исследовании материалов, теплопроводность которых не превышает  $2 \text{ Вт/(м·К)}$ . Однако в отдельных случаях их все же удается распространять на полупроводники и металлы.

Не вникая в детали, обратим внимание на общие черты методов регулярного режима.

Как уже отмечалось, расчетные соотношения всех регулярных методов сохраняются как при охлаждении, так и при нагреве образца. Различие проявляется только в знаке перегрева. В условиях охлаждения он является положительным, а в условиях нагрева – отрицательным. Поэтому при анализе общих закономерностей того или иного метода для простоты изложения условимся говорить только об охлаждении предварительно нагретых образцов, помня, что все результаты остаются справедливыми и при нагреве образцов.

Расчетные формулы всех методов регулярного режима опираются на аналитическую структуру координатной функции  $U(x, y, z)$ , определяющей конкретный вид температурного поля образца. Поэтому важно, чтобы функция  $U(x, y, z)$  оставалась структурно простой и математически строгой. Однако ее простота и строгость зависят не только от формы образца, но и от краевых условий его теплообмена с внешней средой. Что касается формы образца, то достаточно простые аналитические выражения этой функции имеются только у однородных изотропных тел простейшей геометрии – прежде всего у пластины, цилиндра и шара, если в них сохраняются одномерные температурные поля, и лишь в отдельных случаях у прямоугольного параллелепипеда, диска конечного радиуса и цилиндра конечной высоты.

Еще более серьезные ограничения в структуру температурного поля образца вносят краевые условия теплообмена. Именно они во многом определяют конструкцию тепловой ячейки. Поэтому при изложении теоретических основ измерения теплофизических характеристик все тепловые задачи целесообразно объединять по типу краевых условий.

По указанному признаку все имеющиеся *тепловые ячейки*, а следовательно, и *калориметры* регулярного режима, обобщая классификацию Г.М. Кондратьева [3.11, 3.12], можно объединить в три группы.

В *калориметрах первого типа* (назовем их *калориметрами без оболочки*) исследуемый образец, имея правильную форму, охлаждается непосредственно в изотермической конвективной среде. При этом в телах с двух- и трехмерными температурными полями на отдельных гранях образца могут задаваться различные (*раздельные*) коэффициенты теплоотдачи.

В *калориметрах второго типа* (назовем их *калориметрами с оболочкой*) образец заключен в металлическую оболочку с равномерным температурным полем и подвергается воздействию конвективной среды непосредственно, а через изотермическую оболочку.

В *калориметрах третьего типа* (назовем их *калориметрами с ядром*) образец играет роль теплозащитной оболочки, через которую в активной изотермической среде охлаждается относительно массивное ме-

таллическое ядро, сохраняя внутри себя практически равномерное температурное поле. В ячейке обеспечиваются условия, при которых оболочка сохраняет по возможности идеальный тепловой контакт с ядром и средой.

В калориметрах двух последних типов простую аналитическую структуру имеют только одномерные температурные поля, поэтому к геометрии образцов и краевым условиям на их вспомогательных гранях предъявляются жесткие требования.

Ниже мы убедимся, что каждая группа калориметров имеет свою оптимальную область применения и обладает специфическими эксплуатационными характеристиками. Основные варианты калориметров трех первых типов, ставшие впоследствии классическими, были впервые рассмотрены и реализованы непосредственно Г.М. Кондратьевым [3.11, 3.12], а остальные – его учениками и последователями, использовавшими новые возможности электроизмерительной, записывающей и вычислительной техники [3.1, 3.9, 3.25, 3.28, 3.31–3.33].

## 14.2. Калориметры без оболочки

В калориметрах (ячейках) этого типа используются, как уже отмечалось, образцы простой формы (пластина, цилиндр, шар, прямоугольный параллелепипед, короткий цилиндр и диск, тонкий стержень конечной длины), охлаждающиеся или нагревающиеся непосредственно в изотермической стационарной среде. В стадии регулярного теплового режима в каждом из перечисленных образцов возникает температурное поле, строго описываемое простыми аналитическими функциями, так как их геометрическая симметрия органично согласуется с однородными линейными краевыми условиями теплообмена. Строгость простого решения не нарушается даже в тех случаях, когда каждая грань образца подвергается тепловому воздействию среды с индивидуальным (раздельным) коэффициентом теплоотдачи.

Калориметры этой группы широко использовались на первом этапе развития теплофизических измерений, когда отсутствовало производство тепловых приборов.

Каждая из перечисленных форм образца обладает своей спецификой, поэтому нуждается в самостоятельном математическом анализе, что и будет сделано ниже.

