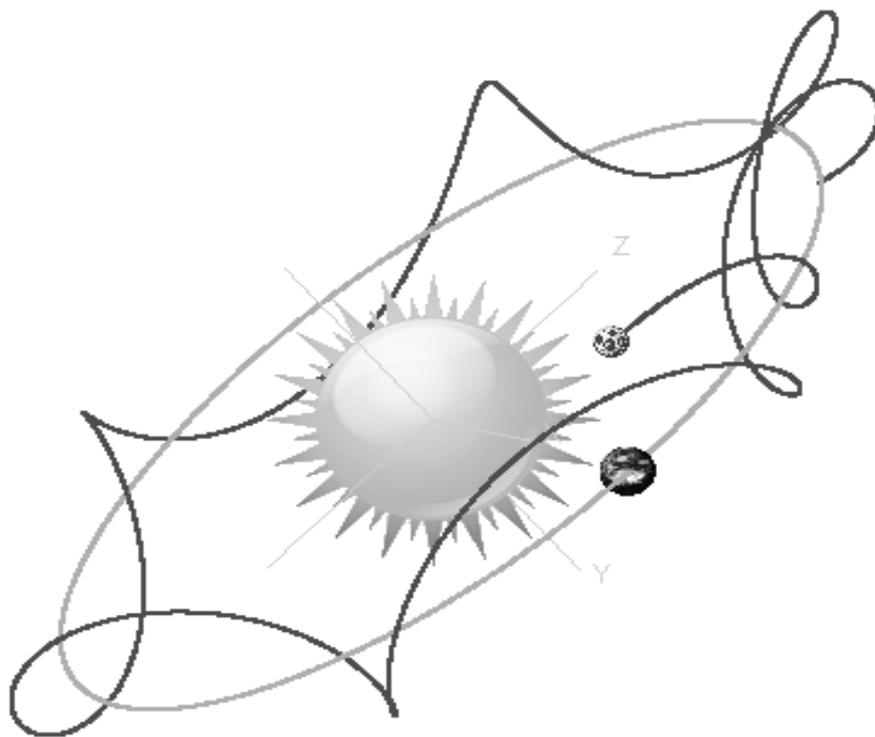


А.С. Чирцов  
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ  
КЛАССИЧЕСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ  
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.С. Чирцов

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ  
КЛАССИЧЕСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ  
МЕХАНИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

Учебное пособие

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2016

А.С. Чирцов, Конспект лекций по курсу классической и релятивистской механики материальной точки. – СПб: Университет ИТМО, 2016. – 64 с.

Учебное пособие содержит сводку основных математических соотношений и идей их обоснования по углубленному курсу механики материальной точки вместе с поясняющими их рисунками и краткими текстовыми замечаниями. Представленный в пособии материалы по форме и содержанию максимально приближены к студенческому конспекту и предназначены для сопровождения самостоятельной работы обучающихся по освоению материала теоретической части курса и подготовке к аттестациям.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по углубленным программам в созданных в рамках реализации Университетом ИТМО Программы 5-100 Академических бакалавриатов: 01.03.02 – Математическое моделирование; 01.03.02 – Математические модели и алгоритмы в разработке программного обеспечения; 01.03.02 – Математические модели и алгоритмы в разработке программного обеспечения; 12.03.03 – Компьютерная фотоника; 12.03.03 – Оптические и квантовые технологии передачи, записи и обработки информации; 16.03.01 – Световая инженерия; 16.03.01 – Техническая физика.

Рекомендовано к печати Ученым Советом Естественно-Научного Факультета № \_\_\_\_\_, 25.05.2016



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2016

© Чирцов А.С., 2016

Введение: основные принципы классической и релятивистской механики

1.1 Область применимости

$v_i \ll c$ $\frac{\hbar}{mv\Delta L} \ll 1$	<p>(1.1)</p>	<p>Область применимости классической механики: при невыполнении первого неравенства необходимо релятивистское описание, второго — квантовомеханическое.</p>
--	--------------	---

1.2 Временное описание

	<p><b>Рис.1.1</b> Большие временные интервалы и методы их измерения.</p>
	<p><b>Рис.1.2</b> Малые интервалы времени и методы их измерения.</p>

### 1.3. Пространственное описание

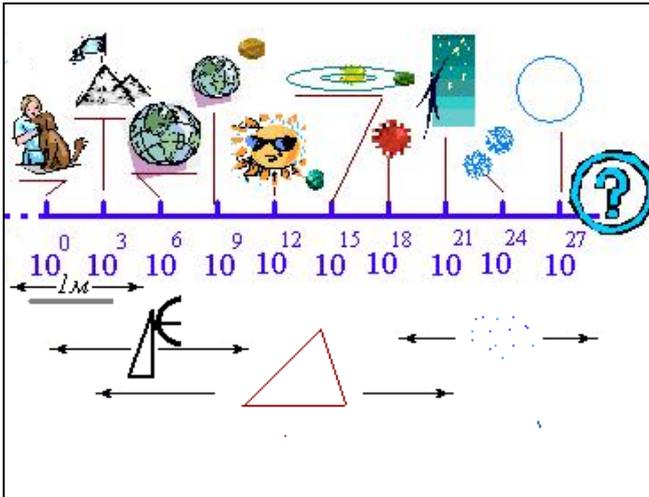


Рис.1.3

Большие расстояния и методы их измерения.

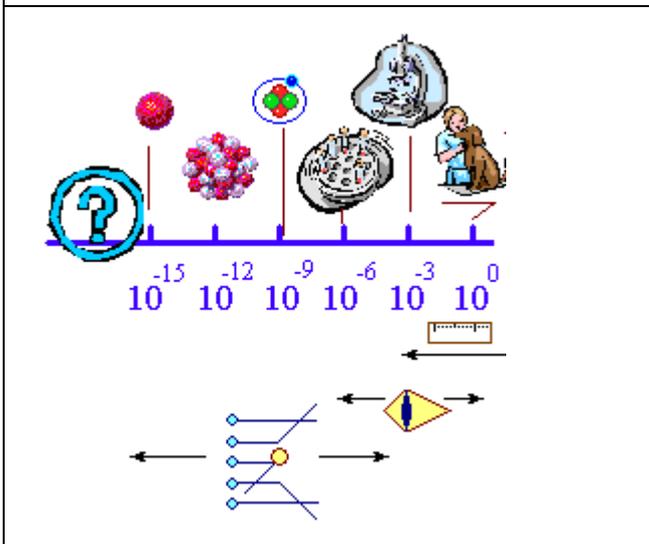


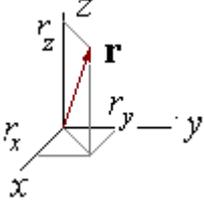
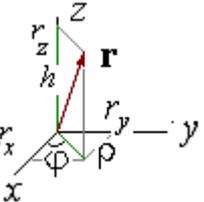
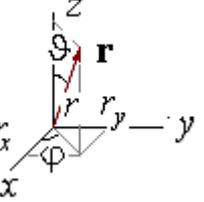
Рис.1.4

Малые расстояния и способы их измерения.

### 1.4. Основная задача механики. Число степеней свободы. Векторы

$\vec{X}, \vec{Y} \in \{\mathbf{V}\} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X} \in \{\mathbf{V}\} & (\alpha + \beta)\vec{X} = \alpha\vec{X} + \beta\vec{X} \\ \alpha(\beta\vec{X}) = \alpha\beta\vec{X} \in \{\mathbf{V}\} & \alpha(\vec{X} + \vec{Y}) = \alpha\vec{X} + \alpha\vec{Y} \end{cases}$	(1.2)	Математическое определение вектора.
$\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix} \equiv (X_i), \quad \vec{X} + \vec{Y} \equiv \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 \\ X_2 + Y_2 \\ \dots \\ X_n + Y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} \alpha X_1 \\ \alpha X_2 \\ \dots \\ \alpha X_n \end{pmatrix}$	(1.3)	Одна из возможных реализаций множества векторов.
$\mathbf{e}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{X} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + \dots + X_n\mathbf{e}_n \equiv \sum X_\xi \mathbf{e}_\xi$	(1.4)	Базис и разложение произвольного вектора по базису.

### 1.5 Материальные точки. Радиус-вектор. Система отсчета

	$\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \sum_{\xi=x,y,z} r_{\xi} \mathbf{e}_{\xi}$	(1.5)	Радиус-вектор материальной точки в декартовой системе координат.
	$\begin{cases} r_x = \rho \cos \varphi \\ r_y = \rho \sin \varphi \\ r_z = h \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{r_y}{r_x} \\ h = r_z \end{cases}$	(1.6)	Цилиндрическая система координат.
	$\begin{cases} r_x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r_y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r_z = r \cos \vartheta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{r_y}{r_x} \\ \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{r_z} \end{cases}$	(1.7)	Сферическая система координат.

#### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Являются ли векторами направленные отрезки, для которых произведение на число определяется стандартным образом, а суммой считается отрезок суммарной длины, направленный вдоль биссектрисы угла, образованного слагаемыми?
2. Материальная точка движется так, что ее декартовы координаты изменяются во времени по закону:

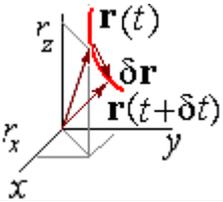
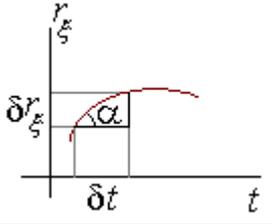
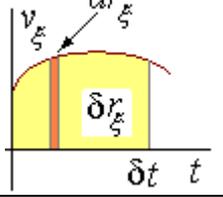
$$a. \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at \sin(\omega t) \\ at \cos(\omega t) \\ at \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} a = \text{const} \\ \omega = \text{const} \end{matrix}.$$

Записать зависимости от времени сферических и цилиндрических координат точки, нарисовать примерный вид траектории материальной точки.

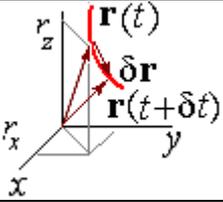
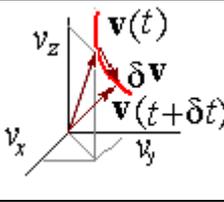
3. Найти зависимость от времени декартовых, цилиндрических и сферических координат материальной точки, равномерно вращающейся с периодом  $T$  по окружности большого круга сферы радиуса  $R$ , проходящей через полюса этой сферы.
4. Частица равномерно движется по винтовой линии, «навитой» на поверхность цилиндра радиуса  $R$ , делая один оборот вокруг оси за время  $T$  и смещаясь вдоль оси цилиндра с постоянной скоростью  $v$ . Найти зависимости от времени декартовых, цилиндрических и сферических координат точки. Ориентацию в пространстве систем координат выберите так, как сочтете более удобным.
5. \*) Попробуйте заставить Ваш компьютер изобразить на экране декартову систему координат, оси которой весьма желательно иметь возможность вращать при помощи «мыши» или клавиш компьютера. Научите Ваш компьютер отображать точку в этой системе координат по задаваемым пользователем ее декартовым, сферическим или цилиндрическим координатам. Желательно позаботиться о том, чтобы диалог с компьютером был удобен и понятен для пользователя настолько, чтобы им мог воспользоваться не только его создатель.
6. \*) Используя результаты Вашей деятельности, смоделируйте движение точки, описанное в задачах 3 и 4.

Кинематика. Основные понятия

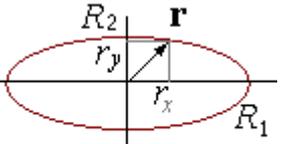
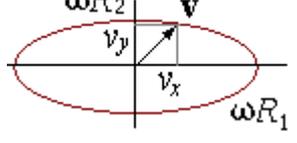
2.1. Перемещение. Средняя и мгновенная скорости

	$\delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t + \delta t) - \mathbf{r}(t)$	(2.1)	Перемещение материальной точки за время $\delta t$ .
$\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} = \begin{pmatrix} \delta r_x / \delta t \\ \delta r_y / \delta t \\ \delta r_z / \delta t \end{pmatrix} = \sum_{\xi} \langle v_{\xi} \rangle \mathbf{e}_{\xi}$		(2.2)	Средняя скорость.
$\mathbf{v} \equiv \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \Big _{\delta t \rightarrow 0} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{r}' = \sum_{\xi} \frac{dr_{\xi}}{dt} \mathbf{e}_{\xi} = \sum_{\xi} v_{\xi} \mathbf{e}_{\xi}$		(2.3)	Мгновенная скорость.
	$v_{\xi} = \frac{dr_{\xi}}{dt} = \operatorname{tg} \alpha_{\text{касат}}$	(2.4)	Определение мгновенной скорости по известной зависимости соответствующей координаты от времени.
<pre>In[19]:= Dt[Sin[X] + X^2, X] Out[19]:= X^2 Cos[X] + 2 X Sin[X]</pre>		<p><b>Рис. 2.1</b> Так можно находить производные функций, не умея дифференцировать, но имея на своем компьютере пакет «Математика».</p>	
	$dr_{\xi} = v_{\xi} dt$ $\delta r_{\xi} = \int_0^t dt \cdot v_{\xi}(t)$ $r_{\xi} = r_{\xi 0} + \delta r_{\xi}, \quad r_{\xi 0} \equiv r_{\xi}(t = 0)$	(2.5)	Определение координат материальной точки по известным зависимостям от времени проекций ее скоростей.
<pre>In[20]:= Integrate[x^2 + Exp[x], x] Out[20]:= e^x (2 - 2 x + x^2)</pre>		<p><b>Рис. 2.2</b> Так можно находить интегралы от многих функций, не умея дифференцировать, но имея на своем компьютере пакет «Математика».</p>	
$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt \cdot \mathbf{v}(t)$		(2.6)	Связь между координатой и мгновенной скоростью.

## 2.2. Ускорение материальной точки

		<p><b>Рис.2.3</b> Радиус-вектор материальной точки и годограф вектора скорости.</p>	
$\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t}$ $\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt \cdot \mathbf{v}(t)$	$\langle \mathbf{a} \rangle \equiv \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t}$ $\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t dt \cdot \mathbf{a}(t)$	(2.7)	Связь среднего и мгновенного ускорения с мгновенной скоростью. Приведенные соотношения получаются из ранее полученной связи радиус-вектора и мгновенной скорости (2.2-2.6) заменой $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}$ и $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{a}$ .
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$		(2.8)	Связь мгновенного ускорения с радиус-вектором.

### Пример. Движение тела по эллиптической траектории

	$\begin{cases} r_x(t) = R_1 \cos(\omega t) \\ r_y(t) = R_2 \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \frac{r_x^2}{R_1^2} + \frac{r_y^2}{R_2^2} = 1$	(2.9)	Одна из возможных форм движения по эллиптической траектории.
	$\begin{cases} v_x(t) = -\omega R_1 \sin(\omega t) \\ v_y(t) = \omega R_2 \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \frac{v_x^2}{R_1^2} + \frac{v_y^2}{R_2^2} = \omega^2$	(2.10)	Годограф скорости при движении по эллиптической траектории.
$\begin{cases} a_x(t) = -R_1 \omega^2 \cos(\omega t) \\ a_y(t) = -R_2 \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$		(2.11)	Ускорение при движении по эллиптической траектории.

## 2.3. Равноускоренное движение

$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$	(2.12)	Ускорение при равноускоренном движении остается постоянным.
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t dt \mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 t$	(2.13)	При равноускоренном движении скорость является линейной функцией времени.
$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt \cdot \mathbf{v}(t) = \\ &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt \cdot (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 t^2 \end{aligned}$	(2.14)	При равноускоренном движении координата является квадратичной функцией времени.

