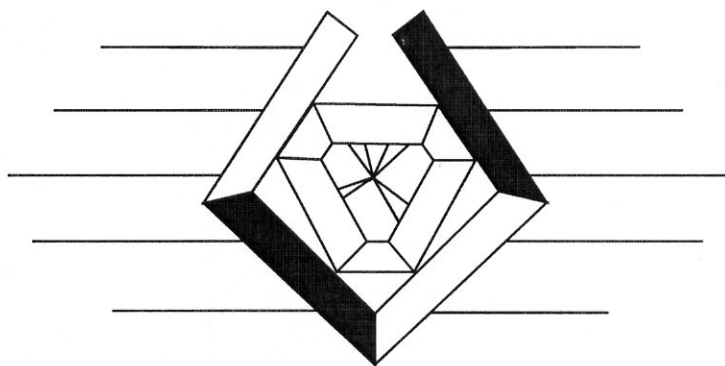


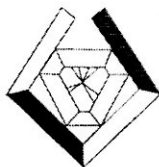
**Выдающиеся ученые**



**Университета ИТМО**

# ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ УНИВЕРСИТЕТА ИТМО

*Серия монографий ученых Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики  
(бывшего Ленинградского института точной механики и оптики)*



Выпуск 10

Основана в 2000 году по решению  
Ученого Совета университета  
в ознаменование 100-летия со дня создания  
в составе Ремесленного училища цесаревича Николая  
Оптико-механического и часового отделения,  
превращенного трудами нескольких  
поколений профессоров и преподавателей  
в один из ведущих  
университетов России

Редакционная коллегия серии:

проф. В.Н. Васильев (председатель), проф. Г.Н. Дульнев,  
проф. Ю.Л. Колесников, проф. Г.И. Новиков,  
проф. М.И. Потеев (ученый секретарь)

Главный редактор – заслуженный деятель науки и техники РСФСР,  
академик Академии естественных наук Российской Федерации,  
профессор Г.Н. Дульнев

**М.М. Русинов**

# **Композиция нецентрированных оптических систем**

*Издание второе, дополненное*

Русинов М.М. Композиция нецентрированных оптических систем. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2004.–250 с.

Изложены основы теории коллинеарности применительно к нецентрированным оптическим системам, дан анализ возникающих нецентрированных aberrаций. Приведены примеры композиции зеркально-линзовых систем с наклоненными зеркалами, являющиеся развитием идей М.В. Ломоносова. Предложены новые конструктивные сферопризматические узлы, позволяющие упростить оптическую систему, повысить ее характеристики при достаточно высоком качестве изображения.

Для научных и инженерных работников, занятых в области оптического приборостроения.

Bases of the theory of kollinearity with reference to non-centered optical systems are stated, the analysis of arising non-centered aberrations is given. Examples of a composition of mirror - lense systems with the inclined mirrors developing M.V. Lomonosov's ideas are given. New constructive sphere-prism units are offered, allowing to simplify optical system and to raise its characteristics at high enough quality of the image. For the scientific and engineering workers borrowed in the field of constructing optical devices.

ISBN 5-7577-0178-1

© Санкт-Петербургский  
государственный университет  
информационных технологий,  
механики и оптики, 2004  
© Издательство «ИВА», 2004

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**М.М. РУСИНОВ**

**КОМПОЗИЦИЯ НЕЦЕНТРИРОВАННЫХ  
ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**МОНОГРАФИЯ**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
1995

Русинов М. М. Композиция нецентрированных оптических систем. Монография. - СПб., ИТМО, 1995.- 197 с.

Изложены основы теории коллинеарности применительно к нецентрированным оптическим системам, дан анализ возникающих нецентрированных aberrаций. Приведены примеры композиции зеркально-линзовых систем с наклоненными зеркалами, являющихся развитием идей М.В. Ломоносова. Предложены новые конструктивные сферопризматические узлы, позволяющие упростить оптическую систему, повысить ее характеристики при достаточно высоком качестве изображения.

Для научных и инженерных работников, занятых в области оптического приборостроения.

# Монография издана при финансовой поддержке Научно-производственного комплекса "ПУСК"

Генеральный директор

Владимир Витальевич  
Аксенов

Главный конструктор

Юрий Федорович  
Андреев

**Научно-производственный комплекс "ПУСК"**

---



190068, Санкт-Петербург, а/я 643

Тел.: (812) 310 15 63 Факс: (812) 312 79 61

Р/сч. 39200467185 в филиале ОПЕРУ-5 АО ПСБ, МФО 161057

К/сч. 739911401, МФО 44030739 / 161057 для банков С.-Петербурга

К/сч. 700161039, МФО 44030739 / 161002 для иногородных банков

*Памяти великого русского ученого  
Михаила Васильевича Ломоносова-  
зачинателя направления по созданию  
нецентрированных оптических систем-  
автор посвящает эту монографию*

Требования, предъявляемые к современным оптическим приборам, постоянно возрастают. В соответствии с этим необходимо расширять возможности используемых разработчиками различных оптических систем: повышать характеристики оптических материалов (показатели преломления и дисперсии); увеличивать спектральный диапазон; развивать градиентную оптику с переменными показателями преломления; использовать несферические поверхности и волоконную оптику, а также френелевые поверхности и киноформы. Все это большей частью связано с достижениями в области химии и обусловлено различными технологическими процессами. Однако разработчики могут воспользоваться уже известными конструктивными элементами и узлами и рационально развивать композицию оптических систем, а также более широко применять перспективные нецентрированные оптические системы, что позволит для создания силовых элементов оптической системы использовать отражающие поверхности, которые облегчают ахроматизацию оптической системы, исправление кривизны поля и других элементарных aberrаций.



Идея использования при создании оптических систем нецентрированных поверхностей - наклоненного сферического зеркала - впервые была высказана М.В.Ломоносовым еще в 1748 г.

Наклон сферического зеркала позволял устранить экранирование, присущее центрированным оптическим системам и ограничивающее их применение областью зеркальных астрономических инструментов.

Характерной положительной особенностью зеркальных сферических поверхностей являлось полное отсутствие хроматических aberrаций и значительно большие значения радиусов кривизны по сравнению с радиусами преломляющих поверхностей той же оптической силы для оптических стекол обычных марок с относительно невысокими показателями преломления. Однако возникали определенные затруднения вследствие необходимости вывода отраженных зеркалом лучей из пространства, в котором эти лучи падали на зеркало, а также нецентрированных aberrаций, требовавших разработки приемов их устранения.

Естественно, что создание нецентрированных оптических систем требовало и расширения ряда представлений общей теории оптических приборов, в частности включения в круг теоретических вопросов распространения учения об идеальной оптической системе - теории коллинеарности (солинейного сродства) - на нецентрированные системы. Кроме того, следовало рассмотреть aberrации, присущие нецентрированным оптическим системам.

Из вопросов прикладного характера необходимо было изучить свойства отдельных конструктивных элементов и узлов, специфических для нецентрированных систем, компоновку ряда конкретных систем (в особенности тех, которые обладают существенными преимуществами по сравнению с центрированными), а также уделить внимание процессам сборки и юстировки.

Направление разработки нецентрированных оптических систем практически не отражено в соответствующей научной литературе. Целью предлагаемой монографии и является заполнение этого пробела. Целесообразно подчеркнуть прикладной характер монографии. Она будет способствовать использованию в оптических системах сферических нецентрированных поверхностей, позволяющих расширить возможности различного рода оптических приборов.

# ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

## Глава 1. Коллинеарность

При рассмотрении центрированных оптических систем к исходным положениям коллинеарности прежде всего следует отнести понятие сопряженности осей в пространстве предметов и в пространстве изображений, обусловленное центрированностью всей системы, связующей пространства предметов и изображений.

Однако для систем, составленных из произвольно расположенных поверхностей, т.е. для нецентрированных систем, определение осей как осей симметрии отпадает. Тем не менее и для нецентрированных оптических систем можно определить существование сопряженных осей в пространствах предметов и изображений.

Так, предположим, что для произвольно расположенной в пространстве предметов плоскости должна существовать одна и только одна сопряженная плоскость в пространстве изображений. Можно принять также, что при произвольном перемещении предметной плоскости параллельно ее исходному положению сопряженная ей плоскость в пространстве изображений по мере удаления предметной плоскости в бесконечность будет стремиться к некоторому определенному положению в пространстве изображений, которое можно назвать положением задней фокальной плоскости.

Равным образом, перемещая в пространстве изображений какую-то плоскость параллельно своему исходному положению, также определим в предметном пространстве переднюю фокальную плоскость, сопряженную с бесконечно удаленной плоскостью в пространстве изображений.

Это можно проиллюстрировать. На рис. 1,а показано семейство предметных параллельных плоскостей  $P_1, P_2, \dots, P$  и семейство сопряженных им плоскостей  $P'_1, P'_2, \dots, P'$  в пространстве изображений.

В общем случае плоскости  $P'_1, P'_2, \dots, P'$  будут пересекаться по одной и той же прямой  $p'q'$ , принадлежащей плоскости  $P'_F$  и являющейся отображением прямой  $pq$  (на рис. 1,а не показано), принадлежащей бесконечно удаленной плоскости  $P_\infty$ .

Плоскость  $P'_F$  является предельным положением плоскостей  $P'_1, P'_2$  и так далее по мере удаления предметной плоскости  $P$  в бесконечность, условно представленной плоскостью  $P_\infty$ . Равным образом может быть найдено положение передней фокальной плоскости  $P_F$ , являющейся отображением бесконечно удаленной плоскости  $P_\infty'$  в пространстве изображений.

В общем случае передняя фокальная плоскость  $P_F$  может составлять произвольный угол с множеством плоскостей  $P_1, P_2 \dots P_\infty$ .

На рис. 1,б показан случай, когда множество предметных плоскостей  $P_1, P_2 \dots P_\infty$  выбрано параллельными передней фокальной плоскости  $P_F$ . Восстанавливая перпендикуляры к плоскостям  $P_1, P_2, P_F$ , образуем множество параллельных прямых, пересекающихся друг с другом в бесконечно удаленной точке  $A_\infty$  на плоскости  $P_\infty$ . С этой точкой  $A_\infty$  в пространстве изображений будет сопряжена некоторая точка  $F_0'$  на задней фокальной плоскости. Точку  $F_0'$  можно назвать задним главным фокусом пространства изображений.

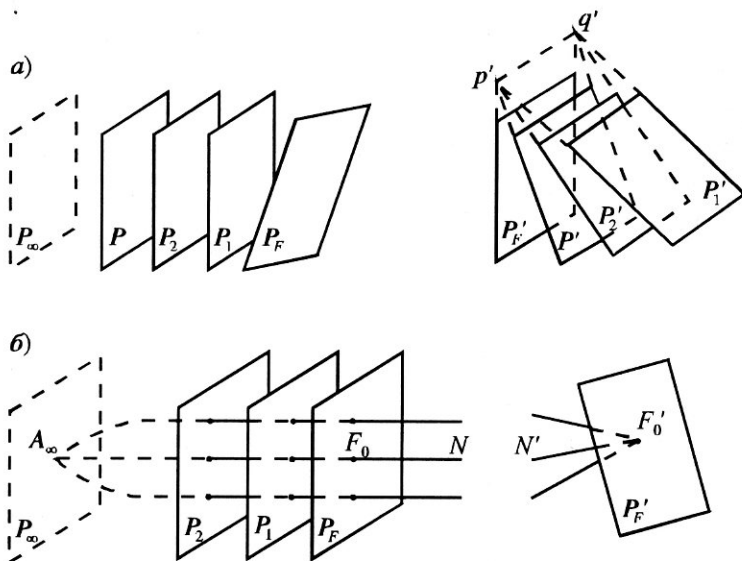


Рис. 1. Семейство сопряженных плоскостей: а) параллельные предметные плоскости, образующие некоторый угол с передней фокальной плоскостью; б) предметные плоскости, параллельные передней фокальной плоскости

С множеством параллельных прямых, перпендикулярных предметным плоскостям и передней фокальной плоскости  $P_1, P_2 \dots P_F$ , будет сопряжено множество прямых, пересекающихся друг с другом в заднем главном фокусе  $F_0'$ . Эти прямые будут составлять с нормалью, восстановленной в точке заднего фокуса  $F_0'$ , различные углы.