1. *Пластина (симметричный вариант)*. Однородная пластина толщиной  $2h$  после предварительного нагрева помещается в конвективную изотермическую среду с условно нулевой температурой, где свободно охлаждается с постоянным коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ . По мере охлаждения

пластины ее температурное поле на регулярной стадии опыта становится плоским одномерным, изменяющимся вдоль координаты  $Ox$ , перпендикулярной ее граням, как показано на рис. 14.2.1. С учетом симметричности краевых условий теплообмена начало отсчета координаты  $x$  совмещено с центральным сечением пластины. Температура остается в опыте постоянной, поэтому рассматриваем перегрев пластины относительно среды.

Подставляя в уравнение теплопроводности функцию (14.1.1), приходим к одномерному дифференциальному уравнению для координатной функции  $U(x)$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \mu^2 U = 0, \quad (\mu^2 = m/a), \quad (14.2.1)$$

которая должна удовлетворять симметричным краевым условиям

$$\left( \frac{dU}{dx} \pm \frac{\alpha}{\lambda} U \right)_{x=\pm h} = 0, \quad (14.2.2)$$

где  $m$  – темп охлаждения (нагрева) пластины;  $\lambda$ ,  $a$  – теплопроводность и температуропроводность пластины.

Решение системы уравнений (14.2.1), (14.2.2) хорошо известно. Из него следует, что на регулярной стадии охлаждения температурное поле  $\vartheta(x, \tau)$  должно иметь вид

$$\vartheta(x, \tau) = A \cos(p x/h) \exp(-m\tau), \quad (14.2.3)$$

причем координатная (собственная) функция в выражении (14.2.3) обязана удовлетворять трансцендентному характеристическому уравнению

$$p \operatorname{tg} p = \operatorname{Bi}, \quad (14.2.4)$$

где введены обозначения  $p = \mu h$ ,  $\operatorname{Bi} = \alpha h / \lambda$  ( $\operatorname{Bi}$  – критерий Био) и по физическим соображениям используется только первый корень этого уравнения. Для обеспечения удобства расчетов функция  $\operatorname{Bi} = f(p) = p \operatorname{tg} p$  табулирована (см. таблицу 14.2.1).

Убедимся, что найденное решение может использоваться по крайней мере в четырех независимых методах измерения теплофизических свойств (из пяти, предложенных в свое время Г.М. Кондратьевым).

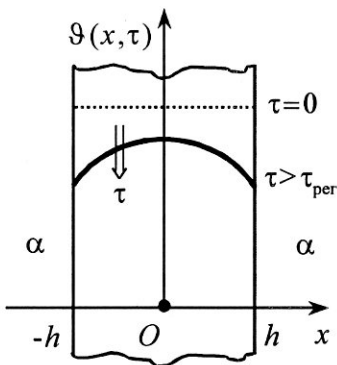


Рис. 14.2.1

В *методе акалориметра* образец должен охлаждаться предельно интенсивно, при условии  $Bi \rightarrow \infty$ . В этом случае температурное поле образца является предельно неравномерным, и параметр  $p$  уравнения (14.2.4) принимает максимально возможное значение  $p_{\infty} = \pi/2$ . Коэффициент теплопроводности  $a$  и темп охлаждения  $m_{\infty}$ , согласно соотношениям (14.2.1) и (14.2.4), оказываются связанными соотношением (через коэффициент формы  $K=4h^2/\pi^2$ )

$$a = \frac{4h^2}{\pi^2} m_{\infty}. \quad (14.2.5)$$

В *методе микрокалориметра*, в отличие от метода акалориметра, образец охлаждается в среде с низкой тепловой активностью, сохраняя в опыте практически равномерное температурное поле. Воспользуемся условием (14.2.4) и содержащимся в уравнении (14.2.1) универсальным выражением  $m=am^2$ , а также тождеством  $\lambda=acr$ , где  $\rho$  – плотность материала образца. Формула для удельной теплоемкости  $c$  плоского образца приобретает вид

$$c = \Psi(p) \frac{\alpha}{\rho h m}, \quad (14.2.6)$$

где  $\Psi(p)$  – безразмерная функция, определяющая отношение поверхностного перегрева к среднеобъемному перегреву образца, имеет вид

$$\Psi(p) = p / \operatorname{tg} p \quad (14.2.7)$$

и для удобства расчетов табулирована (см. таблицу 14.2.1).

Если ячейка обеспечивает режим охлаждения плоского образца с тепловой активностью  $Bi < 0,025$ , то формула (14.2.6) становится практически нечувствительной к параметру  $p$  и с погрешностью не более 1% упрощается к виду

$$c = \frac{\alpha}{\rho h m}, \quad (14.2.8)$$

позволяя осуществлять *независимые* измерения теплоемкости.