**Пример. Движение тела, брошенного под углом к горизонту**

	$\mathbf{r}(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$	<p>(2.15) Начальные условия и конкретный вид вектора ускорения при движении тела вблизи поверхности неподвижной планеты, лишенной атмосферы.</p>
	$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \\ 0 \end{pmatrix}$	<p>(2.16) Зависимость от времени компонент скорости тела, брошенного под углом к горизонту.</p>
	$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha \\ v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$	<p>(2.17) Зависимость координат тела от времени.</p>
$v_y(T_{\uparrow}) = 0 \Rightarrow T_{\uparrow} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow H = r_y(T_{\uparrow}) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$		<p>(2.18) Время подъема и максимальная высота подъема тела, брошенного под углом к горизонту и максима.</p>
$r_y(T_{\uparrow\downarrow}) = 0 \Rightarrow T_{\uparrow\downarrow} = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = 2T_{\uparrow}$ $\Rightarrow L = r_x(T_{\uparrow\downarrow}) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$		<p>(2.19) Время и дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту.</p>
$t = \frac{r_x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow r_y(r_x) = (tg\alpha) \cdot r_x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \cdot r_x^2$		<p>(2.20) Уравнение траектории тела, брошенного под углом к горизонту.</p>

**2.4. Классический закон сложения скоростей и ускорений**

	$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$	<p>(2.21) Связь между радиус-векторами, задающими положение материальной точки, в разных системах отсчета.</p>
	$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$	<p>(2.22) Классический закон сложения скоростей.</p>
	$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \Rightarrow$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{A}$	<p>(2.23) Классический закон сложения ускорений.</p>

## 2.5. Преобразования Галилея

	$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r'_x = r_x - ut \\ r'_y = r_y \\ r'_z = r_z \\ t' = t \end{cases} \quad (2.21)$	Преобразования Галилея.
$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$	(2.22)	Классический закон сложения скоростей.

### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Найти зависимости от времени скорости и радиус-вектора материальной точки, начинающей двигаться из начала координат с направленным вертикально вниз ускорением  $\mathbf{g}_0$  и постоянной «тряской»  $\mathbf{Q}$  (скоростью изменения ускорения), направленной а) горизонтально, б) вертикально вверх.
2. Найти дальность полета и максимальную высоту подъема тела над наклонной плоскостью, составляющей угол  $30^\circ$  к горизонту тела, брошенного под углом в  $45^\circ$  к этой наклонной плоскости.
3. Геометрическим местом точек, выпущенных из одной точки во всевозможных направлениях с одинаковой начальной скоростью и движущихся с одинаковым ускорением  $\mathbf{a}(t)$ , в любой момент времени является сфера. Доказать.
4. \*) Решить проблему построения 3d- траекторий материальной точки по заданным зависимостям  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{a}(t)$ . Необходимые начальные условия считать заданными.
5. \*) Проверьте свое умение дифференцировать и интегрировать (на бумаге или на компьютере) на следующем тестовом примере:

На сколько сместится тело а) за  $T=10$ с, б) до полной остановки, если оно движется прямолинейно, а его скорость изменяется во времени по закону

$$v(t) = V_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t), \quad V_0 = 10, \quad \beta = 0.01, \quad \omega = 0.2\pi.$$

Найти ускорение тела в момент времени  $T$ . Построить графики зависимостей от времени координаты, скорости и ускорения тела.

6. Построить траекторию и годограф скорости, найти ускорение материальной точки, движущейся в плоскости  $(xOy)$  по закону:

$$i. \begin{cases} r_x(t) = R_x \cos(\omega_x t) \\ r_y(t) = R_y \sin(\omega_y t) \end{cases}, \quad \frac{R_y}{R_x} = \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{8}{5}$$

## Лекция 3

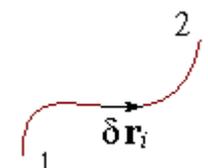
### Кинематика криволинейного движения

#### 3.1. Скалярное произведение. Базис

	$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv AB \cos \alpha \equiv \text{Pr}_{\mathbf{B}} \mathbf{A}$	(3.1) Определение скалярного произведения.
	$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}) + (\mathbf{A}_2, \mathbf{B})$	(3.2) Линейность скалярного произведения по его сомножителям.

$\left\{ \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta \right\} = \delta_{\xi\eta} = \begin{cases} 1, & \xi = \eta \\ 0, & \xi \neq \eta \end{cases}, \quad \xi, \eta = x, y, z$	(3.3)	Свойство векторов ортонормированного базиса.
$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left( \sum_{\xi=x,y,z} a_\xi \mathbf{e}_\xi, \sum_{\eta=x,y,z} b_\eta \mathbf{e}_\eta \right) = \sum_{\xi,\eta} a_\xi b_\eta (\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta) = \sum_{\xi} a_\xi b_\xi$	(3.4)	Вычисление скалярного произведения через координаты вектора.
$ \mathbf{A}  \equiv A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\mathbf{A}, \mathbf{A})}$	(3.5)	Длина вектора

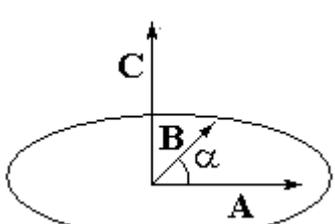
### 3.2. Путь, проходимый материальной точкой

	$S_{12} \equiv \sum_i  \delta \mathbf{r}_i  \quad \delta \mathbf{r}_i \rightarrow 0$	(3.6)	Математическое определение длины отрезка кривой.
$S_{12} = \sum_i \sqrt{(\mathbf{v}_i \delta t_i, \mathbf{v}_i \delta t_i)} \Big _{\delta t_i \rightarrow 0} \rightarrow \int_0^t dt \cdot \sqrt{(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t))} = \int_0^t dt \cdot v(t)$	(3.7)	Вычисление длины отрезка траектории по известной скорости.	

### Пример. Путь, пройденный телом, брошенным под углом к горизонту

$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix}; \quad  \mathbf{v}(t)  = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2}$	(3.8)	Вычисление модуля вектора скорости.
$\int \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + 1} d\mathbf{x} =$ $= \left( \frac{\mathbf{B}}{4} + \frac{\mathbf{x}}{2} \right) \sqrt{1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^2} + \frac{1}{8} (4 - \mathbf{B}^2) \text{Log} \left[ \mathbf{B} + 2\mathbf{x} + 2\sqrt{1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}^2} \right]$	(3.9)	Вычисление интеграла при помощи пакета «Математика».
$S_{12} = \int_0^t dt \cdot v(t) = \frac{v_0^2}{g} \int_0^t d \left( \frac{gt}{v_0} \right) \cdot \sqrt{\left( \frac{gt}{v_0} \right)^2 + 2 \sin \alpha \left( \frac{gt}{v_0} \right) + 1}$ $\frac{v_0^2}{g} \int_0^t dx \sqrt{x^2 + 2 \sin \alpha x + 1} = \frac{v_0^2}{g} \left( \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{gt}{2v_0} \right) \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \frac{gt}{v_0} + \left( \frac{gt}{v_0} \right)^2} +$ $+ \frac{v_0^2}{2g} (1 - \sin^2 \alpha) \ln \left( 2 \sin \alpha + 2 \frac{gt}{v_0} + 2 \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \frac{gt}{v_0} + \left( \frac{gt}{v_0} \right)^2} \right)$	(3.10)	Длина траектории тела, брошенного под углом к горизонту.

### 3.3. Векторное произведение

	$\mathbf{C} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -[\mathbf{B}, \mathbf{A}]$ $ \mathbf{C}  =  \mathbf{A}  \cdot  \mathbf{B}  \cdot \sin \alpha$	(3.11)	Определение векторного произведения.
---	---	--------	--------------------------------------

	$([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}) = V$ $([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}) = ([\mathbf{B}, \mathbf{C}], \mathbf{A}) = ([\mathbf{C}, \mathbf{A}], \mathbf{B})$	(3.12)	Смешанное скалярно-векторное произведение и его основное свойство.
$[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \mathbf{B}] = [\mathbf{A}_1, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}_2, \mathbf{B}]$ $\forall \mathbf{e}_\xi \Rightarrow [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \mathbf{B}]_\xi = (\mathbf{e}_\xi, [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \mathbf{B}]) = ??? = [\mathbf{A}_1, \mathbf{B}]_\xi + [\mathbf{A}_2, \mathbf{B}]_\xi$		(3.13)	Свойство линейности векторного произведения по его сомножителям и идея доказательства этого свойства.
$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \left[ \sum_\xi a_\xi \mathbf{e}_\xi, \sum_\eta b_\eta \mathbf{e}_\eta \right] = \sum_{\xi, \eta} a_\xi b_\eta [\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta] =$ $(a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + \dots = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$		(3.14)	Вычисление векторного произведения по декартовым координатам перемножаемых векторов.
$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]]_x = a_y [\mathbf{B}, \mathbf{C}]_z - a_z [\mathbf{B}, \mathbf{C}]_y = ??? = b_x(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - c_x(\mathbf{A}, \mathbf{B})$		(3.15)	Правило «вас-саб» и идея его доказательства.

### 3.4. Угловая скорость и угловое ускорение

	$\mathbf{r} = \hat{\mathcal{R}}_z(\varphi) \circ \rho \mathbf{e}_x \equiv$ $\equiv \hat{\mathcal{R}}(\varphi) \circ \rho \mathbf{e}_x$ $\varphi = \varphi(t)$ $\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$	(3.16)	Определение угловой скорости.
	$\delta \mathbf{r} = [\delta \varphi, \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] \delta t$ $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$	(3.17)	Связь угловой и линейной скорости.
$\boldsymbol{\beta} \equiv \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$		(3.18)	Угловое ускорение.
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r} \right] + \left[ \boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}]$ $= [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] = [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r} = [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] - \omega^2 \mathbf{r}$		(3.19)	Связь линейного и углового ускорений.

**Пример. Движение тела по дуге окружности**

$\begin{cases}  r(t)  = R = const \\ \frac{d\omega}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega t, & \mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}], v = \omega R = const \\ \beta = 0, & \mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_n \end{cases}$	(3.20)	Движение по окружности с постоянной угловой скоростью.
$\mathbf{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix},$ $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = R^2 \omega (r_x v_x + r_y v_y) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{r}$	(3.21)	Описание равномерного вращения по окружности в декартовых координатах.
$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{v}$	(3.22)	Нормальное (центростремительное) ускорение при равномерном вращении по окружности.
$\begin{cases}  r(t)  = const \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \beta \frac{t^2}{2}, & \omega = \omega_0 + \beta t \\ \mathbf{v} = [\omega_0, \mathbf{r}] + [\beta, \mathbf{r}]t, & v = r(\omega_0 + \beta t) \equiv v_0 + at \\ \mathbf{a} = [\beta, \mathbf{r}] - \omega^2 \mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, & a = r\sqrt{\beta^2 + (\omega_0 + \beta t)^4} \end{cases}$	(3.23)	Равноускоренное движение по окружности.

**3.5. Нормальное и тангенциальное ускорения**

	$\mathbf{a} = [\beta, \mathbf{r}] - \omega^2 \mathbf{r} \equiv \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$ $\mathbf{a}_\tau = \left( \mathbf{a}, \frac{\mathbf{v}}{v} \right) \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_\tau$	(3.24)	Разложение ускорения на нормальное и тангенциальное.
--	--	--------	--

**Пример. Движение тела, брошенного под углом к горизонту: нормальное и тангенциальное ускорения**

$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_\tau = g \frac{gt - v_0 \sin \alpha}{g^2 t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + v_0^2} \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix}$ $\mathbf{a}_n = \mathbf{g} - \mathbf{a}_\tau = \frac{g}{g^2 t^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + v_0^2} \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha (v_0 \sin \alpha - gt) \\ -v_0^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}$	(3.25)	Нормальное и тангенциальное ускорения тела, брошенного под углом к горизонту.
---	--------	---

**Вопросы и задачи для самостоятельной работы**

1. Первоначально покоившаяся материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом  $R$  с постоянным угловым ускорением. Получить явные зависимости от времени декартовых координат и проекций линейной скорости и ускорения ( $r_\xi(t)$ ,  $v_\xi(t)$ ,  $a_\xi(t)$ ,  $\xi=x,y$ ). Убедитесь непосредственным сравнением в справедливости соотношений (3.21) для рассмотренного случая.
2. Рассмотрите движение материальной точки с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  по спирали («окружности», радиус которой увеличивается со временем по линейному за-

кону:  $R(t)=u t$ ). Как направлены скорость и ускорение материальной точки в каждый момент времени? Чему равны их модули? Получите ответы, используя явные выражения (3.19) для декартовых координат и проекций скорости и сравните результаты с общими формулами

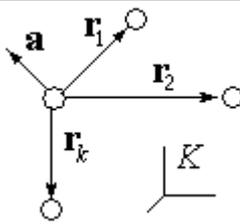
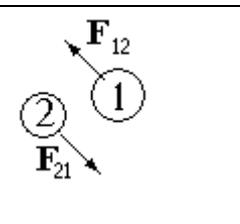
3. Найти радиус кривизны траектории тела, брошенного под углом к горизонту в каждой точке его траектории.
4. Небольшое тело, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити длиной  $L$ , начинает двигаться без начальной скорости из положения, в котором нить составляла угол  $45^0$  с вертикалью. Определить величину нормального и тангенциального ускорений в произвольной точке траектории.
5. \*Тело движется с постоянной по модулю скоростью  $v$  по траектории, представляющей собой синусоиду с заданными параметрами  $y(x)=A \cdot \sin(kx)$ . Определить нормальное и тангенциальное ускорения тела в каждой точке траектории.
6. \* Определить траекторию тела и найти пройденный им путь и перемещение за время  $T=\pi/\omega$ , если его координаты изменяются по закону:

$$\begin{aligned} x(t) &= (R_0/5)\cos(5\omega t) \\ y(t) &= (R_0/3)\sin(3\omega t). \end{aligned}$$

## Лекция 4

### Основы динамики материальной точки

#### 4.1. Законы Ньютона

	$\exists K : \begin{cases} r_k \rightarrow \infty \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = 0$	<p>(4.1) Первый закон Ньютона: существуют инерциальные системы отсчета (т.е. такие системы, в которых свободные тела движется без ускорений).</p>
$\mathbf{a} \sim \mathbf{F} \Rightarrow m \equiv \frac{ \mathbf{F} }{ \mathbf{a} } = const \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$	<p>(4.2)</p>	<p>Второй закон Ньютона (ускорение тела пропорционально приложенной к нему силе) и определение массы.</p>
$m \in R, \quad m \geq 0, \quad m \neq f(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad m = \sum_k m_k$	<p>(4.3)</p>	<p>Свойства массы, постулируемые в классической механике.</p>
	$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= -\mathbf{F}_{21} \\ T &> \frac{ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 }{c} \end{aligned}$	<p>(4.4) Третий закон Ньютона: при взаимодействии двух тел всегда возникают силы, приложенные к каждому из них, равные по величине и противоположно направленные.</p>

#### 4.2. Импульсная формулировка второго закона Ньютона

$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$	<p>(4.5)</p>	<p>Определение импульса материальной точки.</p>
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	<p>(4.6)</p>	<p>Скорость изменения импульса.</p>
$m = const \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_\Sigma$	<p>(4.7)</p>	<p>Импульсная формулировка второго закона Ньютона.</p>

$m \neq const \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_\Sigma \\ m\mathbf{a} \neq \mathbf{F}_\Sigma \end{cases}$	(4.8)	Второй закон Ньютона в случае движения тела с переменной массой.
---	-------	--

#### 4.3. Второй закон Ньютона как уравнение движения

$\mathbf{r}(t) \leftarrow \begin{cases} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{r}_0 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{v}_0 \end{cases} \leftarrow \mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}}{m}$	(4.9)	Упрощенная схема решения основной и обратной задачи механики.
$\begin{cases} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t\right) \\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \\ \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right _{t=t_0} = \mathbf{v}_0 \end{cases}$	(4.10)	Второй закон Ньютона как уравнение движения (дифференциальное уравнение второго порядка в обыкновенных производных).
$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} + q\left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B}\right] - \eta\mathbf{v}$ $\mathbf{g} = \sum_k G \frac{m_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k, \mathbf{E} = \sum_k k \frac{q_k}{r_k^3} \mathbf{r}_k$ $\mathbf{B} = \sum_k \frac{q_k}{r_k^3} \left[ \frac{\mathbf{v}_k}{c}, \mathbf{r}_k \right]$	(4.11)	Основные силы, рассматриваемые в классической физике (использована система единиц Гаусса).

