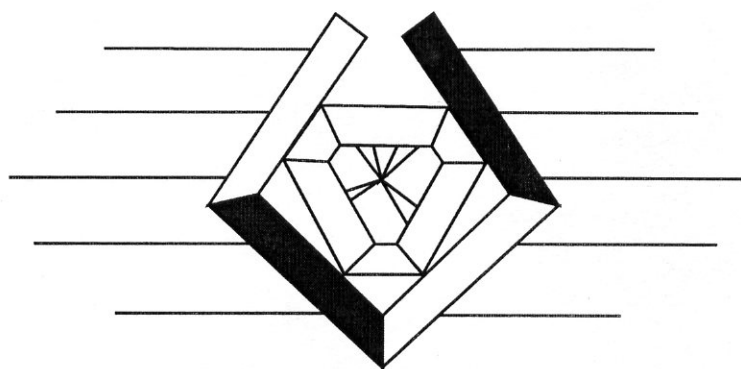


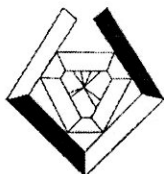
Выдающиеся ученые



Университета ИТМО

ВЫДАЮЩИЕСЯ УЧЕНЫЕ УНИВЕРСИТЕТА ИТМО

*Серия монографий ученых Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий, механики и оптики
(бывшего Ленинградского института точной механики и оптики)*



Выпуск 12

Основана в 2000 году по решению
Ученого Совета университета
в ознаменование 100-летия со дня создания
в составе Ремесленного училища цесаревича Николая
Оптико-механического и часового отделения,
превращенного трудами нескольких
поколений профессоров и преподавателей
в один из ведущих университетов России

Редакционная коллегия серии:
проф. В. Н. Васильев (председатель), проф. Г. Н. Дульнев,
проф. Ю. Л. Колесников, проф. Г. И. Новиков,
проф. М. И. Потеев (ученый секретарь)

Главный редактор – заслуженный деятель науки и техники РСФСР,
академик Российской академии естественных наук,
профессор Г. Н. Дульнев

А. А. АКАЕВ, С. А. МАЙОРОВ

**Оптические методы
обработки информации**

*Репринтное воспроизведение
издания 1988 года*

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов по
университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия при подготовке дипломированных
специалистов по специальности
220200 - "Автоматизированные системы обработки
информации и управления" направления
654600 – "Информатика и вычислительная техника"*

Акаев А. А., Майоров С. А. Оптические методы обработки информации: Репринтное воспроизведение издания 1988 года. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. – 260с.

Рассмотрены проблемы одного из новейших направлений в вычислительной технике - оптоэлектронной обработки информации. Даны основы анализа и синтеза линейных оптических систем обработки информации. Описаны принципы их построения с использованием голографических запоминающих устройств, оптических процессоров, оптоэлектронных устройств аналоговой и цифровой обработки данных, волоконно-оптических линий связи.

Для инженеров, научно-технических работников, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Problems of one of the newest directions in computer facilities - optical-electronic processings of the information - are considered. Bases of the analysis and synthesis of linear optical systems for information processing are given. Principles of their construction with use of holographic memories, optical processors, optical-electronic devices of analog and digital data processing, optical fibre communication lines are described. For engineers, scientific and technical workers, and also students and post-graduate students.

ISBN 5-7577-0188-9

© Санкт-Петербургский
государственный университет
информационных технологий,
механики и оптики, 2005.

© Издательство "ИВА", 2005.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ОПТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ (репринтное воспроизведение издания 1988года).	
Введение.....	21
Глава I. Математические основы анализа и синтеза когерентных оптических систем преобразования информации.....	24
Глава II. Оптическая голография	47
Глава III. Компоненты оптических систем хранения и обработки информации	66
Глава IV. Голографические и оптические запоминающие устройства	91
Глава V. Волоконно-оптические системы передачи цифровой информации.....	147
Глава VI. Когерентные оптические системы аналоговой обработки информации	167
Глава VII. Цифровая оптическая обработка информации	188
Заключение	244
Приложения	245
Список литературы	251
Оглавление (издания 1988 года).....	253
ОСНОВНЫЕ ДАТЫ ЖИЗНИ И НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АВТОРОВ МОНОГРАФИИ	255

В 1977 году в издательстве "Машиностроение" в Ленинграде вышла в свет книга "Когерентные оптические вычислительные машины". Ее авторами были А. А. Акаев и С. А. Майоров. Книга была посвящена принципам построения когерентных оптических вычислительных машин и способам обработки информации такими машинами. В ней подробно рассмотрены вопросы теории хранения и обработки информации; изложены принципы построения голографических запоминающих устройств; даны инженерные методы расчета их информационных, физических и геометрических параметров. Рассмотрены также вопросы оптического распознавания. Большое внимание уделено вопросам эффективности и оптимального использования голографической памяти, когерентных оптических систем распознавания.

В 1981 году А. А. Акаев успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Диссертация называлась "Теоретические основы и методы расчета голографических систем хранения и преобразования информации".

В дальнейшем основные результаты исследований в этом направлении были представлены в книге "Оптические методы обработки информации". Она вышла в свет в издательстве "Высшая школа" (Москва) в 1988 году. Ее авторами были также А. А. Акаев и С. А. Майоров. Книга была посвящена новому направлению в вычислительной технике – оптоэлектронной обработке информации. В ней были даны основы анализа и синтеза когерентных оптических систем, рассмотрены принципы оптической голографии, построения голографических запоминающих устройств, оптоэлектронных систем аналоговой обработки изображений, цифровой обработки данных и т. п.

Так как книга не потеряла своей актуальности и до настоящего времени, то было принято решение переиздать ее в серии "Выдающиеся ученые университета ИТМО".

*В. Н. Васильев, д.т.н., профессор, ректор СПбГУ ИТМО,
научный руководитель ВЦ "ГОИ им. С. И. Вавилова"*

Учитель с большой буквы

У каждого из нас остался в памяти Учитель с большой буквы. Учитель, который неутомимым и вдохновенным трудом сумел заставить нас мыслить, который привил знания и навыки, необходимые нам в жизни. А великая сила Учителя - в том примере, который он подает, передавая своим ученикам волшебный вкус к учебе.

Я с удовольствием вспоминаю своего любимого учителя, видного ученого, профессора Ленинградского института точной механики и оптики (ныне, к сожалению, покойного), Сергея Александровича Майорова. Для меня он был больше чем учителем, потому что ко мне относился по-отечески. Часто приглашал меня к себе домой, и мы общались с ним не только как "студент - преподаватель", но и как "сын - отец".

Когда я работал преподавателем в Политехническом институте в г. Фрунзе, мы с ним вели переписку, он мне давал всевозможные советы, как своему бывшему ученику. Он всегда говорил, что преподаватель не должен быть высокомерным, а наоборот, должен уважительно относиться к личности студентов и, по мере возможности, окружать их заботой и вниманием. Ведь студент, повторял он, как цветок, которому необходимо внимание и душевное тепло, чтобы раскрылся его талант и он стал хорошим специалистом для своей страны.

И еще он всегда подчеркивал, что основные знания студента должны быть доведены до убеждений. В противном случае из него не выйдет ни настоящий специалист, ни руководитель.

*А. А. Акаев (цитируется по книге:
Откровенный разговор. – М., 1998. - 160 с.)*

Сергей Александрович был видным ученым в области вычислительной техники и выдающимся педагогом высшей школы. Именно ему принадлежит идея написания этой книги. К сожалению, перед ее выходом в свет он безвременно ушел из жизни. Светлая память о нем навсегда сохранится в сердцах его благодарных учеников, а также тех, кто долгое время работал вместе с ним.

*А. А. Акаев (из предисловия к книге:
Оптические методы обработки информации.
– М., 1988. - 237 с.)*

Человек, ученый, политик

С Аскарком Акаевичем я познакомился в конце 1978 года, когда он пришел ко мне в лабораторию, принес только что вышедшую, написанную им вместе с С. А. Майоровым, книгу "Когерентные оптические вычислительные машины". Аскару Акаевичу было 34 года, но он уже был известным, быстро растущим ученым, заведующим кафедрой вычислительной техники Фрунзенского политехнического института. Он сразу же произвел впечатление очень неординарного человека, разговор с ним был необычайно интересен.

После короткого обсуждения интересующих нас обоих научных проблем мы заговорили о Киргизии, и мне сразу же стало ясно, как глубоко и сильно любит он свою родину. Никто после него не смог так красочно и с такой любовью описать край, как это сделал Аскар Акаевич. После его ухода я понял, что познакомился с замечательным человеком и, пока заочно, с замечательной страной Кыргызстан, куда меня неизменно тянуло все последующие годы моей жизни и которая стала мне родной.

