

который при малых углах ε и ε' переходит в инвариант Аббе.

Из инварианта (145) можно получить формулу

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r}, \quad (146)$$

правая часть которой полностью совпадает с правой частью формулы (140) для меридиональной плоскости.

Определение узловых точек и фокусных расстояний для сферической преломляющей поверхности. Полагая в формулах (139) и (145) отрезки s , t , s' и t' последовательно равными бесконечности, получим фокальные отрезки, отсчитываемые от точки преломления главного луча до соответственных фокальных точек как в пространстве изображений, так и в пространстве предметов:

$$\left. \begin{aligned} t_F &= -\frac{nr \cos^2 \varepsilon}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}; & s_F &= -\frac{nr}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}; \\ t'_F &= \frac{n'r \cos^2 \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}; & s'_F &= \frac{n'r}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Положение узловых меридиональных точек можно найти посредством поворота главного луча в плоскости рисунка на малый угол вокруг центра поверхности C (рис. 21). Опуская из точки C перпендикуляры на падающий и преломленный лучи, находим точки N_t и N'_t , которые и будут являться узловыми точками.

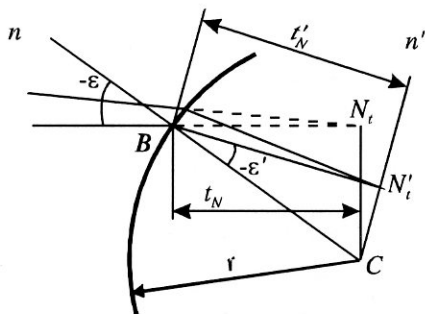


Рис. 21. Положение узловых точек в меридиональной плоскости

Расстояния точек N_t и N'_t от точки преломления B определяются произведениями

$$t_N = r \cos \varepsilon \quad \text{и} \quad t'_N = r \cos \varepsilon'. \quad (148)$$

Составляя разности этих отрезков с фокальными отрезками t_F и t'_F , получим узловое фокусное расстояние:

$$\left. \begin{aligned} f_t &= t_F - t_N = -\frac{nr \cos^2 \varepsilon}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon} - r \cos \varepsilon; \\ f'_t &= t'_F - t'_N = \frac{n'r \cos^2 \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon} - r \cos \varepsilon'. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

После несложных преобразований получим выражения для узловых фокусных расстояний в меридиональной плоскости

$$f_t = -\frac{n'r \cos \varepsilon \cos \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}; \quad f'_t = \frac{nr \cos \varepsilon \cos \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}. \quad (150)$$

Умножая переднее фокусное расстояние на n , а заднее соответственно на n' , получим равенство

$$-nf_t = \frac{nn'r \cos \varepsilon \cos \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon} = n'f'_t. \quad (151)$$

Заметим, не делая вывода, что формула (151) справедлива для системы, построенной из любого числа поверхностей.

Обращаясь к сагиттальной плоскости, отрезки s_F и s'_F можно рассматривать как фокусные расстояния от главных плоскостей. Поэтому

$$f_s = s_F = -\frac{nr}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}; \quad f'_s = s'_F = \frac{n'r}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}. \quad (152)$$

Отношение фокусных расстояний дает формулу

$$f_s / f'_s = -n / n', \quad (153)$$

которая аналогично формуле (151) справедлива для систем с любым числом поверхностей.

Инварианты наклонов меридионального и сагиттального изображений. Обратимся к меридиональному и сагиттальному инвариантам Гульстранда - Юнга

$$\left. \begin{aligned} \frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{n' \cos \varepsilon'}{r} &= \frac{n \cos^2 \varepsilon}{t} - \frac{n \cos \varepsilon}{r}; \\ \frac{n'}{s'} - \frac{n' \cos \varepsilon'}{r} &= \frac{n}{s} - \frac{n \cos \varepsilon}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Дифференцируя меридиональный инвариант, находим

$$\begin{aligned} & -\frac{2n' \cos \varepsilon' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{t'} - \frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{t'^2} dt' + \frac{n' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{r} = \\ & = -\frac{2nr \cos \varepsilon \sin \varepsilon d\varepsilon}{t} - \frac{n \cos^2 \varepsilon}{t^2} dt + \frac{n \sin \varepsilon d\varepsilon}{r} \end{aligned} \quad (155)$$

и, вынося за общую скобку произведение $n' \sin \varepsilon' d\varepsilon'$, получаем

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2 \cos \varepsilon'}{t'} - \frac{\cos \varepsilon'}{t'^2} \frac{dt'}{d\varepsilon} + \frac{1}{r} \right) n' \sin \varepsilon' d\varepsilon' = \\ & = \left(-\frac{2r \cos \varepsilon}{t} - \frac{\cos \varepsilon}{t^2} \frac{dt}{d\varepsilon} + \frac{1}{r} \right) n \sin \varepsilon d\varepsilon. \end{aligned} \quad (156)$$

Дифференцируя выражение закона преломления $n' \sin \varepsilon' = n \sin \varepsilon$, находим

$$d\varepsilon' / \operatorname{tg} \varepsilon' = d\varepsilon / \operatorname{tg} \varepsilon. \quad (157)$$

Тогда формула (156) примет вид

$$-\left(2\operatorname{tg} \varepsilon' + \frac{dt'}{t' d\varepsilon'} \right) \frac{\cos \varepsilon'}{t'} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{r} = -\left(2\operatorname{tg} \varepsilon - \frac{dt}{t d\varepsilon} \right) \frac{\cos \varepsilon}{t} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{r}. \quad (158)$$

Преобразуем отношение $dt/d\varepsilon$. На рис. 22 показано расположение наклонного элемента предмета dy , принадлежащего к меридиональной плоскости. Угол между этим элементом и перпендикуляром к ходу главного луча до его преломления на поверхности радиуса r обозначим ψ_r .

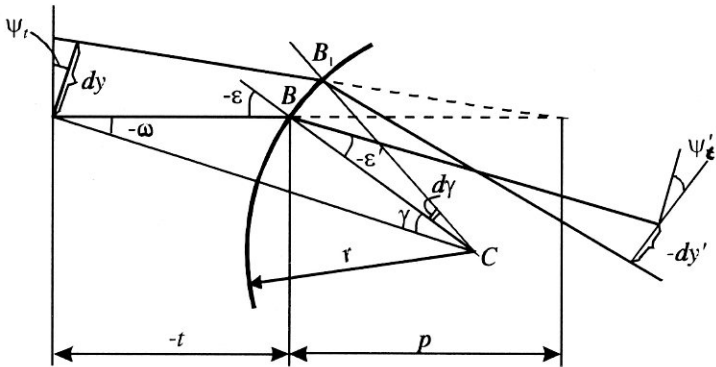


Рис. 22. Наклон изображения в меридиональной плоскости

Согласно данным рис. 22

$$dy = \frac{-r \sin \varepsilon d\gamma + dt}{\operatorname{tg} \psi_t}. \quad (159)$$

С другой стороны,

$$dy = (p - t) d\omega - \frac{p - t}{p} r \cos \varepsilon d\gamma. \quad (160)$$

Приравнивая формулы (159) и (160), находим

$$-r \sin \varepsilon d\gamma + dt = \frac{p - t}{p} r \cos \varepsilon \operatorname{tg} \psi_t d\gamma, \quad (161)$$

откуда получаем

$$\frac{dt}{d\gamma} = r \left(\frac{p - t}{p} \operatorname{tg} \psi_t + \operatorname{tg} \varepsilon \right) \cos \varepsilon. \quad (162)$$

Кроме того, выразим через $d\gamma$ углы

$$d\omega = \frac{r}{p} \cos \varepsilon d\gamma \quad (163)$$

и

$$d\varepsilon = d\omega - d\gamma. \quad (164)$$

Используя формулу (162), находим

$$dt/d\varepsilon = \frac{(p-t)/p \cdot \operatorname{tg}\psi_t + \operatorname{tg}\varepsilon}{r \cos \varepsilon / p - 1} \cos \varepsilon. \quad (165)$$

По аналогии для пространства изображений

$$dt'/d\varepsilon' = \frac{(p'-t')/p' \cdot \operatorname{tg}\psi'_t + \operatorname{tg}\varepsilon'}{r \cos \varepsilon' / p' - 1} \cos \varepsilon'. \quad (166)$$

Возвращаясь к формуле (158), получаем инвариант наклонов меридиональных элементов предмета и изображения в виде

$$\begin{aligned} & - \left[2\operatorname{tg}\varepsilon + r \frac{(p-t)\operatorname{tg}\psi_t + p\operatorname{tg}\varepsilon \cos \varepsilon}{r \cos \varepsilon - p} \frac{\cos \varepsilon}{t} \right] \frac{\cos \varepsilon}{t} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r} = \\ & = - \left[2\operatorname{tg}\varepsilon' + r \frac{(p'-t')\operatorname{tg}\psi'_t + p'\operatorname{tg}\varepsilon' \cos \varepsilon'}{r \cos \varepsilon' - p'} \frac{\cos \varepsilon'}{t'} \right] \frac{\cos \varepsilon'}{t'} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'}{r}. \end{aligned} \quad (167)$$

В частном случае, когда оба луча пересекаются в точке преломления, отрезки p и p' до зрачков становятся равными нулю, и тогда инвариант наклонов меридионального изображения упрощается:

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\psi_t) \frac{\cos \varepsilon}{t} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r} = -(2\operatorname{tg}\varepsilon' - \operatorname{tg}\psi'_t) \frac{\cos \varepsilon'}{t'} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'}{r}. \quad (168)$$

Для наклонов сагиттального изображения обратимся к сагиттальному инварианту Гульстранда - Юнга, выраженному второй формулой (154). Дифференцируя сагиттальный инвариант, получаем

$$-\frac{n'}{s'^2} ds' + \frac{n' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{r} = -\frac{n}{s^2} ds + \frac{n \sin \varepsilon d\varepsilon}{r}. \quad (169)$$

Далее, разделив формулу (169) на выражение закона преломления, находим

$$-\frac{ds'}{s'^2 \sin \varepsilon'} + \frac{d\varepsilon'}{r} = -\frac{ds}{s^2 \sin \varepsilon} + \frac{d\varepsilon}{r}. \quad (170)$$

Используя формулу (157), получаем

$$-\frac{ds'}{s'^2 \sin \varepsilon'} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{d\varepsilon'} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{r} = -\frac{ds}{s^2 \sin \varepsilon} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{d\varepsilon} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{r} \quad (171)$$

или

$$-\frac{1}{s'^2 \cos \varepsilon'} \frac{ds'}{d\varepsilon'} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{r} = -\frac{1}{s^2 \cos \varepsilon} \frac{ds}{d\varepsilon} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{r}, \quad (172)$$

В формулу (172) входят отношения $ds'/d\varepsilon'$ и $ds/d\varepsilon$, которые аналогичны $dt'/d\varepsilon'$ и $dt/d\varepsilon$ для меридиональной плоскости. Поэтому согласно формулам (165) и (166) для сагиттальной плоскости

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{(p-s)\operatorname{tg} \psi_s + p \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - p/r \cos \varepsilon}; \quad \frac{ds'}{d\varepsilon'} = \frac{(p'-s')\operatorname{tg} \psi'_s + p' \operatorname{tg} \varepsilon'}{1 - p'/r \cos \varepsilon'}. \quad (173)$$

Вводя отношения (173) в формулу (172), получим общее выражение для инварианта наклонов элементов сагиттального изображения

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{s'^2 \cos \varepsilon'} \frac{(p-s)\operatorname{tg} \psi_s + p \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - p/r \cos \varepsilon} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{r} = \\ & = -\frac{1}{s'^2 \cos \varepsilon'} \frac{(p'-s')\operatorname{tg} \psi'_s + p' \operatorname{tg} \varepsilon'}{1 - p'/r \cos \varepsilon'} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{r}. \end{aligned} \quad (174)$$