Обращаясь к нормали как к одной из прямых, отображавших множество параллельных прямых, перпендикулярных к предметной фокальной плоскости, можно определить в этом пространстве прямую  $F_0N$ , сопряженную с нормалью  $F_0'N'$  к задней фокальной плоскости в заднем фокусе  $F_0'$ . Такую пару сопряженных прямых, нормальных к обеим фокальным плоскостям, можно назвать главными осями пространства предметов и пространства изображений.

Весьма существенно, что с множеством предметных плоскостей, перпендикулярных к оси предметного пространства и параллельных передней фокальной плоскости, будет сопряжено множество плоскостей в пространстве изображений, также перпендикулярных к оси и параллельных задней фокальной плоскости.

Совершенно очевидно, что это свойство фокальных плоскостей и осей, присущее всем нецентрированным системам, не противоречит известным свойствам центрированных систем, для которых оно определялось как следствие центрированности.

Необходимо заметить, что в частном случае телескопической системы, когда сопряжены бесконечно удаленные плоскости в предметном пространстве и в пространстве изображений, фокальные плоскости не могут быть расположены на конечных расстояниях. Таким образом, обе фокальные плоскости отсутствуют, что и приводит к неопределенности положения главных фокусов и осей обоих пространств.

Перейдем к рассмотрению пары сопряженных плоскостей, проходящих через сопряженные оси обоих пространств. На рис. 2 показаны передняя и задняя фокальные линии, являющиеся пересечениями рассматриваемых плоскостей с фокальными плоскостями. Образует на передней плоскости прямоугольник  $abcd$  со сторонами, параллельными и перпендикулярными оси. Предположим, что такой прямоугольник располагается симметрично относительно оси.

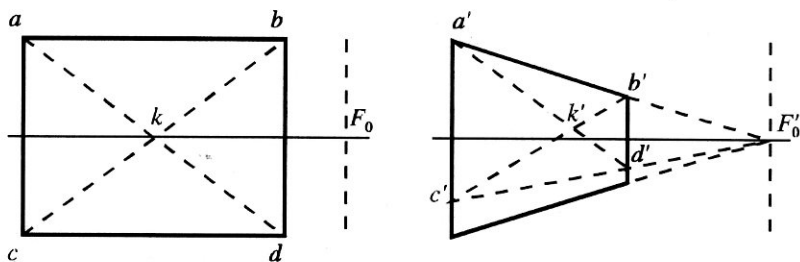


Рис. 2. Пара сопряженных плоскостей

В силу параллельности к фокальной плоскости сторона  $ac$  должна отобразиться прямой  $a'c'$ , параллельной задней фокальной плоскости, равно как и сторона  $bd$  отобразится отрезком  $b'd'$ . С другой стороны, отрезки  $ab$  и  $cd$  должны отобразиться (как параллельные оси) прямыми  $a'b'$  и  $c'd'$ , пересекающимися в заднем главном фокусе  $F_0'$ . Таким образом, прямоугольник  $abcd$  будет сопряжен с трапецией  $a'b'c'd'$ .

Полагая расстояния точек  $a$  и  $c$  от оси равными друг другу, можно предположить, что сопряженные им точки  $a'$  и  $c'$  не будут расположены на равных расстояниях от оси в пространстве изображений.

Проведем теперь в предметном прямоугольнике диагонали  $ad$  и  $bc$ ; эти диагонали должны будут пересекаться в некоторой точке  $k$  на оси системы. Проводя сопряженные им в пространстве изображений прямые через углы трапеции, образуем некоторую точку  $k'$ , которая должна являться отображением точки  $k$ . Однако, если расстояния точек  $a'$  и  $c'$  от оси не были, как предполагалось, равными, точка  $k'$  будет расположена вне оси, чего не должно быть. Таким образом, приходим к выводу, что нецентрированные системы должны быть симметричны относительно осей.

Опираясь на свойства неравнобочной трапеции, можно показать, что на сопряженных прямых, перпендикулярных осям, должно наблюдаться постоянство масштабов или линейных увеличений.

Рассмотрим рис. 3, на котором в предметном пространстве расположен прямоугольник  $abcd$ , совмещенный стороной  $cd$  с осью. Его отображением в пространстве изображений будет неравнобочная трапеция  $a'b'c'd'$ , одна из сторон которой  $a'b'$  должна лежать на прямой, проходящей через задний фокус  $F_0'$ .

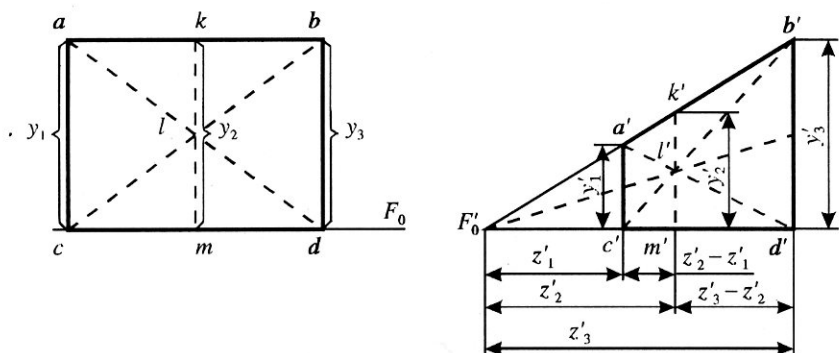


Рис. 3. Картина постоянства масштабов на сопряженных прямых, перпендикулярных осям

Соединяя углы трапеции диагоналями, отображающими диагонали предметного прямоугольника, получаем точку пересечения  $l'$ , сопряженную с точкой  $l$ . Проводя через точки  $l$  и  $l'$  прямые  $km$  и  $k'm'$ , перпендикулярные осям, разделяем и предметный прямоугольник, и отображающую его трапецию на сопряженные фигуры  $akmc$  и  $a'k'm'c'$  и  $k b d m$  и  $k'b'd'm'$ . Таким образом получаем три пары сопряженных прямых, перпендикулярных к осям.

Обозначим расстояние прямой  $a'c'$  от заднего главного фокуса  $F_0'$  через  $z_1'$ , прямой  $k'm'$  - через  $z_2'$  и прямой  $b'd'$  - через  $z_3'$ . Высоты точек  $a'$ ,  $k'$  и  $b'$  обозначим через  $y_1'$ ,  $y_2'$  и  $y_3'$ .

Исходя из данных рис. 3, можно записать

$$\frac{y_3'}{z_3'} = \frac{y_2'}{z_2'} = \frac{y_1'}{z_1'} \quad (1)$$

и

$$\frac{y_3'}{z_3' - z_2'} = \frac{y_1'}{z_2' - z_1'}. \quad (2)$$

Согласно формулам (1) и (2)

$$(y_3' + y_1') z_2' = 2y_1' z_3'. \quad (3)$$

Значение  $z_2'$  можно выразить по формуле (1). Тогда вместо выражения (3) запишем

$$(y_3' + y_1') \frac{y_2' z_1'}{y_1'} = 2y_1' z_3'. \quad (4)$$

Окончательно

$$y_2' = \frac{2y_1'}{1 + \frac{z_1'}{z_3'}}. \quad (5)$$

Поскольку  $z_1'$  и  $z_3'$  - величины постоянные, между  $y_2'$  и  $y_1'$  существует линейная зависимость.

Обращаясь к рис. 3, нетрудно установить, что точка  $l'$  делит прямую  $k'm'$  на две равные части; точка  $l$  разделяет прямую  $k$  также на две равные части.

Значения  $y_1 = y_2 = y_3$  были выбраны произвольно, поэтому и отрезки  $ml$  и  $lk$  и  $m'l'$  и  $l'k'$  будут попарно равны при любых значениях  $y$ . Вместе с тем, в силу пропорциональности отрезков  $y_1'$  и  $y_3$  отрезку  $y_2'$ , соответственные равенства будут и на основаниях трапеций, чем и доказывается постоянство масштаба на сопряженных линиях, перпендикулярных осям, или постоянство линейных увеличений.

Установив постоянство увеличений для сопряженных линий, параллельных фокальным плоскостям, получаем возможность вывода формулы Ньютона.

Полагаем, что существует пара сопряженных линий, для которых линейное увеличение будет равным единице. На рис. 4 показаны: предмет  $y$  и его изображение  $y'$ ; главные линии, для которых линейное увеличение равно единице, пересекающие оси в точках  $B$  и  $B'$ ; точки главных фокусов  $F$  и  $F'$ . Расстояния предмета и изображения от главных фокусов обозначим через  $z$  и  $z'$ .

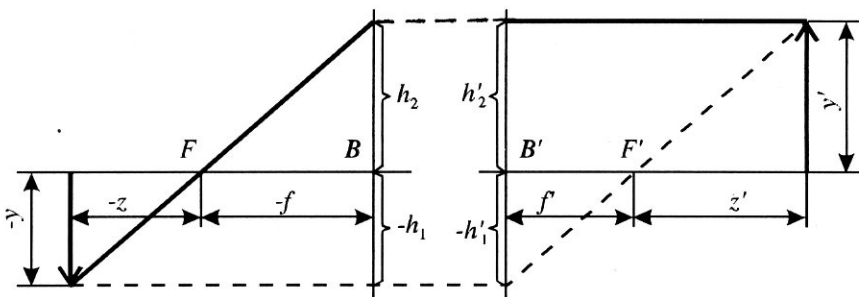


Рис. 4. К выводу формулы Ньютона

Из рис. 4 получаем

$$\frac{y'}{-h_1'} = \frac{y'}{-y} = -V = \frac{z'}{f'} \quad (6)$$

или

$$-\frac{h_2}{y} = \frac{y'}{-y} = -V = \frac{f}{z}, \quad (7)$$

откуда и получаем формулу Ньютона

$$z z' = f f'. \quad (8)$$

Формула (8) была получена для одной пары сопряженных плоскостей, проходивших через обе оси. Можно предположить, что для другой пары сопряженных плоскостей расположение главных линий будет иным и даст другие значения обоих фокусных расстояний  $f_1$  и  $f_1'$ .

Необходимо отметить, что различие фокусных расстояний для разных пар сопряженных плоскостей, проходивших через оси, не противоречит коллинеарности плоскостей, перпендикулярных осям, если будет соблюдено равенство произведений:

$$f f' = f_1 f_1'. \quad (9)$$

При этом линейные увеличения будут различными, а следовательно, не будет их постоянства в сопряженных плоскостях, нормальных к осям.

Однако на практике, когда для оптической системы показатели преломления в предметном пространстве и в пространстве изображений постоянные, остаются постоянными и фокусные расстояния для всех сопряженных плоскостей, пересекающих оси, что и приводит к постоянству линейных увеличений для всех сопряженных плоскостей, нормальных к осям.

Таким образом, для нецентрированных систем, исходя лишь из условия коллинеарности, характерны следующие свойства:

- существование сопряженных осей, перпендикулярных фокальным поверхностям;
- сопряженность плоскостей, нормальных к оси в предметном пространстве, плоскостям, нормальным к оси в пространстве изображений;
- центрированность вокруг обеих осей;
- постоянство увеличений в сопряженных плоскостях, нормальных к осям.