Общение с Аскарком Акаевичем продолжалось, и постепенно я глубже его узнал как человека, как ученого. Какое впечатление создалось у меня о нем.

Прежде всего, это человек высокой культуры. Впитав в себя все лучшее, что дала кыргызская национальная культура, он тем не менее остался открытым для русской культуры. Прожив некоторое время в Ленинграде, он овладел русским литературным языком в такой степени, что его выступления на конференциях, различных собраниях и просто во время бесед удивляют слушателей и собеседников необычайной чистотой и образностью языка, глубиной и ясностью мыслей, высокой информативностью содержащихся в сравнительно сжатых интервалах речи. Все это делает беседу с ним интересной и содержательной. Проявляется его способность не только говорить, но и слушать, соглашаться или очень корректно и обоснованно возражать, если собеседник высказывает мысли, с которыми он не согласен.

Мне всегда приходилось видеть его приветливым и доброжелательным, и я думаю, что он таков даже с людьми, о которых он нелучшего мнения. Он всегда внимателен к тем кто сталкивается с трудностями, находит пути для их преодоления и всегда помогает в их преодолении. Он сострадает

тем, у кого несчастье, которому помочь нельзя. С ним всегда легко иметь дело, потому что он всегда выполняет свои обещания. Давать невыполнимые обещания он избегает.

Он в большей степени, чем кто-либо, относится с уважением к учителям, передавшим ему знания. Только на его кафедре в ФПИ я видел стенд "Наши учителя", где отдавалось должное профессорам. Он необычайно щедр. Это выразилось в том, что написанную им монографию "Оптические методы обработки информации" он выпустил не только под своим именем, но и под именем одного из своих учителей - профессора С. А. Майорова.

Эти его человеческие качества явились тем фоном, на котором расцвел его талант. Жизнь показала, что он талантлив во многих областях, что не является узким специалистом, про которого Козьма Прутков говорил, что тот "подобен флюсу: полнота его односторонняя".

Сочетание яркого таланта с присущей ему необычной работоспособностью сделала Аскара Акаевича крупным ученым, академиком. Следствием беспримерной работоспособности явились его обе монографии. Для первой он обработал необычайно большой объем литературы, который был ему необходим для основательного доказательства выдвигаемых им положений. Вторую ему пришлось писать в условиях плотной занятости ответственной работой, оставлявшей ему только ночное время и выходные дни.

Как бы трудно ни было Аскару Акаевичу при его постоянной занятости и большом объеме выполняемой работы, со своими трудностями он всегда справляется сам, не прибегая к чьей-либо помощи, даже в том случае, когда ее ему предлагают. Но он всегда доволен, когда такую помощь оказывают его помощники и последователи.

Как у всякого крупного ученого, у Аскара Акаевича имеется своя научная школа. Она успешно развивает предложенное и разработанное им научное представление. Его школа быстро завоевала популярность в странах СНГ и за его рубежами. И здесь опять проявляются его лучшие человеческие качества, умение подбирать способных учеников. Среди них имеются доктора наук (К. М. Жумалиев, А. Кутанов). Они не только впитали знания, но и переняли лучшие качества учителя. Неудивительно, что его ученики и последователи любят и гордятся своим учителем, осознанно и беззаветно преданы ему.

Выдающиеся качества человека и ученого выделяют его в элитной среде кыргызской интеллигенции. Поэтому я не был удивлен, узнав, что

Аскар Акаевич избран первым президентом суверенной республики Кыргызстан. На этом посту его качества человека и ученого трансформировались в лучшие качества выдающегося политика.

Ведь быть плохим политиком легко. Это доказало множество людей, которые изменили свою прежнюю профессию на профессию политика. А вот быть хорошим политиком необычайно трудно.

В свое время кумир Аскара Акаевича - автор теории относительности и многих основополагающих работ в физике Альберт Эйнштейн отказался от предложенного ему поста президента на том основании, что решать проблемы, стоящие перед политиком, намного труднее, чем решить самые сложные физические задачи. Возможно, что и Аскар Акаевич отказался бы от этого очень трудного, особенно в нынешнее время, поста, если бы не его горячая любовь к своему народу, если бы не его желание сделать свой народ независимым и счастливым.

Быть хорошим Президентом неопределимое, но и очень редкое качество. Мало стран может похвастаться тем, что имеют на этом посту человека, подходящего для этой деятельности. Народ Кыргызстана сделал удачный выбор, избрав на этот пост Аскара Акаевича.

Отмечая достоинства Аскара Акаевича, нельзя не отдать должное его жене Майрам Дуйшеновне. Без ее постоянной поддержки ему бы не выдержать той огромной нагрузки, которую судьба возложила на его плечи.

*С. Б. Гуревич, д.т.н., профессор,
ст. н. с. Физико-технического института
им. А. Ф. Иоффе РАН*

(цитируется по книге: Аскар Акаев. – Бишкек, 1993. - 166 с.)

Урок восточной культуры

Однажды я решал довольно сложную математическую задачу. И так как точному анализу она не поддавалась, решил применить классические приближенные методы. Но как только получил первые результаты, стало ясно, что в дальнейшем потребуются применение математического анализа. "Попробуй поработать с Аскарком Акаевым, - узнав о моей проблеме, посоветовал мне Сергей Александрович Майоров. - Он владеет математическим аппаратом прекрасно". Так состоялось наше знакомство.

Аспирант Акаев быстро вник в суть проблемы, стал пробовать различные варианты и скоро придумал оптимальный способ решения. Впоследствии в научной литературе он получил название "метод Акаева-Дульнева" и описан, например, в книге: *Кондратьев Г. М., Дульнев Г. Н., Платунов Е. С., Ярышев Н. А.* Прикладная физика: Теплообмен в приборостроении. СПб., 2003. - 550 с., - изданной в серии "Выдающиеся ученые Университета ИТМО".

До сих пор этот метод широко применяется в решении технических проблем и задач математической физики. Я же, поскольку наши научные интересы в тот момент столь тесно переплелись, стал вторым научным руководителем Аскара. Мне нравилось работать с ним. Спокойный, уверенный в себе, твердый человек. Никакой суеты в работе, никакой помпы и саморекламы.

Нравилась мне и исключительная деликатность Аскара. Вспоминая такой случай. Аспиранты обычно проходят педагогическую практику: читают лекции студентам, проводят практические занятия, участвуют в приеме экзаменов. И вот однажды Акаев ассистировал мне. Один из студентов пошел отвечать к нему, а не ко мне. Видимо, думал, что у молодого скромного преподавателя обязательно проскочит.

Краем уха прислушиваюсь. Студент несет какую-то чушь, ведет себя развязано. Акаев его внимательно слушает, кивает, иногда произносит: "Очень необычно. Ах, вы так полагаете?". Это подбадривает студента, его заносит все больше. И вот финал. "У вас такой оригинальный взгляд на предмет, что я хотел бы побеседовать с вами еще раз", - говорит Аскар и отодвигает зачетку.

До студента медленно доходит, что его попросту выставляют. Но как тонко Аскар это сделал! Другой бы просто заявил: "Вы не готовы!"

Отправляйтесь, поучите еще!" Но Аскар – это я понял в тот момент - прекрасно усвоил уроки восточной культуры. Его манера общения с людьми проистекает из того, что он очень бережно относится к людям, с которыми его сводит судьба.

Г. Н. Дульнев,

д.т.н., профессор СПбГУ ИТМО

(цитируется по книге:

Е. Авдеева. Первый. – Бишкек, 2000. - 128 с.)

Дорогой Геннадий Николаевич!

На Востоке говорят:

если хочешь осчастливить человека на день - хорошо накорми;

если хочешь осчастливить на всю жизнь - дай хорошее образование.

Мы, Ваши ученики, счастливы всю жизнь.

С искренней благодарностью и низким поклоном

всегда Ваш **А. Акаев.**

(Подпись на книге: Откровенный разговор. – М., 1998. - 160 с., – подаренной профессору Г. Н. Дульневу.)

А. А. Акаев, С. А. Майоров

Оптические методы обработки информации



Москва*
«Высшая школа»
1988

ВВЕДЕНИЕ

Оптические методы обработки информации находят все более широкое применение при решении важных народнохозяйственных задач, связанных с обработкой больших объемов информации. К ним относятся изучение природных ресурсов и анализ состояний сельскохозяйственных полей по аэрокосмическим снимкам, распознавание объектов различной природы на фотографических изображениях и рентгеновских снимках, получаемых в медицине, биологии, астрофизике, ядерной физике и других областях науки и техники; быстрая обработка многоканальных электрических сигналов, получаемых с помощью сейсмических, акустических и радиоприемных станций для обнаружения движущихся объектов в воздухе, под водой и под землей, создание оптических систем памяти для записи, хранения и оперативной выдачи патентно-технической и конструкторской документации в системах автоматизированного проектирования. Эти и подобные задачи, актуальность которых неуклонно возрастает, сложно решаются с помощью традиционных ЭВМ.