В частном случае, когда зрачок располагается в точке преломления (p и p' равны нулю), инвариант (174) упрощается:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi'_s}{s' \cos \varepsilon'} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{r} = \frac{\operatorname{tg} \psi_s}{s \cos \varepsilon} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{r}. \quad (175)$$

Астигматизм плоскости. Полагая в инвариантах Гульстранда - Юнга радиус кривизны поверхности равным бесконечности, получаем

$$n' \cos^2 \varepsilon'/t' = n \cos^2 \varepsilon/t; \quad n'/s' = n/s. \quad (176)$$

Согласно формулам (176)

$$t' = \frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{n \cos^2 \varepsilon} t; \quad s' = \frac{n'}{n} s. \quad (177)$$

Задавая предметную точку свободной от астигматизма, приравниваем отрезки t и s и составляем астигматическую разность

$$t' - s' = \frac{n'}{n} \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{\cos^2 \varepsilon} - 1 \right) s, \quad (178)$$

или

$$t' - s' = \frac{n'}{n} \frac{1 - \sin^2 \varepsilon' - 1 + \sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon} s \quad (179)$$

и, вынося за скобку $\sin^2 \varepsilon$, получаем

$$t' - s' = \frac{n'}{n} n^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) s \operatorname{tg}^2 \varepsilon. \quad (180)$$

Окончательно

$$t' - s' = \frac{n'^2 - n^2}{nn'} s \operatorname{tg}^2 \varepsilon. \quad (181)$$

Если через предметную точку провести плоскость, параллельную той, для которой находим астигматизм, то получится плоскопараллельная пластинка. Тогда формулу (181) можно рассматривать как формулу астигматизма плоскопараллельной пластинки. При этом отрезок s выражает косую толщину пластинки с обратным знаком. Переходя от косой толщины к толщине пластинки по ее нормали, вместо формулы (181) получаем

$$t' - s' = - \frac{n'^2 - n^2}{nn'} \frac{d}{\cos \varepsilon} \operatorname{tg}^2 \varepsilon. \quad (182)$$

Располагая инвариантами Гульстранда - Юнга, можно поставить задачу устранения астигматизма для совокупности двух преломляющих поверхностей. На рис. 23 показан ход луча, претерпевающего преломление на двух поверхностях в точках B_1 и B_2 , расстояние между которыми равно косой толщине \tilde{d} . Углы падения и преломления на обеих поверхностях обозначим $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$ и $\varepsilon_2, \varepsilon_2'$, радиусы поверхностей соответственно - через r_1 и r_2 .

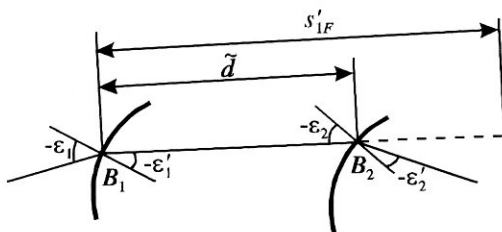


Рис. 23. Преломление луча на двух поверхностях

Согласно инвариантам Гульстранда - Юнга

$$\left. \begin{aligned} \frac{n'_1 \cos^2 \varepsilon'_1}{t'_1} - \frac{n_1 \cos^2 \varepsilon_1}{t_1} &= \frac{n'_1 \cos^2 \varepsilon'_1 - n_1 \cos^2 \varepsilon_1}{r_1} = \frac{n'_1}{s'_{1F}} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s'_{1F}}; \\ \frac{n'_2 \cos^2 \varepsilon'_2}{t'_2} - \frac{n_2 \cos^2 \varepsilon_2}{t_2} &= \frac{n'_2 \cos^2 \varepsilon'_2 - n_2 \cos^2 \varepsilon_2}{r_2} = \frac{n'_2}{s'_2} - \frac{n_2}{s_2} = -\frac{n_2}{s_{2F}} \end{aligned} \right\} (183)$$

Полагая $t_1 = s_1 = \infty$, получаем отрезки t'_2 и s'_2 равными отрезкам до меридионального и сагиттального фокусов t'_{2F} и s'_{2F} . Для устранения астигматизма эти отрезки необходимо приравнять.

Косая толщина \tilde{d} будет выражаться разностью отрезков

$$t'_1 - t'_2 = \tilde{d} = s'_1 - s_2, \quad (184)$$

что позволяет преобразовать вторую формулу (183):

$$n_3 \frac{\cos^2 \varepsilon'_2}{s'_2} - \frac{n_2 \cos^2 \varepsilon_2}{t'_1 - \tilde{d}} = -\frac{n_2}{s_{2F}} = \frac{n_3}{s'_2} - \frac{n_2}{s'_1 - \tilde{d}}. \quad (185)$$

Затем, приравнявая отрезки t_1 и s_1 к бесконечности, находим t'_{1F} и s'_{1F} , заменив которыми t'_1 и s'_1 , получаем

$$-\frac{n_3 \sin^2 \varepsilon'_2}{s'_2} = n_2 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon_2}{s'_{1F} \cos^2 \varepsilon'_1 - \tilde{d}} - \frac{1}{s'_{1F} - \tilde{d}} \right). \quad (186)$$

С другой стороны, левую часть формулы (186) можно представить в виде

$$-\frac{n_3}{s'_2} \sin^2 \varepsilon'_2 = \left(\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_2}{s_{2F}} \right) \sin^2 \varepsilon'_2 = \left(\frac{n_2}{s'_{1F} - \tilde{d}} - \frac{n_2}{s_{2F}} \right) \sin^2 \varepsilon'_2. \quad (187)$$

Окончательно

$$\frac{\sin^2 \varepsilon'_2}{s_{2F}} = \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{s'_{1F} \cos^2 \varepsilon'_1 - \tilde{d}} - \frac{\cos^2 \varepsilon'_2}{s'_{1F} - \tilde{d}}. \quad (188)$$

Формула (188) является условием анастигматичности двух преломляющих поверхностей.

Для отражающих поверхностей, когда углы ε и ε' одинаковы по абсолютному значению, формула (188) упрощается:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \varepsilon_2}{s_{2F}} = \frac{1}{s'_{1F} \cos^2 \varepsilon'_1 - \tilde{d}} - \frac{1}{s'_{1F} - \tilde{d}}. \quad (189)$$

В частном случае телескопической пары поверхностей, когда задний фокус F'_{1s} первой поверхности в сагиттальной плоскости совпадает с передним сагиттальным фокусом F_{2s} второй поверхности,

$$s'_{1F} = s'_{2F} + \tilde{d}, \quad (190)$$

и тогда формула (188) преобразуется:

$$\frac{1}{s_{2F}} = \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{s'_{1F} \cos^2 \varepsilon'_1 + s_{2F} - s'_{1F}} = \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{s_{2F} - s'_{1F} \sin^2 \varepsilon'_1} \quad (191)$$

или

$$s_{2F} - s'_{1F} \sin^2 \varepsilon'_1 = s_{2F} \cos^2 \varepsilon_2. \quad (192)$$

Окончательно условие анастигматичности телескопической пары поверхностей примет вид

$$\frac{s'_{1F}}{s_{2F}} = \frac{\sin^2 \varepsilon_2}{\sin^2 \varepsilon'_1} = \Gamma. \quad (193)$$

В формуле (193) величину Γ можно представить как видимое увеличение в сагиттальной плоскости.

Для меридиональной плоскости, учитывая соотношение между отрезками t и s , получим

$$\frac{t'_{1F}}{t_{2F}} = \frac{\sin^2 \varepsilon_2 \cos^2 \varepsilon_2}{\sin^2 \varepsilon'_1 \cos^2 \varepsilon'_1} = \Gamma_t = \Gamma_s \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{\cos^2 \varepsilon'_1}. \quad (194)$$

Увеличение Γ_s можно выразить через радиусы:

$$\Gamma_s = \frac{s'_{1F}}{s_{2F}} = -\frac{r_1 n_3 \cos \varepsilon'_2 - n_2 \cos \varepsilon_2}{r_2 n_2 \cos \varepsilon'_1 - n_3 \cos \varepsilon_1}. \quad (195)$$

Оба увеличения Γ_t и Γ_s согласно формуле (194) должны быть всегда положительными. Поэтому при $n_1 = n_3$, когда снаружи от обеих поверхностей расположена одна и та же среда, получим соотношение

$$\frac{r_1}{r_2} = \Gamma_s \frac{n_2 \cos \varepsilon'_1 - n_1 \cos \varepsilon_1}{n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon'_2} > 0. \quad (196)$$

Кома

В общем случае кома, выраженная в виде волновой aberrации, может быть представлена уравнением третьего порядка относительно координат x и y в плоскости зрачка:

$$\Delta l = \Delta l(y, x) = Ay^3 + By^2x + Cyx^2 + Dx^3. \quad (197)$$

В частном случае симметрии относительно оси ординат в формуле (197) не должны существовать члены, содержащие абсциссу x в нечетных степенях. Таким образом, формула (197) соответственно упрощается:

$$\Delta l = Ay^3 + Cyx^2. \quad (198)$$

При этом содержащиеся в ней коэффициенты A и C в общем случае являются независимыми.

Характерной особенностью комы является равенство нулю волновой aberrации вдоль оси абсцисс, обусловленное наличием в обоих членах формулы (198) ординаты y , обращающейся в нуль при переходе к оси абсцисс.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Например, предположим, что коэффициенты A и C равны. Тогда формула (198) примет вид

$$\Delta l = Ay^3 + Ayx^2 = A(y^2 + x^2)y. \quad (199)$$

Кривые равных волновых aberrаций для этого случая показаны на рис. 24, а.

Переход к поперечным aberrациям может быть осуществлен дифференцированием в частных производных выражения (198) для волновой aberrации:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta y &= \frac{\partial \Delta l}{\partial y} = 3Ay^2 + Ax^2; \\ -\Delta x &= \frac{\partial \Delta l}{\partial x} = 2Axy. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

Картина поперечных aberrаций для этого случая общеизвестна и показана на рис. 24,б.

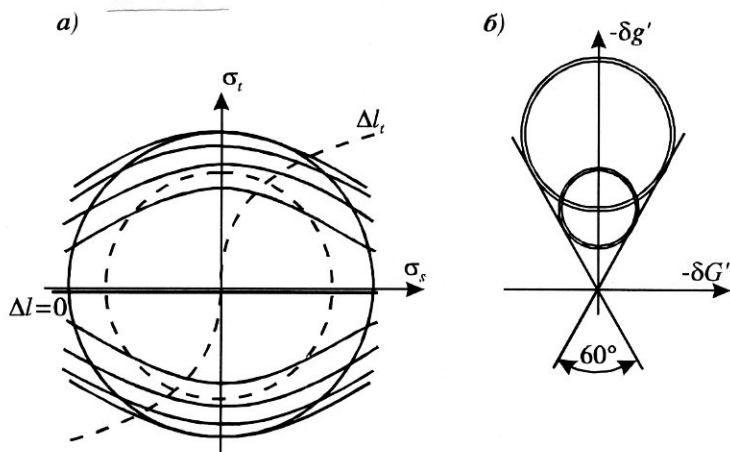


Рис. 24. Кома при коэффициентах $A = C$: а - кривые равных волновых aberrаций; б - фигура рассеяния (поперечные aberrации)

Во втором частном случае, если коэффициент C равен нулю, выражение для волновой aberrации выразится как

$$\Delta l = Ay^3. \quad (201)$$

Картина волновых aberrаций для второго случая представится в виде семейства прямых равных волновых aberrаций, параллельных оси абсцисс (рис. 25,а). Картина поперечных aberrаций будет выражаться прямолинейным отрезком вдоль оси ординат, совмещенным с началом координат (рис. 25,б).