Все эти свойства нецентрированных систем полностью совпадают со свойствами систем центрированных, что позволяет распространить все формулы солинейного сродства и на системы нецентрированные.

Таким образом, можно использовать инвариант Лагранжа-Гельмгольца

$$-y'\alpha' f' = y\alpha f, \quad (10)$$

формулу, связывающую линейное и угловое увеличения с фокусными расстояниями:

$$V W = -f/f', \quad (11)$$

а также ряд других общеизвестных формул.



## Совокупность двух систем

Имея в своем распоряжении линзу - оптическую систему, составленную из двух сферических поверхностей, и проведя через центры обеих поверхностей прямую, получим некоторую центрированную систему. Однако, составляя систему из двух линз - двух центрированных систем, можно получить в общем случае, когда оси обеих линз скрещиваются друг с другом, систему нецентрированную. Поэтому целесообразно рассматривать сначала свойства нецентрированных систем, образованных сочетанием центрированных систем.

В простейшем случае, когда из двух центрированных систем создается также центрированная система, задача существенно упрощается и сводится к определению фокусного расстояния составляемой системы и расположения ее фокальных плоскостей. Исходными элементами при этом будут фокусные расстояния составляющих систем и расстояние между системами или их фокусами - задним фокусом первой системы и передним фокусом второй.

На рис. 5,а показаны две центрированные системы *I* и *II*, обладающие общей осью  $F_{01} F_{01}' F_{02} F_{02}' F_0'$ . Фокусные расстояния обеих систем обозначим через  $f_1, f_1'$  и  $f_2, f_2'$ ; расстояние между главными плоскостями примем равным  $d$ ; расстояние между задним фокусом системы *I* и передним фокусом системы *II* -  $\Delta$ .

Расстояние  $\Delta$  можно рассматривать по отношению к системе *II* как расстояние  $-z_2$  от ее переднего фокуса  $F_{02}$  до предметной точки  $F_{01}'$  - заднего фокуса системы *I*. Поэтому, пользуясь формулой Ньютона, определим положение заднего фокуса  $F_0'$  всей системы в совокупности как изображение заднего фокуса первой системы.

Расстояние

$$z_2' = \frac{f_2 f_2'}{z_2} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}. \quad (12)$$

Заднее фокусное расстояние всей системы можно получить как произведение заднего фокусного расстояния системы *I* и увеличения  $V_2$ .

Таким образом,

$$f' = f' V_2 = -\frac{f_1' f_2}{z_2} = \frac{f_1' f_2}{\Delta} \quad (13)$$

или, переходя к оптическим силам  $\Phi = 1/f'$ ,

$$\Phi = \Phi_1 \Phi_2 \frac{f_2}{f_2'} \Delta. \quad (14)$$

При равенстве оптического интервала  $\Delta = 0$  сила совокушной системы обращается в нуль, и тогда эта система преобразуется в телескопическую.

В другом случае, когда оси обеих составляющих систем не являются продолжением одна другой, но сохраняют параллельность, составная система уже не будет центрированной (рис. 5, б). Тем не менее составная система сохранит некоторые свойства системы, рассмотренной ранее.

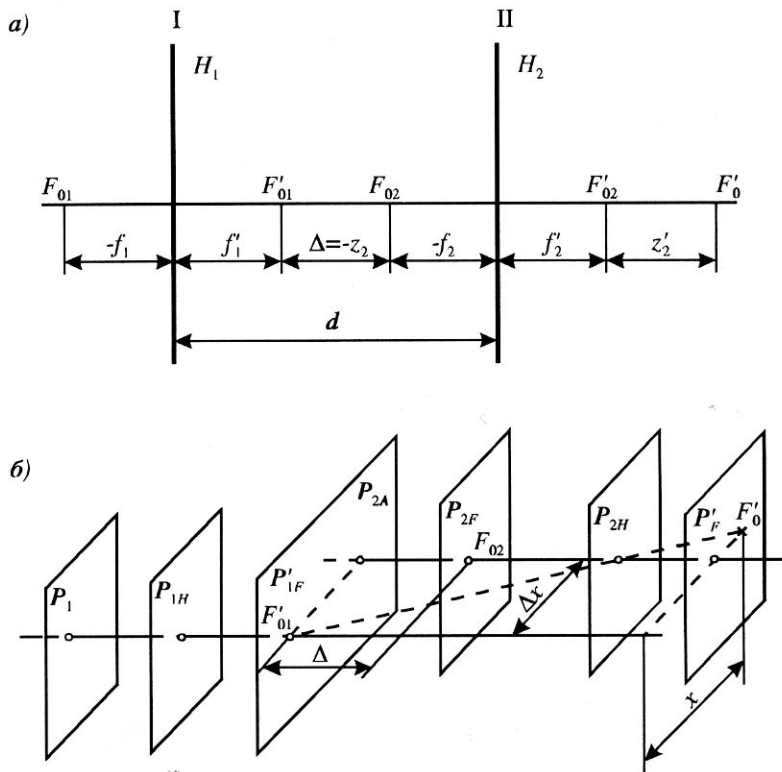


Рис. 5. Совокупность двух центрированных систем:  
а) с общей осью; б) с параллельными осями

Во-первых, изображения сопряженных плоскостей, перпендикулярных оси первой системы, могут рассматриваться как множество параллельных плоскостей, перпендикулярных оси второй. Поэтому после второй системы они должны оставаться перпендикулярными ее оси. Таким образом, сохранится и параллельность фокальных плоскостей составной системы.

Во-вторых, равным образом должны сохраниться линейные увеличения для всех сопряженных плоскостей в предметном пространстве и в пространстве изображений после составной нецентрированной системы. Неизменными должны быть и фокусные расстояния составной системы.

Однако положения заднего и переднего фокусов составной нецентрированной системы уже не будут сохраняться. Так, точка заднего фокуса будет смещена вдоль плоскости, проходящей через обе оси составляющих систем, на значение, пропорциональное сдвигу осей:

$$x = \Delta_x(1 - V_2), \quad (15)$$

где  $\Delta_x$  - параллельное смещение оси второй системы относительно оси первой (см. рис. 5,б).

Более сложная картина наблюдается, когда оси обеих составляющих систем образуют некоторый угол излома.

Несколько упрощая задачу, рассмотрим случай, когда оси обеих систем расположены в одной и той же плоскости.

На рис. 6 показаны две системы с осями  $AB_{01}A'$  и  $A'B_{02}A''$ , пересекающимися в некоторой точке  $A'$  и образующими угол  $\alpha$ .

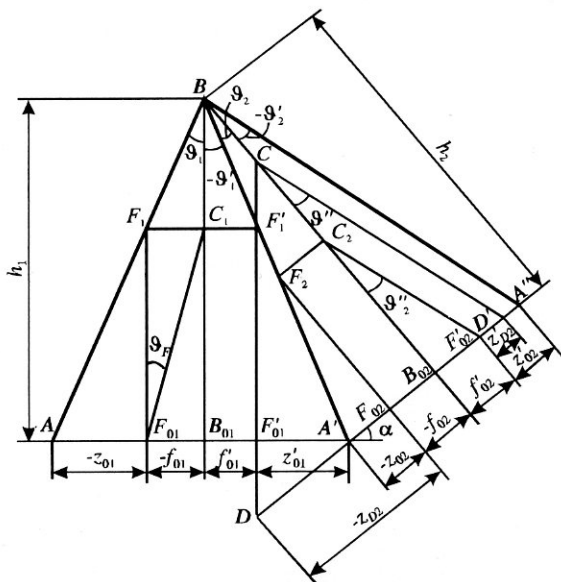


Рис. 6. Совокупность двух центрированных систем с пересекающимися осями

Главные плоскости обеих систем будут пересекаться в некоторой точке  $B$ , через которую должны проходить и главные плоскости составной системы.

Соединив точки  $A'$  и  $B$ , определим положение плоскости, которая будет изображением предметной плоскости для первой системы, проходящей через прямую  $AB$  перпендикулярно плоскости рисунка. С другой стороны, плоскость, определяемая прямой  $A'B$ , будет предметной плоскостью для второй системы, а ее изображение определится прямой  $A''B$ . Таким образом, прямые  $AB$  и  $A''B$  будут определять положения предметной плоскости и плоскости изображения для составной системы.

Обозначим углы наклона плоскостей предмета и изображения относительно главных плоскостей через  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_1'$  для первой системы и через  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_2'$  для второй. Углы  $\vartheta_1'$  и  $\vartheta_2$  у точки  $B$  будут связаны через угол  $\alpha$ :

$$\vartheta_2 - \vartheta_1' = \alpha. \quad (16)$$

Точки фокусов для первой системы обозначим через  $F_{01}$  и  $F_{01}'$ , а для второй - через  $F_{02}$  и  $F_{02}'$ . Отстояние этих точек от главных точек  $B_{01}$  и  $B_{02}$  определит фокусные расстояния  $f_{01}$  и  $f_{01}'$  для первой системы и  $f_{02}$  и  $f_{02}'$  для второй.

Точку пересечения  $F_1'$  задней фокальной плоскости первой системы с плоскостью промежуточного изображения  $A'B$  и точку пересечения  $F_2$  передней фокальной плоскости второй системы с плоскостью  $A'B$  можно рассматривать как фокусы на этой промежуточной плоскости.

Задняя фокальная плоскость первой системы пересекает главную плоскость второй в некоторой точке  $C$ , которая будет совмещена со своим изображением после второй системы. Таким образом, точка  $C$  будет отображением бесконечно удаленной точки для всей системы в совокупности и, следовательно, должна принадлежать задней фокальной плоскости всей системы.

Для определения положения этой фокальной плоскости следует определить положение изображения какой-либо другой точки; удобно воспользоваться точкой пересечения  $D$  задней фокальной плоскости первой системы с осью второй системы.

Расстояние точки  $D$  от переднего фокуса второй системы

$$z_{D2} = z_{02} - z_{01}' / \cos \alpha. \quad (17)$$

Пользуясь формулой Ньютона, находим отрезок

$$z'_{D2} = \frac{f_{02} f'_{02}}{z_{02} - z_{01}' / \cos \alpha}. \quad (18)$$

Далее можно определить угол наклона  $\vartheta''$  задней фокальной плоскости всей системы к главной плоскости второй системы:

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = (f'_{02} + z'_{D2}) / B_{02} C. \quad (19)$$

Отрезок  $B_{02}C$  можно определить как разность отрезков  $B_{02}B$  и  $CB$ :

$$B_{02}C = h_2 - f'_{01} / \sin \alpha \quad (20)$$

или, определяя высоту из треугольника  $A'BB_{02}$

$$h_2 = \frac{z_{02} + f_{02}}{\operatorname{tg} \vartheta_2}, \quad (21)$$

находим

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = \frac{z_{02} + f_{02}}{\operatorname{tg} \vartheta_2} - \frac{f'_{01}}{\sin \alpha}. \quad (22)$$

Далее можно определить заднее фокусное расстояние всей системы

$$f' = CB \sin \vartheta'' = f'_{01} \frac{\sin \vartheta''}{\sin \alpha}. \quad (23)$$

Аналогично можно определить угол наклона  $\vartheta$  передней фокальной плоскости относительно главной плоскости первой системы

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{z'_{01} + f'_{01}}{\operatorname{tg} \vartheta'} - \frac{f_{02}}{\sin \alpha} \quad (24)$$

и переднее фокусное расстояние

$$f = f_{02} \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha}. \quad (25)$$

Сопоставляя формулы (23) и (25), получаем соотношение фокусных расстояний для всей системы

$$\frac{f}{f'} = \frac{f_{02}}{f'_{01}} \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''}. \quad (26)$$