Хорошо известно, что основной проблемой исследования природных ресурсов Земли из космоса является обработка видеoinформации. Для иллюстрации объемов этой информации и скорости ее поступления достаточно показать, что только один снимок, полученный с помощью многозонального фотоаппарата и охватывающий площадь 100×100 км с разрешением 10 м, содержит приблизительно 10^8 бит информации. Ежедневно на Землю поступают сотни таких снимков. Для передачи этой информации служат цифровые радиолинии, работающие со скоростью 10—100 Мбит/с и более. Сопоставление параметров быстродействия и производительности современных вычислительных машин со скоростью поступления и объемами космической информации показывает невозможность построения на их основе систем обработки данных, работающих в реальном масштабе времени. Это вызвало необходимость разработки и создания оптоэлектронных систем регистрации, хранения и обработки космической видеoinформации.

Оптические методы позволяют производить как аналоговую, так и цифровую обработку информации. К настоящему времени наиболее исследованы возможности аналоговой оптической обработки информации. Когерентные аналоговые оптические вычислительные машины широко используются для решения специальных классов задач (обработ-

ка радиолокационных сигналов в РЛС с синтезированием апертуры; спектральный и корреляционный анализ, распознавание образов и др.). Характерной чертой оптических аналоговых вычислительных машин является то, что все элементы информации на входе преобразуются в результирующий сигнал на выходе одновременно. Благодаря этому достигается огромная производительность — более 10^{12} оп/с. Однако такие вычислительные машины, так же как и электронные аналоговые машины, имеют ограниченную точность вычислений — порядка 1%.

Интерес к цифровой оптической обработке информации на начальном этапе был вызван необходимостью преодоления тех проблем, с которыми столкнулась аналоговая оптическая вычислительная техника: малая точность вычислений и отсутствие гибкости, присущей электронной технике. В процессе развития этого направления был предложен ряд концепций построения оптоэлектронных вычислительных устройств и блоков, исследованы возможности создания соответствующей элементной базы, были разработаны перспективные оптические и оптоэлектронные логические элементы и функциональные узлы: трансфазор, волноводные логические элементы и схемы.

Трансфазор представляет собой оптический аналог электронного транзистора и является оптически бистабильным прибором, способным переключаться в одно из двух четко различимых состояний за время, измеряемое пикосекундами. Он может иметь такие же малые размеры, как и электронный транзистор. Для поддержания бистабильного состояния в трансфазоре требуется мощность порядка 10 мВт и энергия переключения порядка 10^{-15} Дж, в результате чего его энергетическая добротность может достигать значения 10^{-14} , т. е. на 2—3 порядка выше, чем у электронного транзистора. На основе трансфазора реализуется функционально полная система логических элементов, из которых можно строить любые логические схемы и функциональные узлы вычислительных машин. Успехи интегральной оптики позволяют надеяться, что технология получения оптических логических схем и функциональных узлов на базе трансфазора уже в скором времени сможет конкурировать с электронной технологией. На базе трансфазорных логических элементов может быть построена параллельная оптическая вычислительная машина с быстродействием порядка 10^{10} оп/с и более.

Кроме того, возможно создание волноводных электрооптических переключателей и модуляторов, способных конкурировать с аналогичными электронными приборами. Волноводные элементы с помощью диэлектрических одномодовых волноводов могут быть связаны в комбинационные логические схемы.

Следует отметить, что уже успешно эксплуатируются голографические архивные системы памяти, предназначенные для хранения как буквенно-цифровой информации, так и изображений. Созданы экспериментальные образцы оперативных голографических ЗУ большой емкости для ЭВМ, что свидетельствует о перспективности голографических методов в решении проблемы памяти для будущих высокопро-

изводительных вычислительных систем. Разрабатываются многоканальные волоконно-оптические линии передачи информации между устройствами ЭВМ с высоким быстродействием и большой пропускной способностью.

Перспективность развития цифровой оптической обработки информации заключается в больших потенциальных возможностях оптоэлектронных цифровых вычислительных систем, позволяющих мультиплексировать оптические сигналы. Для распространения оптических сигналов не требуется материальных проводников, что облегчает организацию их параллельной передачи и преобразования.

Необходимость создания таких вычислительных систем диктуется возможностью преодоления ряда принципиальных недостатков, присущих фон-Неймановским ЭВМ, которые ограничивают дальнейшее повышение их эффективности и производительности. Поэтому разработку таких систем следует рассматривать как один из альтернативных путей создания сверхпроизводительных вычислительных систем будущего наряду с разрабатываемыми в настоящее время мультипроцессорными супер-ЭВМ параллельного действия.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА КОГЕРЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ

§ 1.1. Двумерный оптический сигнал и его информационная структура

Оптическим сигналом называют световую волну, несущую определенную информацию. Особенностью световой волны по сравнению с радиоволной является то, что вследствие малой длины волны в ней может быть практически осуществлена передача, прием и обработка сигналов, модулированных не только по времени, но и по пространственным координатам. Это позволяет значительно увеличить объем вносимой в оптический сигнал информации.

Таким образом оптический сигнал в общем случае является функцией четырех переменных: трех пространственных координат (x, y, z) и времени (t) . Рассмотрим его математическое описание.

Электромагнитная волна представляет собой изменение во времени в каждой точке пространства электрического и магнитного полей, которые связаны между собой по закону индукции. Изменение магнитного поля создает переменное электрическое поле, которое в свою очередь порождает переменное магнитное поле. Электромагнитная волна распространяется в пространстве от одной точки к другой. Она характеризуется взаимно перпендикулярными векторами напряженностей электрического E и магнитного H полей, которые изменяются во времени по одному и тому же гармоническому закону:

$$U(x, y, z, t) = P(x, y, z) U(x, y, z, t) = P(x, y, z) A(x, y, z) \times \times \cos [2\pi\nu t + \varphi(x, y, z)]. \quad (1.1)$$

Световую волну можно представить с помощью электрического либо магнитного поля. В оптике чаще всего для этой цели используют электрическое поле, поскольку оно играет более важную роль. Например, в оптической голографии в результате действия электрического поля можно получать голограммы. Поэтому в дальнейшем будем считать, что (1.1) описывает электрическое поле световой волны. В этом случае $P(x, y, z)$ — единичный вектор, определяющий прямую, вдоль которой совершается колебание электрического поля в точке простран-

ства с координатами (x, y, z) и характеризующий плоскость поляризации в данной точке. Функция $U(x, y, z, t)$ — скалярная функция координат пространства и времени, численно равная мгновенному значению модуля вектора напряженности электрического поля $E(x, y, z, t)$; $A(x, y, z)$ — амплитуда колебания напряженности электрического поля в точке (x, y, z) ; ν — частота колебаний; $\varphi(x, y, z)$ — фаза световой волны в точке пространства с координатами (x, y, z) . Начальную фазу можно принять равной нулю в любой произвольной точке пространства. Тогда функция координат $\varphi(x, y, z)$ будет характеризовать разность фаз напряженности в этой точке и точке (x, y, z) . Кроме того, параметры $\nu = \text{const}$; $\mathbf{P}(x, y, z)$; $A(x, y, z)$; $\varphi(x, y, z)$ не зависят от времени t , так как рассматриваются только когерентные волны, а модуляция осуществляется по пространственным координатам.

Из (1.1) следует скалярная форма записи световой волны:

$$U(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos [2\pi\nu t + \varphi(x, y, z)]. \quad (1.2)$$

Обычно используют комплексную форму записи, которая является наиболее удобной для выполнения математических операций и преобразований; например, функцию $y = a \cos \psi$ записывают в виде $y = a \exp(i\psi)$. Согласно формуле Эйлера $\exp(\pm i\psi) = \cos \psi \pm i \sin \psi$, так что действительная функция y может быть получена из комплексной:

$$y = a \cos \psi = \text{Re } y = \text{Re} [a \exp(i\psi)],$$

где Re — действительная часть комплексной функции. Следовательно, выражение (1.2) можно представить в комплексной форме:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= A(x, y, z) \exp [i [2\pi\nu t + \varphi(x, y, z)]] = \\ &= A(x, y, z) \exp (i2\pi\nu t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Величину

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) = A(x, y, z) \exp [i\varphi(x, y, z)] \quad (1.4)$$

называют *комплексной амплитудой*. Она описывает пространственное распределение амплитуд $A(x, y, z)$ и фаз $\varphi(x, y, z)$ световой волны и является важной характеристикой монохроматической волны.