#### 4.4. Прямая задача механики

$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$	(4.12)	Решение прямой задачи механики.
--	--------	---------------------------------

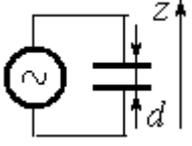
#### Пример. Суперпозиция гармонических колебаний одинаковой частоты

$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ R_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ R_3 \cos(\omega t + \varphi_3) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} =$ $-\omega^2 \begin{pmatrix} R_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ R_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ R_3 \cos(\omega t + \varphi_3) \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{F}(t) = -m\omega^2 \mathbf{r}(t)$	(4.13)	Движение, представляющее собой суперпозицию гармонических колебаний вдоль каждой из координат, происходит под действием силы, линейной по смещению.
---	--------	---

#### 4.5. Обратная задача механики (случай явной зависимости силы от времени)

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t) \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t dt \cdot \mathbf{F}(t) \Rightarrow$ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t dt \cdot \mathbf{v}(t)$	(4.14)	Решение основной задачи механики в случае силы, явно зависящей от времени, и только от него.
---	--------	--

**Пример. Электрон во внешнем электрическом поле, изменяющемся во времени по гармоническому закону**

	$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \Rightarrow$ $\mathbf{E}(t) = \frac{U_0}{d} \mathbf{e}_z \cos(\omega t) \equiv \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \Rightarrow$ $\mathbf{F}(t) = q\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$	(4.15)	Сила, действующая на электрический заряд, помещенный в конденсатор, на обкладки которого подано переменное напряжение.
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega} \sin(\omega t)$ $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{q\mathbf{E}_0}{m\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$	(4.16)	Движение электрического заряда в пространственно однородном электростатическом поле, изменяющемся во времени по гармоническому закону.	

**Вопросы и задачи для самостоятельной работы**

1. Рассмотреть движение электрона в плоском конденсаторе с емкостью  $C$ , первоначально заряженном до напряжения  $U_0$  и разряжающемся через сопротивление  $R$ . Первоначально электрон покоился в начале координат.
2. Как будет изменяться во времени скорость вертолета, неподвижно висевшего на высоте  $H$  над поверхностью Земли, если сила вертикальной тяги его двигателя изменяется во времени по закону

$$F_z = \begin{cases} Mg, & t < 0 \\ Mg - At^2 + B \cdot t^3, & t > 0. \end{cases} ?$$

При каких условиях вертолет не ударится о поверхность Земли?

- 3\*. Попробуйте создать программу, моделирующую движение материальной точки под действием силы, изменяющейся во времени по произвольно задаваемому пользователем закону.
- 4\*. Смоделируйте движение тела, описываемого системой уравнений (4.13). Что представляет собой траектория тела в этом случае? Можете ли Вы подтвердить свою догадку, основанную на компьютерной модели, аналитическими расчетами или какими-то другими вескими соображениями?
5. Координата тела, движущегося по прямолинейной траектории, изменяется во времени по закону:

$$x(t) = X_0 \exp(-\lambda t)$$

Найти зависимость действующей на тело силы от скорости.

6. В разделе, посвященном специальной теории относительности, будет показано, что масса тел зависит от скорости по закону

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Найдите зависимости от времени координаты и скорости первоначально покоившегося тела, испытывающего воздействие постоянной силы.

**Одномерное движение под действием сил, зависящих от положения и скорости тела, в простейших случаях**

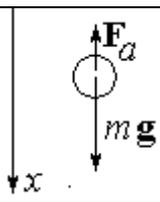
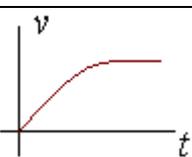
**5.1. Случай силы, зависящей только от скорости и сонаправленной с ней**

$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{v}}{v} f(v) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{v} \\ F_v = f(v) \end{cases}$	(5.1)	Общий вид силы, зависящей от скорости и направленной вдоль ее направления.
$m \frac{dv}{dt} = f(v) \Rightarrow m \frac{dv}{f(v)} = dt \Rightarrow \frac{t}{m} = \int_0^t \frac{dv}{f(v)}$	(5.2)	Решение задачи о движении тела под действием силы (5.1).

**Пример. Движение тела под действием сил вязкого трения**

$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -\eta \mathbf{v}$	(5.3)	Сила вязкого трения.
$\begin{cases} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\eta \mathbf{v} \\ \mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$	(5.4)	Уравнение движения и начальное условие.
$\frac{t}{m} = \int_0^t \frac{dv}{-\eta v} = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{v}{v_0} \Rightarrow v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right)$	(5.5)	Решение задачи (5.4) методом (5.2).

**5.2 Падение тела в вязкой среде**

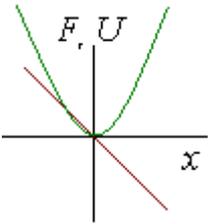
$\tilde{m} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_a - \eta \mathbf{v}$	(5.6)	Уравнение движения тела, падающего в вязкой среде. В левую часть уравнения включена присоединенная масса.
 $\tilde{m} \frac{dv}{dt} = -\eta v + m^* g,$ $m^* \equiv m - \rho V$	(5.7)	Проекция уравнения движения (5.6) на вертикальную ось.
$u \equiv v - \frac{m^* g}{\eta} \Rightarrow m \frac{du}{dt} = -\eta u \Rightarrow u(t) = C \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right)$	(5.8)	Решение дифференциального уравнения (5.7).
$v(t=0) = 0 \Rightarrow u(t=0) = -\frac{m^* g}{\eta} = C \Rightarrow$ $v(t) = \frac{m^* g}{\eta} \left(1 - \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right)\right)$	(5.9)	Определение константы интегрирования по начальному условию.
 $v(t \rightarrow 0) = \frac{m^*}{m} g t$ $v(t \rightarrow \infty) = \frac{m^* g}{\eta}$	(5.10)	Построение графика зависимости $v(t)$ .

$x(t) = \frac{m^* g}{\eta} \left( t + \frac{m}{\eta} \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right) - \frac{m}{\eta} \right)$	(5.11)	Зависимость от времени координаты тела, падающего в вязкой среде.
---	--------	---

### 5.3. Одномерное движение частицы под действием силы, зависящей от координаты

$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$	(5.12)	Уравнение одномерного движения частицы в поле потенциальных сил.
$2m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2F(x) \frac{dx}{dt} \Rightarrow$ $\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{d}{dx} U(x), \quad U(x): \quad \frac{dU(x)}{dx} = -F(x)$	(5.13)	Первый интеграл движения.
$\frac{m}{2} v^2(t) = -U(x) + W, \quad W = \frac{m}{2} v_0^2 + U(x_0)$	(5.14)	«Закон сохранения механической энергии» — результат интегрирования уравнения (5.13).
$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (W - U(x))}$	(5.15)	Связь скорости с координатой в случае одномерного движения в поле потенциальных сил.
$\frac{dx}{\sqrt{W - U(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} dt \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{W - U(x)}}$	(5.16)	Искомая связь координаты тела и времени движения.

#### Пример. Гармонический осциллятор

	$F(x) = -kx$ $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ $F(x) = -\frac{dU}{dx}$	(5.17)	Зависимость силы и потенциальной энергии от координаты в случае гармонического осциллятора.
$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow W = \frac{mv_0^2}{2}$	(5.18)	Возможный вариант начальных условий и соответствующая ему полная механическая энергия осциллятора.	
$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{W - kx^2/2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2W/k - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$ $z = \sqrt{\frac{k}{2W}} x$	(5.19)	Подстановка значений в общую формулу (5.16).	
<pre>In[5]:= Integrate[(1 - x^2)^(-1/2), x] Out[5]= ArcSin[x]</pre>	<b>Рис. 5.2.</b> Вычисление интеграла типа (5.19) с помощью пакета «Математика»		

$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2W}} x\right) \Rightarrow$ $x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \equiv A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$	(5.20)	Окончательное решение задачи и его запись в стандартных обозначениях.
--	--------	---

#### 5.4. Движение, описываемое линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \frac{dx}{dt} + kx$ $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x = 0,$ $2\beta \equiv \frac{\eta}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$		(5.21)	Уравнение движения вблизи точки неустойчивого равновесия и стандартные обозначения для записи уравнения второго порядка.
$x(t) = C \exp(\lambda t) \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda - \omega_0^2 = 0$	(5.22)	Вид пробного решения уравнения (5.21) и характеристическое уравнение для $\lambda$ .	
$\begin{cases} \lambda_+ = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} \\ \lambda_- = -\beta - \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_+ = C_+ \exp\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}\right)t \\ x_- = C_- \exp\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}\right)t \end{cases}$	(5.23)	Два линейно независимых решения уравнения (5.22).	
$x(t) = x_+ + x_-$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}} e^{-\beta t} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} t\right)$	(5.24)	Общее решение уравнения (5.22) и конкретное решение в случае тела, выпущенного из точки неустойчивого равновесия с заданной начальной скоростью.	

#### 5.5. Движение, описываемое нелинейным дифференциальным уравнением (реальный маятник)

	$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} \Rightarrow$ $\begin{cases} m \frac{d^2 \alpha}{dt^2} R = -mg \sin \alpha \\ m \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 R = N - mg \cos \alpha \end{cases}$	(5.25)	Уравнение движения реального маятника.
$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{R}$	(5.26)	Уравнение в стандартных обозначениях.	

	<p><b>Рис. 5.3.</b> При малых начальных скоростях колебания оказываются близкими к гармоническим, поскольку входящий в уравнение движения синус может быть аппроксимирован линейной функцией, что приводит к уравнению, тождественному уравнению гармонических колебаний (5.17).</p>
	<p><b>Рис. 5.4.</b> При приближении начальной скорости к критическому значению, соответствующему энергии перехода системы в состояние неустойчивого равновесия, колебания начинают резко отличаться от гармонических: в области изменения направления движения (поворота) тело проводит аномально большое время.</p>
	<p><b>Рис. 5.5.</b> При превышении начальной скоростью критического значения колебательный режим принципиально меняется: маятник начинает вращаться вокруг точки подвеса с угловой скоростью, сильно зависящей от положения груза.</p>
	<p><b>Рис. 5.6.</b> При больших начальных скоростях незначительные изменения скорости, вызванные действием на маятник силы тяжести, становятся малосущественными.</p>

### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Решить задачу о зависимости от времени координаты тела, движущегося под действием силы вязкого трения, величина которой зависит от скорости по квадратичному закону:

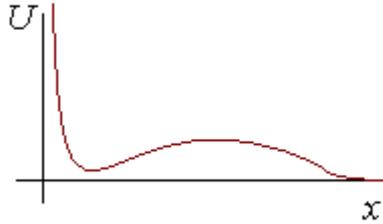
$$\mathbf{F}(v) = -\eta v \mathbf{v}$$

Построить графики зависимости от времени координаты, скорости и ускорения тела, падающего с вязкой среде.

2. Решить задачу об одномерном движении тела под действием упругих сил в случае произвольных начальных условий ( $v_0 \neq 0$ ,  $x_0 \neq 0$ ). Попробуйте получить графики зависимости от времени координаты и скорости частицы при различных начальных условиях, решая дифференциальное уравнение движения при помощи какого-либо стандартного математического пакета.
3. Исследовать движение частицы под действием упругих сил при наличии вязкого трения. Какие принципиально различные формы движения могут существовать в этом случае?
4. \*Основываясь на полученных в п.5.4 результатах постройте примерные графики зависимостей натяжения нити от времени и угловой скорости от угла отклонения («фазовую

траекторию» нелинейного маятника) в четырех рассмотренных на лекции предельных случаях. Проверьте правильность своих рассуждений на компьютерных моделях.

5. \*\* Рассмотрите одномерное движение частицы в поле сил, потенциальная энергия которых имеет вид, изображенный на рис.:



При анализе каких систем может оказаться полезным полученные вами решения?

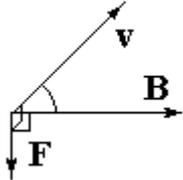
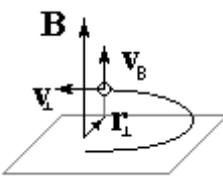
## Лекция 6

### Примеры движения в трехмерном пространстве под действием сил, зависящих от положения и скорости тела

#### 6.1. Движение тела, брошенного в вязкой среде под углом к горизонту

$\mathbf{F}_\Sigma = m\mathbf{g} - \eta\mathbf{v} - \rho V\mathbf{g} \equiv m^* \mathbf{g} - \eta\mathbf{v}$	(6.1)	Укороченная запись результирующей силы, использующая эффективную массу.
$\begin{cases} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m^* \mathbf{g} - \eta\mathbf{v} \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{e}_x + v_0 \sin \alpha \mathbf{e}_y + 0 \mathbf{e}_z \end{cases}$	(6.2)	Постановка задачи и выбор системы отсчета. Здесь $m^*$ -масса жидкости или газа, вытесненной телом.
$m \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta v_x \\ -\eta v_y - m^* g \\ -\eta v_z \end{pmatrix}$	(6.3)	Результат проектирования векторного равенства (5.6) на «стандартную» систему координат.
$m \frac{dv_y}{dt} = -\eta v_y - m^* g \equiv -\eta u, \quad u \equiv v_y + \frac{m^*}{\eta} g$ $m \frac{du}{dt} = -\eta u \Rightarrow u = C \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right) \Rightarrow$ $v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{m^*}{\eta} g\right) \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right) - \frac{m^*}{\eta} g$	(6.4)	Пример решения одного из дифференциальных уравнений, составляющих систему (5.7).
$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m^* g / \eta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha + m^* g / \eta \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{\eta}{m} t\right)$	(6.5)	Зависимость от времени скорости тела, брошенного под углом к горизонту в вязкой среде.
	<b>Рис.5.1.</b>	Зависимости от времени горизонтальной и вертикальной составляющих скоростей тела, брошенного в вязкой среде под углом к горизонту (случай плотности тела, превосходящей плотность среды).