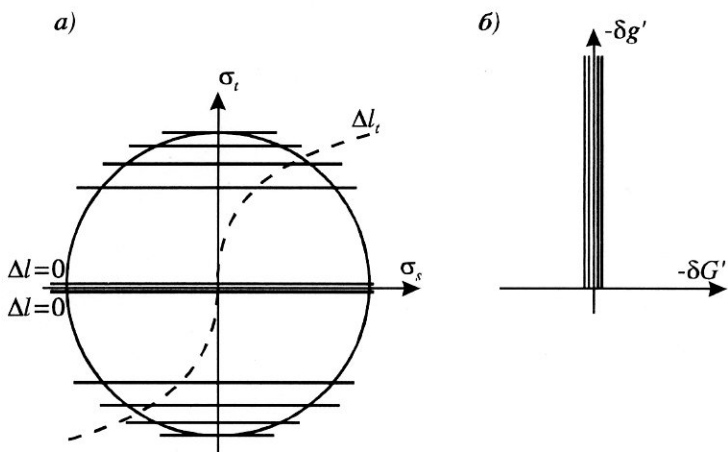


Рис. 25. Кома при коэффициентах $C = 0$ и $A \neq 0$:
 а - прямые равных волновых aberrаций; б - фигура рассеяния

В качестве третьего случая рассмотрим равенство нулю коэффициента A . Тогда волновые aberrации становятся также равными нулю и вдоль оси ординат, как это показано на рис. 26,а. Картина поперечных aberrаций для этого случая показана на рис. 26,б.

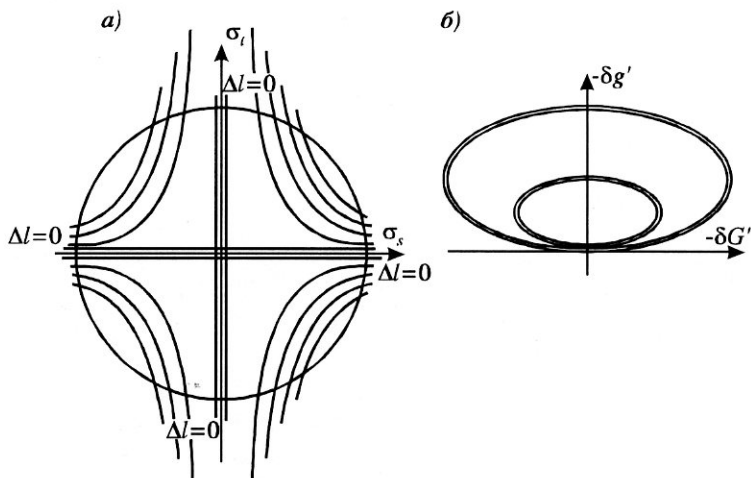


Рис. 26. Кома при коэффициентах $A = 0$ и $C \neq 0$:
 а - кривые равных волновых aberrаций; б - фигура рассеяния

Особый случай определяется равенством суммы коэффициентов A и C нулю. В этом случае картина равных волновых aberrаций представится в виде трех прямых, две из которых составляют с осью абсцисс углы в 60° . Поперечные же aberrации будут иметь вид семейства двойных окружностей с общим центром в начале координат. Картины волновых и поперечных aberrаций для этого случая показаны на рис. 27.

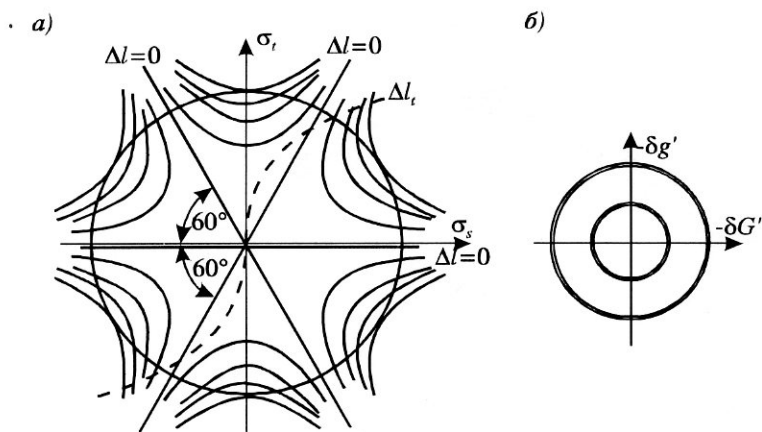


Рис. 27. Кома при коэффициентах $A = -C$:
 а - кривые равных волновых aberrаций; б - фигура рассеяния

Рассмотрим кому, возникающую в частном случае децентрации двух центрированных оптических систем, для которых происходила взаимная компенсация сферической aberrации.

Сферическая aberrация третьего порядка для центрированной оптической системы может быть выражена уравнением

$$\Delta l = A(y^2 + x^2)^2. \quad (202)$$

При взаимной компенсации сферической aberrации двух центрированных систем

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (203)$$

Полагая, что децентрация a направлена вдоль оси ординат, можно записать

$$y_2 = y_1 + a. \quad (204)$$

Суммируя волновые aberrации обеих систем, получаем

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = A_1(x_1^2 + y_1^2)^2 - A_1(x_1^2 + y_2^2)^2 \quad (205)$$

или, развертывая выражения в скобках,

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = A_1(x_1^4 + 2x_1^2y_1^2 + y_1^4 - x_1^4 - 2x_1^2y_2^2 - y_2^4). \quad (206)$$

При наличии децентрации заменяем y_2 через $y_1 + a$ согласно формуле (204) и после сокращений получаем

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = A_1[2x_1^2y_1^2 + y_1^4 - 2x_1^2(y_1 + a)^2 - (y_1 + a)^4]. \quad (207)$$

Далее, развертывая выражение (207),

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = A_1(-4x_1^2y_1a - 2x_1^2a^2 - 4y_1^3a - 6y_1^2a^2 - 4y_1a^3 - a^4). \quad (208)$$

Полагая, что значение децентрации невелико и что можно отбросить члены, содержащие a в степенях выше первой, получаем выражение суммарной волновой aberrации

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -4A_1a(y_1^3 + y_1x_1^2). \quad (209)$$

Таким образом, выражение (209) полностью соответствует формуле (199) для комы при равенстве коэффициентов A и C .

Рассмотрим суммирование комы для случая, когда плоскости ее симметрии для составляющих систем образуют некоторый угол. Будем полагать, что характер комы в обеих системах определяется лишь одним коэффициентом, т.е. когда $C = A$.

Таким образом, для обеих составляющих систем кома может быть выражена уравнением волновой комы

$$\Delta l = A(y^3 + x^2y) = A(y^2 + x^2)y. \quad (210)$$

При повороте системы координат на некоторый угол γ координаты на зрачке будут преобразовываться по известным формулам

$$\left. \begin{aligned} y' &= x \sin \gamma + y \cos \gamma, \\ x' &= x \cos \gamma - y \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

При этом

$$y'^2 + x'^2 = y^2 + x^2. \quad (212)$$

Поворачивая координатные оси для обеих составляющих систем на углы γ_1 и γ_2 , для волновых aberrаций можно записать

$$\Delta l_1 = A_1(x^2 + y^2)y'_1; \quad \Delta l_2 = A_2(x^2 + y^2)y'_2. \quad (213)$$

Выражая y'_1 и y'_2 через x и y и углы поворотов γ_1 и γ_2 , согласно формуле (211), получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= A_1(x^2 + y^2)(x \sin \gamma_1 + y \cos \gamma_1); \\ \Delta l_2 &= A_2(x^2 + y^2)(x \sin \gamma_2 + y \cos \gamma_2). \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

Суммируя выражения (214), получаем волновую aberrацию для составной системы

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (x^2 + y^2)(A_1 x \sin \gamma_1 + A_1 y \cos \gamma_1 + A_2 x \sin \gamma_2 + A_2 y \cos \gamma_2), \quad (215)$$

или

$$\Delta l = (x^2 + y^2)[(A_1 \sin \gamma_1 + A_2 \sin \gamma_2)x + (A_1 \cos \gamma_1 + A_2 \cos \gamma_2)y]. \quad (216)$$

Для перехода к картине комы с плоскостью симметрии необходимо соблюсти условие отсутствия члена, содержащего x в нечетной (первой) степени. Это возможно, если

$$A_1 \sin \gamma_1 + A_2 \sin \gamma_2 = 0. \quad (217)$$

В подобном случае приходим к выражению волновой комы в виде

$$\Delta l = (x^2 + y^2)(A_1 \cos \gamma_1 + A_2 \cos \gamma_2)y = A(x^2 + y^2)y, \quad (218)$$

где значение A можно рассматривать как векторный модуль геометрической суммы векторов A_1 и A_2 .

Разобранные некоторые частные случаи возникновения нецентрированных aberrаций при нарушении центрированности оптической системы позволяют отметить следующее:

- использование в оптических системах сферических поверхностей дает возможность рассматривать одиночные линзы - пространства, ограниченные двумя сферическими поверхностями, - как центрированные компоненты;
- децентрация линз, являющихся центрированными компонентами, приводит к возникновению нецентрированных aberrаций;

- при небольшой децентрации возникающие нецентрированные aberrации сохраняют симметрию и по своему характеру не усложняются по отношению к aberrациям третьего порядка;
- взаимная децентрация нецентрированных конструктивных элементов - развороты плоскостей симметрии - не вызывают усложнения характера нецентрированных aberrаций.

Таким образом, komponуя нецентрированные оптические системы из сферических поверхностей, можно сказать, что подобные системы будут обладать нецентрированными aberrациями, имеющими симметрию относительно какой-то плоскости даже в тех случаях, когда центры всех сферических поверхностей не расположены в одной и той же плоскости.

Переход к нецентрированным системам неразрывно связан с использованием в качестве силовых элементов отражательных сферических поверхностей.

С другой стороны, зеркальные сферические поверхности обладают при равных оптических силах с преломляющими поверхностями радиусами кривизны в четыре-пять раз большими; вследствие этого отражательные сферические поверхности обладают значительно меньшими элементарными aberrациями третьего порядка и, в особенности, aberrациями высших порядков.

Следовательно, при разработке зеркальных нецентрированных систем главной задачей становится устранение aberrаций, возникающих при нарушении центрировки сферических отражательных поверхностей.

Инвариант меридиональной комы. При преломлении широкого пучка лучей на преломляющей сферической поверхности одновременно с изменением положения меридионального изображения для узких пучков лучей возникает кома.

Меридиональную кому можно охарактеризовать радиусом каустики - радиусом кривой, огибающей множество лучей преломляемого пучка.

Радиус кривизны каустики в первом приближении можно полагать постоянным. Тогда радиус каустики выразится формулой

$$R' = ds' / \sigma', \quad (219)$$

где ds' - элемент каустики, а σ' - апертурный угол.