Временной множитель $\exp(i2\pi\nu t)$, являющийся гармонической функцией времени, обычно опускают. Он может быть введен, если это необходимо, на любом этапе преобразований. Поэтому в дальнейшем оптический сигнал будем представлять в виде (1.4). Таким образом, основными характеристиками световой волны являются амплитуда $A(x, y, z)$, фаза $\varphi(x, y, z)$ и поляризация, определяемая единичным вектором $\mathbf{P}(x, y, z)$. В оптических системах хранения и обработки информации, как правило, работают с двумерным оптическим сигналом, который описывается распределением комплексной амплитуды, фазы или поляризации световой волны по точкам пространства, лежащим в плоскости, перпендикулярной направлению распространения

волны. Если в рассматриваемой плоскости ввести координаты x, y , то информация, содержащаяся в двумерном сигнале, будет определяться комплексной амплитудой

$$U(x, y) = A(x, y) \exp [i\varphi(x, y)] \quad (1.5)$$

и поляризацией $\mathbf{P}(x, y)$, являющимися функциями двух пространственных координат. Следовательно, информация в световую волну может быть введена путем модуляции ее амплитуды, фазы и поляризации по двум пространственным координатам x, y .

§ 1.2. Распространение и дифракция света.

Интеграл Френеля—Кирхгофа

Электромагнитное поле в произвольной точке пространства в заданный момент времени t может быть описано с помощью скалярного волнового уравнения

$$\nabla^2 U(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

которое получают из уравнений Максвелла, устанавливающих связь между производными по координатам и времени от величин, характеризующих электромагнитное поле. Здесь c — скорость света; ∇^2 — оператор Лапласа, причем $\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Для монохроматического света с частотой ν решением волнового уравнения будет выражение, описывающее синусоидальное скалярное поле [1,2]:

$$U(x, y, z, t) = U(x, y, z) \exp(i2\pi\nu t). \quad (1.6)$$

Относительно таких волн волновое уравнение преобразуется к простейшему виду:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (1.7)$$

где $k = 2\pi\nu/c = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Наиболее простыми решениями уравнения (1.7) являются те, которые описывают однородную плоскую и симметричную сферическую волны.

Рассмотрим распространение плоской волны в пространстве. Волну называют *плоской*, если ее амплитуда и фаза в любой момент времени постоянны по всей плоскости, уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = C = \text{const},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к рассматриваемой плоскости; \mathbf{r} — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, принадлежащей этой плоскости (рис. 1.1). Плоская волна имеет комплексную амплитуду

$$U(x, y, z) = A_0 \exp(-ik\mathbf{n}\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

где A_0 — постоянная амплитуда волны.

Пусть имеются две параллельные плоскости P_1 и P_2 , описываемые уравнениями

$$nr_1 = C_1 = \text{const}; \quad nr_2 = C_2 = \text{const},$$

где r_1, r_2 — радиусы-векторы текущих точек плоскостей P_1 и P_2 . Допустим, что $C_2 > C_1$, т. е. плоскость P_2 относительно P_1 смещена по направлению вектора-нормали n (рис. 1.2). При $t = t_1$ в плоскости P_1 световая волна согласно (1.6) и (1.8) будет иметь фазу $\psi = 2\pi vt_1 - knr_1 = 2\pi vt_1 - kC_1$. Определим момент времени $t = t_2$, при котором такая же фаза будет в плоскости P_2 . Для этого запишем аналогичное уравнение относительно t_2 : $\psi = 2\pi vt_2 - knr_2 = 2\pi vt_2 - kC_2$. Из двух последних уравнений найдем $t_2 = t_1 + \Delta t$, где $\Delta t = \frac{C_1 - C_2}{c} > 0$. Следовательно, $t_2 > t_1$.

Таким образом, плоскости равных фаз с течением времени перемещаются параллельно самим себе, причем направление перемещения совпадает с направлением вектора n , т. е. плоская волна, описываемая выражением (1.8), распространяется по направлению вектора-нормали плоскости равной фазы.

Если $\cos \alpha, \cos \beta$ и $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора n (см. рис. 1.1), то комплексная амплитуда плоской световой волны

$$U(x, y, z) = A_0 \exp \left[-2\pi i \left(x \frac{\cos \alpha}{\lambda} + y \frac{\cos \beta}{\lambda} + z \frac{\cos \gamma}{\lambda} \right) \right] = A_0 \exp [-2\pi i (\xi x + \eta y + \zeta z)], \quad (1.9)$$

где

$$\xi = \cos \alpha / \lambda; \quad \eta = \cos \beta / \lambda; \quad \zeta = \cos \gamma / \lambda. \quad (1.10a)$$

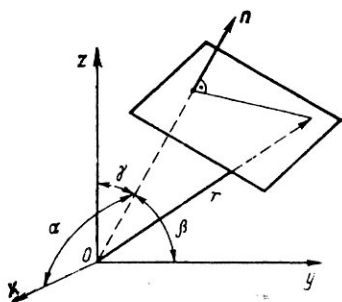


Рис. 1.1. Плоский волновой фронт в прямоугольной системе координат

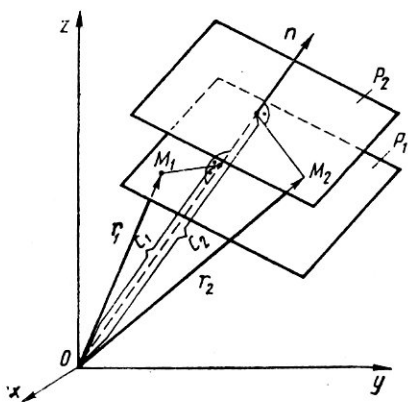


Рис. 1.2. Распространение плоской волны

Эти величины — пространственные частоты, обратные периодам волны, измеряемым соответственно по осям x , y , z . Пространственные частоты часто выражают через углы $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$, $\beta_1 = 90^\circ - \beta$ и $\gamma_1 = 90^\circ - \gamma$:

$$\xi = \sin \alpha_1 / \lambda; \quad \eta = \sin \beta_1 / \lambda; \quad \zeta = \sin \gamma_1 / \lambda. \quad (1.106)$$

Поскольку $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, с учетом (1.10) получим следующее соотношение:

$$\lambda^2 \xi^2 + \lambda^2 \eta^2 + \lambda^2 \zeta^2 = 1. \quad (1.11)$$

Решив данное уравнение относительно ζ , определим

$$\zeta = \pm \frac{1}{\lambda} (1 - \lambda^2 \xi^2 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}.$$

Подставив это выражение в (1.9), найдем комплексную амплитуду плоской волны:

$$U(x, y, z) = U(x, y, 0) \exp[-ikz(1 - \lambda^2 \xi^2 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}]. \quad (1.12)$$

Большой интерес представляют параксиальные волны, для которых направление распространения составляет очень маленький угол с осью z (угол γ мал, $\alpha = \beta = 90^\circ$). В этом случае комплексная амплитуда плоской волны

$$U(x, y, z) = A_0 \exp[-ik(\alpha_1 x + \beta_1 y + z)],$$

или

$$U(x, y, z) = A_0 \exp(-ikz) \exp[-ik(\alpha_1 x + \beta_1 y)], \quad (1.13)$$

так как $\sin \alpha_1 \approx \alpha_1$; $\sin \beta_1 \approx \beta_1$; $\sin \gamma_1 \approx 1$.

Рассмотрим распространение сферической волны. Для этого волновое уравнение (1.7) представим в сферической системе координат r , θ , φ (рис. 1.3), которые связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями: $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$; $z = r \cos \theta$. Если $\partial U / \partial \theta = 0$, $\partial U / \partial \varphi = 0$, то волновое уравнение (1.7) в сферической системе координат запишется в виде [3] $\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + k^2 (rU) = 0$. Для расходящейся сферической волны

$$U = A \frac{\exp(-ikr)}{r}, \quad (1.14)$$

или

$$U = A \exp[-ik \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}] / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где A — некоторая постоянная. Поверхность равных фаз данной волны определяется из условия $kr = \text{const}$, откуда $r = \text{const}$. Это означает, что поверхностью равных фаз, т. е. волновой поверхностью, является сфера. Направление распространения волны совпадает с направлением радиуса-вектора \mathbf{r} .