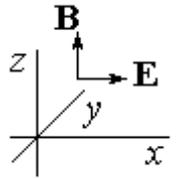
### 6.2. Движение тела под действием силы Лоренца

$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ $F = \frac{ q }{c} vB \sin \alpha$		(6.6)	Сила Лоренца, действующая на электрический заряд, движущийся в магнитном поле.
$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$		(6.7)	Уравнение движение электрического заряда в однородном постоянном магнитном поле
$\mathbf{e}_B \equiv \frac{\mathbf{B}}{B} \Rightarrow \mathbf{v} = v_B \mathbf{e}_B + \mathbf{v}_\perp \Rightarrow$ $m \frac{dv_B}{dt} \mathbf{e}_B + m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{c} [\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}] \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{dv_B}{dt} = 0 \\ m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{c} [\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}] \end{cases}$		(6.8)	Возможность разложения движения заряда в однородном магнитном поле на два независимых: равномерное (вдоль линий поля) и ускоренное (в плоскости, перпендикулярной линиям $\mathbf{B}$ ).
$m(\mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n) = m[\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] + m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_\perp] = \frac{q}{c} [\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}] \Rightarrow$ $\begin{cases} (\mathbf{a}_\tau, \mathbf{v}_\perp) = 0 \\ m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_\perp] = \frac{q}{c} [\mathbf{v}_\perp, \mathbf{B}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}  \mathbf{v}_\perp  = const \\ \boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{mc} \mathbf{B} \end{cases}$		(6.9)	Отсутствие тангенциального ускорения при движении заряда в однородном магнитном поле.
$\mathbf{v}_\perp = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_\perp] = -\frac{q}{mc} [\mathbf{B}, \mathbf{r}_\perp] \Rightarrow  \mathbf{r}_\perp  = \frac{mc}{qB} v_\perp = const$		(6.10)	Радиус кривизны траектории заряженной частицы, влетающей в магнитное поле перпендикулярно его линиям.

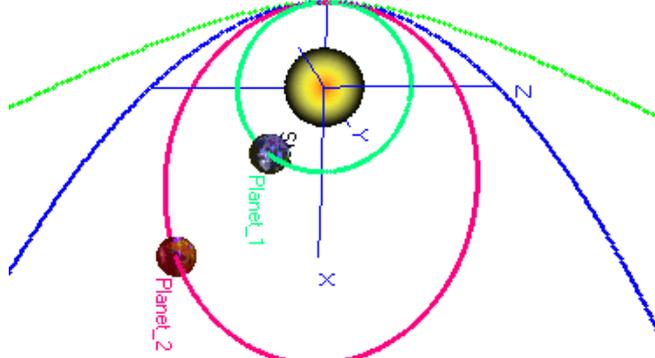
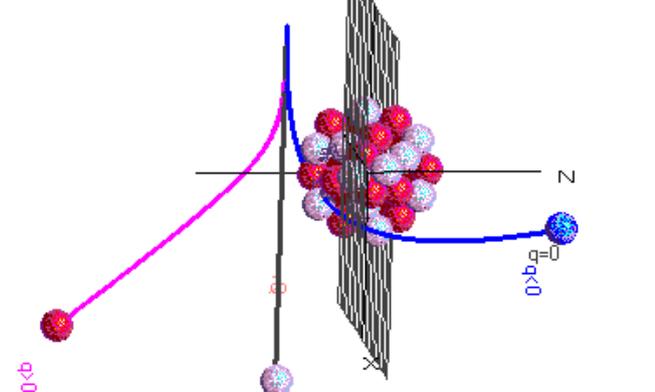
#### Пример. Технические использования свойств движения заряда в однородном магнитном поле.

$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{mc}{qB} \neq f(v) \quad , \quad v \ll c$	(6.11)	Независимость от скорости периода обращения в циклотронных ускорителях.
$L = v_B nT = v_B 2\pi \frac{mc}{qB} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	(6.12)	Разложение движения в магнитном поле в суперпозицию равномерных поступательного и вращательного.
$K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \Rightarrow R = \frac{c}{Bq} \sqrt{2Km}$	(6.13)	Зависимость радиуса кривизны траектории частицы в магнитном поле от ее кинетической энергии, заряда и массы .

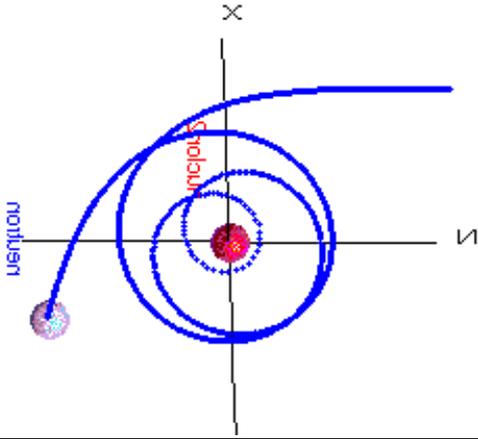
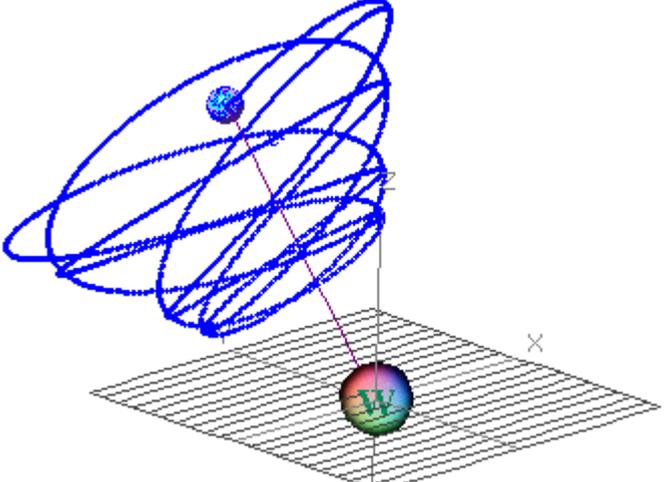
**6.3. Движение заряженной частицы в скрещенных постоянных магнитном и электрическом полях**

	$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q \left[ \frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right]$	(6.14) Уравнение движения нерелятивистской частицы в скрещенных полях.
$\mathbf{v} = \mathbf{u} + c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2} \Rightarrow$	$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{E} + q \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right] - \frac{q}{B^2} [\mathbf{B}, [\mathbf{E}, \mathbf{B}]] = q \left[ \frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B} \right]$	(6.15) Замена переменных, приводящая уравнение (6.14) к стандартному уравнению вращения заряда в магнитном поле.
$\mathbf{v}_D = -c \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}$		(6.16) Скорость дрейфа поперек линий поля.

**6.4. Движение в кулоновском поле**

$\mathbf{F} = \pm \text{Const} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$	(6.17) Общий вид силы, соответствующий кулоновскому полю.
$\begin{cases} \mathbf{r}(t_k) \\ \mathbf{v}(t_k) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F}(t_k) \Rightarrow \mathbf{a}(t_k) \Rightarrow$ $\begin{cases} \mathbf{r}(t_{k+1}) = \mathbf{r}(t_k) + \mathbf{v}(t_k) \cdot \delta t + \mathbf{a}(t_k) \frac{(\delta t)^2}{2} \\ \mathbf{v}(t_{k+1}) = \mathbf{v}(t_k) + \mathbf{a}(t_k) \cdot \delta t \end{cases}$	(6.18) Простейшая схема численного интегрирования уравнения движения (на практике используются более эффективные алгоритмы)
	<p><b>Рис. 6.1.</b> Траектории движения материальных точек в кулоновском поле тяготения: эллипсы, параболы и гиперболы (приведены результаты численного интегрирования уравнения движения методом Рунге-Кутты 4 порядка).</p>
	<p><b>Рис. 6.2.</b> Траектории движения материальных точек в кулоновских полях притяжения и отталкивания на примере пролета вблизи ядра невзаимодействующих друг с другом частиц, несущих положительный, отрицательный и нулевой заряды (приведены результаты численного интегрирования уравнения движения методом Рунге-Кутты 4 порядка).</p>

**6.5. Примеры численного интегрирования движения в центральных и произвольных силовых полях**

	<p><b>Рис. 6.3.</b> Траектории движения материальных точек в центральном поле тяготения для частного случая сил, соответствующих потенциалу Юкавы: <math display="block">U(\mathbf{r}) = \text{Const} \frac{\exp(-\alpha r)}{r}</math> (приведены результаты численного интегрирования уравнения движения методом Рунге-Кутты 4 порядка).</p>
	<p><b>Рис. 6.4.</b> Пример траектории движения материальной точек в нецентральной поле, представляющей собой суперпозицию кулоновского поля тяготения и магнитного поля гипотетической частицы — магнитного монополя (приведены результаты численного интегрирования уравнения движения методом Рунге-Кутты 4 порядка).</p>

**Вопросы и задачи для самостоятельной работы**

1. \*Попытайтесь рассмотреть движение заряженной частицы в суперпозиции постоянных электрического и магнитного полей, если а) поля сонаправлены, б) направлены под произвольным (известным) углом друг к другу.
2. \*Попытайтесь изучить на основе аналитического рассмотрения или численного моделирования особенности движения заряженных частиц в однородном постоянном магнитном поле при наличии линейной по скорости силы вязкого трения.
3. \* Изучите особенности движения частиц в «почти кулоновском» центральном поле, спадающем с расстоянием по закону

$$\mathbf{F} = -\text{Const} \frac{\mathbf{r}}{r^n}, \quad n = 3 \pm \delta n.$$

4. Покажите, что в создаваемом равномерно заряженной бесконечной нитью поле сил притяжения, спадающих с расстоянием по закону

$$\mathbf{F} = -\text{Const} \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

возможно движение заряженных частиц по винтовым линиям с постоянными шагом и радиусом кривизны.

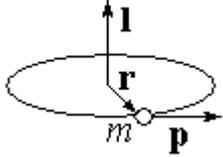
5. \* Попытайтесь «открыть» несколько необычное свойство траекторий семейства одинаковых заряженных частиц, начинающих двигаться из различных точек пространства в создаваемом бесконечной заряженной нитью силовом поле (см. Задачу 6.4) с одинаковыми начальными скоростями, направленными перпендикулярно нити.

## Законы сохранения в динамике материальной точки

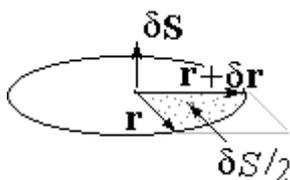
### 7.1. Закон сохранения импульса

$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$	(7.1)	Определение импульса материальной точки.
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_\Sigma \Rightarrow (\mathbf{F}_\Sigma = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} - \text{сохраняется})$	(7.2)	Закон сохранения импульса в замкнутых системах.

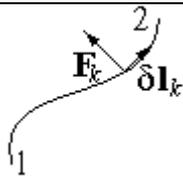
### 7.2. Закон сохранения момента импульса

$\mathbf{l} \equiv [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$		(7.3)	Определение момента импульса (количества движения) материальной точки.
$\mathbf{l} = [\mathbf{r}, m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] = m\boldsymbol{\omega}r^2 - m\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = mr^2\boldsymbol{\omega} \equiv I\boldsymbol{\omega},$ $I \equiv mr^2$		(7.4)	Связь момента импульса с угловой скоростью и определение момента инерции материальной точки.
$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p} \right] + \left[ \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right] = m[\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{r}, \mathbf{F}_\Sigma] = 0 + \mathbf{M}$ $\mathbf{M} \equiv [\mathbf{r}, \mathbf{F}_\Sigma]$		(7.5)	Связь скорости изменения момента импульса с моментом силы.
$\mathbf{M} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{l} - \text{сохраняется}$		(7.6)	Закон сохранения момента импульса материальной точки.
$\mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \mathbf{M} = \left[ \mathbf{r}, f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{l}}{dt} = 0$		(7.7)	Сохранение момента импульса в поле центральных сил.

### Пример. Второй закон Кеплера

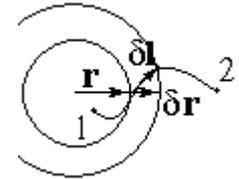
$\mathbf{l} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = m[\mathbf{r}, \mathbf{v} \cdot \delta t] \frac{1}{\delta t} =$ $= m \frac{1}{\delta t} [\mathbf{r}, \delta \mathbf{r}] = m \cdot \frac{\delta \mathbf{S}}{\delta t} \Rightarrow$ $\frac{dS}{dt} = const$		(7.8)	Закон сохранения секторной скорости как следствие закона сохранения момента импульса.
---	---	-------	---

### 7.3. Работа. Теорема об изменении кинетической энергии

$\delta A_k \equiv F_k \delta l_k \cos \alpha_k = (\mathbf{F}_k, \delta \mathbf{l}_k)$ $A_{12} \equiv \sum_k \delta A_k \Big _{\delta l_k \rightarrow 0} = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{l})$		(7.9)	Определение элементарной работы на малом участке траектории и полной работы на конечном участке.
---	---	-------	--

$\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k \Rightarrow A_{12}(\mathbf{F}_\Sigma) = \sum A_{12}(\mathbf{F}_k)$ $A_{123} = A_{12} + A_{23}$	(7.10)	Свойства работы, следующие непосредственно из ее определения.
$N \equiv \frac{dA}{dt} = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$	(7.11)	Определение мощности и связь мощности со скоростью.
$K \equiv \frac{mv^2}{2}$	(7.12)	Определение кинетической энергии
$m = const \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = m \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v} \right) = (\mathbf{F}_\Sigma, \mathbf{v}) = N_\Sigma$	(7.13)	Связь скорости изменения кинетической энергии с суммарной мощностью сил, приложенных к материальной точке.
$dK = (\mathbf{F}_\Sigma, \mathbf{v})dt = (\mathbf{F}_\Sigma, d\mathbf{l}) = dA \Rightarrow \delta K \equiv K_2 - K_1 = A_{12}^{(всех сил)}$	(7.14)	Теорема об изменении кинетической энергии.

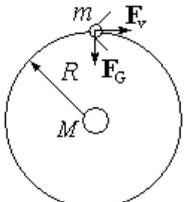
### 7.3. Примеры вычисления работы различных сил

$\begin{cases} \mathbf{F} = C\mathbf{e}_z \\ C = const \end{cases} \Rightarrow A = \int_1^2 (C\mathbf{e}_z, d\mathbf{l}) = C \int_1^2 dz = C(z_2 - z_1)$	(7.15)	Работа постоянной силы.
$\mathbf{F} = mg \equiv mg\mathbf{e}_z \Rightarrow A = mg(z_2 - z_1) \equiv mg\delta H$	(7.16)	Работа силы тяжести как следствие (7.15).
$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv f(r)\mathbf{e}_r \Rightarrow$ $A = \int_1^2 f(r)(\mathbf{e}_r, d\mathbf{l}) = \int_1^2 f(r)dr$		(7.17) Работа сил центрального поля.
$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \Rightarrow A = \int_1^2 -krdr = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}$	(7.17)	Работа упругих сил.
$\mathbf{F} = C \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow A = C \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = C \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$	(7.18)	Работа сил кулоновского поля.
$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \Rightarrow A = GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$	(7.19)	Работа гравитационных сил.
$\begin{cases} \mathbf{F} = f(v) \frac{\mathbf{v}}{v} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) \end{cases} \Rightarrow A = \int_1^2 v \cdot f(v) dt$	(7.20)	Работа сил вязкого трения в случае движения тела со скоростью, изменяющейся по времени по известному закону.
$\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}/c, \mathbf{B}] \Rightarrow$ $A = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = \int_1^2 (q[\mathbf{v}/c, \mathbf{B}], \mathbf{v} dt) = q/c \int_1^2 ([\mathbf{v}, \mathbf{v}], \mathbf{B} dt) \equiv 0$	(7.21)	Работа силы Лоренца всегда тождественно равна нулю.