*Методы двух точек и лямбдакалориметра* в реализации несколько сложнее двух предыдущих. В этом случае образец должен помещаться в среду с промежуточной тепловой активностью, обеспечивающей охлаждение в режиме ( $0,5 < Bi < 5$ ), при стабилизированном коэффициенте теплоотдачи  $\alpha$ . Для регистрации температуры используются две дифференциальные термодатчики. Одна из них обычно монтируется в центральном слое ( $x=0$ ),

а вторая – в поверхностном ( $x=h$ ). В регулярной стадии охлаждения, как следует из выражения (14.2.3), выполняется соотношение

$$\frac{\vartheta(h, \tau)}{\vartheta(0, \tau)} = \cos p, \quad (14.2.9)$$

которое позволяет вычислять температуропроводность с помощью соотношения

$$a = m h^2 / p^2. \quad (14.2.10)$$

Метод лямбдакалориметра по режиму охлаждения удачно совмещается с методом двух точек, позволяя тем самым осуществлять комплексные теплофизические измерения. Действительно, если в опыте параметр  $p$  определен независимо, то краевое условие (14.2.4) позволяет вычислить критерий  $Bi = \alpha h / \lambda$ , а через него при известном значении  $\alpha$  определить коэффициент теплопроводности  $\lambda$  образца по формуле

$$\lambda = \frac{\alpha h}{p \operatorname{tg} p}. \quad (14.2.11)$$

**2. Пластина (несимметричный вариант).** В отличие от предыдущего, симметричного варианта предполагается, что изотермическая среда воздействует на грани пластины  $h$  и  $-h$  с различными коэффициентами теплоотдачи,  $\alpha_h$  и  $\alpha_{-h}$  соответственно. Особенности ее отражены на рис. 14.2.2.

В этой задаче краевые условия, в отличие от условий (14.2.2), становятся несимметричными

$$\left( \frac{dU}{dx} + \frac{\alpha_h}{\lambda} U \right)_{x=h} = 0, \quad \left( \frac{dU}{dx} - \frac{\alpha_{-h}}{\lambda} U \right)_{x=-h} = 0, \quad (14.2.12)$$

и собственная координатная функция  $U(x)$  пластины приобретает вид

$$U(x) = \cos(\mu x + \varphi), \quad (14.2.13)$$

где  $\varphi$  – начальная фаза, учитывающая несимметричность функции  $U(x)$  относительно центральной плоскости пластины, с координатой  $x=0$ .

В соответствии с краевыми условиями (14.2.12) функция (14.2.13) должна удовлетворять трансцендентным уравнениям

$$p \operatorname{tg}(p + \varphi) = Bi_h, \quad p \operatorname{tg}(p - \varphi) = Bi_{-h}, \quad (14.2.14)$$

где  $p = \mu h$ ;  $Bi_h = \alpha_h h / \lambda$ ;  $Bi_{-h} = \alpha_{-h} h / \lambda$ , причем физический смысл имеют только первые (младшие) корни этих уравнений.

Температурное поле пластины подчиняется зависимости

$$\vartheta(x, \tau) = A \cos(p x/h + \varphi) \exp(-m\tau),$$

$$(m = a\mu^2 = ap^2/h^2) \quad (14.2.15)$$

Найденное решение в плоских калориметрах без оболочки приходится обычно использовать в тех случаях, если в тепловой ячейке по каким-либо причинам нарушается симметричность условий теплообмена.

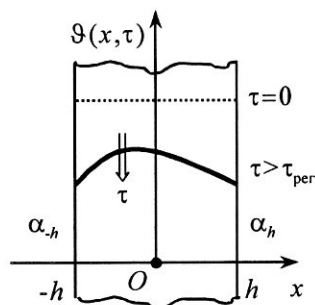


Рис. 14.2.2

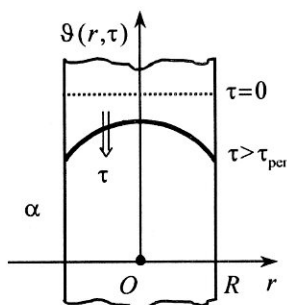


Рис. 14.2.3

**3. Цилиндр.** Образец имеет радиус  $R$ , неограниченную длину и свободно охлаждается в изотермической среде с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$  (рис. 14.2.3). Дифференциальное уравнение и краевое условие для функции  $U(r)$  в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \mu^2 U = 0, \quad (\mu^2 = m/a) \quad (14.2.16)$$

$$\left( \frac{dU}{dr} + \frac{\alpha}{\lambda} U \right)_{x=R} = 0. \quad (14.2.17)$$

Собственной функцией системы уравнений (14.2.16), (14.2.17) является цилиндрическая функция Бесселя первого рода нулевого порядка

$$U(r) = J_0(\mu r), \quad (14.2.18)$$

удовлетворяющая уравнению

$$\frac{pJ_1(p)}{J_0(p)} = \text{Bi}, \quad (14.2.19)$$



где  $p = \mu R$ ,  $Bi = \alpha R / \lambda$ ;  $J_1(p)$  – цилиндрическая функция Бесселя первого рода первого порядка, причем в ней учитывается только первый корень трансцендентного уравнения (1.2.19). Для упрощения расчетов функция  $Bi = f(p) = p J_1(p) / J_0(p)$  табулирована (см. таблицу 14.2.1).