Согласно рис. 28, на котором показано образование каустики в пространстве изображений, определяем дугу

$$ds' = t' + dt' - t' + BK = dt' + BK. \quad (220)$$

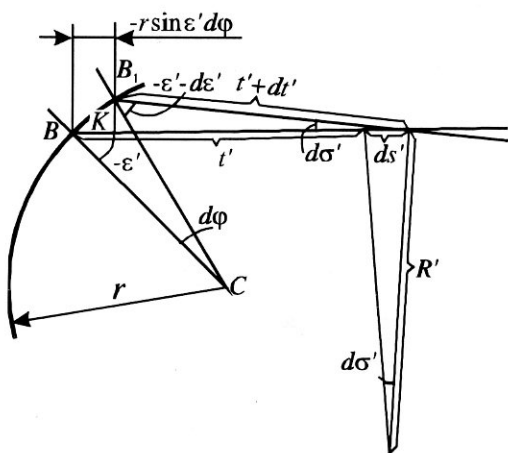


Рис. 28. К выводу инварианта меридиональной комы

Отрезок BK можно рассматривать как произведение расстояния BB_1 на синус угла преломления ε' :

$$BK = -BB_1 \sin \varepsilon'. \quad (221)$$

Отрезок BB_1 можно выразить через радиус кривизны поверхности и угол $d\varphi$:

$$BB_1 = r d\varphi, \quad (222)$$

тогда отрезок

$$ds' = dt - r \sin \varepsilon' d\varphi. \quad (223)$$

Разделив дугу ds' на элементарный апертурный угол $d\sigma'$, получим радиус каустики

$$R' = \frac{dt' - r \sin \varepsilon' d\varphi}{d\sigma'}. \quad (224)$$

Согласно рис. 28 можно связать элементарные углы $d\varphi$, $d\sigma'$ и $d\varepsilon'$:

$$d\varphi = d\sigma' - d\varepsilon'. \quad (225)$$

Угол $d\sigma'$ можно выразить через отрезок BB_1 :

$$d\sigma' = \frac{BB_1 \cos \varepsilon'}{t'} = \frac{r \cos \varepsilon'}{t'} d\varphi, \quad (226)$$

и тогда угол

$$d\varepsilon' = -(1 - r \cos \varepsilon' / t'). \quad (227)$$

Дифференцируя меридиональный инвариант (139), получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{2n' \cos \varepsilon' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{t'} - \frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{t'^2} dt' + \frac{n' \sin \varepsilon' d\varepsilon'}{r} = \\ & = -\frac{2n \cos \varepsilon \sin \varepsilon d\varepsilon}{t} - \frac{n \cos^2 \varepsilon}{t^2} dt + \frac{n \sin \varepsilon d\varepsilon}{r}. \end{aligned} \quad (228)$$

Используя формулу (228), находим

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'^2 \sin \varepsilon'} (R' d\sigma' + r \sin \varepsilon' d\varphi) + \left(\frac{1}{r} - \frac{2 \cos \varepsilon'}{t'} \right) d\varepsilon' = \\ & = -\frac{\cos^2 \varepsilon}{t^2 \sin \varepsilon} (R d\sigma + r \sin \varepsilon d\varphi) + \left(\frac{1}{r} - \frac{2 \cos \varepsilon}{t} \right) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (229)$$

Углы $d\sigma'$ и $d\sigma$ можно выразить через угол $d\varphi$, после чего, разделив формулу (229) на $d\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'^2 \sin \varepsilon'} \left(R' \frac{r \cos \varepsilon'}{t'} + r \sin \varepsilon' \right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{2 \cos \varepsilon'}{t'} \right) \left(1 - \frac{r \cos \varepsilon'}{t'} \right) = \\ & = -\frac{\cos^2 \varepsilon}{t^2 \sin \varepsilon} \left(R \frac{r \cos \varepsilon}{t} + r \sin \varepsilon \right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{2 \cos \varepsilon}{t} \right) \left(1 - \frac{r \cos \varepsilon}{t} \right). \end{aligned} \quad (230)$$

Разделив выражение (230) на радиус кривизны поверхности r и раскрывая скобки, после некоторых преобразований получим инвариант меридиональной комы, связывающий между собою меридиональные радиусы каустик R и R' :

$$\frac{R' \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} + 3 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'^2} - \frac{\cos \varepsilon'}{t'r} \right) = \frac{R \cos^3 \varepsilon}{t^3 \sin \varepsilon} + 3 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{t^2} - \frac{\cos \varepsilon}{tr} \right). \quad (231)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи меридиональной комы.

1. Определим радиус меридиональной комы в точке меридионального фокуса.

Полагая для этого отрезок $t = \infty$, получаем $t' = t'_F$. Согласно формуле (231), находим

$$R'_F = 3 \frac{t'^2_F}{\cos^2 \varepsilon'} \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos \varepsilon'}{t'_F} \right) \sin \varepsilon'. \quad (232)$$

Меридиональный фокальный отрезок может быть представлен в виде

$$t'_F = \frac{n' r \cos^2 \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}, \quad (233)$$

вследствие чего формула (232) преобразуется как

$$R'_F = \frac{3r^2 n'^2 \cos^2 \varepsilon'}{(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon)^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{n' r \cos \varepsilon'} \right). \quad (234)$$

После некоторых сокращений получим

$$R'_F = 3 \frac{r n n' \cos \varepsilon \cos \varepsilon'}{(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon)^2} \sin \varepsilon'. \quad (235)$$

Аналогично для предметного пространства радиус каустики в передней фокальной точке

$$R_F = 3 \frac{r n n' \cos \varepsilon \cos \varepsilon'}{(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon)^2} \sin \varepsilon. \quad (236)$$

Умножая формулу (235) на n' и формулу (236) на n , получим равенство

$$n' R'_F = n R_F. \quad (237)$$

2. Определим радиусы комы в узловых точках N и N' .

Согласно формуле (148), можно записать

$$\cos \varepsilon / t_N = 1/r = \cos \varepsilon' / t'_N. \quad (238)$$

Подставляя отношения (238) в инвариант меридиональной комы (231), после сокращений получим

$$R'_N / \sin \varepsilon' = R_N / \sin \varepsilon. \quad (239)$$

Умножая формулу (239) на выражение закона преломления, получим

$$n' R'_N = n R_N. \quad (240)$$

3. Определим кому плоской поверхности.

Согласно меридиональному инварианту для плоской поверхности

$$n' \cos^2 \varepsilon' / t' = n \cos^2 \varepsilon / t. \quad (241)$$

Тогда инвариант меридиональной комы значительно упрощается:

$$\frac{R' \cos \varepsilon'}{t'^2} + \frac{3 \sin \varepsilon'}{t'} = \frac{R \cos \varepsilon}{t^2} + \frac{3 \sin \varepsilon}{t}, \quad (242)$$

или

$$(R'/t' + 3t\text{g}\varepsilon') \text{tge}' = (R/t + 3t\text{g}\varepsilon) \text{tge}. \quad (243)$$

Инвариант сагиттальной комы. Рассматривая изменение положения изображения в сагиттальной плоскости при переходе от одной части широкого пучка к другой, можно ввести некоторые коэффициенты R_s и R'_s , имеющие для сагиттальных отрезков s и s' такое же значение, как коэффициенты R_t и R'_t для отрезков t и t' в меридиональной плоскости.

Аналогично формуле (224) в меридиональной плоскости для сагиттальной плоскости можно записать

$$R'_s d\sigma' = ds' - r \sin \varepsilon' d\varphi. \quad (244)$$

Сохраняют внешний вид и формулы (226) и (227):

$$d\sigma' = \frac{r \cos \varepsilon'}{t'} d\varphi; \quad d\varepsilon' = \left(\frac{r \cos \varepsilon'}{t'} - 1 \right) d\varphi. \quad (245)$$

Дифференцируя сагиттальный инвариант (146), получаем

$$-\frac{ds'}{s'^2 \sin \varepsilon'} + \frac{d\varepsilon'}{r} = -\frac{ds}{s^2 \sin \varepsilon} + \frac{d\varepsilon}{r} \quad (246)$$

и после подстановок

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{s'^2} \left(\frac{R'_s}{t' \operatorname{tg} \varepsilon'} + 1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r \cos \varepsilon'}{t'} - 1 \right) = \\
 & = -\frac{1}{s^2} \left(\frac{R_s}{t \operatorname{tg} \varepsilon} + 1 \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r \cos \varepsilon}{t} - 1 \right). \quad (247)
 \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и сокращая, получим

$$-\frac{R'_s}{s'^2 t' \operatorname{tg} \varepsilon'} - \frac{1}{s'^2} + \frac{\cos \varepsilon'}{rt'} = -\frac{R_s}{s^2 t \operatorname{tg} \varepsilon} - \frac{1}{s^2} + \frac{\cos \varepsilon}{rt} \quad (248)$$

- инвариант сагиттальной комы.

При расположении предмета в бесконечности получаем радиус сагиттальной комы в точке сагиттального фокуса

$$R'_{sF} = \frac{nn' \cos \varepsilon \cos \varepsilon' + n'^2 \sin^2 \varepsilon'}{(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon)^2} r \sin \varepsilon'. \quad (249)$$

Аналогичное выражение можно получить и для передней фокальной точки. Соблюдается и связь между R'_{sF} и R_{sF} :

$$n' R'_{sF} = n R_{sF}. \quad (250)$$

ЧАСТЬ 2. КОНСТРУКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕЦЕНТРИРОВАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава 3. Работа нецентрированных зеркал

Вывод отраженного от наклонного зеркала изображения из хода падающих лучей

Основными достоинствами сферического зеркала как элемента, создающего оптическую силу, являются отсутствие хроматизма, положительная кривизна поля при положительной (после развертки отражения) силе элемента и значительно меньшая сферическая аберрация, чем характерная для преломляющих линз, что обусловлено значительно большим (приблизительно вчетверо) радиусом отражающей поверхности по сравнению с преломляющей, оптическая сила которой - та же. Более пологий радиус может обеспечивать неопутимость неэлементарных аберраций.

Для реализации перечисленных достоинств отражательных силовых поверхностей требуется решить задачу вывода отраженного от зеркала изображения из хода падающих на него лучей.

Без нарушения центрированности системы решение этой задачи связано с возникновением экранирования, что значительно ограничивает развитие полей зрения и тем самым область применения зеркальных оптических систем - главным образом в астрономической оптике.

Другим решением этой задачи является предложенное в 1748 г. М.В. Ломоносовым использование наклона сферического зеркала, т.е. создание нецентрированных оптических систем.

Вместе с тем наклон силового зеркала приводит к возникновению нецентрированных аберраций, которые неразрывно связаны с углом наклона зеркала, в свою очередь определяемым внешними характеристиками - угловым полем зрения и диаметром входного зрачка.

Обращаясь к простейшему случаю наклона одиночного силового зеркала (рис. 29), нетрудно установить, что для вывода отраженного изображения необходимо, чтобы центральный луч после отражения был смещен относительно края выходного зрачка на размер изображения.

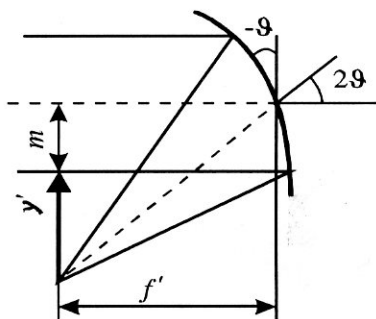


Рис. 29. Наклонное зеркало для вывода отраженного изображения из хода падающих лучей

Таким образом, можно записать, что угол наклона зеркала приблизительно выразится формулой

$$\vartheta = (m + y')/2f', \quad (251)$$

где m - радиус зрачка входа; y' - размер изображения.

Формулу (251) можно преобразовать:

$$\vartheta = \frac{1}{2}(\sigma + \omega), \quad (252)$$

где σ и ω соответственно апертурный и полевой углы.

Существенно отметить, что в рассмотренном случае, если входной зрачок будет размещен в одной плоскости с изображением, при развитии поля зрения можно избежать возникновения геометрического виньетирования за счет соответствующего увеличения диаметра силового зеркала.

Пространство между зрачком входа, силовым зеркалом и изображением может быть заполнено массой стекла с показателем преломления n . В этом случае при плоской поверхности у зрачка входа согласно закону преломления увеличится входной полевой угол, и после преломления на поверхности выхода, совмещенной с изображением, также произойдет увеличение выходного апертурного угла. Тогда формула (252) примет вид

$$\vartheta = \frac{1}{2n}(\sigma + \omega). \quad (253)$$

При практической разработке оптических систем с использованием наклонных силовых зеркал возможны и другие случаи расположения предмета. Так, например, если предметная плоскость совпадает с плоскостью изображения, как это показано на рис. 30, угол наклона зеркала относительно центрального луча выразится формулой

$$\vartheta = y/r, \quad (254)$$

причем апертурный угол ничем не ограничен.

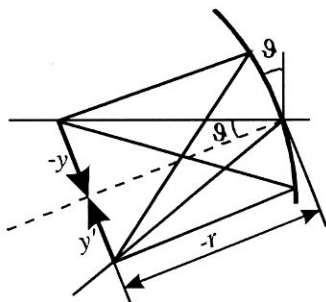


Рис. 30. Наклонное зеркало при совмещении плоскостей предмета и изображения

Вывод отраженного от силовой поверхности изображения с помощью двойного использования одной и той же поверхности

Двойное использование одной и той же поверхности (как отражающей, так и преломляющей) основывается на явлении полного внутреннего отражения. В частности, одна и та же поверхность работает как отражающая и как преломляющая в полупентапризме, башмачной призме и в других отражательных призмах различных конструкций.