Переходим к определению положения фокусов  $F$  и  $F'$  для всей системы. Обратимся к рис. 7, на котором аналогично рис. 6 показаны две системы с пересекающимися осями. Полагая наклон передней фокальной плоскости

равным  $\vartheta_F$ , задаем ход луча, проходящего через передний фокус  $F_{01}$  первой системы под углом  $\vartheta_F$  к оси. Этот луч будет пересекать заднюю фокальную плоскость первой системы в некоторой точке  $E_1'$  отстоящей от оси на расстоянии

$$-y_1' = f_{01} \operatorname{tg} \vartheta_F. \quad (27)$$

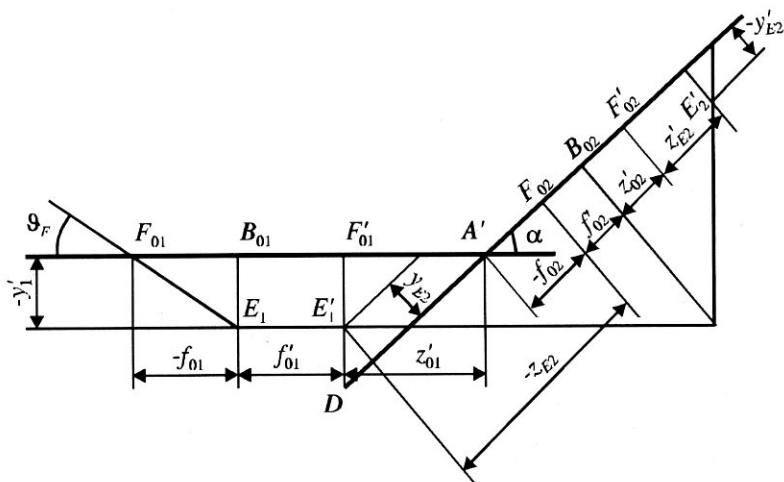


Рис. 7. Положение фокусов совокупной системы из двух составляющих систем с пересекающимися осями

При этом точка  $E_1'$  располагается на задней фокальной плоскости первой системы и является отображением бесконечно удаленной точки в предметном пространстве. Следовательно, отображение точки  $E_1'$  после второй системы - точка  $E_2'$  станет задним главным фокусом  $F'$  для всей системы в совокупности.

Ось второй системы будет пересекать заднюю фокальную плоскость первой системы в некоторой точке  $D$ , отстоящей от оси первой системы на расстоянии

$$DF_{01}' = z_{01}' \operatorname{tg} \alpha = -z_{01}' \operatorname{tg} (\vartheta_2 - \vartheta_1'), \quad (28)$$

и тогда расстояние точки  $E_1'$  от точки  $D$  будет

$$E_1'D = -f_{01} \operatorname{tg} \vartheta_F + f_{01}' V_{01} \operatorname{tg} \vartheta_1'. \quad (29)$$

Умножая отрезок  $E_1'D$  на косинус угла  $(\vartheta_1' - \vartheta_2)$  между осями обеих систем, получим расстояние  $y_{E2}$  точки  $E_1'$  от оси второй системы:

$$y_{E2} = (-f_{01} \operatorname{tg} \vartheta_F + f'_{01} V_{01} \operatorname{tg} \vartheta'_1) \cos(\vartheta'_1 - \vartheta_2). \quad (30)$$

Определим отстояние точки  $E_1'$  от передней фокальной плоскости второй системы. Это расстояние

$$-z_{E2} = z'_{01} \cos \alpha - z_{02} - E_1'D \sin(\vartheta'_1 - \vartheta_2). \quad (31)$$

Используя  $y_{E2}$  и  $z_{E2}$ , можно найти положение изображения точки  $E_1'$  после всей системы, т.е. положение главного фокуса  $F$  для составной системы относительно заднего фокуса  $F_{02}'$  второй системы. С этой целью определим значения  $z'_{E2}$  и  $y'_{E2}$  по формуле Ньютона и по формуле увеличений:

$$z'_{E2} = \frac{f_{02} f'_{02}}{z_{E2}} \quad \text{и} \quad y'_{E2} = y_{E2} V_{02}. \quad (32)$$

Аналогично можно определить положение переднего главного фокуса  $F$  для составной системы.

Положение точки  $A'$  излома оси было выбрано произвольно. Поэтому параллельное перемещение второй системы относительно первой в направлении, перпендикулярном оси первой системы, равнозначно продольному перемещению точки  $A'$  пересечения обеих осей.

Самый общий случай - скрещивание обеих осей составляющих систем - более сложный по сравнению с только что рассмотренным. Поэтому, не анализируя детально скрещивание осей, ограничимся замечанием, что при этом не изменяется наклон сопряженных плоскостей, как было при сохранении параллельности осей обеих составляющих систем.

## Перспективное преобразование изображений

Было установлено, что для предметных плоскостей и плоскостей изображения, если они перпендикулярны осям системы (как центрированной, так и нецентрированной), масштаб изображения (линейное увеличение) должен быть постоянным, т.е. предмет и его изображение полностью подобны. Однако на практике (например, в фотограмметрии) сталкиваемся с так называемым перспективным преобразованием изображения.

Перспективное преобразование изображения можно рассматривать, пользуясь методом проективной геометрии, основанном на существовании единого центра проекции. Принципиальная схема этого метода показана

на рис. 8, где центр проекции -  $O$ , а проектируемая фигура  $ABCD$ , лежащая в плоскости  $P$  и определяющая ход проектирующих прямых  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  и  $DO$ , преобразуется в фигуру  $A'B'C'D'$ , принадлежащую плоскости  $P'$ , пересекающей прямые  $A'O$ ,  $B'O$ ,  $C'O$  и  $D'O$ .

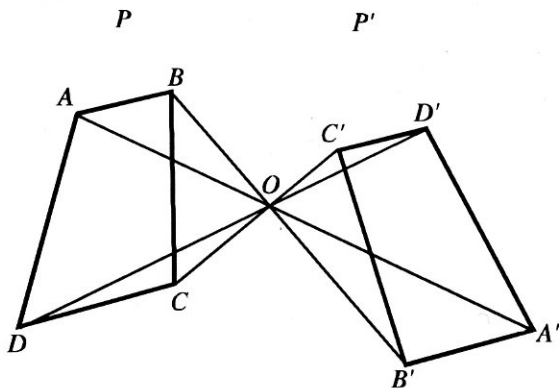


Рис. 8. Перспективное преобразование изображения по методу проективной геометрии

Положение плоскостей  $P$  и  $P'$  относительно центра проекции  $O$  является произвольным, за исключением случая, когда плоскость  $P$  проходит через центр проекции  $O$ . Этот частный случай приводит к неопределенности.

Кроме того, в процессе щелевой аэрофотосъемки происходит преобразование изображения при разрушении центра проекции, что также нельзя рассмотреть, используя метод проективной геометрии.

Во избежание недостатков метода проективной геометрии можно воспользоваться закономерностями преобразования изображения, вытекающими из общих положений коллинеарности или солинейного свойства. Однако осуществление перспективных преобразований возможно лишь при отказе от перпендикулярности к оси предметных плоскостей и плоскостей изображения.

Для установления зависимостей, управляющих перспективными преобразованиями, обратимся к рис. 9, на котором показаны сопряженные плоскости  $P$  и  $P'$ , не перпендикулярные к оси системы. Обозначим углы наклона этих плоскостей через  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ . Плоскости  $P$  и  $P'$  должны пересекаться с главными плоскостями  $H$  и  $H'$  в точках  $B$  и  $B'$  в плоскости рисунка, которые удалены на расстояния  $B_0B = B_0'B$  от главных точек  $B_0$  и  $B_0'$  на оси, так как для главных плоскостей линейное увеличение должно быть равным единице.



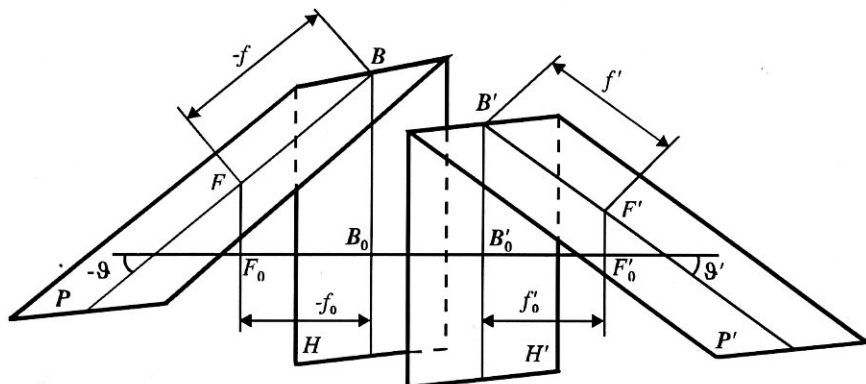


Рис. 9. Сопряженные плоскости, не перпендикулярные к оси

Плоскости  $P$  и  $P'$  будут пересекаться с передней и задней фокальными плоскостями системы в точках  $F$  и  $F'$  в плоскости рисунка, которые будут передним и задним фокусами этих плоскостей; расстояния между точками  $F$  и  $B$  и  $F'$  и  $B'$  станут передним и задним фокусными расстояниями  $f$  и  $f'$  для сопряженных плоскостей  $P$  и  $P'$ . Эти фокусные расстояния согласно рис. 9 выразятся формулами

$$f = -f_0 / \sin \vartheta; \quad f' = f'_0 / \sin \vartheta', \quad (33)$$

где  $f_0$  и  $f'_0$  - фокусные расстояния на оси системы.

Отношение фокусных расстояний выразится как

$$\frac{f}{f'} = \frac{f_0}{f'_0} \frac{\sin \vartheta'}{\sin \vartheta}. \quad (34)$$

Подобное представление процесса перспективного преобразования не исключает случая, когда сопряженные плоскости будут проходить и через центр проекции, т.е. не приводит к неопределенности, характерной для метода проективной геометрии.

Целесообразно охарактеризовать процесс перспективных преобразований какой-либо количественной величиной. Для этого удобно использовать фокусные расстояния для каждой пары сопряженных плоскостей, в которых происходят перспективные преобразования. Такие фокусные расстояния, выраженные формулами (33), можно назвать перспективными.

Заметим, что расположение точек на сопряженных плоскостях можно определить сопряженным пучком прямых, исходящих из произвольно расположенной в предметном пространстве точки и сопряженной с ней точки в пространстве изображений. Такие пары сопряженных точек могут располагаться и на оси системы.

В фотограмметрии при выполнении радиальной триангуляции по нетрансформированным снимкам прибегают к использованию свойств точек нулевых искажений, в которых углы между сопряженными прямыми и осью сохраняются неизменными. Это свойство точек нулевых искажений равнозначно равенству углового увеличения  $W_0 = 1$ .

Обращаясь к формуле (11), связывающей угловое и линейное увеличения, для узловых точек запишем

$$W_C V_C = -\frac{f}{f'}, \quad (35)$$

откуда при равенстве  $W_C = 1$  находим линейное увеличение

$$V_C = -f/f' = -z'_C/f' = -f/z_C. \quad (36)$$

Таким образом, отрезки  $z_C$  и  $z'_C$ , определяющие расстояния узловых точек от фокусов  $F$  и  $F'$ , будут

$$z'_C = f \quad \text{и} \quad z_C = f'. \quad (37)$$

С другой стороны, отрезки  $z_C$  и  $z'_C$  можно рассматривать как узловые фокусные расстояния, отсчитываемые от узловых точек  $C$  и  $C'$ .

Картина расположения узловых точек показана на рис. 10.