Температурное поле образца в регулярной стадии имеет вид

$$\vartheta(r, \tau) = A J_0(p r / h) \exp(-m \tau). \quad (14.2.20)$$

В рассмотренной задаче, как и прежде, появляется возможность реализовать все четыре упоминавшихся метода измерения теплофизических измерений.

Расчетная формула в *методе акалориметра*

$$a = \left( \frac{R}{2,405} \right)^2 m_{\infty}. \quad (14.2.21)$$

Расчетная формула в *методе микрокалориметра*

$$c = \frac{p J_0(p)}{2 J_1(p)} \frac{2\alpha}{\rho R m}, \quad (14.2.22)$$

где функция

$$\Psi(p) = p J_0(p) / 2 J_1(p) \quad (14.2.23)$$

характеризует отношение поверхностной и среднеобъемной температур перегрева цилиндрического образца. Функция  $\Psi(p) = p J_0(p) / 2 J_1(p)$  табулирована (см. таблицу 14.2.1).

Если ячейка обеспечивает режим охлаждения образца с тепловой активностью  $Bi < 0,04$ , то формула (14.2.22) упрощается к виду

$$c = \frac{2\alpha}{\rho R m}. \quad (14.2.24)$$

В *методе двух точек* отношение температур перегрева, измеряемых в слоях цилиндра с  $r=0$  и  $r=R$ , согласно функции (14.2.20), связано с параметром  $p$  соотношением

$$\frac{\vartheta(R, \tau)}{\vartheta(0, \tau)} = J_0(p). \quad (14.2.25)$$

Благодаря этому для расчета температуропроводности образца пригодна формула

$$a = m R^2 / p^2. \quad (14.2.26)$$

В методе лямбдакалориметра расчет теплопроводности производится по формуле

$$\lambda = \alpha R \frac{J_0(p)}{pJ_1(p)}. \quad (14.2.27)$$

4. **Шар.** Сплошной однородный шар радиусом  $R$  охлаждается в изотермической конвективной среде с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$  (рис. 14.2.4).

Координатная функция  $U(r)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} + \mu^2 U = 0$$

$$(\mu^2 = m/a) \quad (14.2.28)$$

и краевому условию

$$\left( \frac{dU}{dr} + \frac{\alpha}{\lambda} U \right)_{r=R} = 0. \quad (14.2.29)$$

Собственная функция  $U(r)$ , являющаяся решением (14.2.28), (14.2.29), имеет вид

$$U(r) = \frac{\sin \mu r}{\mu r}, \quad (14.2.30)$$

удовлетворяя трансцендентному уравнению

$$1 - p \operatorname{ctg} p = \operatorname{Bi}, \quad (14.2.31)$$

где  $p = \mu R$ ,  $\operatorname{Bi} = \alpha R / \lambda$ . В уравнении учитывается только первый корень. Для удобства расчетов функция  $\operatorname{Bi} = f(p) = (1 - p \operatorname{ctg} p)$  табулирована (см. таблицу 14.2.1).

Расчетная формула в методе акалориметра

$$a = \frac{R^2}{\pi^2} m_\infty. \quad (14.2.32)$$

Расчетная формула в методе микрокалориметра

$$c = \Psi(p) \frac{3\alpha}{\rho R m}, \quad (14.2.33)$$

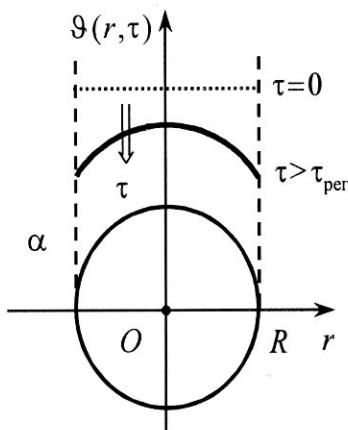


Рис. 14.2.4

$$\text{где } \Psi(p) = \frac{p^2}{3(1 - p \operatorname{ctg} p)}. \quad (14.2.34)$$