#### 7.4. Потенциальная энергия, закон сохранения механической энергии

$\int_{1A2} (\mathbf{F}^{(nom)}, d\mathbf{l}) = \int_{1B2} (\mathbf{F}^{(nom)}, d\mathbf{l}) \Leftrightarrow \oint (\mathbf{F}^{(nom)}, d\mathbf{l}) = 0 \quad (7.21)$	Два эквивалентных свойства потенциальных сил, обычно используемых для их определения.
$U(\mathbf{r}) \equiv A_{\mathbf{r} \rightarrow 0}^{(pot)} = \int_{\mathbf{r}}^0 (\mathbf{F}^{(pot)}, d\mathbf{l}) \quad (7.22)$	Определение потенциальной энергии.
$W(\mathbf{r}) \equiv K(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \quad (7.23)$	Определение полной механической энергии.
$K_2 - K_1 = A_{12}^{(сеч\ с\ и\ т)} = A_{12}^{(nom)} + A_{12}^{(ненom)}$ $A_{12}^{(nom)} = A_{10}^{(nom)} + A_{02}^{(nom)} = U_1 - U_2$ $(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = A_{12}^{(ненom)} \quad (7.24)$	Доказательство теоремы о изменении механической энергии.
$W_2 - W_1 = A_{12}^{(ненom)} \Leftrightarrow \frac{dW}{dt} = N^{(ненom)} \quad (7.25)$	Теорема об изменении полной механической энергии.

#### Пример. Движение спутника в верхних слоях атмосферы

	$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_v, \quad F_v \ll F_G$ $R \approx const \Rightarrow m \frac{v^2}{R} \approx G \frac{mM}{R^2}$ $m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} G \frac{mM}{R} \quad (7.27)$	Условие движения спутника по почти круговой орбите.
$U_G(r = \infty) = 0 \Rightarrow U(\mathbf{r}) = A_{\mathbf{r} \rightarrow \infty} = -G \frac{Mm}{r} \quad (7.28)$	Стандартный выбор нулевой точки и потенциальная энергия точечного тела в поле гравитирующего центра.	
$W = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R} \approx -\frac{mv^2}{2} < 0 \quad (7.29)$	Полная механическая энергия при финитном движении по почти круговой орбите.	
$\mathbf{F}_v = -f(v)\mathbf{v} \Rightarrow N_v = -f(v)v^2 < 0 \quad (7.30)$	Мощность сил вязкого трения.	
$\frac{dW}{dt} = N_v \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = f(v)v^2 > 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} > 0 \quad (7.31)$	Вследствие слабого трения об атмосферу скорость спутника возрастает.	

#### 7.5. Вычисление потенциальных сил по известной потенциальной энергии

$\delta U \equiv U(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) - \int_{\mathbf{r}}^0 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) =$ $= - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}} (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = -\sum_{\xi} F_{\xi} \delta r_{\xi} \quad (7.32)$	Связь приращения потенциальной энергии с потенциальной силой.
$F_{\xi} = -\frac{\delta U}{\delta r_{\xi}} \Big _{\delta r_{\eta \neq \xi} = 0} \equiv -\frac{\partial U}{\partial r_{\xi}} \quad (7.33)$	Восстановление компоненты потенциальной силы по известной потенциальной энергии.
$\mathbf{F} = -\sum_{\xi} \frac{\partial U}{\partial r_{\xi}} \mathbf{e}_{\xi} \equiv -grad U \equiv -\left( \sum_{\xi} \frac{\partial}{\partial r_{\xi}} \mathbf{e}_{\xi} \right) \circ U \equiv -\nabla U \quad (7.34)$	Восстановление потенциальной силы по известной потенциальной энергии с помощью операции вычисления градиента.

**Пример. Сила, соответствующая квадратичной потенциальной энергии**

$U = -(\mathbf{K}, \mathbf{r}) = -(K_x r_x + K_y r_y + K_z r_z) \Rightarrow$ $\mathbf{F} = K_x \mathbf{e}_x + K_y \mathbf{e}_y + K_z \mathbf{e}_z = \mathbf{K}$	(7.35)	Пространственно однородное поле.
$U = Kr, \quad r =  \mathbf{r}  = \sqrt{\sum_{\xi} r_{\xi}^2} \Rightarrow \mathbf{F} = -K \frac{\mathbf{r}}{r}$	(7.36)	«Очень необычное» центральное поле.

**Вопросы и задачи для самостоятельной работы**

1. Выясните, остается ли справедливой теорема об измерении кинетической энергии в случае движения тела с переменной массой.
2. С помощью теоремы о кинетической энергии рассчитайте скорость, которую будет иметь камень у поверхности Земли, если он был выпущен без начальной скорости с высоты  $H$ , сопоставимой с радиусом Земли  $R$ . Для случая  $H \ll R$  попытайтесь ответить на поставленный вопрос более точно, учтя действие сил сопротивления воздуха.
3. Исходя из теоремы об изменении механической энергии, показать, что при движении тела, испытывающего действие только сил вязкого трения, его скорость всегда уменьшается.
4. \*Какие формы движения могут существовать в центральном поле сил, задаваемом потенциальной энергией  $U = \mathbf{K}\mathbf{r}$  ?
5. \*Найдите силы и попытайтесь смоделировать движение частиц под действием сил, задаваемых следующими выражениями для потенциальной энергии  
 а)  $U = -K \frac{\exp(-\alpha \cdot r)}{r}$ ; б)  $U = xy + yz + zx$

**Лекция 8**

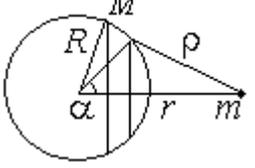
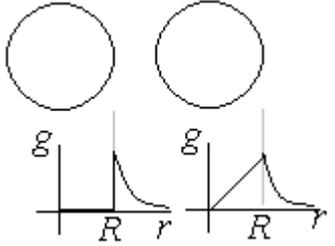
**Движение в центральном и кулоновском поле**

**8.1. Закон всемирного тяготения**

$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}$	(8.1)	Гравитационное взаимодействие двух точечных тел.
$\mathbf{F}_{0\Sigma} = \sum_k \mathbf{F}_{0k} = -\sum_k G \frac{m_0 m_k}{r_{0k}^3} \mathbf{r}_{0k} \equiv m_0 \mathbf{g}$ $\mathbf{g} = \sum_k G \frac{m_k}{r_{0k}^3} \mathbf{r}_{0k}$	(8.2)	Принцип суперпозиции для гравитационных сил и идея введения вектора напряженности гравитационного поля.
$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_u}, \quad \mathbf{F}_G = m_G \mathbf{g}, \quad m_u = C m_G, \quad C \equiv 1$	(8.3)	Инертная и гравитационная массы пропорциональны друг другу.
$m_u \sim m_G \Rightarrow$ $m_0 \mathbf{a} = \mathbf{F}_{0\Sigma} = m_0 \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} \neq \mathbf{f}(m_0)$	(8.4)	Специфическое свойство гравитационных сил, приводящее к явлению невесомости.

**8.2. Гравитационное поле простейших симметричных распределений масс**

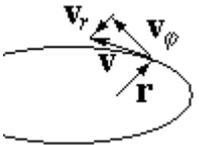
$\mathbf{F}_{\Sigma} = \sum_K \mathbf{F}_K \Rightarrow$ $U_{\Sigma} = \sum_K U_K = -\sum_K G \frac{m_0 m_K}{r_{0K}^3} \mathbf{r}_{0K} \equiv m_0 \phi$	(8.5)	Принцип суперпозиции для потенциальной энергии гравитационного поля как следствие принципа суперпозиции гравитационных сил. Идея введения гравитационного потенциала.
--	-------	---

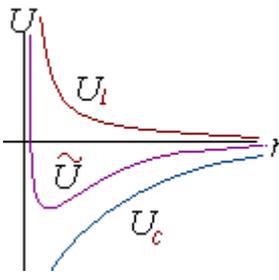
	$dM = M \frac{dS}{S} = M \frac{2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha}{4\pi R^2}$ $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha \Rightarrow$ $\rho d\rho = Rr \sin \alpha d\alpha$ $dU = -G \frac{m dM}{\rho} =$ $-GmM \frac{\sin \alpha d\alpha}{2\rho} = -GmM \frac{d\rho}{2Rr}$	(8.6)	Потенциальная энергия точечной массы в поле бесконечно-узкого кольца, вырезанного из сферического слоя с равномерно распределенной массой.
$r > R \Rightarrow U = -\frac{GmM}{2Rr} \int_{R-r}^{r+R} d\rho = -G \frac{mM}{r} \Rightarrow \mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}$ $r < R \Rightarrow U = -\frac{GmM}{2Rr} \int_{R-r}^{r+R} d\rho = -G \frac{mM}{R} \Rightarrow \mathbf{F} = 0$		(8.7)	Гравитационное взаимодействие между полой однородной сферой и точечной массой.
$r < R \Rightarrow \mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$ $r > R \Rightarrow \mathbf{F} = -G \frac{Mm}{R^3} \mathbf{r}$		(8.8)	Гравитационное взаимодействие между однородным шаром и точечной массой.
	<p><b>Рис. 8.1.</b> Зависимость ускорения свободного падения от расстояния от центра а) полой сферы с равномерно распределенной массой; б) шара из материала постоянной плотности.</p>		

### Пример. Космические скорости

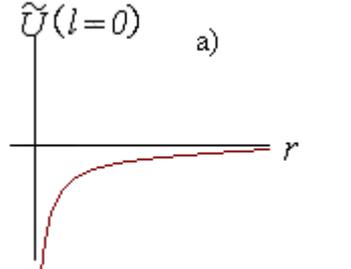
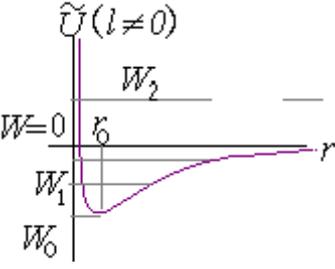
$m \frac{v_1^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{gR}$	(8.9)	Первая космическая
$\frac{mv_2^2}{2} - G \frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2}v_1$	(8.10)	Вторая космическая

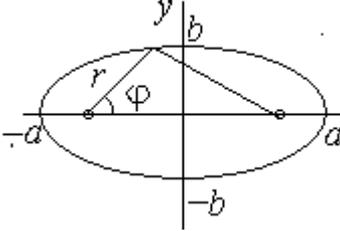
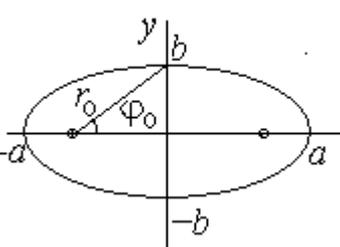
### 8.3. Центробежный потенциал

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = \mathbf{v}_r + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$		(8.11)	Разложение скорости при криволинейном движении на радиальную и тангенциальную составляющие
$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi)^2 = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2}$	(8.12)	Соответствующее (8.9) представление кинетической энергии.	
$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{l} = const \\ W = K + U(r) = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = const \end{cases}$	(8.13)	Удобное представление механической энергии материальной точки, движущейся в центральном поле.	

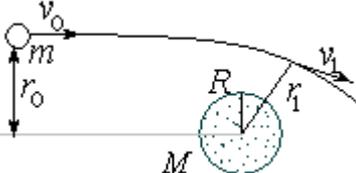
$W = \frac{mv_r^2}{2} + \tilde{U}(r)$ $U_l \equiv \frac{l^2}{2mr^2}, \quad U = -\frac{GMm}{r}$ $\tilde{U}(r) \equiv U + U_l = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$		(8.14)	<p>Введение центробежного потенциала (<math>U_l</math>) в случае движения в центральном поле.</p> <p>Эффективный потенциал в частном случае движения в кулоновском поле.</p>
--	---	--------	--

#### 8.4. Движение в кулоновском поле

$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{e}_l}{dt} = 0$	(8.15)	<p>Плоская траектория движения тела в центральном поле.</p>
$mv_r = \sqrt{2m\left(W + G\frac{mM}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$ $l = mv_\varphi r = m\omega r^2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow d\varphi = \frac{l dr}{mv_r r^2} \Rightarrow$ $d\varphi = \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2mW + 2mGmM/r - l^2/r^2}}$	(8.16)	<p>Система уравнений для построения траектории движения тела в полярных координатах.</p>
		<p><b>Рис. 8.2</b></p> <p>Зависимость от расстояния эффективной потенциальной энергии при движении тела в кулоновском поле для а) нулевого и б) отличного от нуля момента количества движения.</p>
$u \equiv \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \Rightarrow$ $\varphi - \varphi_0 = -\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{2m}{l^2}W + \frac{m^2}{l^4}G^2M^2m^2\right) - \left(u - \frac{m}{l^2}GMm\right)^2}} \equiv$ $\equiv -\int \frac{du}{\sqrt{B^2 - (u - A)^2}}$ $w \equiv u - A \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = -\int \frac{dw}{\sqrt{B^2 - w^2}} = -\int \frac{d(w/B)}{\sqrt{1 - (w/B)^2}}$	(8.17)	<p>Упрощение интеграла (8.16) в результате замены переменных.</p>
<pre>In[28]:= Integrate[<math>\frac{1}{\sqrt{1 - (w)^2}}</math>, w]</pre> <pre>Out[28]:= ArcSin[w]</pre>		<p><b>Рис. 8.3.</b></p> <p>Интегрирование уравнения, возникающего из системы (8.16) при помощи пакета «Математика».</p>

$\begin{cases} \varphi_0 - \varphi = \arcsin \frac{u - A}{B} \\ \varphi_0 \equiv \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r} = u = A + B \sin(\varphi_0 - \varphi) =$	(8.18)	Результат интегрирования (8.16)	
$\begin{cases} P \equiv \frac{1}{ A } = \frac{l^2}{GMm^2} \\ \varepsilon \equiv \frac{B}{ A } \\ \varphi_0 \equiv \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{P}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi$	(8.19)	Стандартная форма записи уравнения траектории.	
	$\begin{aligned} 2a &= r_{\min} + r_{\max} = \frac{P}{1-\varepsilon} + \frac{P}{1+\varepsilon} \\ 2f &= r_{\max} - r_{\min} = \frac{P}{1-\varepsilon} - \frac{P}{1+\varepsilon} \\ a &= G \frac{mM}{2 W } \end{aligned}$	(8.20)	Вычисление большой полуоси эллипса и расстояния от начала координат до фокуса эллипса.
	$\begin{cases} \cos \varphi_0 = \frac{b}{r_0} \\ f^2 + b^2 = r_0^2 = \frac{P^2}{(1 + \varepsilon \cos \varphi_0)} \\ b = \frac{P}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2m W }} \end{cases}$	(8.21)	Вычисление малой полуоси кеплеровой эллиптической орбиты
$\begin{cases} x = \frac{P \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - f \\ y = \frac{P \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	(8.22)	Стандартная форма представления кеплерова эллипса	
$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{F} = -k\mathbf{r}$	(8.23)	Два типа центрального поля, допускающие устойчивое (по отношению к начальным условиям) движение по замкнутым траекториям.	