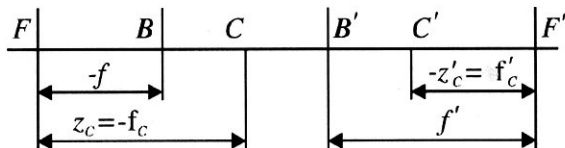


Рис. 10. Расположение узловых точек

Рассмотрим перспективное преобразование кривой второго порядка. На рис. 11 показана такая кривая, вершина которой отстоит от переднего фокуса  $F$  системы на расстоянии  $z_0$ .

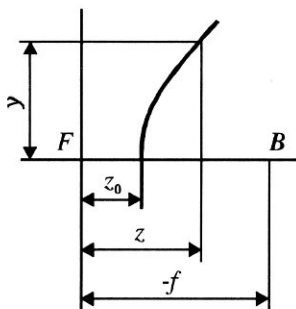


Рис. 11. Кривая второго порядка

Уравнение этой кривой

$$y^2 = A(z - z_0) + B(z - z_0)^2. \quad (38)$$

Координаты  $z'$  и  $y'$  сопряженной точки в пространстве изображений связаны через формулу Ньютона и формулы увеличения:

$$V = y'/y = -z'/f' = -f/z. \quad (39)$$

Пользуясь формулой (39), можно выразить величины  $z$  и  $y$  через  $z'$  и  $y'$ :

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{y' f'}{z'} = -\frac{y' z}{f}; \\ z &= \frac{f f'}{z'}; \quad z_0 = \frac{f f'}{z'_0}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Подставляя значения  $y$ ,  $z$ ,  $z_0$  из формулы (40) в формулу (38), запишем

$$y'^2 \frac{f'^2}{z'^2} = A \left( \frac{f f'}{z'} - \frac{f f'}{z'_0} \right) + B \left( \frac{f f'}{z'} - \frac{f f'}{z'_0} \right)^2. \quad (41)$$

Умножая обе части формулы (41) на  $z'^2$ , получим уравнение

$$y'^2 f'^2 = A f f' z' \left( 1 - \frac{z'}{z'_0} \right) + B f' f'^2 \left( 1 - \frac{z'}{z'_0} \right)^2, \quad (42)$$

связывающее  $z'$  и  $y'$ .

После некоторых преобразований формулу (42) можно привести к уравнению кривой с вершиной в начале координат, отстоящей от заднего фокуса системы на расстоянии  $z_0'$ :

$$y'^2 = -A \frac{f}{f'} (z' - z_0') + \left( B + \frac{AV_0}{f'} \right) \frac{f^2}{f'^2 V_0} - (z' - z_0')^2. \quad (43)$$

Уравнение (43) выглядит наиболее просто, когда кривая в предметном пространстве является параболой, для которой коэффициент  $B = 0$  и отношение фокусных расстояний равно минус единице, а увеличение  $V_0 = 1$ :

$$y'^2 = A(z' - z_0') + \frac{A}{f'}(z' - z_0')^2. \quad (44)$$

Так как в формуле (44) коэффициент  $A$  при  $(z' - z_0')$  сохраняется равным коэффициенту  $A$  формулы (38), то и значения радиусов кривизны в обеих вершинах должны сохраняться неизменными:

$$r = -A / 2. \quad (45)$$

Обращаясь к уравнению окружности радиуса  $r$ , смещенной на отрезок  $z_0$  относительно начала координат, расположенного в переднем фокусе  $F$ , можно записать

$$y^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \quad (46)$$

Пользуясь формулами увеличения и формулой Ньютона, можно отрезки  $y$  и  $z$  выразить через отрезки  $y'$  и  $z'$  аналогично формулам (40). Тогда уравнение (46) примет вид

$$y'^2 \frac{f'^2}{z'^2} + \left( \frac{f f'}{z'} - \frac{f f'}{z_0'} \right)^2 = r^2. \quad (47)$$

После некоторых преобразований получим

$$y'^2 + (z_0'^2 - r^2) \frac{z'^2}{f'^2} - 2f z_0' \frac{z'}{f'} + f^2 f'^2 = 0, \quad (48)$$

т.е. квадратное уравнение, выражающее кривую второго порядка.

В частном случае, если  $r = z_0$  (когда окружность проходит через передний фокус системы  $F$ ), изображение окружности примет вид параболы. Если радиус окружности превосходит отрезок  $z_0$ , ее изображение примет вид гиперболы.

Квадрат, который описан вокруг предметной окружности, изобразится при  $r < z_0$  в виде трапеции. При этом, если полусторона квадрата превосходит расстояние центра квадрата от переднего фокуса, его изображение будет разорвано. Это явление нельзя обнаружить при использовании методов проективной геометрии, как, впрочем, и при трансформировании изображения, когда центр проекции размещен в предметной плоскости.

Рассмотрим работу телескопической системы. На рис. 12 показаны сопряженные плоскости  $P_0$  и  $P'_0$  этой системы, перпендикулярные оси и плоскости рисунка, для которых соблюдается линейное увеличение согласно формуле

$$V_0 = y'_0 / y_0 \quad (49)$$

как в плоскости рисунка, так и в плоскости, перпендикулярной ей.

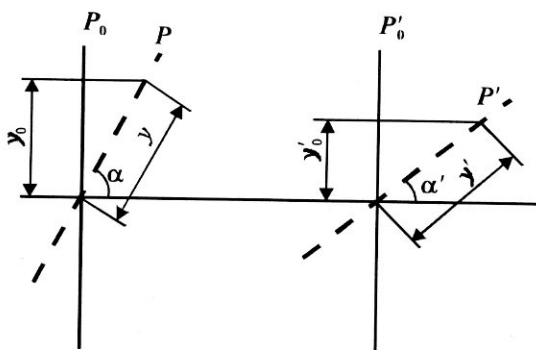


Рис. 12. Сопряженные плоскости телескопической системы

При наклоне предметной плоскости  $P$  на некоторый угол  $\alpha$  сопряженная ей плоскость  $P'$  приобретает угол наклона  $\alpha'$ , значение которого будет определяться угловым увеличением

$$W_0 = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (50)$$

Для наклоненных плоскостей  $P$  и  $P'$  линейное увеличение определится отношением отрезков  $y'$  и  $y$ :

$$V = y' / y. \quad (51)$$

Отрезки  $y'$  и  $y$  можно выразить через отрезки  $y_0'$  и  $y_0$ . Таким образом,

$$y_0 = y \sin \alpha, \quad y_0' = y' \sin \alpha', \quad (52)$$

что позволяет выразить увеличение  $V$  для наклоненных плоскостей через увеличение  $V_0$  для ненаклоненных плоскостей:

$$V = \frac{V_0 \sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{V_0 \cos \alpha'}{W_0 \cos \alpha}. \quad (53)$$

Одновременно в плоскостях  $P$  и  $P'$  линейное увеличение в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, сохранится равным исходному увеличению  $V_0$ . Следовательно, в плоскостях  $P$  и  $P'$  наблюдается анаморфотное преобразование изображения.

## Глава 2. Аберрации нецентрированных оптических систем

### Дисторсия нецентрированных систем

Аберрации любой оптической системы могут быть представлены в различных формах - в виде волновых, поперечных или продольных аберраций, а также коэффициентов при полевых или апертурных углах или функций высот на зрачке и размеров предмета (или изображения).

Поперечные аберрации можно представить как

$$\left. \begin{aligned} \delta g' &= \delta g'(x, y, m, M), \\ \delta G' &= \delta G'(x, y, m, M), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где  $x$  и  $y$  - координаты, определяющие положение предметной точки;  $m$  и  $M$  - координаты точки пересечения рассматриваемого луча с плоскостью зрачка входа.

Зависимость поперечных аберраций от координат  $m$  и  $M$ , определяющих ход луча в плоскости зрачка, выражает разрушение гомоцентричности пучков лучей, ведущее к понижению качества изображения.

Зависимость же поперечных aberrаций от координат  $x$  и  $y$  точки на предметной плоскости, кроме разрушения гомоцентричности, приводит к изменению положения точки изображения, связанному с искажением изображения - дисторсией.

Ограничиваясь рассмотрением только одного луча - главного, исключаем воздействие на aberrации координат  $m$  и  $M$  на зрачке и приходим к общему выражению для составляющих дисторсии

$$\Delta y' = \delta g'(x, y), \quad \Delta x' = \delta G'(x, y). \quad (55)$$

Формулы (55) можно представить в виде многочленов

$$\left. \begin{aligned} \Delta y' &= A_y y + B_y x + A'_y y^2 + B'_y xy + C'_y x^2 + \dots, \\ \Delta x' &= A_x y + B_x x + A'_x y^2 + B'_x xy + C'_x x^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Первые два члена формул (56), содержащие параметры  $x$  и  $y$  в первых степенях, определяют дисторсию первого порядка; следующие три члена, содержащие значения  $x$  и  $y$  во вторых степенях и их произведения, - дисторсию второго порядка. Аналогично можно выразить дисторсию третьего порядка и т.д.

Рассмотрим дисторсию первого порядка, выражаемую формулами

$$\Delta y' = A_y y + B_y x, \quad \Delta x' = A_x y + B_x x. \quad (57)$$

Полагая в формулах (57) коэффициенты  $A_y = A_x = B_y = 0$ , а коэффициент  $B_x \neq 0$ , приходим к изменению положения точек изображения в направлении оси  $X$ , что и является причиной возникновения анаморфотного преобразования изображения.

Равным образом неравенство нулю коэффициентов  $A_y$  вызывает изменение положения точек изображения в направлении оси  $Y$ , тоже являющегося анаморфотным.

Неравенство нулю коэффициентов  $B_y$  и  $A_x$  создает перекося изображения в направлениях осей  $Y$  и  $X$ .

Картины преобразования изображения во всех четырех случаях показаны на рис. 13.

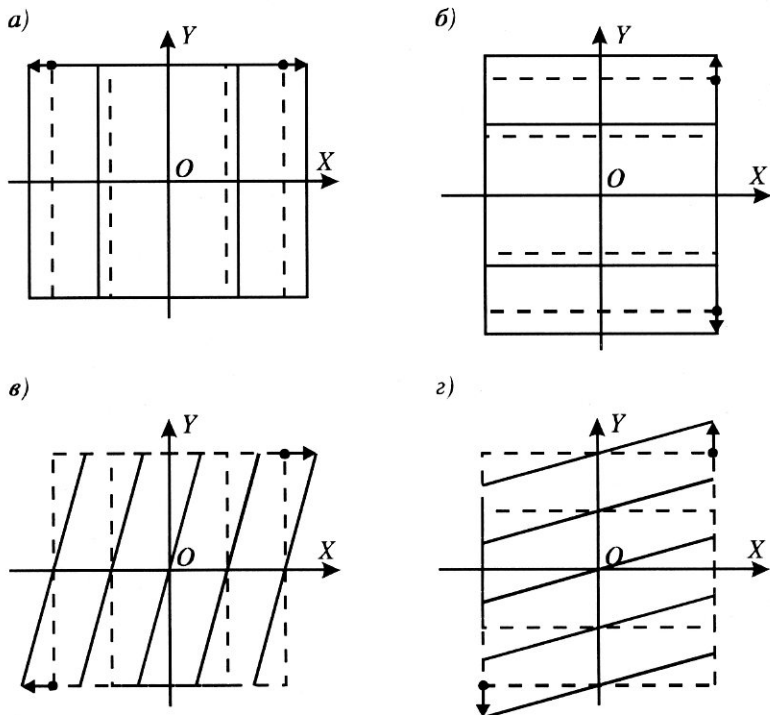


Рис. 13. Искажение изображения при наличии дисторсии первого порядка:  
*a, б* - анаморфоза; *в, г* - перекос

Преобразование изображения в виде его перекоса можно привести к анаморфотному посредством поворота координатных осей.