Функция (14.2.34) табулирована (см. таблицу 14.2.1). При охлаждении шара в среде с тепловой активностью  $Bi < 0,054$  формула (14.2.33) упрощается к виду

$$c = \frac{3\alpha}{\rho R m}. \quad (14.2.35)$$

В методе двух точек для расчета температуропроводности используются формулы

$$\frac{\vartheta(R, \tau)}{\vartheta(0, \tau)} = \frac{\sin p}{p}, \quad a = \frac{R^2}{p^2} m. \quad (14.2.36)$$

В методе лямбдакалориметра для расчета теплопроводности пригодна формула

$$\lambda = \frac{\alpha R}{1 - p \operatorname{ctg} p}. \quad (14.2.37)$$

**5. Прямоугольный параллелепипед (симметричный вариант).** Параллелепипед имеет габариты  $2X, 2Y, 2Z$ , с координатами граней  $\pm X, \pm Y, \pm Z$ , как показано на рис. 14.2.5.

Функция  $U(x, y, z)$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \mu^2 U = 0, \quad (\mu^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 = m/a) \quad (14.2.38)$$

и краевым условиям

$$\left( \frac{dU}{dx} \pm \frac{\alpha_x}{\lambda} U \right)_{x=\pm X} = 0, \quad \left( \frac{dU}{dy} \pm \frac{\alpha_y}{\lambda} U \right)_{y=\pm Y} = 0,$$

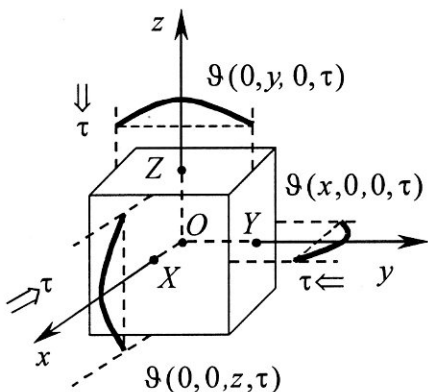


Рис. 14.2.5

$$\left( \frac{dU}{dz} \pm \frac{\alpha_z}{\lambda} U \right)_{x=\pm z} = 0, \quad (14.2.39)$$

где  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  – коэффициенты теплоотдачи на соответствующих гранях образца.

Собственная функция дифференциального уравнения (14.2.29) приобретает вид

$$U(x, y, z) = \cos(\mu_x x) \cos(\mu_y y) \cos(\mu_z z), \quad (14.2.40)$$

причем коэффициенты  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  в ней являются первыми корнями уравнений

$$p_x \operatorname{tg} p_x = \operatorname{Bi}_x, \quad p_y \operatorname{tg} p_y = \operatorname{Bi}_y, \quad p_z \operatorname{tg} p_z = \operatorname{Bi}_z. \quad (14.2.41)$$

В соотношениях (14.2.41) введены обозначения  $p_x = \mu_x X, p_y = \mu_y Y, p_z = \mu_z Z$  и  $\operatorname{Bi}_x = \alpha_x X / \lambda, \operatorname{Bi}_y = \alpha_y Y / \lambda, \operatorname{Bi}_z = \alpha_z Z / \lambda$ .

Формула для расчета температуропроводности в режиме *акалориметра*

$$a = \frac{m_\infty}{\frac{\pi^2}{4} \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right)}. \quad (14.2.42)$$

Формула для удельной теплоемкости в *методе микрокалориметра*

$$c = \frac{1}{m\rho} \left( \frac{\alpha_x p_x}{X \operatorname{tg} p_x} + \frac{\alpha_y p_y}{Y \operatorname{tg} p_y} + \frac{\alpha_z p_z}{Z \operatorname{tg} p_z} \right). \quad (14.2.43)$$

При условии  $\operatorname{Bi} < 0,025$  расчетная формула для теплоемкости существенно упрощается

$$c = \frac{1}{m\rho} \left( \frac{\alpha_x}{X} + \frac{\alpha_y}{Y} + \frac{\alpha_z}{Z} \right). \quad (14.2.44)$$

**6. Прямой цилиндр конечной длины или диск (симметричный вариант).** Цилиндр (диск) имеет радиус  $R$ , высоту  $2Z$  и охлаждается при одинаковых коэффициентах теплоотдачи на верхнем и нижнем торцах (рис. 14.2.6).

Координатная функция  $U(r, z)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \mu^2 U = 0, \quad (\mu^2 = \mu_r^2 + \mu_z^2 = m/a) \quad (14.2.45)$$

с краевыми условиями

$$\left( \frac{dU}{dr} + \frac{\alpha_r}{\lambda} U \right)_{r=R} = 0, \left( \frac{dU}{dz} \pm \frac{\alpha_z}{\lambda} U \right)_{x=\pm Z} = 0. \quad (14.2.46)$$

где  $\alpha_r, \alpha_z$  – коэффициенты теплоотдачи на гранях цилиндра.