Параксиальное приближение для сферической волны имеет место в том случае, когда $z^2 \gg x^2 + y^2$. При этом $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}\right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$. Поэтому комплексная амплитуда сферической волны в параксиальном приближении

$$U(x, y, z) \approx \frac{A}{z} \exp(-ikz) \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right). \quad (1.15)$$

Проанализируем дифракцию световой волны на прозрачном с периодическим синусоидальным распределением амплитудного пропускания. Подобные прозрачные называют *дифракционными решетками*. Пусть плоская световая волна амплитудой A_0 , распространяющаяся в направлении положительной полуоси z , падает на прозрачный, находящийся в плоскости $z = 0$. Допустим, что прозрачный имеет амплитудное пропускание

$$t(x, y) = t_0 - t_1 \cos(2\pi\eta y), \quad (1.16)$$

являющаяся периодической функцией от y с пространственной частотой η , а t_0 и t_1 — вещественные постоянные. При $t_0 \geq t_1 > 0$ прозрачный не вносит фазового сдвига. Непосредственно за прозрачным комплексная амплитуда волны

$$U(x, y, 0) = A_0 t(x, y) = A_0 t_0 + A_0 t_1 \cos 2\pi\eta y = A_0 t_0 + 0,5 A_0 t_1 \times \\ \times \exp(2\pi i \eta y) + 0,5 A_0 t_1 \exp(-2\pi i \eta y). \quad (1.17)$$

Первый член данного выражения описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z , как и падающая волна. Второй и третий члены — плоские волны, направления распространения которых с осью z составляют углы φ_1 и φ_2 , причем $\varphi_1 = -\varphi_2 = \arcsin(\lambda\eta)$ (рис. 1.4). Таким образом, в результате дифракции часть падающей на

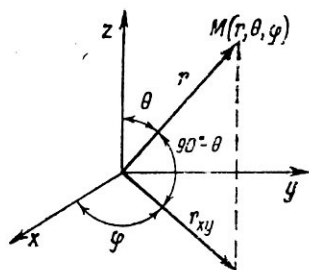


Рис. 1.3. Связь между координатами сферической и прямоугольной систем координат

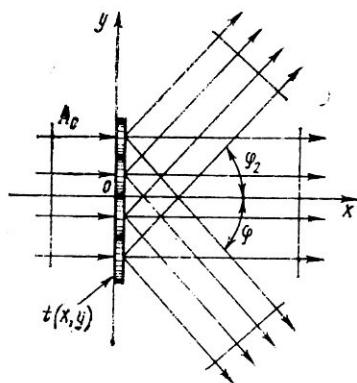


Рис. 1.4. Дифракция плоской волны на синусоидальной дифракционной решетке

транспарант световой волны отклоняется от первоначального направления распространения.

С помощью соотношения (1.12) можно определить комплексную амплитуду света при любом удалении от транспаранта, например при $z = d$:

$$U(x, y, d) = A_0 t_0 \exp\left(-i \frac{2\pi d}{\lambda}\right) + 0,5 A_0 t_1 \exp(i2\pi\eta y) \times \\ \times \exp[-ikd(1 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}] + 0,5 A_0 t_1 \exp(-i2\pi\eta y) \times \\ \times \exp[-ikd(1 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}]. \quad (1.18)$$

Для первого члена выражения $\xi = \eta = 0$, для второго и третьего членов $\xi = 0$. Из (1.18) следует, что если $\lambda\eta \rightarrow 1$, то возникают поверхностные волны. Они будут затухающими при $\lambda > 1/\eta$, т. е. когда длина волны больше периода дифракционной решетки, поскольку при этом $\sqrt{1 - \lambda^2 \eta^2}$ становится мнимой величиной, а $\exp[-ikd(1 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}]$ — экспоненциальным множителем, убывающим с увеличением d .

Амплитудное пропускание двумерной дифракционной решетки в общем случае описывается комплексной периодической функцией двух переменных x и y . Однако его также легко представить в виде суммы простейших синусоидальных функций путем разложения в ряд Фурье [2]:

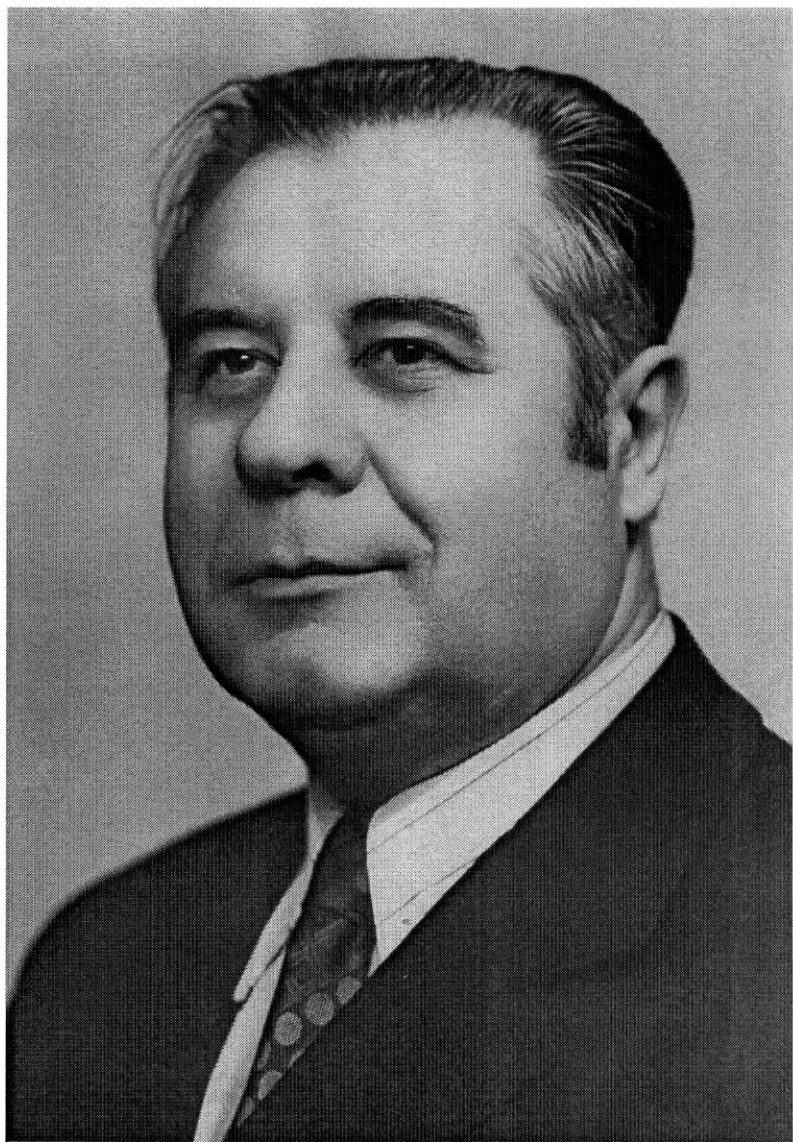
$$t(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{nm} \exp(-i2\pi\xi_n x) \exp(-i2\pi\eta_m y).$$

Дифрагированная на таком транспаранте световая волна представляет собой суперпозицию бесконечного числа плоских волн с амплитудами, пропорциональными соответствующим коэффициентам разложения t_{nm} и направлениями распространения, определяемыми $\cos \alpha_n = \lambda\xi_n$ и $\cos \beta_m = \lambda\eta_m$. Следовательно, суммарная амплитуда дифрагированных волн в плоскости $z = d$

$$U(x, y, d) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{nm} \exp[-ikd(1 - \lambda^2 \xi_n^2 - \lambda^2 \eta_m^2)^{1/2}] \times \\ \times \exp(-i2\pi\xi_n x) \exp(-i2\pi\eta_m y).$$

В общем случае амплитудное пропускание дифрагирующего объекта является комплексной непериодической функцией двух переменных x и y , поэтому $t(x, y)$ заменяют интегралом Фурье. Комплексную амплитуду дифрагированной волны в плоскости $z = d$ при этом также выражают с помощью интеграла

$$U(x, y, d) = A_1 \iint T(\xi, \eta) \exp[-ikd(1 - \lambda^2 \xi^2 - \lambda^2 \eta^2)^{1/2}] \times \\ \times \exp(-i2\pi\xi x) \exp(-i2\pi\eta y) d\xi d\eta, \quad (1.19)$$



Профессор Сергей Александрович Майоров (1914–1986)