**Пример. Произойдет ли катастрофа в 2017?**

	$\begin{cases} mv_0 r_0 = mv_1 r_1 \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - G \frac{Mm}{r_1} \end{cases}$	(8.24)	Система уравнений, позволяющая определить параметры движения метеорита в точке наибольшего сближения с Землей.
---	---	--------	--

$r_1 = \sqrt{r_0^2 + \left(G \frac{M}{v_0^2}\right)^2} - G \frac{M}{v_0^2} \leq R$	(8.25)	Условие, при котором населению Земли надлежит выделить средства на финансирование программы антиметеоритной защиты планеты.
--	--------	---

### 8.5. Третий закон Кеплера

$\mathbf{l} = m \left[ \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = 2m \frac{dS}{dt}$	(8.26)	Связь момента импульса тела с его секторной скоростью
$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = 0 \Rightarrow lT = 2mS = 2\pi mab$	(8.27)	Интегрирование закона сохранения секторной скорости.
<pre>In[1]:= Integrate[b * (1 - x^2 / a^2)^(0.5), {x, -a, a}] Out[1]= 1.5708 a b </pre>	<b>Рис. 8.3.</b> Нахождение площади эллипса	
$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 m^2}{l^2} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = const$	(8.28)	Третий закон Кеплера

### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Планета представляет собой однородный шар радиуса  $R$ , массой  $M$ . Рассчитать зависимость потенциальной энергии тела массой  $m$  от расстояния до центра планеты.
2. В планете массой  $M$ , представляющей собой однородный шар радиуса  $R$ , проделан очень гладкий прямой сквозной туннель, не проходящий через центр планеты. С одного из концов туннеля без начальной скорости запускают небольшое тело. Через какое время тело окажется на противоположном конце туннеля? Через какое время оно вернется обратно в точку старта? Попробуйте ответить на поставленные вопросы для случая тела, запущенного с начальной скоростью  $v_0$  в проходящий через центр планеты туннель.
3. Исходя из графика зависимости эффективного потенциала от расстояния (Рис. 8.2.а), вычислить минимальную начальную скорость  $V_2$ , с которой нужно бросить камень с поверхности Луны, чтобы он не вернулся обратно. Считать, что средняя плотности Луны и Земли равны друг другу, а величина ускорения свободного падения на поверхности Земли – известна. \*) Через какое время камень упадет на поверхность Луны, если его бросить вертикально вверх с начальной скоростью  $V_2/2$ ?
4. Исходя из графика зависимости эффективного потенциала от расстояния (Рис. 8.2.б), вычислить радиус круговой орбиты спутника для заданного момента количества движения  $l$ .
5. С поверхность планеты массой  $M$  и радиусом  $R$  запускается небольшой тело массой  $m \ll M$  с начальной скоростью  $v_0$ , направленной по касательной к поверхности. Определить точку максимального удаления тела от центра планеты и скорость в этой точке.
6. Выполнить достаточно длинные и скучные математические выкладки и получить соотношение (8.22).
7. \* Попробуйте дать качественное объяснение возникновения квазиустойчивой траектории при рассеянии частиц определенной энергии на потенциале Юкавы. При каких начальных условиях рассеиваемая частица останется на круговой орбите? Каков будет характер движения в случае немного больших или меньших начальных скоростей?

## Динамика системы материальных точек

### 9.1. Рассмотрение движения системы взаимодействующих частиц на основе законов Ньютона

$\begin{cases} m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{F}_k^{(внеш)} + \sum_{P \neq k} \mathbf{f}_{kP}^{(внутр)} \\ \mathbf{r}_k(0) = \mathbf{r}_{k0} \\ \mathbf{v}_k(0) = \mathbf{v}_{k0} \\ k = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \Rightarrow \exists! \{ \mathbf{r}_k(t), \mathbf{v}_k(t) \}$	(9.1)	Рассмотрение задачи описания поведения системы материальных точек на основе решения системы дифференциальных уравнений движения каждой из частиц в рамках классической механики приводит к детерминизму Лапласа.
--	-------	--

### 9.2. Центр масс

$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_K m_K \mathbf{r}_K}{M}, \quad M \equiv \sum_K m_K$	(9.2)	Определения центра масс и полной массы системы материальных точек.
$\mathbf{V} \equiv \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\sum_K m_K \mathbf{v}_K}{M} = \frac{\sum_K \mathbf{p}_K}{M}$	(9.3)	Скорость центра масс.
$\mathbf{P} \equiv \sum_K \mathbf{p}_K = M\mathbf{V}$	(9.4)	Импульс системы частиц.
$M = const \Rightarrow M\mathbf{A} \equiv M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$	(9.5)	Ускорение центра масс

### 9.3. Закон сохранения импульса системы частиц

$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_K \frac{d\mathbf{p}_K}{dt} = \sum_K \mathbf{F}_K^{(внеш)} + \sum_{K \neq P} \mathbf{f}_{KP}^{(внутр)} = \sum_K \mathbf{F}_K^{(внеш)}$	(9.6)	Скорость изменения импульса системы материальных точек.
$\sum_K \mathbf{F}_K^{(внеш)} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = const$	(9.7)	Закон сохранения полного импульса в замкнутой системе материальных точек.
$\mathbf{A} = \frac{1}{M} \sum_K \mathbf{F}_K^{(внеш)}$	(9.8)	Уравнение движения центра масс системы материальных точек.

### 9.4. Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

$\mathbf{L} \equiv \sum_K \mathbf{l}_K$	(9.9)	Определение момента импульса системы материальных точек
$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_K \left[ \frac{d\mathbf{r}_K}{dt}, \mathbf{p}_K \right] + \sum_K \left[ \mathbf{r}_K, \frac{d\mathbf{p}_K}{dt} \right] = \\ &= \sum_K \left[ \mathbf{r}_K, \mathbf{F}_K^{(\Sigma)} \right] = \sum_K \left[ \mathbf{r}_K, \mathbf{F}_K^{(внеш)} \right] = \sum_K \mathbf{M}_K^{(внеш)} \end{aligned}$	(9.10)	Скорость изменения момента импульса системы определяется суммарным моментом внешних сил.

$\sum_K \mathbf{M}_K^{(BHVT)} = \sum_{K \neq P} [\mathbf{r}_K, \mathbf{f}_{KP}] =$ $= \frac{1}{2} \sum_{K \neq P} ([\mathbf{r}_K, \mathbf{f}_{KP}] + [\mathbf{r}_P, \mathbf{f}_{PK}]) =$ $= \frac{1}{2} \sum_{K \neq P} [(\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_P), \mathbf{f}_{KP}] = 0$		(9.11)	Взаимное уничтожение моментов внутренних сил системы (векторное произведение в каждом из слагаемых обращается в нуль в силу свойств векторного произведения).
$\sum_K \mathbf{M}_K^{(вещи)} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$	(9.12)	Закон сохранения момента импульса для систем, не испытывающих действия вращающихся моментов внешних сил.	

### 9.5. Закон сохранения механической энергии в потенциальных системах

$K \equiv \sum_K \frac{m_K v_K^2}{2}$	(9.13)	Полная кинетическая энергия системы материальных точек.
$\mathbf{v}_K = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_K \Rightarrow$ $K = \frac{MV^2}{2} + \sum_K \frac{m_K (v'_K)^2}{2}$	(9.14)	Разделение кинетической энергии системы на кинетическую энергию движения системы в целом и кинетическую энергию относительного движения («внутреннюю кинетическую энергию»).
$\frac{dK}{dt} = \sum_K (\mathbf{F}_K, \mathbf{v}_K)$	(9.15)	Изменение полной кинетической энергии системы определяется работой всех сил/
$\mathbf{F}_K = \mathbf{F}_K^{(ПОТ)} + \mathbf{F}_K^{(НЕПОТ)} + \mathbf{f}_K^{(ПОТ)} + \mathbf{f}_K^{(НЕПОТ)}$	(9.16)	Классификация сил, действующих на частицы системы: внешние ( $\mathbf{F}$ ) и внутренние ( $\mathbf{f}$ ), которые, в свою очередь, делятся на потенциальные и непотенциальные.
$U_\Sigma \equiv A_{X \rightarrow 0}^{(ПОТ)} = A_{X \rightarrow 0}^{(ВНЕШ ПОТ)} + A_{X \rightarrow 0}^{(ВНУТ ПОТ)}$ $\equiv U^{(ВНЕШ)} + U^{(ВНУТ)}$ $\delta U_\Sigma = -\delta A_{12}^{(ВНЕШ ПОТ)} - \delta A_{12}^{(ВНУТ ПОТ)}$	(9.17)	Потенциальная энергия заданной конфигурации системы определяется как суммарная работа потенциальных сил (внешних и внутренних) по переводу системы в конфигурацию, для которой потенциальная энергия принята равной нулю.
$W_\Sigma \equiv K_\Sigma + U_\Sigma \equiv W^{(ВНЕШ)} + W^{(ВНУТ)}$ $W^{(ВНУТ)} = \sum_K \frac{mv_K^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{K \neq P} U_{KP}$	(9.18)	Полная механическая энергия системы и внутренняя энергия системы.
$\frac{dW}{dt} = \sum_K (\mathbf{F}_K^{(НЕПОТ)} + \mathbf{f}_K^{(НЕПОТ)}, \mathbf{v}_K)$	(9.19)	Скорость изменения полной механической энергии системы материальных точек определяется суммарной мощностью непотенциальных сил, действующих в системе.

$\mathbf{F}_K = \mathbf{F}_K^{(ПОТ)} \Rightarrow W = const$	(9.20)	Закон сохранения механической энергии в потенциальных системах.
$\mathbf{F}_K = \mathbf{f}_K^{(ПОТ)} \Rightarrow W^{(ВНПП)} = const$	(9.21)	Закон сохранения внутренней механической энергии в замкнутых потенциальных системах.

**Пример. Потенциальная (внутренняя) энергия системы тел, взаимодействующих гравитационными силами**

$\phi_K \equiv -\sum_{P \neq K} G \frac{m_P}{r_{KP}} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_K m_K \phi_K$	(9.22)	Выражение потенциальной энергии через гравитационные потенциалы, рассчитываемые в каждой точке нахождения частицы (теорема, требующая доказательства).
$U^{(2)} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = m_1 \phi_1 = m_2 \phi_2 = \frac{1}{2} (m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2)$	(9.23)	База для индукционного перехода.
$U^{(N)} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N m_K \phi_K^{(N)} \Rightarrow$ $U^{(N+1)} = U^{(N)} + m_{N+1} \phi_{N+1}^{(N+1)} = \dots = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{N+1} m_K \phi_K^{(N+1)}$	(9.24)	Обоснование индукционного перехода.

**Вопросы и задачи для самостоятельной работы**

1. Показать, что в системе отсчета, связанной с центром масс системы, сумма импульсов всех составляющих систему частиц равна нулю.
2. Рассчитать потенциальную энергию гравитационного взаимодействия звезд гипотетического шарового скопления радиусом  $R$ , концентрация которых  $n$  равномерно распределена по объему. Средняя масса звезды в скоплении равна  $M$ . Подумайте над тем, могут ли реально существовать такие скопления.
3. Груз массой  $m$ , удерживаемый невесомой веревкой с начальной длиной  $L$ , вращается, скользя по очень гладкой горизонтальной плоскости. Через проделанное в плоскости небольшое отверстие у неподвижного конца веревки ее (веревку) начинают втягивать в постоянной скоростью  $v$ . Найти зависимости от времени декартовых координат груза, его угловой и линейной скорости, кинетической энергии.
4. Найти положение центра масс однородного конуса высотой  $H$ , основание которого представляет собой круг радиуса  $R$ .
5. Подобно тому, как кинетическая энергия была разделена на энергию движения системы в целом и кинетическую энергию относительного движения, возникает соблазнительная идея разбить полный момент импульса системы на момент, обусловленный движением центра масс («орбитальный момент») и момент относительного вращения («спиновый»). Для как их систем это возможно?
6. Докажите терему (9.22). Один из возможных путей доказательства использование метода математической индукции. В качестве базы для индукционного перехода удобно использовать почти очевидное выражение для потенциальной энергии взаимодействия двух частиц

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} (m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2),$$

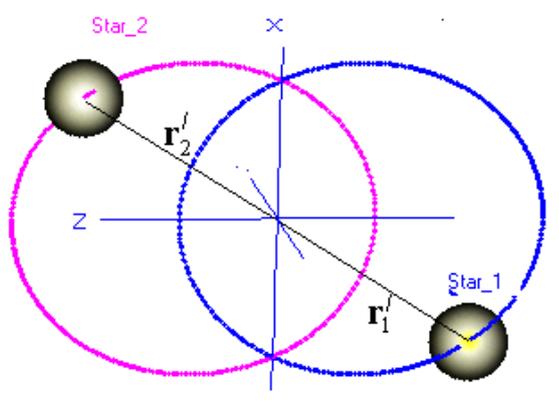
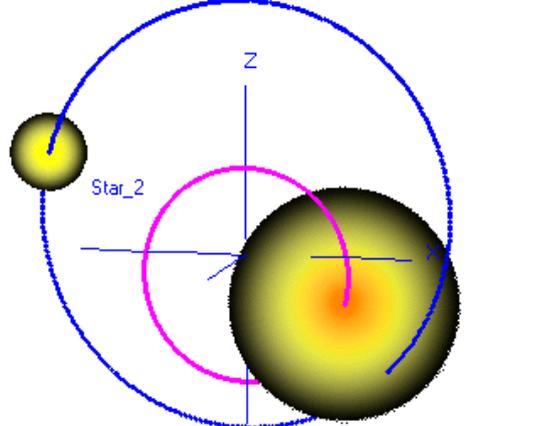
которое, впрочем, так же нуждается в обосновании.

Примеры движения систем классических материальных точек

10.1. Задача двух тел

$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{f}_{12} \equiv \mathbf{f} \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f} \end{cases}$	(10.1)	Уравнение движения двух взаимодействующих между собой тел, испытывающих воздействие внешних сил.
$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &\equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1 - (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_2) = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \\ \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{\rho} \end{aligned}$	(10.2)	Переход к системе отсчета, связанной с центром масс.
$m_1 m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = (m_1 + m_2) \mathbf{f}_{12}$	(10.3)	Уравнение движения частиц в системе центра масс.
$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \mu \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \mathbf{f}_{12}$	(10.4)	Переход от задачи двух тел к задаче о движении одной частицы с приведенной массой.

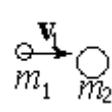
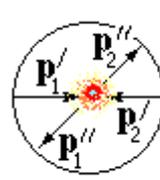
Пример. Двойная звезда

	<p><b>Рис. 10.1.</b> Двойная звезда, компоненты которой имеют одинаковые массы.</p>
	<p><b>Рис. 10.2.</b> Двойная звезда, компоненты которой имеют различные массы.</p>

### 10.2. Упругое столкновение двух тел. Лобовой удар

$\begin{cases} mv + MV = mu + mU \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{mU^2}{2} \end{cases}$	(10.5)	Система уравнений для определения скоростей разлета (законы сохранения проекции импульса и энергии).
$\begin{cases} m(v+u)(v-u) = M(U+V)(U-V) \\ m(v-u) = M(U-V) \end{cases}$	(10.6)	Наиболее короткий способ решения системы (10.6).
$\begin{cases} u = v \\ U = V \end{cases} \vee \begin{cases} u = \frac{2VM + v(m-M)}{M+m} \\ U = \frac{2vm + V(M-m)}{m+M} \end{cases}$	(10.7)	Два возможных решения системы (10.6), соответствующие движению частиц без столкновения и разлету в результате столкновения.
$m = M \Rightarrow \begin{cases} u = V \\ U = v \end{cases}$	(10.8)	При лобовом столкновении частиц одинаковой массы происходит обмен скоростями.
$v = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 2V \frac{M}{m+M} \\ U = V \frac{M-m}{m+M} \end{cases}$	(10.9)	Важнейший частный случай (10.7): результат столкновения в инерциальной системе отсчета, где частица с массой $m$ первоначально покоилась.
$\begin{aligned} M \gg m &\Rightarrow \begin{cases} U \approx V \\ u \approx 2V \end{cases} \\ M \ll m &\Rightarrow \begin{cases} U \approx -V \\ u \approx 0 \end{cases} \end{aligned}$	(10.10)	Важнейшие предельные случаи лобового столкновения частицы с покоящейся.
	<p><b>Рис. 10.3.</b> Упругое столкновение шара с цепочкой покоящихся шаров такой же массы.</p>	

### 10.3. Произвольное упругое столкновение

$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} = \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}'_2 \frac{m_1}{m_2} \end{aligned}$		(10.11)	Упругое рассеяние на неподвижной мишени – переход к рассмотрению в системе отсчета, связанной с центром масс.
$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}''_1 + \mathbf{p}''_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p}''_1 = -\mathbf{p}''_2$		(10.12)	Импульсы разлетающихся частиц в системе центра масс равны друг другу и противоположны.
$\begin{cases} \frac{(p'_1)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2} = \frac{(p''_1)^2}{2m_1} + \frac{(p''_2)^2}{2m_2} \\ p'_1 = p'_2 \\ \Rightarrow (p''_1)^2 = (p'_1)^2 \end{cases}$		(10.13)	В системе центра масс импульсы разлетающихся частиц равны друг другу и импульсам слетающих частиц.