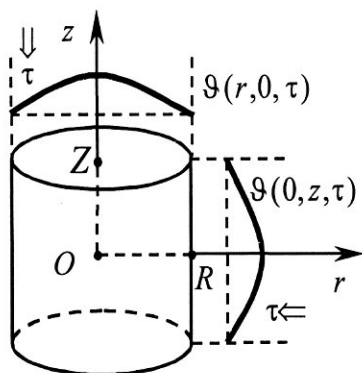


Рис. 14.2.6

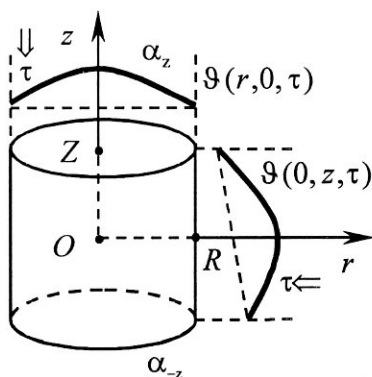


Рис. 14.2.7

Системе уравнений (14.2.45), (14.2.46) удовлетворяет собственная функция

$$U(r, z) = J_0(\mu_r r) \cos(\mu_z z), \quad (14.2.47)$$

коэффициенты  $\mu_r, \mu_z$  которой являются первыми корнями уравнений

$$\frac{p_r J_1(p_r)}{J_0(p_r)} = Bi_r, \quad p_z \operatorname{tg} p_z = Bi_z, \quad (14.2.48)$$

где использованы обозначения  $p_r = \mu_r R, p_z = \mu_z Z$  и  $Bi_r = \alpha_r R / \lambda, Bi_z = \alpha_z Z / \lambda$ , а  $J_0$  и  $J_1$  – уже упоминавшиеся выше цилиндрические функции Бесселя.

Короткий цилиндр или диск – наиболее практичная и распространенная форма образцов при любых теплофизических измерениях. Их часто используют и в методах регулярного режима, особенно в методе акалориметра.

Формула для расчета температуропроводности (режим акалориметра,  $Bi > 50$ )

$$\alpha = \frac{m_\infty}{\left( \frac{2,405}{R} \right)^2 + \left( \frac{1,571}{Z} \right)^2}. \quad (14.2.49)$$

Формула для расчета удельной теплоемкости (режим *микрокалориметра*,  $Bi < 0,05$ )

$$c = \frac{1}{m\rho} \left( \frac{2\alpha_r}{R} + \frac{\alpha_z}{Z} \right). \quad (14.2.50)$$

В *методе двух точек* формула для температуропроводности приобретает вид

$$a = \frac{m}{\left( \frac{p_r}{R} \right)^2 + \left( \frac{p_z}{Z} \right)^2}. \quad (14.2.51)$$

Параметры  $p_r$  и  $p_z$ , определяются через отношения температур

$$\frac{\vartheta(R,0,\tau)}{\vartheta(0,0,\tau)} = J_0(p_r), \quad \frac{\vartheta(0,Z,\tau)}{\vartheta(0,0,\tau)} = \cos p_z. \quad (14.2.52)$$

Для применения метода *лямбдакалориметра* в рассмотренной задаче достаточно знать коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_r$  и  $\alpha_z$  на гранях образца.

7. *Короткий прямой цилиндр или диск (несимметричный вариант)*. В отличие от предыдущей, симметричной задачи принимаем, что плоские грани (торцы) цилиндра охлаждаются с различными (раздельными) коэффициентами теплоотдачи  $\alpha_r$ ,  $\alpha_z$  (рис. 14.2.7).

Координатная функция  $U(r, z)$  должна подчиняться дифференциальному уравнению (14.2.45) с краевыми условиями, несимметричными на торцах,

$$\left( \frac{dU}{dr} + \frac{\alpha_r}{\lambda} U \right)_{r=R} = 0, \quad \left( \frac{dU}{dz} + \frac{\alpha_z}{\lambda} U \right)_{z=Z} = 0, \\ \left( \frac{dU}{dz} + \frac{\alpha_{-z}}{\lambda} U \right)_{z=-Z} = 0. \quad (14.2.53)$$

Решением является собственная функция

$$U(r, z) = J_0(\mu_r r) \cos(\mu_z z + \varphi). \quad (14.2.54)$$

Параметры  $\mu_r$ ,  $\mu_z$ ,  $\varphi$  в функции (14.2.57) являются первыми корнями уравнений

$$\frac{p_r J_1(p_r)}{J_0(p_r)} = \text{Bi}_r, \quad p_z \operatorname{tg}(p_z + \varphi) = \text{Bi}_z, \quad p_z \operatorname{tg}(p_z - \varphi) = \text{Bi}_{-z}, \quad (14.2.55)$$

в которых приняты обозначения:

$$p_r = \mu_r R, \quad p_z = \mu_z Z \quad \text{и} \quad \text{Bi}_r = \alpha_r R / \lambda, \quad \text{Bi}_z = \alpha_z Z / \lambda, \quad \text{Bi}_{-z} = \alpha_{-z} Z / \lambda.$$

Рассмотренная задача является обобщением предыдущей задачи.