Анализируя работу полупентапризмы, удобно прибегнуть к ее развертке в плоскопараллельную пластинку. На рис. 31 показана полупентапризма ABC и ее развертка после первого отражения от грани $AC - ACB_1$ и после второго отражения от грани $B_1C - B_1CA_1$. Углы, составляемые гранями полупентапризмы с ходом центрального луча обозначим $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, и ϑ_4 . Для полупентапризмы эти углы будут равны $\vartheta_1=0$; $\vartheta_2=45^\circ$; $\vartheta_3=22^\circ 30'$ и $\vartheta_4=0$. При этом угол ϑ_3 получается равным полусумме углов ϑ_2 и ϑ_4 .

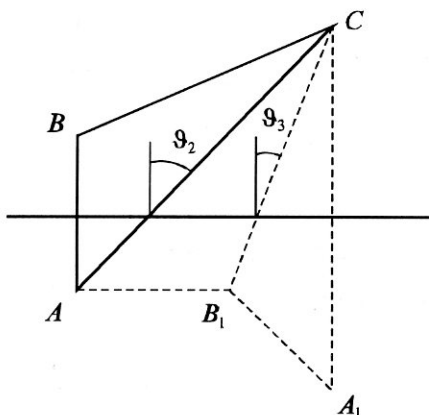


Рис. 31. Развертка полупентапризмы

В общем случае значения углов ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 и ϑ_4 могут отличаться от приведенных для полупентапризмы, но всегда угол ϑ_3 определяется выражением

$$\vartheta_3 = (\vartheta_2 + \vartheta_4)/2. \quad (255)$$

Делая грань BC силовой, целесообразно (в целях уменьшения возникающих нецентрированных aberrаций) стремиться к уменьшению угла ϑ_3 , что возможно, если придавать углам ϑ_2 и ϑ_4 различные знаки.

Исходя из того, что несилловая грань AC будет использоваться как отражающая, необходимо, чтобы углы падения на нее ε_2 всегда превосходили угол полного внутреннего отражения ε_0 . Таким образом,

$$|\varepsilon_2| \geq |\varepsilon_0|. \quad (256)$$

Наоборот, когда эта же грань используется как преломляющая поверхность в положении A_1C , необходимо соотношение углов

$$|\varepsilon_3| < |\varepsilon_0|. \quad (257)$$

Отсутствие в выражении (257) знака равенства вызвано тем, что при значении $|\varepsilon_3|$, близком к $|\varepsilon_0|$, несмотря на преломление лучей, резко возрастают потери света на отражение.

Потери света на отражение при отсутствии просветления можно выразить известной формулой Френеля

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(\varepsilon - \varepsilon')}{\sin^2(\varepsilon + \varepsilon')} + \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon - \varepsilon')}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon + \varepsilon')} \right]. \quad (258)$$

Проследим изменение углов падения в зависимости от показателей преломления и углов преломления при выходе в воздушную среду.

Полагаем показатель преломления после преломляющей поверхности $n'=1$ и задаем ряд значений показателя преломления n до преломляющей поверхности равными 1,5; 1,55; 1,6 и 1,65 и соответственно углов преломления ε' - 65°; 60°; 55° и 45°.

В соответствии с законом преломления находим значения углов падения ε (до преломления), которые приведены в таблице.

Зависимость углов падения от показателей преломления и углов преломления в воздушную среду

ε'	ε			
	$n = 1,5$	$n = 1,55$	$n = 1,6$	$n = 1,65$
65°	37,172°	35,783°	34,502°	33,317°
60°	35,264°	33,986°	32,789°	31,659°
55°	33,100°	31,903°	30,795°	29,706°
50°	30,710°	29,618°	28,606°	27,063°
45°	28,126°	27,142°	26,228°	25,376°

При нулевых значениях углов ε и ε' потери на отражение

$$\Phi_0 = \left(\frac{n - n'}{n + n'} \right)^2. \quad (259)$$

Численно при $n' = 1$ и $n = 1,5$ потери света на отражение $\Phi_0 = 4\%$ и при $n = 1,6$ - 5,325%. Для угла $\varepsilon' = 65^\circ$ потери на отражение возрастают и, согласно формуле (258), при $n = 1,5$ составляют $\Phi(65^\circ) = 12,047\%$, а при $n = 1,6$ соответственно 13,725%.

Угол полного внутреннего отражения при $n = 1,5$ $\varepsilon_0 = 41,81^\circ$ и при $n = 1,6$ - 38,68°. Составим разности углов ε и ε_0 . Для $\varepsilon' = 65^\circ$ при $n = 1,5$ $\varepsilon_0 - \varepsilon = 4,64^\circ$; при $n = 1,6$ $\varepsilon_0 - \varepsilon = 4,18^\circ$.

При уменьшении углов ε' происходит увеличение разности углов $\varepsilon_0 - \varepsilon$ и снижение потерь света на отражение. Так, для угла $\varepsilon' = 60^\circ$ при $n = 1,5$ разность углов $\varepsilon_0 - \varepsilon$ возрастает до $6,55^\circ$, а потери света на отражение снижаются до $8,9\%$.

При использовании одной и той же поверхности как преломляющей и как отражающей необходимо обеспечить (в случае преломления) углы падения лучей ε , не превосходящие угол, при котором потери света на отражение еще допустимы. Поэтому угол ϑ_1 должен удовлетворять условию

$$|\vartheta_1| < |\varepsilon_1| - |\omega| - |\sigma|, \quad (260)$$

где ω и σ полевой и апертурный углы, а ε_1 - допустимый угол падения.

При определении значения угла ϑ_3 , когда должно наблюдаться полное внутреннее отражение, необходимо, наоборот, соблюдать условие

$$|\vartheta_3| \geq |\varepsilon_0| - |\omega| - |\sigma|. \quad (261)$$

Для получения наименьшего значения угла ϑ_2 углы ϑ_1 и ϑ_3 должны иметь разные знаки. Поэтому, используя равенства (260) и (261), можно записать

$$\vartheta_2 = \pm \frac{1}{2} (|\varepsilon_0 - \varepsilon| + |\omega| + |\sigma| + |\omega'| + |\sigma'|). \quad (262)$$

Рассмотрим численный пример. Если использовать силовую сферическую поверхность в качестве окуляра, можно принять, что в предметном пространстве ход главных лучей - телецентрический, когда полевые углы $\omega = 0$, а в пространстве изображений, наоборот, апертурные углы $\sigma' = 0$.

Полагая, что пространство перед силовой поверхностью заполнено стеклом, вводим в массу стекла тонкую воздушную прослойку, наклоненную к оси, вторая поверхность которой станет разделительной гранью. Задаем показатель преломления стекла $n = 1,5163$ (стекло марки К8), апертурный и полевой углы в стекле $\sigma = 0,05$ рад = $2^\circ 52'$ и $\omega' = 7^\circ 52'$ (что соответствует полевому углу в воздухе, равному 12°).

Принимаем угол падения на разделительную грань 65° , что определяет угол преломления на ней $\varepsilon_1 = 36^\circ 42'$. Угол полного внутреннего отражения при этом $\varepsilon_0 = 41^\circ 15'$.

Используя указанные углы, можно определить угол наклона силовой поверхности

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} (41^\circ 15' - 36^\circ 42' + 2^\circ 52' + 7^\circ 52') = 7^\circ 39'.$$

В рассмотренном примере со стороны телецентрического хода главных лучей использовалось преломление на плоскости перед силовой поверхностью. Нетрудно показать, что и при отражении на этой разделительной плоскости угол ϑ_2 примет то же самое значение; иными словами, определение требуемого значения угла наклона силовой поверхности не зависит от того, работает ли предыдущая поверхность как отражающая или как преломляющая.

Силовая наклонная сферическая отражательная поверхность

При компоновке оптических систем в первую очередь целесообразно установить характеристики конструктивных элементов, которые определяют внешние характеристики оптической системы в целом т.е. фокусное расстояние, увеличение, поле зрения, светосилу и габаритные размеры.

Для нецентрированных оптических систем главнейшими силовыми элементами будут наклонные сферические отражательные поверхности, применение которых обусловлено необходимостью устранения центрального экранирования, неизбежного для центрированных оптических систем при использовании в них сферических отражательных поверхностей.

Как уже отмечалось, использование наклонных силовых сферических зеркал приводит к возникновению различного рода нецентрированных aberrаций (см. гл. 2). Такими нецентрированными aberrациями второго порядка являются продольный и наклонный астигматизм, кома и дисторсия.

Обращаясь к основному силовому элементу - наклонному сферическому зеркалу, определим характер его нецентрированных aberrаций.

1. Астигматизм. Для наклонного сферического зеркала астигматизм можно рассматривать как изменение астигматизма на некотором участке поля зрения.

На рис. 32 показан ход падающего и отраженного от зеркала лучей.

Согласно инвариантам Гульстранда-Юнга для расположения предмета в бесконечности получаем

$$\frac{n' \cos^2 \omega'}{t'_F} = \frac{n' \cos \omega' - n \cos \omega}{r} = \frac{n'}{s'_F}. \quad (263)$$

Имея в виду, что при отражении показатели преломления до и после отражающей поверхности равны по абсолютному значению, но с обратным знаком, формула (263) упрощается:

$$\frac{\cos^2 \omega'}{t'_F} = \frac{2 \cos \omega'}{r} = \frac{1}{s'_F} \quad (264)$$

и в случае отражения по нормали, когда углы ω и ω' равны нулю,

$$\frac{1}{t'_F} = \frac{1}{s'_F} = \frac{2}{r} = \frac{1}{s'_0} \quad (265)$$

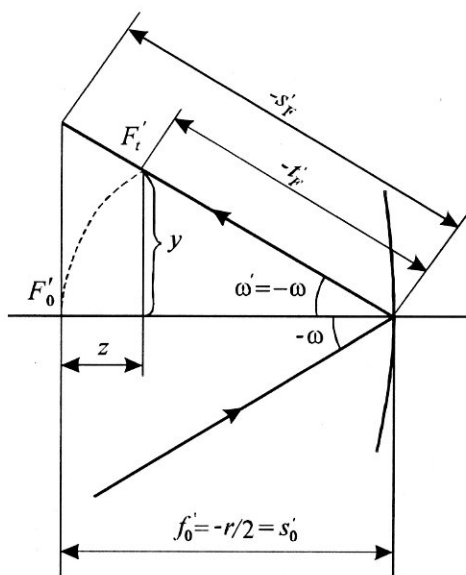


Рис. 32. Ход падающего и отраженного от зеркала лучей

Определим расположение точки меридионального фокуса F'_t . Координаты этой точки y и z будут связаны соотношением

$$t'^2_F = y^2 + (r/2 - z) \quad (266)$$

или, учитывая формулу (264),

$$\left(\frac{r}{2} \cos \omega'\right)^2 = y^2 + \left(\frac{r}{2} - z\right)^2 \quad (267)$$

Отрезок $s'_0 - z$ можно рассматривать как проекцию отрезка t'_F на ось.

Поэтому

$$s'_0 - z = t'_F \cos \omega = \frac{r}{2} \cos^2 \omega \quad (268)$$

и тогда в соответствии с формулой (266)

$$\frac{r^2}{4} \cos^2 \omega = y^2 + \frac{r^2}{4} \cos^4 \omega \quad (269)$$

или

$$y^2 = \frac{r^2}{4} \sin^2 \omega \cos^2 \omega. \quad (270)$$

Используя формулу (270), находим

$$z = s'_0 - \frac{r}{2} \cos^2 \omega = \frac{r}{2} \sin^2 \omega, \quad (271)$$

что позволяет исключить из формулы (270) полевой угол ω .