При различных других соотношениях между коэффициентами  $A_y, B_y, A_x, B_x$  всегда сохраняется линейная связь между прямыми в пространстве предметов и их отображениями в пространстве изображений, что соответствует перспективным преобразованиям.

Таким образом, дисторсия первого порядка приводится к анаморфотным, либо к перспективным преобразованиям.

Формально, не касаясь причин возникновения нецентрированной дисторсии второго порядка, должны существовать шесть независимых коэффициентов дисторсии:  $A_y', B_y', C_y'$  и  $A_x', B_x', C_x'$ .



При наличии в рассматриваемой системе плоскости симметрии, например относительно оси  $Y$ , коэффициенты  $B_y'$ ,  $A_x'$  и  $C_x'$  должны быть равными нулю. Свободными остаются лишь три коэффициента  $A_y'$ ,  $C_y'$  и  $B_x'$ , а общее выражение для дисторсии второго порядка примет вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta y' &= \delta g' = A_y' y^2 + C_y' x^2; \\ \Delta x' &= B_x' xy. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Коэффициенты  $A_y'$  и  $C_y'$  создают деформацию изображения в направлении оси  $Y$ ; коэффициент  $B_x'$  - в обоих направлениях.

Рассматривая в качестве предмета квадрат со сторонами, параллельными координатным осям, расположенный симметрично относительно начала координат, как это показано на рис. 14,а, видим, что при наличии коэффициента  $A_y'$  происходит поступательное смещение прямых, параллельных оси абсцисс, в одну и ту же сторону относительно этой оси; при этом длина таких прямых сохраняется неизменной. Нецентрированную дисторсию подобного рода уместно называть *масштабной*.

Наличие коэффициента  $C_y'$  вызывает искривление изображения прямых линий, параллельных оси абсцисс; при этом длина искаженных линий также не изменяется. Подобную дисторсию можно назвать *параболической* (рис. 14,б).

Третий коэффициент  $B_x'$  не создает деформации изображения в направлении оси  $Y$ ; прямые, параллельные оси абсцисс, изображаются прямыми, также параллельными оси абсцисс и расположенными на неизменных от нее расстояниях; однако прямые, параллельные оси ординат, изображаются прямыми, составляющими с этой осью углы, возрастающие по мере их удаления от нее (рис. 14,в). Подобного рода дисторсию условимся называть *дисторсией перспективной*.

Рассмотрим причины возникновения нецентрированной дисторсии.

Как уже отмечалось, создание нецентрированной системы, удовлетворяющей условию коллинеарности, можно рассматривать как совокупность двух (или большего числа) центрированных систем, но с нарушением центрированности их друг относительно друга. В простейшем случае такую совокупность можно представить в виде двух линз, обе поверхности которых являются сферическими, что и обуславливает их центрированность, так как их ось определяется прямой, проходящей через центры сферических поверхностей. При этом, если обе составляющие системы сохраняют

постоянство увеличений для сопряженных плоскостей, перпендикулярных осям, т.е. отсутствует дисторсия, то и в составной системе она также устранена, но при условии, что эта система останется центрированной.

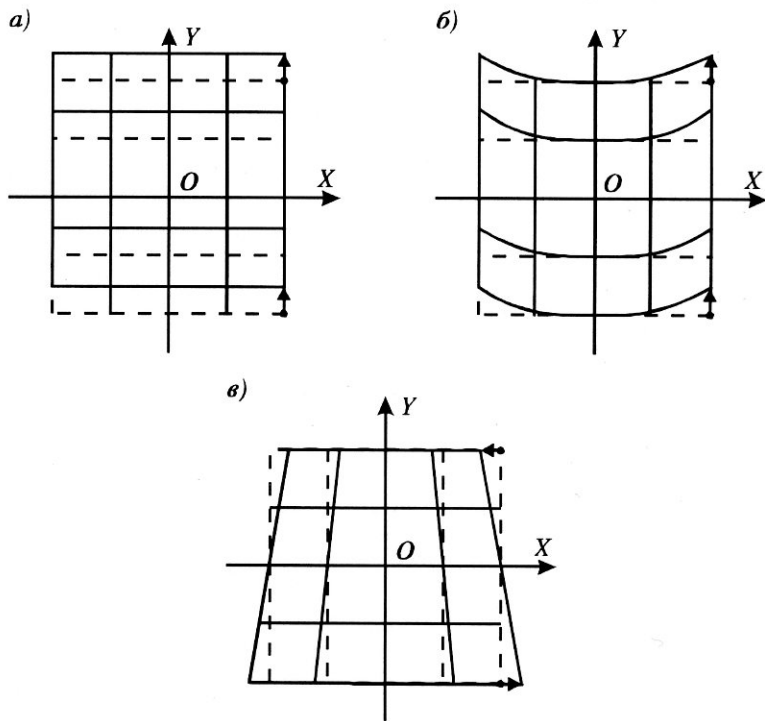


Рис. 14. Искажение изображения, вызванное дисторсией второго порядка: масштабной (а); параболической (б) и перспективной (в)

Однако в общем случае дисторсия у обеих составляющих систем может быть и не равна нулю. Тогда в целях устранения дисторсии для всей составной системы необходимо, чтобы дисторсия первой системы в прямом ходе лучей и дисторсия второй в обратном ходе лучей были равны и могли взаимно компенсироваться.

Нарушение взаимной центрированности составляющих систем приводит к рассогласованию дисторсий этих систем, что и является причиной возникновения в составной системе нецентрированной дисторсии.

Исходя из этих данных, рассмотрим деформацию изображения некоторого отрезка  $AB$ , возникающую вследствие наличия в первой системе дисторсии третьего порядка, или элементарной дисторсии (рис. 15). Будем считать, что отрезок  $AB$  перпендикулярен оси ординат.

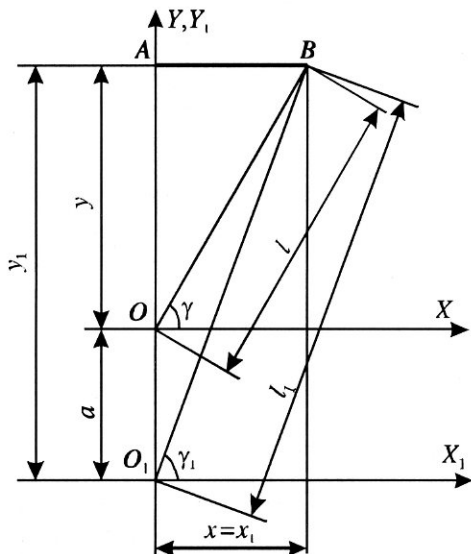


Рис. 15. К определению деформации изображения отрезка прямой  $AB$  при децентрации системы

Точка  $B$  в системе координат  $XOY$  представлена координатами  $x$  и  $y$ . Ее расстояние от начала координат обозначим через  $l$ .

Центрированную дисторсию в точке  $B$  можно выразить общей формулой

$$\Delta y = Ay_0^3 + By_0^5 + \dots \quad (59)$$

Ограничиваясь элементарной дисторсией, запишем

$$\Delta y = Ay_0^3. \quad (60)$$

На рис. 15 показано также смещение начала координат в направлении оси ординат на расстояние  $a$ . В смещенной системе координат точка  $B$  будет иметь координаты

$$y_1 = y + a \quad \text{и} \quad x_1 = x. \quad (61)$$

При этом расстояние точки  $B$  от нового начала координат равно  $l_1$ . Дисторсию в точке  $B$  для первой системы можно выразить по формуле (60) через

$$\Delta l = Al^3. \quad (62)$$

Равным образом дисторсия для второй системы со смещенным началом координат выразится через расстояние  $l_1$  точки  $B$  от нового начала координат

$$\Delta l_1 = Al_1^3. \quad (63)$$

Полагая угол между направлением на точку  $B$  и осью абсцисс  $\gamma$ , можно выразить координаты точки  $B$ :

$$y = l \sin \gamma; \quad x = l \cos \gamma \quad (64)$$

и составляющие дисторсии

$$\Delta y = \Delta l \sin \gamma; \quad \Delta x = \Delta l \cos \gamma. \quad (65)$$

Угол между направлением на точку  $B$  из нового начала координат и осью абсцисс обозначим через  $\gamma_1$ . Тогда углы  $\gamma$  и  $\gamma_1$  можно связать с координатами  $x$  и  $y$  формулой

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = (y + a)/x = \operatorname{tg} \gamma + a/x. \quad (66)$$

При этом ордината в новой системе координат

$$y_1 = y + a = l_1 \sin \gamma_1 \quad (67)$$

и

$$x_1 = l_1 \cos \gamma_1. \quad (68)$$

Значения центрированной дисторсии для обеих систем были выражены формулами (62) и (63) через расстояния  $l$  и  $l_1$ . Умножая эти значения на  $\sin \gamma_1$  и  $\sin \gamma$ , определим составляющие дисторсии в направлении координатных осей  $Y_1$  и  $Y$ :

$$\Delta y_1 = \Delta l_1 \sin \gamma_1 = Al_1^3 \sin \gamma_1; \quad \Delta y = Al^3 \sin \gamma. \quad (69)$$

Составим разность этих величин:

$$\overline{\Delta y} = \Delta y_1 - \Delta y = A(l_1^3 \sin \gamma_1 - l^3 \sin \gamma). \quad (70)$$

Квадраты  $l_1$  и  $l$  будут равны

$$l_1^2 = x_1^2 + y_1^2; \quad l^2 = x^2 + y^2, \quad (71)$$

поэтому

$$\overline{\Delta y} = A[(x_1^2 + y_1^2)y_1 - (x^2 + y^2)y]. \quad (72)$$

Раскрывая скобки, находим

$$\overline{\Delta y} = A(x_1^2 y_1 + y_1^3 - x^2 y + y^3), \quad (73)$$

или

$$\overline{\Delta y} = A[x_1^2(y_1 - y) + y_1^3 - y^3]. \quad (74)$$

Разность  $y_1 - y = a$  определяет децентрацию. Вынося эту величину за скобку, получаем

$$\overline{\Delta y} = Aa[x^2 + (y^2 + yy_1 + y^2)], \quad (75)$$

или

$$\overline{\Delta y} = Aa(x^2 + 3y^2 + 3ya + a^2). \quad (76)$$

В случае, если децентрация мала,

$$\overline{\Delta y} = Aa(x^2 + 3y^2). \quad (77)$$

Аналогично можно найти и разность  $\overline{\Delta x} = \Delta x_1 - \Delta x$ . Умножая  $\Delta l_1$  и  $\Delta l$  на  $\cos \gamma_1$  и  $\cos \gamma$ , получаем

$$\overline{\Delta x} = \Delta x_1 - \Delta x = Al_1^3 \cos \gamma_1 - Al^3 \cos \gamma, \quad (78)$$

или аналогично выражению (72), заменяя  $l_1$  и  $l$  через  $x$  и  $y$ ,

$$\overline{\Delta x} = A(x_1^2 + y_1^2)x_1 - A(x^2 + y^2)x. \quad (79)$$

Раскрывая скобки и делая сокращения, получаем

$$\overline{\Delta x} = A(x_1 y_1^2 - x y^2) = Ax(y_1^2 - y^2), \quad (80)$$

или

$$\overline{\Delta x} = Aax(y_1 + y) = Aa(2y + a)x \quad (81)$$

и при малых значениях  $a$

$$\overline{\Delta x} = 2Aaxy. \quad (82)$$

Рассматривая формулы (77) и (82), выражающие нецентрированную дисторсию, видим, что в обе формулы входит единый множитель  $Aa$ , являющийся произведением коэффициента  $A$ , определяющего дисторсию центрированных составляющих систем, и децентрации этих систем относительно друг друга  $a$ .