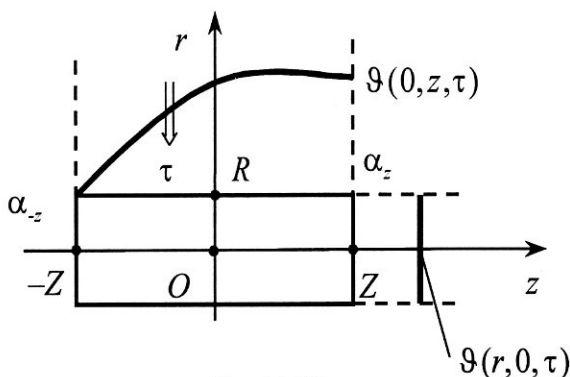


Рис. 14.2.8

**8. Тонкий стержень конечной длины.** Часто возникает ситуация, когда в качестве исследуемого образца используется тонкий стержень, имеющий значительную длину  $L=2Z$  и постоянное сечение  $S$  (рис. 14.2.8). Стержень после нагрева помещается в конвективную изотермическую среду. Создаются условия, при которых торцы стержня подвергаются интенсивному тепловому воздействию со стороны среды, причем не обязательно симметричному, а боковая поверхность – ослабленному воздействию (насколько это возможно). Температурное поле стержня в таких условиях остается практически одномерным, однородным в поперечном сечении, т. е. изменяющимся только вдоль координаты  $OZ$ . Однако из-за развитой боковой поверхности интегральное влияние бокового теплообмена на образец остается значительным. В этом случае его приходится учитывать непосредственно в уравнении теплопроводности.

Согласно тепловому балансу, нестационарный температурный перегрев  $\theta(z, \tau)$  тонкого стержня, помещенного в изотермическую среду, должен подчиняться уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - v^2 \theta = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (14.2.56)$$

с постоянным коэффициентом

$$v^2 = \frac{\alpha_r P}{\lambda S}, \quad (14.2.57)$$

в котором  $\alpha_r$  – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности стержня;  $P, S$  – периметр и площадь поперечного сечения стержня.

В регулярной стадии температурное поле стержня подчиняется зависимости

$$\mathcal{G}(z, \tau) = AU(z) \exp(-m\tau), \quad (14.2.58)$$

где координатная функция  $U(z)$  определяется дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \left( \frac{m}{a} - v^2 \right) U = 0. \quad (14.2.59)$$

При наличии теплообмена на торцах стержня коэффициент, заключенный в скобки уравнения (14.2.59), всегда остается положительным. Введем для него обозначение

$$\frac{m}{a} - v^2 = n^2 \quad (14.2.60)$$

и запишем уравнение (14.2.59) в более компактном виде

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + n^2 U = 0. \quad (14.2.61)$$

Решением уравнения (14.2.61) является тригонометрическая функция

$$U(z) = \cos(nz + \varphi), \quad (14.2.62)$$

удовлетворяющая условиям ( $z$  отсчитывается от центра стержня)

$$\left( \frac{dU}{dz} + \frac{\alpha_z}{\lambda} U \right)_{z=Z} = 0, \quad \left( \frac{dU}{dz} - \frac{\alpha_{-z}}{\lambda} U \right)_{z=-Z} = 0. \quad (14.2.63)$$

Согласно им параметры  $n$  и  $\varphi$  функции  $U(z) = \cos(nz + \varphi)$  являются первыми корнями трансцендентных уравнений

$$p \operatorname{ptg}(p + \varphi) = \operatorname{Bi}_z, \quad p \operatorname{ptg}(p - \varphi) = \operatorname{Bi}_{-z}, \quad (14.2.64)$$

где использованы обозначения

$$p = nZ, \quad \operatorname{Bi}_z = \alpha_z Z / \lambda, \quad \operatorname{Bi}_{-z} = \alpha_{-z} Z / \lambda. \quad (14.2.65)$$



Подчеркнем, что влияние бокового теплообмена в тонком стержне непосредственно учитывается параметром  $v^2$ , а темп охлаждения стержня определяется соотношением

$$m = a(n^2 + v^2) \equiv a \left( \frac{p^2}{Z^2} + \frac{\alpha_r P}{\lambda S} \right). \quad (14.2.66)$$

В частном случае, когда оба торца стержня охлаждаются в режиме  $Bi \rightarrow \infty$  (режим *калориметра*), выражение (14.2.66) приобретает вид

$$m_\infty = a \left( \frac{\pi^2}{4Z^2} + \frac{\alpha_r P}{\lambda S} \right). \quad (14.2.67)$$

Рассмотренная задача представляет значительный практический интерес, так как позволяет распространить методы регулярного режима на полупроводники и даже металлы.