Таким образом,

$$y^2 = \frac{r}{2} z \cos^2 \omega = z(r/2 - z). \quad (272)$$

- уравнение окружности радиуса $R = r/4$, касательной к вершине отражательной поверхности.

Угол наклона ψ_e элемента меридиональной поверхности изображения по отношению к ходу главного луча будет равен полевому углу ω , отсчитываемому по часовой стрелке.

Геометрическим местом расположения сагиттальных фокусов явится прямая, перпендикулярная оси абсцисс Z . Действительно, согласно формуле (264)

$$s'_F = s'_0 / \cos \omega' = r/2 \cos \omega', \quad (273)$$

и тогда отрезок s'_0 будет являться проекцией на ось Z отрезка s'_F .

Угол наклона ψ_s элемента сагиттального изображения относительно отраженного луча также будет равен по абсолютному значению полевому углу ω , отличаясь при этом по знаку от угла наклона ψ_t элемента меридионального изображения.

Продольная астигматическая разность выразится формулой

$$t'_F - s'_F = s'_F \cos^2 \omega - s'_F = -s'_F \sin^2 \omega. \quad (274)$$

В рассмотренном примере точка отражения лучей была совмещена с вершиной отражающей поверхности (что равнозначно совмещению зрачка с вершиной поверхности). Однако возможны и другие случаи расположения зрачка относительно отражающей поверхности.

Обратимся к инвариантам наклонов меридионального и сагиттального элементов изображения:

$$\begin{aligned} & - \left[2\text{tg}\varepsilon + r \frac{(p-t)\text{tg}\psi_t + p\text{tg}\varepsilon \cos \varepsilon}{r \cos \varepsilon - p} \frac{\cos \varepsilon}{t} + \frac{\text{tg}\varepsilon}{r} = \right. \\ & = \left. - \left[2\text{tg}\varepsilon' + r \frac{(p'-t')\text{tg}\psi'_t + p'\text{tg}\varepsilon' \cos \varepsilon'}{r \cos \varepsilon' - p'} \frac{\cos \varepsilon'}{t'} + \frac{\text{tg}\varepsilon'}{r} \right]; \right. \end{aligned} \quad (275)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{s^2 \cos \varepsilon} \frac{(p-s)\text{tg}\psi_s + p\text{tg}\varepsilon}{1 - \frac{p}{r \cos \varepsilon}} + \frac{\text{tg}\varepsilon}{r} = \\ & = - \frac{1}{s'^2 \cos \varepsilon'} \frac{(p'-s')\text{tg}\psi'_s + p'\text{tg}\varepsilon'}{1 - \frac{p'}{r \cos \varepsilon'}} + \frac{\text{tg}\varepsilon'}{r}. \end{aligned} \quad (276)$$

В частном случае, когда предмет расположен в бесконечности и когда после отражающей поверхности имеет место телецентрический ход лучей, отрезки t и p' становятся равными бесконечности, и формула (275) примет вид

$$\frac{\text{tg}\varepsilon}{r} = - \left[2\text{tg}\varepsilon' - r(\text{tg}\psi'_t + \text{tg}\varepsilon') \frac{\cos \varepsilon'}{t'_F} \right] \frac{\cos \varepsilon'}{t'_F} + \frac{\text{tg}\varepsilon'}{r}, \quad (277)$$

откуда можно определить тангенс угла наклона ψ'_t элемента меридионального изображения.

Помня, что задний фокальный отрезок для зеркала

$$t'_F = \frac{r}{2} \cos \varepsilon', \quad (278)$$

находим

$$\operatorname{tg}\psi'_t = -\operatorname{tg}\varepsilon. \quad (279)$$

Для сагиттальной плоскости, исходя из равенства бесконечности отрезков s и p' , вместо формулы (276) также получаем более простое выражение

$$\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r} = \frac{r}{s'^2 \cos \varepsilon'} (\operatorname{tg}\psi'_s + \operatorname{tg}\varepsilon') + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'}{r}. \quad (280)$$

Поскольку

$$\frac{n'}{s'_F} = \frac{2n' \cos \varepsilon'}{r}, \quad (281)$$

для тангенса угла наклона элемента сагиттального изображения получаем

$$\operatorname{tg}\psi'_s = \left(\frac{1}{2 \cos \varepsilon'} + 1 \right) \operatorname{tg}\varepsilon'. \quad (282)$$

Следует обратить внимание, что средний угол наклона изображения, определяемый полусуммой углов ψ'_t и ψ'_s , если зрачок совмещен с вершиной отражающей поверхности или с ее центром, становится равным нулю. Однако для случая, когда выходной зрачок удален в бесконечность (телецентрический ход лучей), средний угол приблизительно равен углу между падающим лучом и нормалью к отражающей поверхности.

Разворот астигматических линий. При рассмотрении элемента изображения, расположенного вне плоскости симметрии, обе линии астигматического изображения точки перестают быть параллельными или перпендикулярными плоскости симметрии.

На рис. 33 показан ход луча в горизонтальной плоскости, пересекающего сферическую поверхность на расстоянии x от вертикальной плоскости YOZ . Точка встречи B луча с поверхностью и центр поверхности C определяют направление нормали. Если при этом падающий луч параллелен вертикальной плоскости YOZ , определится плоскость, в которой будут лежать падающий и отраженный лучи и нормаль к поверхности. Угол, составленный этой плоскостью с вертикальной плоскостью YOZ , и определит разворот астигматических линий для рассматриваемого луча.

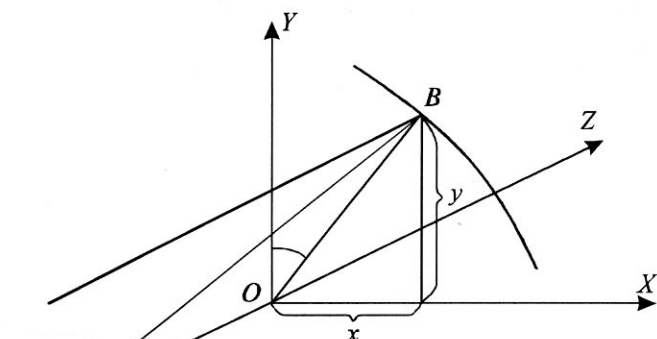


Рис. 33. Ход падающего луча в горизонтальной плоскости

Для угла α разворота астигматических линий

$$\operatorname{tg} \alpha = x/y. \quad (283)$$

2. *Кома.* Для определения значения комы наклонной сферической отражательной поверхности обратимся к инварианту меридиональной комы

$$\frac{R \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} + 3 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'^2} - \frac{\cos \varepsilon'}{t'r} \right) = \frac{R \cos^3 \varepsilon}{t^3 \sin \varepsilon} + 3 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{t^2} - \frac{\cos \varepsilon}{tr} \right). \quad (284)$$

Для отражательной сферической поверхности этот инвариант существенно упрощается, так как значения показателей преломления до и после поверхности будут равны и обратны по знаку, следствием чего является равенство углов падения и отражения по абсолютному значению и различие их по знаку.

Таким образом, для отражательной поверхности меридиональный инвариант можно записать как

$$\frac{R'}{t'^3 \operatorname{tg} \varepsilon'} + \frac{3}{t'} \left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{r \cos \varepsilon'} \right) = \frac{R}{t^3 \operatorname{tg} \varepsilon} + \frac{3}{t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{r \cos \varepsilon} \right). \quad (285)$$

В частном случае для бесконечно удаленной точки отрезок $t = \infty$, а отрезок t' переходит в отрезок t'_F . В соответствии с этим формула (285) преобразуется:

$$\frac{R'_{tF}}{t'^3_F \operatorname{tg} \varepsilon'} + \frac{3}{t'_F} \left(\frac{1}{t'_F} - \frac{1}{r \cos \varepsilon'} \right) = 0. \quad (286)$$

Исходя из меридионального инварианта, отрезок t'_F можно выразить через радиус r :

$$t'_F = r \cos \varepsilon' / 2, \quad (287)$$

что позволяет получить выражение для радиуса R'_{tF} меридиональной комы

$$R'_{tF} = -\frac{3}{4} r \sin \varepsilon'. \quad (288)$$

Таким же образом можно получить формулу и для радиуса R_{tF} меридиональной комы в пространстве предметов

$$R_{tF} = -\frac{3}{4} r \sin \varepsilon. \quad (289)$$

Обратимся к инварианту сагиттальной комы

$$-\frac{R'_s}{s'^2 t' \operatorname{tg} \varepsilon'} - \frac{1}{s'^2} + \frac{\cos \varepsilon'}{rt'} = -\frac{R_s}{s^2 t \operatorname{tg} \varepsilon} - \frac{1}{s^2} + \frac{\cos \varepsilon}{rt}. \quad (290)$$

Полагая предмет расположенным в бесконечности, оба отрезка t и s становятся равными бесконечности, а отрезки t' и s' переходят в фокальные отрезки t'_F и s'_F . Вследствие этого формула (290) преобразуется:

$$\frac{R'_{sF}}{s'^2 t'_F \operatorname{tg} \varepsilon'} - \frac{1}{s'^2} + \frac{\cos \varepsilon'}{rt'_F} = 0. \quad (291)$$

Имея в виду, что отрезок

$$s'_F = r/2 \cos \varepsilon', \quad (292)$$

и используя для t'_F выражение (287), из формулы (291) получаем

$$\frac{R'_{sF}}{(r/2)^3 \operatorname{tg} \varepsilon' / \cos \varepsilon'} - \frac{4 \cos^2 \varepsilon'}{r^2} + \frac{2}{r^2} = 0, \quad (293)$$

ИЛИ

$$8 \frac{R'_{sF} \cos^2 \varepsilon'}{r \sin \varepsilon'} - 4 \cos^2 \varepsilon = 0, \quad (294)$$

откуда сагиттальный радиус комы

$$R'_{sF} = r/2 \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \varepsilon} \right) \sin \varepsilon'. \quad (295)$$

Приближенно (при малых значениях угла ε) радиус R'_{sF} получается примерно втрое меньше, по сравнению с меридиональным радиусом комы R'_{iF} .

3. Дисторсия наклонного сферического зеркала. Аналогично наклонному астигматизму, дисторсия наклонного зеркала связана с расположением входного зрачка относительно рассматриваемой поверхности.

В частном случае, когда зрачок совмещен с отражательной поверхностью любого профиля, дисторсия (в силу равенства угла падения и отражения центрального луча) автоматически становится равной нулю.

Однако, как упоминалось, при несовмещении зрачка с поверхностью дисторсия уже не будет равной нулю (за исключением случая, когда зрачок совмещен с центром поверхности).

Одним из характерных случаев расположения зрачка является такой, когда зрачок находится в переднем фокусе сферического зеркала, что создает телецентрический ход лучей после их отражения от поверхности.

Определим дисторсию, используя рис. 34, на котором показаны сферическая поверхность радиуса r с центром в точке C и ход двух лучей AB и A_1B_1 , параллельных оси и идущих на расстояниях m_0 и m от нее. Эти лучи образуют углы падения и отражения ε_0 и ε .

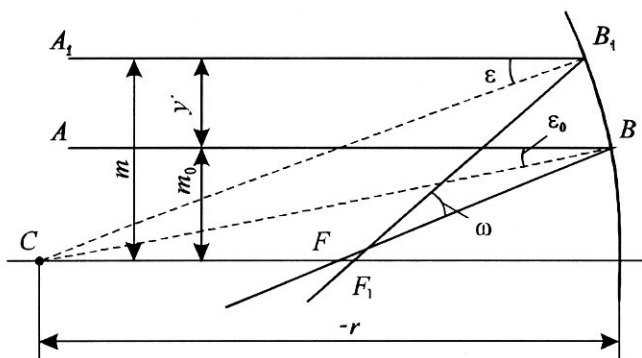


Рис. 34. Отражение двух параллельных лучей

Рассматривая картину в обратном ходе лучей, можем принять лучи FB и F_1B_1 за падающие. Тогда лучи BA и B_1A_1 , параллельные оси, образуют после отражения телецентрический ход.