$m_1 < m_2 \Rightarrow$ $v_1' = v_1'' > v_2' = v_2'' \Rightarrow$ $\chi > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi]$		(10.14)	Векторы скоростей сталкивающихся частиц до и после столкновения в случае рассеяния на массивной неподвижной мишени.
--	--	---------	---

#### 10.4. Неупругие и сверх упругие столкновения

$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = M \mathbf{V} \\ m_1 + m_2 = M \end{cases} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$	(10.15)	Скорость частицы, образовавшейся в результате абсолютно неупругого
$0 = \sum_K m_K \mathbf{v}_K$	(10.16)	Распад частицы в системе отсчета, где она первоначально покоилась.

#### 10.5. Движение тела с переменной массой

$m\mathbf{v} = (m + \delta m)(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) + \delta m(\mathbf{v} - \mathbf{u})$	(10.17)	Закон сохранения импульса в случае выброса порции топлива $\delta m$ с относительной скоростью $\mathbf{u}$ .
$\mu \equiv \frac{dm}{dt} \Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu \mathbf{u} + \mathbf{F}$	(10.18)	Уравнение движения тела с переменной массой при наличии внешних сил.
$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} \Rightarrow v(t) = u \ln \frac{M(0)}{M(t)}$	(10.19)	Уравнение Циолковского.
$M\mathbf{v} = (M - \delta M)(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) + \delta M(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \delta m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \delta m\mathbf{v}$ $\mu_T \equiv \frac{dM}{dt}, \quad \mu_B \equiv \frac{dm}{dt} \Rightarrow M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu_T \mathbf{u} + \mu_B \mathbf{u} - 2v\mu_B$	(10.20)	Уравнение движения реактивного самолета.
$\begin{cases} v = const \\ \mu_T \ll \mu_B \end{cases} \Rightarrow v = \frac{u}{2}$	(10.21)	Условие стационарного движения реактивного самолета.

#### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Покажите, что при упругом рассеянии на неподвижной мишени в случае  $m_1 > m_2$  (см. 10.14) угол рассеяния ограничен значением  $\varphi_{\max} = \arcsin(m_2/m_1)$ .
2. Две заряженные частицы с одинаковой массой могут двигаться без трения по параллельно расположенным на расстоянии  $h$  нитям. В начальный момент одна частица покоилась, а другая скользила из бесконечности по соседней нити. Найти установившиеся скорости частиц, если начальная скорость и заряды частиц известны.
3. При каком соотношении масс сталкивающихся частиц при лобовом упругом столкновении с неподвижной мишенью происходит максимальная передача кинетической энергии мишени?
4. При каком соотношении масс сталкивающихся частиц при лобовом столкновении происходит максимальный переход кинетической энергии во внутреннюю?
5. смоделируйте старт космического корабля, обладающего постоянной реактивной тягой, с планеты заданной массы и, может быть, обладающей атмосферой.

**Симметрии и законы сохранения в классической механике**

(дополнительный материал для тех, кто в ближайшем будущем собирается изучать квантовую механику)

**11.1. Симметрия относительно трансляций и закон сохранения импульса**

$\mathbf{f}_P \equiv \sum_{K \neq P} \mathbf{f}_{KP}(\mathbf{r}_{KP})$	(11.1)	Сила, действующая на отдельную частицу в замкнутой системе.
$\delta A = \left( \sum_P \mathbf{f}_P, \delta \mathbf{R} \right) = -\delta U = 0$	(11.2)	Изменение потенциальной энергии системы в результате ее трансляции на вектор $\delta \mathbf{R}$ .
$\sum_P \mathbf{f}_P = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_P \mathbf{f}_P = 0$	(11.3)	Закон сохранения импульса.

**11.2. Симметрия относительно поворотов и закон сохранения момента импульса**

$d\mathbf{r}_P = [d\varphi, \mathbf{r}_P]$	(11.4)	Изменение радиус-вектора частицы, входящей в замкнутую систему, в результате поворота системы на бесконечно малый угол.
$\sum_P (\mathbf{f}_P, d\mathbf{r}_P) = -dU = 0$	(11.5)	Условие изотропности пространства.
$0 = \sum_P (\mathbf{f}_P, [\mathbf{r}_P, d\varphi]) = \sum_P (d\varphi, [\mathbf{f}_P, \mathbf{r}_P]) =$ $= \left( d\varphi, \sum_P [\mathbf{f}_P, \mathbf{r}_P] \right) = \left( d\varphi, \sum_P \mathbf{M}_P \right)$	(11.6)	Равенство нулю суммы моментов внутренних сил системы как следствие изотропности пространства.
$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_P \mathbf{M}_P = 0$	(11.7)	Закон сохранения момента импульса.

**11.3. Однородность времени и закон сохранения энергии**

$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}, t)$	(11.8)	Выражение для силы через потенциальную энергию.
$A_{12} = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -\int_1^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$	(11.9)	Работа потенциальной силы
$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt$	(11.10)	Полный дифференциал потенциальной функции, зависящей от времени.
$A_{12} = -\int_1^2 dU + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = U_1 - U_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$	(11.11)	Связь работы и потенциальной энергии, зависящей от времени.
$A_{12} = K_2 - K_1 \Rightarrow$ $(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt$	(11.12)	Закон изменения полной энергии в случае зависящей от времени потенциальной энергии.
$U = U(\mathbf{r}) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$	(11.13)	Связь закона сохранения энергии с независимостью от времени потенциальной энергии.

#### 11.4. Экстремальные принципы в механике

$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt = \min$	(11.14)	Действие.
$\tilde{x}(t) \equiv x(t) + \eta(t)$	(11.15)	Связь истинной и варьируемой траектории.
$S = \int dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\tilde{x}}{dt} \right)^2 - U(\tilde{x}) \right] =$ $= \int dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - U(x + \eta) \right] \approx$ $\approx \int dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - U(x) + m \frac{d\tilde{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{dU}{dx} + \dots \right]$	(11.16)	Действие по пути, отличному от истинного.
$\delta S = \int_1^2 dt \left[ m \frac{d\tilde{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{dU}{dx} \right] = m \frac{dx}{dt} \eta \Big _{t_1}^{t_2} -$ $- \int_1^2 dt \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) \eta - \int_1^2 dt \frac{dU}{dx} \eta = 0$	(11.17)	Условие минимума действия по реальной траектории.
$0 = \delta S = \int_1^2 dt \left[ -m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dU}{dx} \right] \eta = 0, \quad \forall \eta \Rightarrow$ $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x$	(11.18)	Второй закон Ньютона как следствие вариационного принципа.
$L: \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \circ L(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$	(11.19)	Функция Лагранжа как обобщение подхода (11.14-11.18) на случай движения, не подчиняющегося законам классической механики.
$\tilde{q}_i \equiv q_i + \eta_i \Rightarrow \dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_i + \dot{\eta}_i$	(11.20)	Варьирование траектории
$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \circ (L(\tilde{q}_i, \dot{\tilde{q}}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)) =$ $= \int_{t_1}^{t_2} dt \circ \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i \Big _{t_1}^{t_2} +$ $+ \sum_i \int_{t_1}^{t_2} dt \circ \eta_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \end{cases}$	(11.21)	Получение уравнений движения из вариационного принципа для функции Лагранжа

#### 11.5. Другие симметрии и глобальные законы сохранения в физике

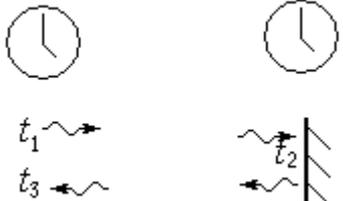
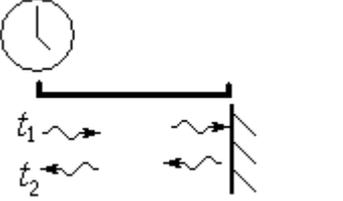
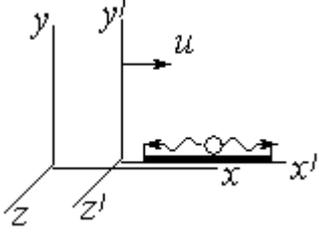
Симметрия относительно обращения времени	$S = const$
Симметрия относительно инверсии координат	$P = const$
Симметрия относительно комплексного сопряжения	$Q = const$

**Релятивистская кинематика**

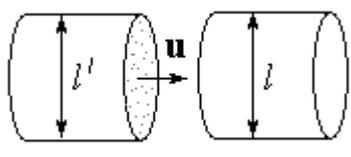
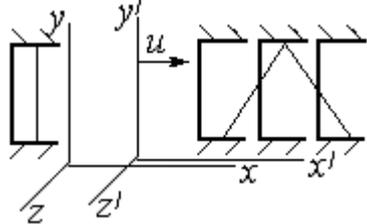
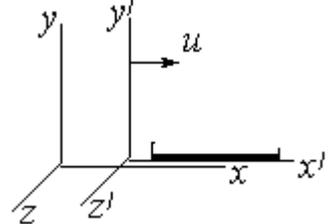
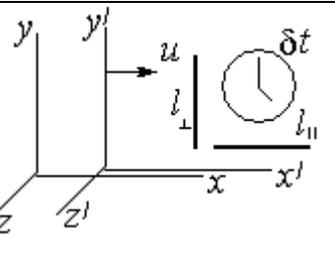
**11.1. Необходимость перехода к релятивистскому описанию**

$\mathbf{F}_{KP}( \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_P ) = m_K \mathbf{a}_K$ $\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}  \mathbf{r}_K - \mathbf{r}_P  =  \mathbf{r}'_K - \mathbf{r}'_P  \\ \mathbf{a}_K = \mathbf{a}'_K \end{cases} \Rightarrow$ $\mathbf{F}'_{KP}( \mathbf{r}'_K - \mathbf{r}'_P ) = m_K \mathbf{a}'_K$ $(m' = m)$	(11.1)	Инвариантность основного закона классической механики относительно преобразований Галилея в случае сил, зависящих только от относительного положения тел.
$\mathbf{F}_B = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \neq \mathbf{F}'_B = \frac{q}{c} [\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{B}']$	(11.2)	Возможность нарушения инвариантности второго закона Ньютона относительно преобразований Галилея в случае учета магнитных взаимодействий.
$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - xu/c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{cases}$	(11.3)	Преобразования Галилея, сохраняющие инвариантность уравнений классической динамики и преобразования Лоренца, обеспечивающие инвариантность уравнений электродинамики Максвелла.

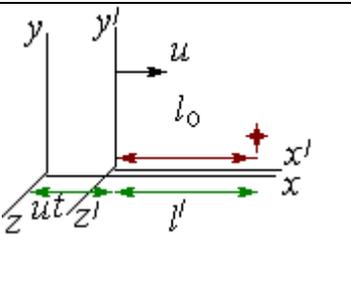
**11.2. Постулаты СТО. Синхронизация часов. Измерение расстояний. Относительность одновременности**

	$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}$	(11.4)	Алгоритм синхронизации часов при помощи светового импульса.
	$L \equiv \frac{c(t_2 - t_1)}{2}$	(11.5)	Алгоритм измерения расстояний.
	<p><b>Рис. 11.1</b> Относительность одновременности: световой импульс, испущенный из середины отрезка, движущегося вместе с системой К', доходит одновременно до его концов. В неподвижной системе отсчета указанные события происходят не одновременно.</p>		

### 11.3. Релятивистские эффекты замедления времени и сокращения длин отрезков

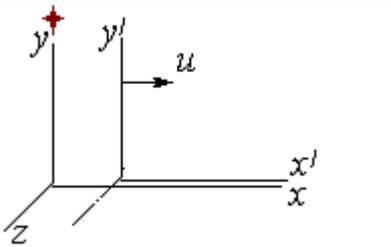
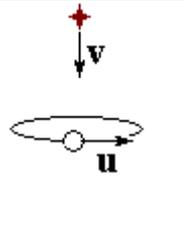
	<p><b>Рис. 11.2</b> К доказательству свойства инвариантности длин отрезков, ориентированных перпендикулярно скорости их движения.</p>
	<p><b>Рис. 11.3.</b> Траектории светового импульса в световых часах, расположенных в неподвижной и движущейся системе отсчета с точки зрения неподвижного наблюдателя.</p>
$\begin{cases} \delta t_0 = \frac{2l}{c} \\ \delta t' = \frac{2s}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{l^2 + \left(\frac{u}{2} \delta t'\right)^2} \Rightarrow \delta t' = \pm \frac{\delta t}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \end{cases}$	<p>(11.6) Релятивистский эффект преобразования увеличения интервалов времени (замедления времени) в движущихся системах отсчета.</p>
	<p>(11.7) Релятивистский эффект сокращения длин отрезков, направленных вдоль скорости относительного движения наблюдателя.</p> $u = \frac{l'}{\delta t_0} = \frac{l_0}{\delta t'} \Rightarrow l' = l_0 \sqrt{1 - (u/c)^2}$
	<p>(11.8) Сводка формул, преобразования длин отрезков и интервалов времени при переходе в движущуюся систему отсчета. U — скорость системы отсчета, выраженная в единицах c.</p> $\delta t' = \frac{\delta t_0}{\sqrt{1 - U^2}}$ $l'_{\perp} = l_{0\perp} \quad U \equiv \frac{u}{c}$ $l'_{\parallel} = l_{0\parallel} \sqrt{1 - U^2}$

### 11.4. Преобразования Лоренца

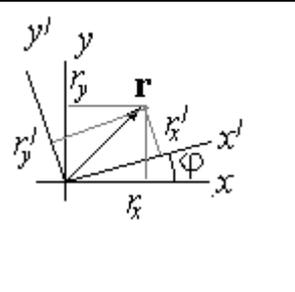
	<p>(11.9) Преобразование координат при переходе к движущейся системе отсчета.</p> $x' = l_0$ $x = l' + ut = l_0 \sqrt{1 - U^2} + ut \Rightarrow$ $x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - U^2}}$ $x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - U^2}}$	
$\begin{cases} x' \sqrt{1 - U^2} = x - ut \\ x \sqrt{1 - U^2} = x' + ut' \end{cases} \Rightarrow$	<p>(11.10) Преобразования Лоренца для времени как следствие уравнений (11.9).</p> $\begin{cases} t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - U^2}} \\ t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - U^2}} \end{cases}$	

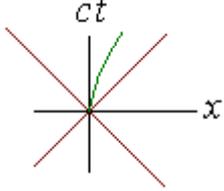
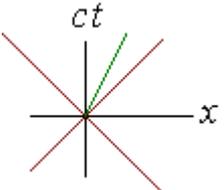
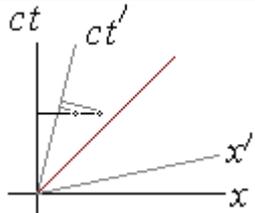
$v_{\xi} \equiv \frac{dr_{\xi}}{dt}, \quad v'_{\xi} \equiv \frac{dr'_{\xi}}{dt'}$	(11.11)	Определение скорости с учетом различия хода времени в различных системах отсчета.
$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'+udt'}{dt'+udx'/c^2} = \frac{v'_x + u}{1+uv'_x/c^2}$ $v_y = \frac{v'_y}{1+uv'_x/c^2} \sqrt{1-U^2}, \quad v_z = \frac{v'_z}{1+uv'_x/c^2} \sqrt{1-U^2}$	(11.12)	Релятивистский закон сложения скоростей.