### 14.3. Калориметры с оболочкой

Как уже отмечалось (см. п. 14.1), в калориметрах этого типа тепловая ячейка имеет постоянную металлическую оболочку (тонкостенный сосуд, кювету, ампулу). Исследуемый материал (образец) размещается внутри оболочки и совместно с ней охлаждается или нагревается в среде постоянной температуры. Между образцом и оболочкой обеспечивается по возможности идеальный тепловой контакт, благодаря чему они образуют тепловую систему, в которой достаточно быстро устанавливается регулярный тепловой режим и легко регистрируется температура центра и поверхности образца.

Практическая важность методов второго типа очевидна, так как при теплофизических измерениях металлическая оболочка выполняет обычно сразу несколько функций. Без оболочки, например, невозможно исследовать разнообразные сыпучие материалы и жидкости, не имеющие своей формы. Являясь деталью тепловой ячейки, оболочка сохраняет равномерное температурное поле, поэтому улучшает стабильность коэффициента теплоотдачи со средой. Оболочка оказывается очень удобной для постоянного размещения в ней температурного датчика (термопары). Наконец, оболочка способна защищать исследуемый материал от нежелательного прямого контакта со средой.

К сожалению, наличие изотермической оболочки существенно усложняет аналитическую структуру двух- и трехмерных температурных полей внутри образца. Поэтому при теплофизических измерениях при-

Таблица 14.2.1

Пластина			Цилиндр			Шар		
$p$	$f(p)$	$\psi(p)$	$p$	$f(p)$	$\psi(p)$	$p$	$f(p)$	$\psi(p)$
0,00	0,0000	1,000	0,00	0,0000	1,000	0,00	0,000	1,000
0,10	0,0100	0,996	0,20	0,0201	0,997	0,20	0,013	0,999
0,20	0,0405	0,987	0,40	0,0816	0,979	0,40	0,054	0,990
0,25	0,0638	0,977	0,50	0,1291	0,969	0,50	0,085	0,985
0,30	0,0928	0,970	0,60	0,1886	0,954	0,60	0,123	0,974
0,35	0,1278	0,958	0,70	0,2613	0,939	0,70	0,164	0,965
0,40	0,1691	0,946	0,80	0,3486	0,920	0,80	0,223	0,956
0,45	0,2174	0,934	0,90	0,4524	0,899	0,90	0,286	0,946
0,50	0,2732	0,915	1,00	0,5751	0,874	1,00	0,358	0,931
0,55	0,3372	0,896	1,10	0,7198	0,840	1,10	0,440	0,914
0,60	0,4105	0,877	1,20	0,8910	0,808	1,20	0,533	0,896
0,65	0,4941	0,855	1,30	1,0943	0,772	1,30	0,639	0,880
0,70	0,5896	0,830	1,40	1,3383	0,732	1,40	0,759	0,860
0,75	0,6987	0,804	1,50	1,6350	0,688	1,50	0,894	0,840
0,80	0,8237	0,776	1,60	2,0023	0,640	1,60	1,047	0,815
0,85	0,9676	0,748	1,70	2,4680	0,586	1,70	1,221	0,789
0,90	1,1341	0,714	1,80	3,0785	0,528	1,80	1,420	0,758
0,95	1,3285	0,679	1,90	3,9187	0,460	1,90	1,649	0,730
1,00	1,5574	0,642	2,00	5,1469	0,388	2,00	1,915	0,700
1,05	1,8305	0,603	2,10	7,1633	0,308	2,10	2,228	0,660
1,10	2,161	0,560	2,20	11,080	0,218	2,20	2,601	0,620
1,15	2,570	0,513	2,30	22,374	0,120	2,30	3,055	0,576
1,20	3,087	0,468	2,40	497,50	0,006	2,40	3,620	0,530
1,25	3,762	0,417	2,405	$\infty$	0,000	2,50	4,357	0,478
1,30	4,683	0,361				2,60	5,322	0,420
1,35	6,015	0,303				2,70	6,712	0,360
1,40	8,117	0,242				2,80	8,876	0,294
1,45	11,94	0,178				2,90	12,76	0,220
1,50	21,15	0,106				3,00	22,07	0,136
1,55	74,52	0,030				3,10	75,49	0,042
$\pi/2$	$\infty$	0,000				$\pi$	$\infty$	0,000