Примем один из падающих лучей, например FB , за центральный в пучке. Для этого луча сферическое зеркало будет наклонено, и угол ε_0 , составляемый лучом FB с нормалью к зеркалу, будет одновременно и углом наклона зеркала ϑ .

Углы, образуемые лучами FB и F_1B_1 с осью, будут равны удвоенным углам ε_0 и ε . Угол ω между этими же лучами можно рассматривать как полевой угол для луча F_1B_1 относительно центрального луча FB . Таким образом,

$$\omega = 2\varepsilon - 2\varepsilon_0 = 2\varepsilon - 2\vartheta_0. \quad (296)$$

Согласно рис. 34, углы, входящие в формулу (296), равны

$$\sin \varepsilon_0 = m_0/r \text{ и } \sin \varepsilon = m/r. \quad (297)$$

Разность $m-m_0$ можно рассматривать как реальное изображение относительно центрального луча:

$$y' = m - m_0. \quad (298)$$

Идеальное изображение y'_0 относительно центрального луча можно определить как произведение из тангенса полевого угла ω и фокусного расстояния f'_t в меридиональной плоскости. Таким образом,

$$y'_0 = f'_t \operatorname{tg} \omega. \quad (299)$$

Фокусное расстояние для зеркала

$$f'_t = \frac{r \cos \varepsilon}{2} = \frac{r}{2} \cos \vartheta. \quad (300)$$

Тогда неискаженное изображение y'_0 можно выразить через полевой угол ω и угол ϑ наклона зеркала:

$$y'_0 = \frac{r}{2} \cos \vartheta \operatorname{tg} \omega. \quad (301)$$

Преобразуем выражение для реального изображения y' . Согласно формулам (297) и (298)

$$y' = r \sin \varepsilon - r \sin \varepsilon_0 \quad (302)$$

или

$$y' = r(\sin \varepsilon - r \sin \vartheta). \quad (303)$$

Используя формулу (296), угол ε можно представить через углы ω и ϑ :

$$\varepsilon = \omega/2 + \vartheta, \quad (304)$$

тогда

$$y' = r[\sin(\vartheta + \omega/2) - \sin \vartheta] \quad (305)$$

или

$$y' = r\left[\sin \vartheta \cos \frac{\omega}{2} + \cos \vartheta \sin \frac{\omega}{2} - \sin \vartheta\right]. \quad (306)$$

Вычитая из формулы (306) выражение (301), находим значение дисторсии

$$\Delta y' = y' - y'_0 = r\left[\left(\cos \frac{\omega}{2} - 1\right) \sin \vartheta + \cos \vartheta \sin \frac{\omega}{2} - \cos \vartheta \frac{\operatorname{tg} \omega}{2}\right]. \quad (307)$$

После некоторых преобразований

$$\Delta y' = r\left[\left(\cos \frac{\omega}{2} - 1\right) \sin \vartheta + \left(\cos \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega\right) \cos \vartheta\right]. \quad (308)$$

Формула (308) показывает, что дисторсия для наклонного сферического зеркала в первом приближении будет линейно связана с полевым углом ω .

При изменении знака угла ω на обратный значение дисторсии изменяется не одинаково, что обусловлено наличием в формуле (308) члена, содержащего косинус угла ω .

При равенстве угла наклона зеркала ϑ нулю (центрированное зеркало) дисторсия становится симметричной относительно полевого угла ω , что следует из формулы

$$\Delta y' = r\left(\sin \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega\right). \quad (309)$$

Формула (308) достаточна громоздка, поэтому для более наглядной оценки дисторсии наклонного зеркала рассмотрим численный пример.

Полагая углы ω и ϑ равными 6° при радиусе $r = 200$ мм, находим $y' = 10,453$ и $y'_0 = 10,381$, а значение дисторсии $\Delta y'_0 = 0,072$, что составляет около $0,7\%$. Для угла $\omega = -6^\circ$ получаем $\Delta y' = 0,014$, т.е. около $0,14\%$.

Таким образом, дисторсия получается несимметричной относительно центрального луча.

Силовая цилиндрическая наклонная отражательная поверхность

В качестве отражательного элемента можно использовать также и наклонную цилиндрическую поверхность.

Основной особенностью цилиндрической отражательной поверхности по сравнению со сферическими поверхностями является ее афокальность в плоскостях, проходящих через ось цилиндра. В силу этого одиночные цилиндрические поверхности не могут создавать стигматическое изображение и, как правило, применяются совместно с другими цилиндрическими поверхностями, образуя в совокупности силовые узлы, создающие единое изображение.

Одним из достоинств наклонных цилиндрических поверхностей является возможность их использования при значительных углах наклона, достигающих до 45° . Это позволяет отказаться от применения дополнительных поверхностей для выведения изображения из хода падающих лучей, когда такие поверхности работают как преломляющие и как отражающие при полном внутреннем отражении.

Наклон цилиндрической отражательной поверхности может быть осуществлен двояким образом:

- 1) в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра;
- 2) в плоскости, проходящей через ось цилиндра (за счет образования угла между осью цилиндра и его образующей).

В первом случае работы цилиндрической поверхности ее аберрации будут аналогичными аберрациям наклонной сферы, учитывая, однако, что в сагиттальной плоскости цилиндрическая поверхность будет уподобляться плоскости. Поэтому наклон изображения в меридиональной плоскости будет равен по абсолютному значению наклону поверхности, взятому с обратным знаком.

Меридиональное фокусное расстояние цилиндрической поверхности

$$f'_t = \frac{r}{2} \cos \varepsilon = \frac{r}{2} \cos \vartheta. \quad (310)$$

Начало системы координат разместим на оси цилиндра. Плоскость ZOX будем полагать проходящей через точку встречи луча B с поверхностью; расстояние этой точки от плоскости XOY примем равным z .

Угол между нормалью OB и плоскостью ZOY обозначим α . Таким образом, расстояние z и радиус поверхности связаны формулой

$$z = r \cos \alpha. \quad (312)$$

Луч AB после отражения займет положение BA' . Расстояния AB и BA' будем полагать равными, тогда расстояние y' точки A' от плоскости XOZ будет равно расстоянию точки A от той же плоскости ZOX , но с обратным знаком, т.е. $-y$.

Луч BA' будет пересекать плоскость ZOY в некоторой точке E , проекция которой на плоскость XOZ расположена в точке C на оси OZ .

Прямая $D'CB$, являющаяся проекцией прямой $A'B$ на плоскость XOZ , составит с осью OZ угол, равный 2α , где α определяется как угол нормали OB с осью OZ .

Отрезок OD' должен быть равен отрезку $OD = x$. Углы $OD'B$ и ODB должны быть равными 90° .

Следовательно, расстояние точки C от начала координат

$$OC = x / \sin 2\alpha. \quad (313)$$

Отрезок x можно определить через радиус и угол α :

$$x = r \sin \alpha, \quad (314)$$

что позволяет получить для расстояния OC :

$$OC = r \sin \alpha / \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{r \cos 2\alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (315)$$

Разность отрезка OC и половины радиуса r оказывается равной сферической аберрации для всех лучей, идущих в плоскости, параллельной плоскости ZOY , независимо от угла ϑ :

$$\Delta s' = OC - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \left(\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} - 1 \right). \quad (316)$$

Рассматривая угол наклона сагиттального элемента изображения, нетрудно показать, что такой элемент должен быть параллельным оси цилиндра.

Глава 4. Коррекционные элементы

Наклонное сферическое зеркало

Наклонное сферическое зеркало, используемое как силовой элемент, неразрывно связано с возникновением ряда нецентрированных аберраций - продольного и наклонного астигматизма, комы и дисторсии. Для их устранения целесообразно применять конструктивные элементы с малой оптической силой, так называемые коррекционные элементы. Одним из таких элементов является сферическое зеркало, сильно наклоненное по отношению к ходу центрального луча.

Для правильной оценки коррекционных сферических зеркал целесообразно установить соотношение между нецентрированными аберрациями и заданным расстоянием предмета по отношению к точке встречи луча с поверхностью.

Рассмотрим эти соотношения, начиная с продольного астигматизма. Обратимся к инвариантам Гульстранда - Юнга, общая формула которых

$$\frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{n \cos^2 \varepsilon}{t} = \frac{n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon}{r} = \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \Phi_s. \quad (317)$$

Так как для зеркал $n = -n'$ и $\varepsilon = -\varepsilon'$, выражение (317) упрощается:

$$\frac{\cos^2 \varepsilon}{t'} + \frac{\cos^2 \varepsilon}{t} = \frac{2 \cos \varepsilon}{r} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s}, \quad (318)$$

откуда

$$\frac{1}{t'} + \frac{1}{t} = \frac{2}{r \cos \varepsilon}; \quad \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2 \cos \varepsilon}{r}. \quad (319)$$

Полагая предмет свободным от продольного астигматизма ($t = s$), можно составить разность

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'} = \frac{2}{r \cos \varepsilon} - \frac{2 \cos \varepsilon}{r}. \quad (320)$$

Нас будет интересовать отношение астигматической разности $t' - s'$ к одному из отрезков - t' или s' .

Таким образом,

$$-\frac{t' - s'}{t'} = \frac{2}{r} \left(\frac{1}{\cos \varepsilon} - \cos \varepsilon \right) s', \quad (321)$$

или

$$-\frac{t' - s'}{t'} = \frac{2}{r \cos \varepsilon} (1 - \cos^2 \varepsilon) s'. \quad (322)$$

Отношение $2/r \cos \varepsilon$ можно рассматривать как обратную величину заднего меридионального отрезка, т.е. $1/t'_F$. Поэтому

$$-\frac{t' - s'}{t'} = \frac{s'}{t'_F} \sin^2 \varepsilon. \quad (323)$$

Если астигматическая разность $t' - s'$ невелика по отношению к отрезкам t' или s' , выражение (323) можно заменить приближенной формулой

$$t' - s' \approx -\frac{2 \sin^2 \varepsilon}{r \cos \varepsilon} s'^2. \quad (324)$$

Численно, задавая разность $t' - s' = 1$ мм, отрезок $s' = 100$ мм и угол $\varepsilon = 45^\circ$, находим

$$r = -\sqrt{2 \cdot 100^2} / 1 = -14142.$$

Полученный результат дает достаточно ясное представление об оптической силе наклонной коррекционной сферической отражательной поверхности.