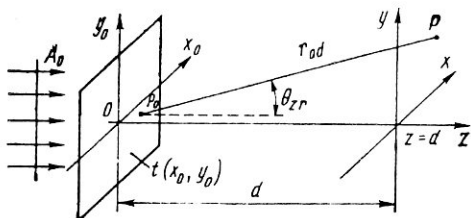


Рис. 1.5. К решению задачи дифракции с помощью интеграла Френеля—Кирхгофа

где $T(\xi, \eta)$ — преобразование Фурье от $t(x, y)$, причем интегрирование производят в области, удовлетворяющей неравенству $\xi^2 + \eta^2 \leq 1/\lambda^2$ (вне этой области волны быстро затухают при удалении от транспаранта). Следовательно, можно сделать следующее заключение: если плоская волна амплитудой A_1 , распространяющаяся в

направлении оси z , падает на помещенный в плоскости $z = 0$ транспарант с амплитудной функцией пропускания $t(x, y)$, то спектр комплексной амплитуды в плоскости $z = d$ имеет вид

$$U(\xi, \eta)|_{z=d} = A_1 T(\xi, \eta) \exp[-ikd(1 - \lambda^2\xi^2 - \lambda^2\eta^2)^{1/2}]. \quad (1.20)$$

Для параксиальных волн ($\xi, \eta \ll 1$), пользуясь приближением $\sqrt{1 - \lambda^2\xi^2 - \lambda^2\eta^2} \approx 1 - 0,5 \lambda^2(\xi^2 + \eta^2)$, справедливым при малых значениях ξ и η , выражение (1.20) можно представить следующим образом:

$$U(\xi, \eta)|_{z=d} \approx A_1 \exp(-ikd) T(\xi, \eta) \exp[i\pi\lambda d(\xi^2 + \eta^2)]. \quad (1.21)$$

Ввиду того, что фаза $\varphi = \pi\lambda d(\xi^2 + \eta^2)$ в выражении (1.21) является параболической функцией пространственных частот, это приближение называют *параболическим*. Согласно правилу Рэлея искажение фазы волны не должно превышать $\pi/2$, т. е. устанавливаются границы применимости параболического приближения [2]:

$$\xi^4 < \frac{2}{\lambda^3 d^3}. \quad (1.22)$$

Решение задачи дифракции можно представить также с помощью интеграла Френеля — Кирхгофа [3]:

$$U(x, y, d) = \frac{iA_0}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_0, y_0) \frac{\exp(-ikr_{0d})}{r_{0d}} \cos \theta_{zr} dx_0 dy_0, \quad (1.23)$$

где $r_{0d} = \sqrt{d^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (рис. 1.5); x_0, y_0 и x, y — координаты точек, принадлежащих плоскостям $z = 0$ и $z = d$. Угол между положительным направлением оси z и отрезком прямой r_{0d} , $\cos \theta_{zr}$ называют *коэффициентом наклона*. Формулы (1.19) и (1.23) на расстоянии $z = d$ от плоскости дифракции дают один и тот же результат [2]. Интеграл (1.23) является математическим выражением известного принципа Гюйгенса — Френеля.

§ 1.3. Дифракционные формулы Френеля и Фраунгофера

Рассмотрим дифракцию света, падающего на непрозрачный экран с отверстием произвольной формы. Отверстие в экране называют *апертурой*. В зависимости от удаленности источника света и плоскости наблюдения от дифрагирующего экрана различают зоны дифракции Фраунгофера и Френеля. Дифракция Фраунгофера наблюдается в дальней зоне, удаленной от дифрагирующего экрана на расстояние, во много раз превышающее размеры апертуры. Дифракция Френеля имеет место в ближней зоне, распространяющейся до зоны дифракции Фраунгофера, как это показано на рис. 1.6. Дифракция Фраунгофера по существу является предельным случаем дифракции Френеля при больших расстояниях от экрана. Заметим, что зона дифракции Френеля также начинается на некотором расстоянии от экрана. Непосредственно за апертурой вблизи экрана находится область тени (рис. 1.6). Здесь и далее будем предполагать, что размеры отверстия на экране велики по сравнению с длиной волны падающего света, а источник света находится на таком расстоянии от экрана, что свет, падающий на экран, имеет практически плоский волновой фронт и постоянную амплитуду.

В общем случае апертура представляет собой транспарант с двумерной амплитудной функцией пропускания $t(x_0, y_0)$. В частном случае апертура является отверстием с амплитудной функцией пропускания

$$t(x_0, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{внутри апертуры;} \\ 0 & \text{в остальной области.} \end{cases} \quad (1.24)$$

Данный случай важен, поскольку часто встречается при анализе оптических систем хранения и обработки информации [3,4]. В любом из рассмотренных случаев непосредственно за экраном при $z \rightarrow +0$

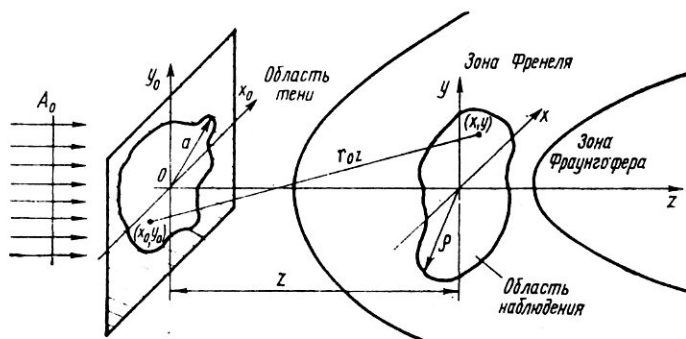


Рис. 1.6. Зоны дифракции Фраунгофера и Френеля

световое поле описывается распределением амплитуд

$$U_0(x_0, y_0) = U(x_0, y_0, +0) = A_0 t(x_0, y_0). \quad (1.25)$$

Свет, падающий на экран, также имеет произвольную комплексную амплитуду $U(x, y, -0)$. Тогда световое поле имеет за экраном комплексную амплитуду:

$$U(x_0, y_0) = U(x_0, y_0, +0) = U(x_0, y_0, -0) t(x_0, y_0). \quad (1.26)$$

В дальнейшем будем считать, что непосредственно за экраном световое поле имеет комплексную амплитуду $U(x_0, y_0)$. Поэтому интеграл Френеля — Кирхгофа (1.23) для рис. 1.6 можно записать в виде

$$U(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \frac{\exp(-ikr_{0z})}{r_{0z}} \cos \theta_{zr} dx_0 dy_0, \quad (1.27)$$

где $r_{0z} = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Приближение Френеля. Для дифракционного поля в области, удаленной от экрана на расстояние, значительно превышающее максимальный размер апертуры, интеграл Френеля — Кирхгофа (1.27) значительно упростится. Действительно, если

$$|x - x_0| \ll z, \quad |y - y_0| \ll z, \quad (1.28)$$

то можно полагать, что $\cos \theta_{zr} \approx 1$ с ошибкой менее 5%, если угол $\theta_{zr} < 18^\circ$. Расстояние r_{0z} в знаменателе подынтегрального выражения (1.27) можно заменить координатой z , поскольку

$$r_{0z} = z \sqrt{1 + [(x - x_0)/z]^2 + [(y - y_0)/z]^2} \approx z, \quad (1.29)$$

и $(x - x_0)^2/z^2 \approx 0$, $(y - y_0)^2/z^2 \approx 0$ согласно (1.28). Однако выражение (1.29) неприемлемо для замены r_{0z} в экспоненциальном члене, так как на экспоненту влияет даже малое изменение r_{0z} . Для получения более точного приближения воспользуемся разложением $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\alpha^2 + \dots$; $|\alpha| < 1$. Учитывая первые два члена данного разложения для аппроксимации квадратного корня, примем

$$r_{0z} \approx z \left[1 + \frac{(x - x_0)^2}{2z^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2z^2} \right] = z + \frac{(x - x_0)^2}{2z} + \frac{(y - y_0)^2}{2z}. \quad (1.30)$$

С учетом (1.28) — (1.30) интеграл Френеля — Кирхгофа можно записать в следующем упрощенном виде:

$$U(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp \left\{ -\frac{ik}{2z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} dx_0 dy_0. \quad (1.31)$$

Данное выражение называют *приближением Френеля*, а соответствующее ему поле — *дифракционным полем Френеля*.

Интегральное преобразование вида

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[-\frac{i}{2}(\xi - x)^2\right] dx, \quad (1.32)$$

где

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \exp\left[-\frac{i}{2}(x - \xi)^2\right] d\xi, \quad (1.33)$$

называют *преобразованием Френеля*. Следовательно, приближение Френеля (1.31) представляет собой двумерное преобразование Френеля дифрагировавшего на экране светового поля.

Приближение Френеля справедливо в зоне [3]

$$\sqrt[3]{\frac{(a+\rho)^4}{\lambda}} \leq z \leq \frac{l_{\min}^4}{\lambda^3}, \quad (1.34)$$

где a — максимальный радиус апертуры; ρ — максимальный радиус области наблюдения в плоскости z (см. рис. 1.6); l_{\min} — наименьшая неоднородность распределения светового поля $U_0(x_0, y_0)$, связанная с максимальной пространственной частотой поля $\nu_{\max} = 2\pi/l_{\min}$.