Пользуясь этими формулами, можно установить характер деформации изображения окружности с центром, совмещенным с началом координат первой составляющей центрированной системы.

Полагая радиус  $l$  окружности постоянным, можно записать

$$l^2 = x^2 + y^2 = \text{const} \quad (83)$$

и

$$y = l \sin \gamma; \quad x = l \cos \gamma. \quad (84)$$

Тогда значение  $\overline{\Delta y}$  согласно формуле (77) можно определить как

$$\overline{\Delta y} = Aa(l^2 + 2y^2) = Aa(l^2 + 2l^2 \sin^2 \gamma), \quad (85)$$

или

$$\overline{\Delta y} = Aal^2(1 + 2\sin^2 \gamma). \quad (86)$$

Обращаясь к формуле (82), получим

$$\overline{\Delta x} = 2Aaxy = 2Aal^2 \sin \gamma \cos \gamma. \quad (87)$$

Формулы (86) и (87) можно представить в виде тригонометрических функций от угла  $2\gamma$ :

$$\overline{\Delta y} = Aal^2(2 - \cos 2\gamma) \quad (88)$$

и

$$\overline{\Delta x} = Aal^2 \sin 2\gamma. \quad (89)$$

Полученные формулы определяют уравнение искаженного изображения окружности, представляющего яйцеобразный овал, симметричный относительно оси ординат (рис.16).

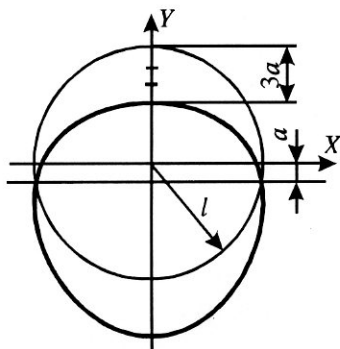


Рис. 16. Искажение окружности при нарушении центровки оптической системы

Нецентрированную дисторсию можно представить в виде разложения на радиальную  $\Delta l$  и тангенциальную  $\Delta m$  составляющие. Этот переход можно получить, прибегая к повороту координатных осей на угол  $\gamma$ . Таким образом,

$$\Delta l = \overline{\Delta x} \cos \gamma + \overline{\Delta y} \sin \gamma \quad \text{и} \quad \Delta m = \overline{\Delta x} \sin \gamma - \overline{\Delta y} \cos \gamma \quad (90)$$

и, заменяя  $\overline{\Delta y}$  и  $\overline{\Delta x}$  согласно формулам (86) и (87), получаем

$$\Delta l = 2Aal^2 \sin \gamma \cos^2 \gamma + Aal^3 (1 + 2\sin^2 \gamma) \sin \gamma. \quad (91)$$

Далее, вынося за скобку  $Aal^2$ ,

$$\Delta l = Aal^2 (2 \sin \gamma \cos^2 \gamma + \sin \gamma + 2 \sin^3 \gamma). \quad (92)$$

После сокращений

$$\Delta l = 3Aal^2 \sin \gamma. \quad (93)$$

Аналогично для тангенциальной составляющей дисторсии

$$\Delta m = 2Aal^2 \sin^2 \gamma \cos \gamma - Aal^2 (1 + 2\sin^2 \gamma) \cos \gamma. \quad (94)$$

После сокращений

$$\Delta m = -Aal^2 \cos \gamma. \quad (95)$$

Из формул (93) и (95) следует, что радиальная и тангенциальная составляющие нецентрированной дисторсии выражаются синусоидальными зависимостями относительно угла  $\gamma$  со сдвигом фазы на  $90^\circ$  (рис. 17).

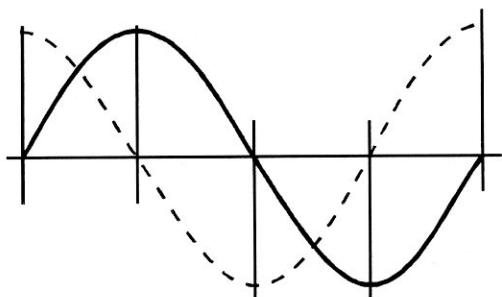


Рис. 17. Синусоиды со сдвигом фазы на  $90^\circ$

Проанализируем нецентрированную дисторсию при сочетании двух составляющих систем, каждая из которых обладает своей нецентрированной дисторсией.

Учитывая, что для обеих составляющих систем период синусоидальных зависимостей должен быть одинаковым, приходим к выводу, что и при суммировании дисторсий необходимо получить также синусоидальные зависимости, но с другими значениями амплитуд и начальных фаз. Иными словами, при суммировании нецентрированных дисторсий общий характер дисторсии должен сохраняться неизменным. Таким образом, приходим к векторному суммированию дисторсий.

В общем случае плоскости симметрии обеих составляющих систем образуют между собой некоторый угол  $\varepsilon$ .

Опираясь на полученные результаты, поставленная задача сводится к суммированию двух синусоидальных зависимостей с одинаковым периодом, но с разными амплитудами при наличии сдвига фазы. Таким образом,

$$\overline{\Delta l} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 3A_1 a_1 l^2 \sin \gamma_1 + 3A_2 a_2 l^2 \sin \gamma_2 \quad (96)$$

и

$$\overline{\Delta m} = \Delta m_1 + \Delta m_2 = -A_1 a_1 l^2 \cos \gamma_1 - A_2 a_2 l^2 \cos \gamma_2. \quad (97)$$

При этом  $\gamma_2 = \gamma_1 + \varepsilon$ .

Вынося за общую скобку множитель  $3l^2$ , получаем

$$\overline{\Delta l} = 3l^2 [A_1 a_1 \sin \gamma_1 + A_2 a_2 \sin(\gamma_1 + \varepsilon)] \quad (98)$$



и соответственно

$$\overline{\Delta m} = -l^2[A_1 a_1 \cos \gamma_1 - A_2 a_2 \cos(\gamma_1 + \varkappa)]. \quad (99)$$

Полагаем, что суммарная нецентрированная дисторсия является синусоидальной функцией, которую можно представить в виде

$$\overline{\Delta l} = 3l^2 \overline{A} \overline{a} \sin(\gamma_1 + \varkappa_0) = 3l^2 \overline{A} \overline{a} (\sin \gamma_1 \cos \varkappa_0 + \cos \gamma_1 \sin \varkappa_0). \quad (100)$$

Приравнявая выражения (98) и (100) и полагая  $\gamma_1 = 0$ , получим равенство коэффициентов

$$\overline{A} \overline{a} \cos \varkappa_0 = A_1 a_1 + A_2 a_2 \cos \varkappa \quad (101)$$

и

$$\overline{A} \overline{a} \sin \varkappa_0 = A_2 a_2 \sin \varkappa. \quad (102)$$

Возводя равенства (101) и (102) в квадрат и складывая друг с другом, находим

$$\overline{A}^2 \overline{a}^2 = A_1^2 a_1^2 + A_2^2 a_2^2 + 2A_1 a_1 A_2 a_2 \cos \varkappa, \quad (103)$$

что и определяет квадрат суммарной амплитуды.

Возвращаясь к формуле (102), определяем

$$\sin \varkappa_0 = (A_2 a_2 / \overline{A} \overline{a}) \sin \varkappa. \quad (104)$$

Формула (103) выражает модуль суммы векторов  $A_1 a_1$  и  $A_2 a_2$ , составляющих угол  $\varkappa$ , а формула (104) - угол между этими векторами.

Таким же образом можно просуммировать тангенциальные составляющие нецентрированных дисторсий  $\Delta m_1$  и  $\Delta m_2$ .

Обращаясь к формуле (97), можно записать

$$\overline{\Delta m} = -A_1 a_1 l^2 \cos \gamma_1 - A_2 a_2 l^2 \cos \gamma_2 = \overline{A} \overline{a} l^2 \cos(\gamma_1 + \varkappa_0), \quad (105)$$

затем, развертывая правые части, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\Delta m} &= -l^2[A_1 a_1 \cos \gamma_1 - A_2 a_2 (\cos \gamma_1 \cos \varkappa - \sin \gamma_1 \sin \varkappa)] = \\ &= -l^2 \overline{A} \overline{a} (\cos \gamma_1 \cos \varkappa_0 - \sin \gamma_1 \sin \varkappa_0), \end{aligned} \quad (106)$$

откуда следует

$$\bar{A}\bar{a} \cos \alpha_0 = A_1 a_1 + A_2 a_2 \cos \alpha \quad (107)$$

и

$$-\bar{A}\bar{a} \sin \alpha_0 = A_2 a_2 \sin \alpha. \quad (108)$$

Возводя выражения (107) и (108) в квадрат и суммируя, получаем

$$\bar{A}^2 \bar{a}^2 = A_1^2 a_1^2 + A_2^2 a_2^2 + 2A_1 a_1 A_2 a_2 \cos \alpha, \quad (109)$$

а из формулы (108) определяем

$$\sin \alpha_0 = (A_2 a_2 / \bar{A}\bar{a}) \sin \alpha. \quad (110)$$

Таким образом, для тангенциальных составляющих нецентрированной дисторсии также сохраняется синусоидальная закономерность и происходит векторное суммирование этих составляющих.

### Астигматизм нецентрированных систем

Для центрированных оптических систем астигматизм в первом приближении определяется астигматизмом третьего порядка. Его можно представить в волновой форме формулой

$$\Delta l = \Delta l(\sigma_x, \sigma_y, x, y); \quad (111)$$

при этом суммы показателей степеней как для апертурных углов  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , так и для координат  $x$  и  $y$  рассматриваемой точки должны быть равны двум.

Выражение волновой аберрации второго порядка отличается тем, что координаты  $x$  и  $y$  будут лишь в первых степенях. Таким образом, волновой астигматизм второго порядка можно представить уравнением

$$\Delta l = (A_x \sigma_x^2 + B_x \sigma_x \sigma_y + C_x \sigma_y^2)x + (A_y \sigma_x^2 + B_y \sigma_x \sigma_y + C_y \sigma_y^2)y. \quad (112)$$

При симметрии относительно оси  $Y$  значение волновой аберрации при изменении знаков  $x$  и  $\sigma_x$  не должно изменяться, поэтому в уравнении (112) коэффициенты  $A_x$ ,  $B_x$  и  $C_x$  должны быть равны нулю. Тогда выражение для волновой аберрации упрощается:

$$\Delta l = B_x x \sigma_x \sigma_y + A_y y \sigma_x^2 + C_y y \sigma_y^2. \quad (113)$$

При этом составляющие волновой aberrации в направлении оси ординат имеют вид

$$\Delta l_y = (A_y \sigma_x^2 + C_y \sigma_y^2) y \quad \text{и} \quad \Delta l_x = B_x x \sigma_x \sigma_y. \quad (114)$$

Таким образом, для нецентрированной системы, у которой имеется плоскость симметрии, в общем случае могут существовать три независимых коэффициента:  $A_y$ ,  $B_x$  и  $C_y$ .

Коэффициенты  $A_y$  и  $C_y$  определяют изменение астигматизма в плоскости симметрии, пропорциональное размеру изображения, причем при соответственной перефокусировке линии меридионального и сагиттального фокусов будут лежать либо в плоскости симметрии, либо будут ей перпендикулярны.

Коэффициент  $B_x$ , выражающий астигматизм в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии, будет (вследствие расположения перед произведением апертурных углов) определять при соответственных перефокусировках фокальные линии, составляющие с плоскостью симметрии углы  $45^\circ$ . Картина изменения астигматизма второго порядка показана на рис. 18.