Для рассмотрения картины наклонного астигматизма используем инвариант наклонов меридионального изображения. Ограничиваясь частным случаем, когда зрачок совмещен с точкой пересечения центрального луча с отражательной поверхностью, что характерно при больших значениях радиуса r , запишем

$$\begin{aligned} & -(2 \operatorname{tge} - \operatorname{tg} \psi'_t) \frac{\cos \varepsilon}{t} + \frac{\operatorname{tge}}{r} = \\ & = -(2 \operatorname{tge}' - \operatorname{tg} \psi'_t) \frac{\cos \varepsilon'}{t'} + \frac{\operatorname{tge}'}{r}. \end{aligned} \quad (325)$$

Для отражения, когда угол $\varepsilon = -\varepsilon'$, формула (325) примет вид

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\psi_i) \frac{\cos\varepsilon}{t} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r} = (2\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\psi_i') \frac{\cos\varepsilon}{t'} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r}. \quad (326)$$

Полагая угол ψ_i равным нулю и разделив выражение (326) на $\operatorname{tg}\varepsilon$, находим

$$-2 \frac{\cos\varepsilon}{t\operatorname{tg}\varepsilon} + \frac{1}{r} = \left(2 + \frac{\operatorname{tg}\psi_i'}{\operatorname{tg}\varepsilon}\right) \frac{\cos\varepsilon}{t'} - \frac{1}{r} \quad (327)$$

или

$$\left(2 + \frac{\operatorname{tg}\psi_i'}{\operatorname{tg}\varepsilon}\right) \frac{\cos\varepsilon}{t'} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\varepsilon}{r\operatorname{tg}\varepsilon}\right), \quad (328)$$

откуда для угла наклона меридионального изображения запишем

$$\operatorname{tg}\psi_i' = 2\left(\frac{t'\operatorname{tg}\varepsilon}{r\cos\varepsilon} - \frac{t'}{t} - \operatorname{tg}\varepsilon\right). \quad (329)$$

Исключим из выражения (329) отношение t'/t . Согласно первой формуле (319)

$$1 + t'/t = \frac{2t'}{r\cos\varepsilon}, \quad (330)$$

откуда

$$t'/t = -1 + \frac{2t'}{r\cos\varepsilon}. \quad (331)$$

Вводя отношение t'/t в формулу (329), получим

$$\operatorname{tg}\psi_i' = 2\left(\frac{t'\operatorname{tg}\varepsilon}{r\cos\varepsilon} + 1 - \frac{2t'}{r\cos\varepsilon} - \operatorname{tg}\varepsilon\right). \quad (332)$$

Полагая, что $\varepsilon = 45^\circ$ ($\operatorname{tg}\varepsilon = 1$ и $\cos\varepsilon = \sqrt{2}/2$), получаем выражение

$$\operatorname{tg}\psi_i' = -2\sqrt{2} \frac{t'}{r}.$$

Для ранее рассмотренного примера, когда при $s \approx t' = 100$ мм был радиус $r = -14142$, получаем $\operatorname{tg}\psi_i' = 0,02$ (несколько больше одного градуса).

Перейдем к сагиттальной плоскости, для которой инвариант наклона элемента изображения будет иметь вид

$$\frac{\operatorname{tg}\psi'_s}{s' \cos \varepsilon'} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'}{r} = \frac{\operatorname{tg}\psi_s}{s \cos \varepsilon} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r}. \quad (333)$$

Для отражения при $\varepsilon = -\varepsilon'$

$$\frac{\operatorname{tg}\psi'_s}{s' \cos \varepsilon'} = \frac{\operatorname{tg}\psi_s}{s \cos \varepsilon} + 2 \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r}. \quad (334)$$

Если угол ψ_s равен нулю,

$$\operatorname{tg}\psi'_s = 2 \frac{s'}{r} \sin \varepsilon. \quad (335)$$

Численно для величин, принятых при рассмотрении наклона элемента изображения в меридиональной плоскости,

$$\operatorname{tg}\psi'_s = s' \sqrt{2}/(-14142) = -0,01.$$

Таким образом, для угла наклона элемента изображения в сагиттальной плоскости полученное значение составляет больше полуградуса.

Рассмотрим кому наклонной коррекционной поверхности. Для оценки комы сильно наклоненной зеркальной сферической поверхности необходимо определить кому, соответствующую расположению предметной точки на некотором расстоянии от точки встречи центрального луча с поверхностью.

С этой целью используем инвариант меридиональной комы

$$\frac{R'_t \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} + 3 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'^2} - \frac{\cos \varepsilon'}{t'r} \right) = \frac{R_t \cos^3 \varepsilon}{t^3 \sin \varepsilon} + 3 \left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{t^2} - \frac{\cos \varepsilon}{tr} \right). \quad (336)$$

Полагая предметную точку свободной от комы, когда $R_t = 0$, можно записать

$$\frac{R'_t \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} = 3 \left[\left(\frac{\cos^2 \varepsilon}{t} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) \frac{1}{t} - \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right) \frac{1}{t'} \right]. \quad (337)$$

Используя инвариант Гульстранда - Юнга

$$\frac{n' \cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{n' \cos \varepsilon'}{r} = \frac{n \cos^2 \varepsilon}{t} - \frac{n \cos \varepsilon}{r}, \quad (338)$$

можно преобразовать формулу (337):

$$\frac{R'_t \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} = 3 \left(\frac{n' 1}{n t} - \frac{1}{t'} \right) \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right). \quad (339)$$

Для отражения при $n' = -n$ вместо формулы (339) получим

$$\frac{R'_t \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} = -3 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} \right) \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right). \quad (340)$$

Сумма обратных значений отрезков t и t' в рассматриваемом случае

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = \frac{2}{r \cos \varepsilon'}, \quad (341)$$

что позволяет преобразовать формулу (340):

$$\frac{R'_t \cos^3 \varepsilon'}{t'^3 \sin \varepsilon'} = -6 \frac{1}{r \cos \varepsilon'} \left(\frac{\cos^2 \varepsilon'}{t'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right). \quad (342)$$

Из выражения (342) можно определить радиус меридиональной комы

$$R'_t = -\frac{6t'^3}{r} \left(\frac{\cos \varepsilon'}{t'} - \frac{1}{r} \right) \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{\cos^2 \varepsilon'}. \quad (343)$$

Для коррекционных отражательных поверхностей характерной особенностью являются очень большие значения радиусов кривизны при больших углах наклона. Это позволяет представить выражение (343) для радиуса меридиональной комы в виде приближенной формулы

$$R'_t \approx -\frac{6t'}{r} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{\cos \varepsilon'}. \quad (344)$$

Для рассмотренного ранее численного примера, когда были заданы угол наклона коррекционной поверхности $\varepsilon = 45^\circ$ и отрезок $t' = 100$ мм, а затем определен радиус кривизны поверхности $r = -14142$, находим радиус комы

$$R'_t = -\frac{6 \cdot 100^2}{-14142} \sqrt{2} = 6.$$

Наклонный астигматизм тонкой линзы, совмещенной со зрачком

Обратимся к инварианту наклона меридионального изображения для частного случая, когда точка преломления главного луча совмещена со зрачком:

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon' - \operatorname{tg}\psi'_1) \frac{\cos \varepsilon'}{t'} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r} = -(2\operatorname{tg}\varepsilon - \operatorname{tg}\psi_t) \frac{\cos \varepsilon}{t} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{r}. \quad (345)$$

Для обеих поверхностей тонкой линзы, полагая предмет расположенным в бесконечности, можно записать аналогичные выражения. Так, для первой поверхности

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon'_1 - \operatorname{tg}\psi'_{11}) \frac{\cos \varepsilon'_1}{t'_1} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_1}{r_1} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon_1}{r_1}; \quad (346)$$

для второй

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\psi'_{12}) \frac{\cos \varepsilon'_2}{t'_2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_2}{r_2} = -(2\operatorname{tg}\varepsilon_2 - \operatorname{tg}\psi_{12}) \frac{\cos \varepsilon_2}{t_2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon_2}{r_2}. \quad (347)$$

Для тонкой линзы показатели преломления равны $n_1 = 1$, $n_2 = n$ и $n_3 = 1$; углы ε_1 , ε'_1 , ε_2 и ε'_2 должны быть равны попарно, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon'_2$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$. Равны должны быть и углы наклонов меридионального изображения $\psi'_{11} = \psi'_{12}$. Поэтому формула (346) примет вид

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon_2 - \operatorname{tg}\psi'_{12}) \frac{\cos \varepsilon_2}{t_2} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\varepsilon_2}{r_1}. \quad (348)$$

Левая часть формулы (348) равна первому члену правой части формулы (347). Таким образом, формула (347) преобразуется:

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\psi'_{12}) \frac{\cos \varepsilon'_2}{t'_2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_2}{r_2} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\varepsilon_2}{r_1} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon_2}{r_2}, \quad (349)$$

или

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\psi'_{12}) \frac{\cos \varepsilon'_2}{t'_2} = (\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\varepsilon_2) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (350)$$

Согласно меридиональному инварианту Гульстранда - Юнга (338) для первой поверхности

$$\frac{n'_1 \cos^2 \varepsilon'_1}{t'_1} = \frac{n'_1 \cos \varepsilon'_1 - n_1 \cos \varepsilon_1}{r_1} \quad (351)$$

или, рассматривая углы ε_2 и ε'_2 и отрезок t_2 ,

$$\frac{n_2 \cos^2 \varepsilon_2}{t_2} = \frac{n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon'_2}{r_1} \quad (352)$$

Для второй поверхности

$$\frac{n_2 \cos^2 \varepsilon'_2}{t'_2} - \frac{n_2 \cos^2 \varepsilon_2}{t_2} = \frac{n'_2 \cos \varepsilon'_2 - n_1 \cos \varepsilon_2}{r_2} \quad (353)$$

Используя формулу (352), преобразуем выражение (353):

$$\frac{n'_2 \cos^2 \varepsilon'_2}{t'_2} = \frac{n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon'_2}{r_1} + \frac{n_1 \cos \varepsilon'_2 - n_2 \cos \varepsilon_2}{r_2} \quad (354)$$

или

$$\frac{n_3 \cos^2 \varepsilon'_2}{t'_2} = (n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon'_2)(1/r_1 - 1/r_2), \quad (355)$$

откуда отношение

$$\frac{\cos \varepsilon'_2}{t'_2} = \frac{1}{\cos \varepsilon'_2} (n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon_1)(1/r_1 - 1/r_2). \quad (356)$$

Тогда формула (350) примет вид

$$-(2\operatorname{tg}\varepsilon'_2 - \operatorname{tg}\psi'_{i2}) \frac{n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_1} = \operatorname{tg}\varepsilon_1 - \operatorname{tg}\varepsilon_2. \quad (357)$$

После дальнейших сокращений получим

$$-2\operatorname{tg}\varepsilon_1 + \operatorname{tg}\psi'_{i2} = \cos \varepsilon_1 \frac{\operatorname{tg}\varepsilon_1 - \operatorname{tg}\varepsilon_2}{n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon_1}. \quad (358)$$

Используя выражение закона преломления $n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$ и преобразуя числитель правой части формулы (358), получим

$$-2 \operatorname{tg} \varepsilon_1 + \operatorname{tg} \psi'_{i2} = \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_1 \frac{1/\cos \varepsilon_1 - 1/n \cos \varepsilon_2}{n_2 \cos \varepsilon_2 - n_1 \cos \varepsilon_1}. \quad (359)$$

Далее

$$-2 \operatorname{tg} \varepsilon_1 + \operatorname{tg} \psi'_{i2} = \frac{\cos \varepsilon_1}{n \cos \varepsilon_2} \operatorname{tg} \varepsilon_1, \quad (360)$$

откуда для угла наклона меридионального изображения после тонкой линзы находим

$$\operatorname{tg} \psi'_{i2} = \left(2 + \frac{\cos \varepsilon_1}{n \cos \varepsilon_2} \right) \operatorname{tg} \varepsilon_1. \quad (361)$$

В формулу (361) не вошли ни радиусы, ни другие линейные величины. Это позволяет сделать вывод, что при наклоне тонкой линзы, совмещенной со зрачком, угол наклона меридионального изображения не должен зависеть от формы линзы и ее фокусного расстояния (оптической силы).

Рассмотрим углы наклона сагиттального изображения после тонкой линзы, совмещенной со зрачком.

Используя инвариант наклона сагиттального изображения при совмещении зрачка с точкой преломления главного луча, имеем

$$\frac{\operatorname{tg} \psi'_s}{s' \cos \varepsilon'} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'}{r} = \frac{\operatorname{tg} \psi_s}{s \cos \varepsilon} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{r}. \quad (362)$$

Аналогично предыдущему выводу для меридионального изображения для первой поверхности запишем

$$\frac{\operatorname{tg} \psi'_{s1}}{s'_1 \cos \varepsilon'_1} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{r_1} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1}{r_1}; \quad (363)$$

для второй

$$\frac{\operatorname{tg} \psi'_{s2}}{s'_2 \cos \varepsilon'_2} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_2}{r_2} = \frac{\operatorname{tg} \psi_{s2}}{s_2 \cos \varepsilon_2} + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_2}{r_2}. \quad (364)$$

В силу равенств $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon'_2$ и $s'_1 = s_2$ формулу (363) можно представить в виде