Приближение Фраунгофера. Ранее отмечалось, что дифракция Фраунгофера является предельным случаем дифракции Френеля при больших значениях z , т. е. в дальней зоне. При этом можно принять более жесткое допущение, нежели чем (1.28), а именно

$$\frac{\lambda_0^2 + y_0^2}{\lambda} \ll z. \quad (1.35)$$

Рассмотрим приближение Френеля, записанное в виде (1.33). С учетом допущения (1.35) можно принять $\exp\left[-\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \approx 1$. Тогда дифракционная формула (1.33) еще более упростится:

$$U(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \exp\left[-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \times \\ \times \exp\left[i\frac{k}{z}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0. \quad (1.36)$$

Полученное приближение имеет основной множитель в виде интеграла, являющегося преобразованием Фурье (см. приложение I) распределения комплексных амплитуд $U_0(x_0, y_0)$ света, дифрагировавшего на экране, и его называют *приближением Фраунгофера*.

Таким образом, дифракция Фраунгофера представляет собой фурье-образ светового поля, дифрагировавшего на экране, умноженный на

квадратичный фазовый множитель $\exp\left[-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right]$. Если интересующая область в плоскости наблюдения дифракции Фраунгофера лежит вблизи оси z , так что выполняется условие

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda} \leq \frac{\rho^2}{\lambda} \ll z, \quad (1.37)$$

или $2\rho \leq \sqrt{\lambda z}$, то

$$\exp\left[-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \approx 1.$$

В последнем случае приближение Фраунгофера упрощается:

$$U(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp\left[i\frac{k}{z}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0. \quad (1.38)$$

Зона дифракции Фраунгофера определяется из условия [3]

$$z > \frac{4a^2}{\lambda}. \quad (1.39)$$

Если $a = 100$ мкм; $\lambda = 0,63$ мкм, то зоне дифракции Фраунгофера соответствует условие $z > 6,35$ см.

Приближение тени. Если требуется определить поле вблизи экрана, то используют приближение тени:

$$U(x, y, z) = e^{ikz} U_0(x_0, y_0), \quad (1.40)$$

справедливое при [3]

$$z \leq \frac{l_{\min}^2}{5\lambda}. \quad (1.41)$$

§ 1.4. Оптические системы, выполняющие преобразование Фурье

С помощью простой сферической линзы можно создавать картину, являющуюся фурье-образом входного изображения. Благодаря этому свойству, а также возможности применения линз для формирования световых пучков требуемой конфигурации они находят широкое применение в оптических системах хранения и обработки информации.

Рассмотрим простейшую оптическую систему (рис. 1.7), состоящую из одной тонкой сферической линзы с фокусным расстоянием f , помещенной в плоскости $z = 0$, и расположенного вплотную к ней транспаранта с комплексным амплитудным пропусканием $t(x_0, y_0)$. Линзу называют *тонкой*, если луч, входящий в точку с координатами (x_0, y_0) , выходит из нее на противоположной поверхности в точке примерно с теми же координатами. Это означает, что смещением луча внутри линзы можно пренебречь; линза задерживает фронт падающей

волны на значение, пропорциональное толщине линзы в каждой точке. Следовательно, тонкую линзу можно рассматривать как транспарант, осуществляющий фазовую модуляцию и имеющий функцию пропускания вида $t_{\pi}(x, y) = \exp[i\Delta\varphi(x, y)]$, где функция $\Delta\varphi(x, y)$ пропорциональна толщине линзы в точке с координатами (x, y) . Нетрудно показать [4], что

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2). \quad (1.42)$$

Таким образом, соответствующее тонкой сферической линзе комплексное пропускание

$$t_{\pi}(x, y) = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)\right] = \exp\left[\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2)\right]. \quad (1.43)$$

Допустим, что на рассматриваемую оптическую систему (рис. 1.7) падает плоская волна амплитудой A_0 , распространяющаяся в положительном направлении оси z . Комплексная амплитуда света непосредственно вблизи линзы справа от нее равна произведению функции пропускания транспаранта и линзы:

$$U_0(x_0, y_0) = A_0 t(x_0, y_0) t_{\pi}(x_0, y_0) = A_0 t(x_0, y_0) \times \exp\left[\frac{ik}{2f} (x_0^2 + y_0^2)\right]. \quad (1.44)$$

Далее волна распространяется в свободном пространстве, поэтому комплексная амплитуда света на любом расстоянии от линзы может быть рассчитана с помощью интеграла Френеля — Кирхгофа (1.27). Для расчета распределения комплексных амплитуд света на расстоянии $z = d$ от линзы воспользуемся приближением Френеля (1.31). Тогда

$$U(x, y, d) = \frac{ik \exp(-ikd)}{2\pi d} \iint U_0(x_0, y_0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2d} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (1.45)$$

Интегрирование производят по всей поверхности линзы. Подставим в (1.45) выражение (1.44), опустив несущественный для дальнейшего анализа постоянный фазовый множитель $\exp(-ikd)$,

$$U(x, y, d) = \frac{ikA_0}{2\pi d} \iint t(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2f} (x_0^2 + y_0^2)\right] \times \exp\left\{-\frac{ik}{2d} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (1.46)$$

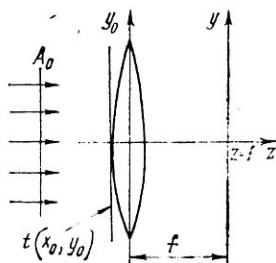


Рис. 1.7. Схема простейшей оптической системы, выполняющей преобразование Фурье

В результате упрощения данного интеграла путем разложения квадратов $(x - x_0)^2$ и $(y - y_0)^2$ получим

$$\begin{aligned}
 U(x, y, d) &= \frac{ikA_0}{2\pi d} \iint t(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \\
 &\times \exp\left[\frac{-ik}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right] \times \\
 &\times \exp\left[-\frac{ik}{d}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0 = \frac{ikA_0}{2\pi d} \exp\left[-\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right] \iint t(x_0, y_0) \times \\
 &\times \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right] \exp\left[-\frac{ik}{d}(xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0. \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

Если $d = f$, т. е. рассматривается распределение комплексных амплитуд света в задней фокальной плоскости линзы, то выражение (1.47) еще более упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 U(\xi, \eta) &= \frac{ikA_0}{2\pi f} \exp[-i\pi(\xi^2 + \eta^2)] \iint t(x, y) \times \\
 &\times \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dx dy, \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

где

$$\xi = x/(\lambda f); \quad \eta = y/(\lambda f). \quad (1.49)$$

Интеграл в данном выражении представляет собой двумерное преобразование Фурье функции $t(x, y)$ при условии, что функция $t(x, y)$ тождественно равна нулю за пределами поверхности линзы. Это условие позволяет расширить пределы интегрирования до бесконечности, что и требуется для преобразования Фурье (см. приложение I).

Таким образом, если на тонкую сферическую линзу с примыкающим к ней транспарантом падает плоская световая волна, то в задней фокальной плоскости линзы образуется световое поле с распределением комплексных амплитуд, пропорциональным произведению квадратичного фазового множителя и фурье-образа функции пропускания транспаранта.

В тех случаях, когда важна только интенсивность света, квадратичный фазовый множитель в выражении (1.48) не учитывают. Эффект, обусловленный этим множителем, эквивалентен действию тонкой рассеивающей (вогнутой) линзы с фокусным расстоянием f , помещенной в плоскости $z = f$. Если в плоскость $z = f$ поместить тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием

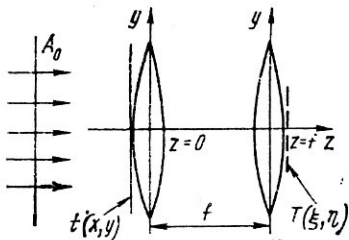


Рис. 1.8. Оптическая система, выполняющая точное преобразование Фурье

f , то этот фазовый множитель будет компенсирован. В результате получают оптическую систему (рис. 1.8), выполняющую точное преобразование Фурье:

$$U(\xi, \eta) = \frac{ikA_0}{2\pi f} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dx dy. \quad (1.50)$$

Предполагается, что за пределами поверхности транспаранта $t(x, y) \equiv 0$. Если линза имеет неограниченные размеры, а транспарант совершенно прозрачен, т. е. $t(x, y) = 1$, то (см. приложение П. 1)

$$U(\xi, \eta) = \frac{ikA_0}{2\pi f} \delta(\xi, \eta). \quad (1.51)$$

Следовательно, падающая на линзу плоская световая волна фокусируется в точку на задней фокальной плоскости линзы. Линза конечных размеров образует световое пятно малых, но все же конечных размеров, что и наблюдается на практике.