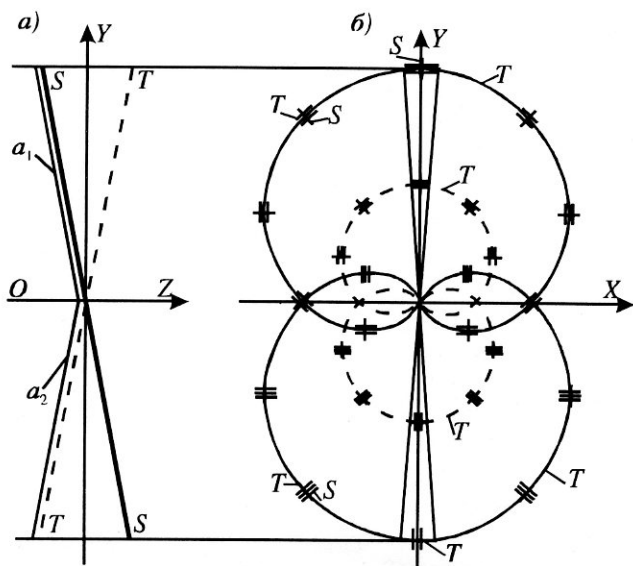


Рис. 18. Астигматизм второго порядка нецентрированной системы: а) - в плоскости симметрии YOZ; б) - в плоскости, перпендикулярной оси OZ

Аналогично рассмотренной ранее нецентрированной дисторсии для совокупности двух центрированных систем с нарушенной взаимной центрировкой можно проследить возникновение нецентрированного астигматизма при нарушении центрировки двух составляющих центрированных систем.

С этой целью рассмотрим частный случай двух составляющих центрированных систем с телецентрическим ходом лучей между ними, когда при отсутствии децентрации их астигматизм взаимно компенсируется. В этом случае астигматизм третьего порядка выразится формулой

$$\Delta l = A l^2 \sigma_l^2 + B l^2 \sigma_m^2, \quad (115)$$

где  $l$  - расстояние точки поля от оси системы, совпадающей с осью  $Z$ , перпендикулярной плоскости чертежа;  $\sigma_l$  и  $\sigma_m$  - апертурные углы в меридиональной и сагиттальной плоскостях.

Переходя к декартовым координатам, расстояние  $l$  можно представить как

$$l^2 = x^2 + y^2, \quad (116)$$

а тангенс угла меридиональной плоскости с плоскостью симметрии, проходящей через ось системы и ось абсцисс, как

$$\operatorname{tg} \gamma = y/x. \quad (117)$$

Напишем составляющие апертурных углов в декартовых координатах:

$$\sigma_l = \sigma_x \cos \gamma + \sigma_y \sin \gamma \quad \text{и} \quad \sigma_m = \sigma_x \sin \gamma - \sigma_y \cos \gamma. \quad (118)$$

Формулы (116) и (118) позволяют представить формулу (115) в виде

$$\Delta l = [A(\sigma_x \cos \gamma + \sigma_y \sin \gamma)^2 + B(\sigma_x \sin \gamma - \sigma_y \cos \gamma)^2](x^2 + y^2). \quad (119)$$

Вынося за общую скобку  $\cos^2 \gamma$ , находим

$$\Delta l = [A(\sigma_x + \sigma_y y/x)^2 + B(\sigma_x y/x - \sigma_y)^2](x^2 + y^2) \cos^2 \gamma. \quad (120)$$

Так как

$$\cos^2 \gamma = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad (121)$$

выражение для волновой аберрации (120) преобразуется:

$$\Delta l = A(x\sigma_x + y\sigma_y)^2 + B(\sigma_x y - x\sigma_y)^2. \quad (122)$$

Полагая для плоскости симметрии  $x = 0$ , находим

$$\Delta l_y = (A\sigma_y^2 + B\sigma_x^2)y^2. \quad (123)$$

Принимая для составляющих систем равенство коэффициентов

$$A_2 = -A_1 \quad \text{и} \quad B_2 = -B_1, \quad (124)$$

а также децентрацию

$$a = y_2 - y_1, \quad (125)$$

можно суммируемые волновые aberrации представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= (A_1\sigma_y^2 + B_1\sigma_x^2)y_1^2, \\ \Delta l_2 &= (A_2\sigma_y^2 + B_2\sigma_x^2)y_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

Суммируя волновые aberrации  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , получаем

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = (A_1\sigma_y^2 + B_1\sigma_x^2)[(y_1 + a)^2 - y_1^2] \quad (127)$$

или

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = (A_1\sigma_y^2 + B_1\sigma_x^2)(2y_1 + a)a. \quad (128)$$

Приравняв  $\Delta l_1 + \Delta l_2$  нулю (случай устранения астигматизма), получаем

$$y_1 = -a/2 \quad \text{и} \quad y_2 = a/2. \quad (129)$$

Задавая в формуле (122) значения  $y_1$  и  $y_2$  из выражения (129) и учитывая формулу (124), получаем характер изменения волновой aberrации вдоль оси абсцисс

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= A_1 \left( x\sigma_x - \frac{a\sigma_y}{2} \right)^2 + B_1 \left( -\frac{a}{2}\sigma_x - x\sigma_y \right)^2; \\ \Delta l_2 &= -A_2 \left( x\sigma_x + \frac{a\sigma_y}{2} \right)^2 - B_1 \left( \frac{a}{2}\sigma_x - x\sigma_y \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Суммируя  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , после сокращений получаем

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 2(B_1 - A_1) a x \sigma_x \sigma_y. \quad (131)$$

Выражение (131) показывает, что астигматические фокальные линии будут ориентированы под углом  $45^\circ$  к оси абсцисс.

**Инварианты Гульстранда - Юнга. Вывод меридионального инварианта.** Рассмотрим преломление узкого пучка лучей в меридиональной плоскости на сферической поверхности, как это показано на рис. 19. Радиус преломляющей поверхности обозначим  $r$ , показатели преломления до и после преломляющей поверхности -  $n$  и  $n'$ , отрезки вдоль главного луча от точки преломления  $B$  до предметной точки  $A$  и до точки изображения  $A'$  -  $t$  и  $t'$ . Углы главного луча с нормалью к преломляющей поверхности  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ , угол между главным лучом и близким к главному лучом соответственно -  $d\sigma$  и  $d\sigma'$ , а угол между нормальми в точках преломления  $B$  и  $B_1$  (для главного и близкого главного лучей)  $d\varphi$ .

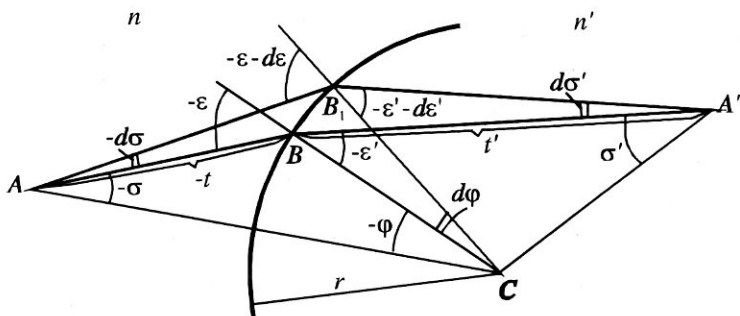


Рис. 19. К выводу меридионального инварианта

Дифференцируя выражение закона преломления, получаем

$$n \cos d\varepsilon = n' \cos \varepsilon' d\varepsilon'. \quad (132)$$

Расстояние между близкими точками выразим как

$$BB_1 = r d\varphi. \quad (133)$$

Соединяя центр поверхности  $C$  с точкой  $A$ , можно из соответствующих треугольников записать

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon &= -\sigma + \varphi, \\ -\varepsilon - d\varepsilon &= -\sigma - d\sigma + \varphi + d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Составляя разность выражений (134), получаем связь между малыми углами

$$d\varepsilon = d\sigma - d\varphi. \quad (135)$$

Равным образом будут связаны и углы

$$d\varepsilon' = d\sigma' - d\varphi. \quad (136)$$

Согласно данным рис. 19 угол  $d\sigma$  можно выразить через отрезок  $t$  и косинус угла падения  $\varepsilon$ . Находим

$$d\sigma = \frac{BB_1 \cos \varepsilon}{t} = \frac{r}{t} \cos \varepsilon d\varphi \quad (137)$$

и аналогично

$$d\sigma' = \frac{r}{t'} \cos \varepsilon' d\varphi. \quad (138)$$

Пользуясь формулами (132) и (135) - (138), получаем меридиональный инвариант Гульстранда - Юнга

$$n \cos \varepsilon \left( \frac{\cos \varepsilon}{t} - \frac{1}{r} \right) = n' \cos \varepsilon' \left( \frac{\cos \varepsilon'}{t'} - \frac{1}{r'} \right), \quad (139)$$

который при малых углах  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  переходит в инвариант Аббе.

Из инварианта Гульстранда - Юнга можно получить выражение

$$\frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{n \cos^2 \varepsilon}{t} = \frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r}. \quad (140)$$

**Вывод сагиттального инварианта.** Для сагиттальной плоскости изображение некоторой точки, расположенной на главном луче, можно найти посредством поворота плоскости, проходящей через главный луч и нормаль к преломляющей поверхности, на малый угол относительно прямой, проходящей через центр поверхности  $S$  и предметную точку  $A$  (рис. 20).

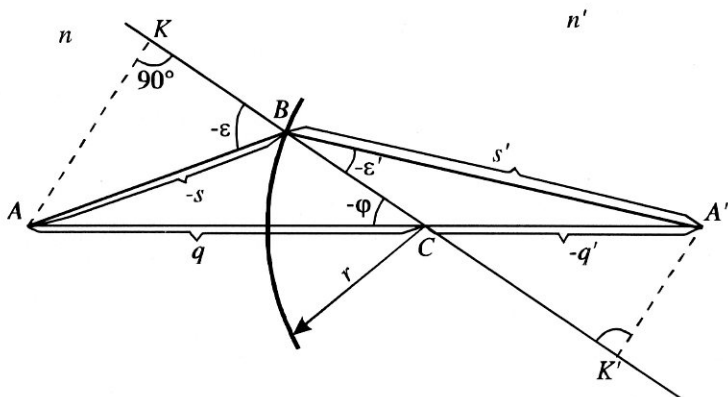


Рис. 20. К выводу сагиттального инварианта

Расстояния от точек  $A$  и  $A'$  до центра поверхности  $C$  обозначим  $q$  и  $q'$ , а расстояния этих же точек от точки преломления  $B$  - через  $s$  и  $s'$ . Углы главного луча с нормалью примем  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ .

Опустим из точек  $A$  и  $A'$  перпендикуляры на направление нормали, образуя отрезки  $AK$  и  $A'K'$ , связанные с отрезками  $s$  и  $s'$  формулами

$$AK = -s \sin \varepsilon \quad \text{и} \quad A'K' = -s' \sin \varepsilon'. \quad (141)$$

С другой стороны, отрезки  $AK$  и  $A'K'$  являются катетами подобных треугольников с общей вершиной в центре поверхности  $C$ . Поэтому

$$\frac{A'K'}{AK} = \frac{q'}{q} = \frac{s' \sin \varepsilon'}{s \sin \varepsilon} = \frac{CK'}{CK}. \quad (142)$$

Согласно рис. 20 отрезки  $CK$  и  $CK'$  равны

$$CK = r - s \cos \varepsilon \quad \text{и} \quad CK' = r - s' \cos \varepsilon'. \quad (143)$$

Используя формулы (142) и (143), находим

$$\frac{r - s' \cos \varepsilon'}{s' \sin \varepsilon'} = \frac{r - s \cos \varepsilon}{s \sin \varepsilon} \quad (144)$$

и, обращаясь к закону преломления, получаем сагиттальный инвариант Гульстранда - Юнга

$$n' \left( \frac{1}{s'} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) = n \left( \frac{1}{s} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right), \quad (145)$$