§ 1.5. Преобразование оптического сигнала с помощью линейной пространственно-инвариантной системы

Проанализируем прохождение пространственного оптического сигнала (1.5) через линейную оптическую систему. Как известно, любую линейную систему можно характеризовать линейным математическим оператором, описывающим преобразование входных сигналов в выходные. Подобный математический оператор, соответствующий нашей системе, обозначим L . Тогда зависимость выходного оптического сигнала $U_D(x_D, y_D)$ от входного $U_I(x_I, y_I)$ имеет вид

$$U_D(x_D, y_D) = L\{U_I(x_I, y_I)\}. \quad (1.52)$$

Линейным системам присуще свойство суперпозиции:

$$L[k_1 U_I(x_I, y_I) + k_2 V_I(x_I, y_I)] = k_1 L[U_I] + k_2 L[V_I]. \quad (1.53)$$

Таким образом, отклик линейной системы на произвольный входной сигнал можно представить в виде суперпозиции откликов на определенные стандартные сигналы, на которые можно разложить входной сигнал. В этом заключается важное преимущество линейных систем, которое существенно облегчает их анализ и синтез.

Следовательно, необходимо найти способ разложения входного сигнала на элементарные (стандартные). Такое разложение можно осуществить двумя путями в зависимости от того, в какой области производится анализ: в пространственной или пространственно-частотной. Наиболее простое и удобное разложение в пространственной области можно получить, используя в качестве элементарных сигналов точечные, описываемые δ -функциями Дирака.

Физической интерпретацией точечного сигнала служит точечный источник света. Любой входной оптический сигнал можно представить в виде

$$U_I(x_I, y_I) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x'_I, y'_I) \delta(x'_I - x_I, y'_I - y_I) dx'_I dy'_I. \quad (1.54)$$

Данное соотношение характеризует фильтрующее свойство δ -функции и является желаемым разложением. При этом отклик системы (1.50) на входной сигнал (1.54)

$$U_D(x_D, y_D) = L \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x'_I, y'_I) \delta(x'_I - x_I, y'_I - y_I) dx'_I dy'_I \right]. \quad (1.55)$$

Пользуясь свойством линейности оператора L , последнее выражение перепишем в виде

$$U_D(x_D, y_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x'_I, y'_I) L[\delta(x'_I - x_I, y'_I - y_I)] dx'_I dy'_I. \quad (1.56)$$

Отклик системы на элементарный входной сигнал, описываемый δ -функцией, называют *импульсным откликом системы h* . Импульсный отклик системы характеризует распределение комплексной амплитуды света в ее выходной плоскости, соответствующее точечному источнику света во входной плоскости. По этой причине отклик h в оптике называют *функцией рассеяния точки*. Из соотношения (1.56) следует, что

$$h(x_D, y_D; x'_I, y'_I) = L[\delta(x'_I - x_I, y'_I - y_I)]. \quad (1.57)$$

С учетом данного обозначения (1.56) примет вид

$$U_D(x_D, y_D) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x_I, y_I) h(x_D, y_D; x_I, y_I) dx_I dy_I. \quad (1.58)$$

Данное соотношение, известное под названием *интеграл суперпозиции*, является основным, связывающим вход и выход линейной системы. Согласно (1.58) линейная система полностью характеризуется ее откликом на входной импульсный сигнал, т. е., зная импульсный отклик системы, можно определить отклик системы на любой входной сигнал.

Рассмотрим важный подкласс линейных систем, который принято называть инвариантным. Линейную систему называют *инвариантной*, если сдвиг входного сигнала вызывает аналогичный сдвиг выходного сигнала без изменения его структуры. Следовательно, импульсный отклик линейной инвариантной системы должен быть инвариантным к сдвигу координат. Применительно к линейной оптической системе это означает, что

$$h(x_D, y_D; x_I, y_I) = h(x_D - x_I, y_D - y_I). \quad (1.59)$$

Реальные оптические системы, как правило, инвариантны лишь в пределах ограниченных областей (изопланарных участков) входной и выходной плоскостей, окружающих оптическую ось системы. В этом состоит одно из отличий пространственных оптических систем от обычных временных электрических систем, инвариантность которых во времени не ограничена.

Для линейной пространственно-инвариантной оптической системы (1.59) интеграл суперпозиции

$$U_D(x_D, y_D) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x_I, y_I) h(x_D - x_I; y_D - y_I) dx_I dy_I. \quad (1.60)$$

Таким образом, выходной сигнал линейной пространственно-инвариантной системы представляет собой свертку входного сигнала и импульсного отклика системы, т. е. $U_D = U_I * h$.

Ограничимся рассмотрением линейных пространственно-инвариантных оптических систем, для которых соотношение (1.60) будет основным. Зависимость выходного сигнала от входного такой системы проще всего определяется в пространственно-частотной области. Применяя фурье-преобразование к (1.60), получим

$$U_D(\xi, \eta) = U_I(\xi, \eta) H(\xi, \eta), \quad (1.61)$$

где

$$U_D(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_D(x, y) \exp[-2\pi i (\xi x + \eta y)] dx dy;$$

$$U_I(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_I(x_I, y_I) \exp[-2\pi i (\xi x + \eta y)] dx dy;$$

$$H(\xi, \eta) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-2\pi i (\xi x + \eta y)] dx dy.$$

Здесь использовалась теорема свертки, согласно которой фурье-образ свертки равен произведению фурье-образов свертываемых функций. Фурье-образ импульсного отклика системы $H(\xi, \eta)$ называют *передаточной функцией системы*. В соответствии с полученным соотношением фурье-образ выходного сигнала линейной пространственно-инвариантной оптической системы равен произведению фурье-образов входного сигнала и передаточной функции системы. Анализ и синтез линейных пространственно-инвариантных оптических систем удобно проводить в пространственно-частотной области, так как трудоемкая операция свертки (1.60), которую необходимо выполнить, чтобы найти выходной сигнал системы, заменяется сравнительно простой последовательностью операций нахождения спектров входного сигнала и импульсного отклика системы, их перемножения и об-

ратного преобразования Фурье. Кроме того, фурье-образ входного сигнала в оптических системах обработки информации реализуется в виде физически существующего распределения комплексных амплитуд света в определенной плоскости системы, в то время как в электрических системах фурье-образы не соответствуют реальным физическим сигналам. Поэтому необходимость использования преобразований Фурье для анализа и синтеза оптических систем обусловлена физической сущностью преобразований, осуществляемых оптическими элементами и системами.

Таким образом, для линейных пространственно-инвариантных оптических систем наиболее удобным разложением входных сигналов является представление в виде интеграла Фурье, т. е. разложение на комплексные экспоненциальные функции разных пространственных частот вида

$$U_I(\xi, \eta) \exp\{2\pi i(x\xi + y\eta)\}. \quad (1.62)$$

Данная функция описывает плоскую световую волну с комплексной амплитудой $U_I(\xi, \eta)$ и с направляющими косинусами $\cos \alpha = \lambda\xi$; $\cos \beta = \lambda\eta$. Следовательно, разложение входного сигнала на комплексные экспоненциальные функции

$$U_I(x_I, y_I) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_I(\xi, \eta) \exp[2\pi i(x_I \xi + y_I \eta)] d\xi d\eta \quad (1.63)$$

физически можно интерпретировать как представление сложной входной световой волны в виде суммы плоских волн, распространяющихся в различных направлениях. Изменения амплитуды и фазы любой из этих волн при прохождении через оптическую систему определить просто, так как амплитуда волны умножается на $|H(\xi, \eta)|$, фаза сдвигается на $\arg |H(\xi, \eta)|$, где $H(\xi, \eta)$ — передаточная функция системы. Чтобы найти сигнал на выходе системы, нужно сложить все плоские волны с их выходными характеристиками.

§ 1.6. Дискретизация оптического сигнала.

Теорема выборки Котельникова—Шеннона

Для анализа и обработки оптического сигнала с помощью ЭВМ функцию $f(x, y)$, описывающую этот сигнал, подвергают дискретизации путем представления ее набором выборочных значений, взятых в дискретной совокупности точек плоскости xy . Очевидно, что чем меньше шаги дискретизации (выборки), тем точнее выборочные значения будут представлять функцию $f(x, y)$. Однако для функций с ограниченной шириной спектра можно осуществить точное восстановление, даже если шаги выборки не превышают предельного значения (теорема выборки Котельникова — Шеннона [1,2]).