**Пример. Аберрации звездного неба**

	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha = 0$	(11.13)	Вектор скорости света, приходящего от звезды, находящейся в зените, с точки зрения наблюдателя, находящегося в гелиоцентрической системе отсчета.
	$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = -u$ $v'_y = \frac{v_y}{1 - uv_x/c^2} \sqrt{1 - (u/c)^2} = -c \sqrt{1 - (u/c)^2}$ $\alpha = \arcsin(u/c)$	(11.14)	Изменение наблюдаемого положения звезды, вызванное орбитальным движением Земли.

**11.5. Четырехмерное пространство-время**

	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{\mathfrak{R}}_z(-\varphi) \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z \end{pmatrix}$	(11.15)	Преобразование координат вектора в результате поворота системы координат вокруг оси z на угол phi.
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	(11.16)	Матрица преобразования координат вектора при повороте системы координат.	
$r^2 = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 = (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = inv$	(11.17)	Инвариантность квадрата трехмерного вектора относительно поворота системы координат вокруг одной из координатных осей.	
$\hat{\mathfrak{R}}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \hat{\mathfrak{R}}_z(\gamma) \circ \hat{\mathfrak{R}}_x(\alpha) \circ \hat{\mathfrak{R}}_z(\beta)$ $\hat{\mathfrak{R}}_x(\varphi) = \hat{\mathfrak{R}}_y(-\frac{\pi}{2}) \circ \hat{\mathfrak{R}}_z(\varphi) \circ \hat{\mathfrak{R}}_y(\frac{\pi}{2})$ $\hat{\mathfrak{R}}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{\mathfrak{R}}_z(\gamma) \circ \hat{\mathfrak{R}}_y(-\frac{\pi}{2}) \circ \hat{\mathfrak{R}}_z(\alpha) \circ \hat{\mathfrak{R}}_y(\frac{\pi}{2}) \circ \hat{\mathfrak{R}}_z(\beta)$	(11.18)	Произвольный поворот в трехмерном пространстве, определяемый углами Эйлера.	

$r^2 = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 \neq x^2(1 - u^2/c^2) + y^2 + z^2 =$ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (\hat{L}\mathbf{r}, \hat{L}\mathbf{r}) \neq inv$	(11.19)	Нарушение инвариантности квадрата длины вектора при переходе в движущуюся систему отсчета.
$S^2 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 =$ $= c^2 \frac{(t - Ux/c)^2}{1 - U^2} - \frac{(x - Uct)^2}{1 - U^2} - y^2 - z^2 =$ $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = inv$	(11.20)	Инвариантная относительно преобразований Лоренца комбинация компонент четырехвектора.
$\vec{\mathbf{r}} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$		(11.21) Описание события при помощи четырехвектора в пространстве Минковского.
	$\mathbf{r} = \mathbf{v}t = \mathbf{V}(ct)$ $S = \sqrt{c^2 t^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{r})} = ct \sqrt{1 - (v/c)^2} = ct_0$	(11.22) «Физический смысл» время-подобного интервала между двумя точками, лежащими на мировой линии равномерно движущейся частицы.
	$\begin{cases} x = 0 \\ x' = \frac{x - (-v/c)ct}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(v/c)ct}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases}$ $\begin{cases} t = 0 \\ ct' = \frac{ct - (-v/c)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{(v/c)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases}$	(11.23) «Поворот» в пространстве Минковского, соответствующий переходу в движущуюся систему отсчета и иллюстрация относительности одновременности событий.
$(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}) = \left( \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \right) \equiv c^2 t^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{r})$	(11.24)	Построение простейшего инварианта из компонент четырехвектора.
$(\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{r}}) \equiv \sum_{\xi, \eta=0,1,2,3} g_{\xi\eta} r_{\xi} r_{\eta} \Rightarrow (\hat{g})_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(11.25)	Метрический тензор четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени Минковского.
$(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}) \equiv \sum_{\xi, \eta} g_{\xi\eta} A_{\xi} B_{\eta} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 = inv$	(11.26)	Скалярное произведение двух четырехвекторов

### Пример. Парадокс близнецов

	$T_0 = 2\delta t$ $T' = \frac{2}{c} \sqrt{(c\delta t)^2 - (\delta x)^2} =$ $= \frac{2\delta t}{c} \sqrt{c^2 - v^2} = T_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$	(11.27)	Связь интервалов времени, проведенных по часам неподвижного наблюдателя и «путешественника».
--	--	---------	--

### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Приводит ли к нарушению инвариантности относительно преобразования Галилея учет сил вязкого трения, которые, как известно, зависят от скорости тела?
2. Время жизни покоящегося  $\pi$ -мезона составляет  $\tau = 2.5 \cdot 10^{-6}$  с. На какое расстояние успеет отлететь частицы от ускорителя, если она вылетает из него с ультрарелятивистской скоростью  $v/c - 1 = 5 \cdot 10^{-5}$ ? Постарайтесь решить задачу как в системе отсчета, связанной с ускорителем, так и в системе, связанной с летящей частицей.
3. Найдите матрицу, осуществляющую преобразования координат вектора при повороте системы координат на углы Эйлера.
4. Найдите матрицу, осуществляющую преобразования координат вектора при «четырёхмерном повороте», соответствующем переходу из неподвижной системы отсчета, в инерциальную систему, движущуюся с заданной скоростью относительно первой.
5. Покажите, что построенное в соответствии с (14.24) скалярное произведение двух четырехвекторов, компоненты которых преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца, является релятивистским инвариантом.
6. \*) Напишите программу, позволяющую визуализировать мировые линии движущихся частиц в двух инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга с заданной скоростью.

## Лекция 12

### Релятивистская динамика

#### 12.1. Релятивистски инвариантное описание при помощи четырехвекторов

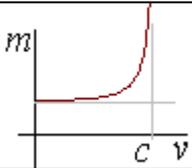
$\bar{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \quad (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}) = A_0 B_0 - (\mathbf{A}, \mathbf{B})$	(12.1)	Используемые формы записи четырех векторов.
$\begin{cases} A'_0 = \frac{A_0 - UA_1}{\sqrt{1-U^2}} \\ A'_1 = \frac{A_1 - UA_0}{\sqrt{1-U^2}} \\ A'_2 = A_2 \\ A'_3 = A_3 \end{cases}$	(12.2)	Преобразования Лоренца для компонент произвольного четырехвектора.

#### 12.2. Четырехскорость

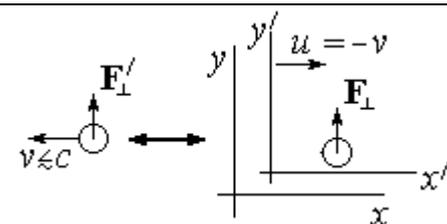
$\bar{\mathbf{v}} \equiv \frac{d}{d\tau} \bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c / \sqrt{1-V^2} \\ \mathbf{v} / \sqrt{1-V^2} \end{pmatrix}$	(12.3)	Четырехвектор скорости.
---	--------	-------------------------

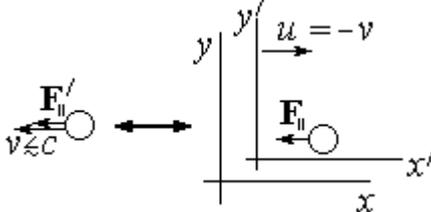
$(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{c^2 - (\mathbf{v}, \mathbf{v})}{1 - (v/c)^2} = \frac{c^2 - v^2}{1 - (v/c)^2} = c^2 = inv$	(12.4)	Проверка свойства инвариантности скалярного произведения четырехвектора скорости на себя.
$\begin{cases} (\vec{v}')_Y = (\vec{v})_Y \\ v'_X = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{v'_Y}{\sqrt{1 - (u_X^2 + v_Y'^2)/c^2}} = \frac{v_Y}{\sqrt{1 - v_Y^2/c^2}} \Rightarrow$ $v'_Y = v_Y \sqrt{1 - u_X^2/c^2}$	(12.5)	Частный случай преобразования поперечных составляющих скоростей при переходе в движущуюся систему отсчета.

### 12.3. Четырехимпульс и четырехсила

$\vec{p} \equiv m_0 \vec{v} = \begin{pmatrix} m_0 c / \sqrt{1 - V^2} \\ m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - V^2} \end{pmatrix}$	(12.6)	Четырехвектор импульса.	
$(\vec{p}, \vec{p}) = m_0^2 c^2 = inv$	(12.7)	Инвариант, составленный из компонент четырехвектора импульса.	
$\vec{F} \equiv \frac{d}{d\tau} \vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - V^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - V^2}} \end{pmatrix}$	(12.8)	Четырехвектор силы.	
$m(v) \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2}}$		(12.9)	«Релятивистская масса» и ее зависимость от скорости.
$\vec{p} = \begin{pmatrix} m(v) \cdot c \\ m(v) \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\tau} (m(v) \cdot c) \\ \frac{d}{d\tau} (m(v) \cdot \mathbf{v}) \end{pmatrix}$	(12.10)	Более компактные выражения для четырехимпульса и четырехсилы, записанные с использованием релятивистской массы.	
$(\vec{p}, \vec{p}) = m_v^2 c^2 - p^2 = m_0^2 c^2 = inv$	(12.11)	Квадрат четырехвектора импульса	

### 12.4. Релятивистский закон преобразования сил и основной закон релятивистской динамики

$v \ll c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \Rightarrow$ $\vec{F} \approx \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_0 c + m_0 v^2 / 2c \\ m_0 \mathbf{v} + m_0 \mathbf{v}^3 / 2c^2 \end{pmatrix} \approx \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} K/c \\ m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N/c \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}$	(12.12)	Смысл компонент четырехвектора силы в нерелятивистском пределе.
	<b>Рис. 12.1</b> Идея расчета результата действия поперечной силы на релятивистскую частицу.	

$K: \frac{d}{dt}(m_0 v_y) = F_y = (\vec{F})_y$ $(\vec{F})'_y = (\vec{F})_y \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v_y^2)/c^2}} \frac{d}{dt'}(m(v)v'_y) = F_\perp \Rightarrow$ $K': \frac{d}{dt'}(m_v v'_y) = F_\perp \sqrt{1-(u/c)^2} \Rightarrow F'_\perp = F_\perp \sqrt{1-(u/c)^2}$	(12.13)	Расчет поперечной составляющей силы в движущейся системе отсчета.
$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v_\perp}{\sqrt{1-(v_\parallel/c)^2}} = F_\perp = f_\perp \sqrt{1-(v_\parallel/c)^2}$	(12.14)	Релятивистский аналог второго закона Ньютона для случая силы, действующей перпендикулярно скорости частицы. $f'_\perp$ — сила, действующая на частицу в системе отсчета, где она (частица) покоится.
		<b>Рис. 12.2</b> Идея расчета результата действия поперечной силы на релятивистскую частицу.
$K: \frac{d}{dt}(m_0 v_x) = F_x = (\vec{F})_x$ $(\vec{F})'_x = \frac{(\vec{F})_x - (u/c)(\vec{F})_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-(v'_x/c)^2}} \frac{d}{dt'}(m_v v'_x) =$ $\frac{F_\parallel - (u/c)(F_\parallel v_x/c)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{F_\parallel}{\sqrt{1-(v'_x/c)^2}} \Rightarrow$ $K': \frac{d}{dt'}(m_v v'_x) = F_\parallel \Rightarrow F'_\parallel = F_\parallel$	(12.15)	Расчет продольной составляющей силы в движущейся системе отсчета.
$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v_\parallel}{\sqrt{1-(v_\parallel/c)^2}} = F_\parallel = f_\parallel$	(12.16)	Релятивистский аналог второго закона Ньютона для случая силы, действующей в направлении скорости частицы. $f'_\parallel$ — сила, действующая на частицу в системе отсчета, где она (частица) покоится.
$\frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \mathbf{F}$	(12.17)	Трехмерный релятивистский аналог второго закона Ньютона, записанной для системы отсчета, в которой частица не имеет составляющей скорости, нормальной к направлению действия силы.

### 12.5. Релятивистская энергия

$\mathbf{p}_v \equiv m_v \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = \mathbf{F}$	(12.18)	Определение релятивистского импульса и его связь с силой.
$\frac{d}{dt} K_v \equiv (\mathbf{F}_v, \mathbf{v}) = \left( \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} \right)$	(12.19)	Аналогичное определению релятивистского импульса определение релятивистской кинетической энергии.
$m_v^2 (1 - (v/c)^2) = m_0^2 \Rightarrow m_v^2 c^2 - (m_v \mathbf{v})^2 = m_0^2 c^2 \Rightarrow$ $2m_v \frac{d}{dt} (m_v c^2) - 2(m_v \mathbf{v}) \frac{d}{dt} (m_v \mathbf{v}) = 0$	(12.20)	Простое следствие определения релятивистской массы.
$\frac{d}{dt} (m_v c^2) = \left( \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} K_v$	(12.21)	Скорость изменения кинетической энергии (результат хорошо согласуется с результатом рассмотрения в классическом пределе (12.12)).
$K_v = m_v c^2 + C$	(12.22)	Результат интегрирования (12.21).
$(v = 0 \Rightarrow K_v = 0) \Rightarrow C = -m_0 c^2 \Rightarrow$ $K_v = (m_v - m_0) c^2$	(12.23)	Релятивистское выражение для кинетической энергии.
$W_v (U = 0) \equiv m_v c^2 = m_0 c^2 + K_v$	(12.24)	Полная механическая энергия тела в пустом пространстве.
$\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} W_v / c \\ \mathbf{p}_v \end{pmatrix}, \quad \frac{W_v^2}{c^2} - \mathbf{p}_v^2 = m_0^2 c^2$	(12.25)	Четырехвектор энергии-импульса и релятивистский инвариант, составленный из релятивистских энергии и импульса.

#### Пример. Движение релятивистской частицы под действием постоянной силы

$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F} = qE \mathbf{e}_z$ $\mathbf{v}(0) = v_0 \mathbf{e}_x$	(12.26)	Постановка задачи.
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t, \quad \mathbf{p}_0 = \frac{m_0 \mathbf{v}_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}$	(12.27)	Изменение во времени импульса частицы под действием постоянной силы.
$\frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (\mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t)^2 + m_0^2 c^4 \Rightarrow$ $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^4}{(\mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t)^2 + m_0^2 c^4} \Rightarrow$ $\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{(\mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t)^2 + m_0^2 c^4} = \frac{(\mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t)^2}{(\mathbf{p}_0 + q\mathbf{E}t)^2 + m_0^2 c^4}$	(12.28)	Вычисление квадрата скорости.

#### Пример. Движение частицы под действием силы, явно зависящей от времени.

$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ $m_0$	(12.26)	Постановка задачи.
---	---------	--------------------

$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(t) \Rightarrow \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 + \int_0^t dt \cdot \mathbf{F}(t),$ $\mathbf{p}_0 = \frac{m_0 \mathbf{v}_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}$	(12.27)	Изменение во времени импульса частицы под действием постоянной силы.
$\frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathbf{p}^2(t) + m_0^2 c^2 \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{\mathbf{p}^2(t) + m_0^2 c^2} \Rightarrow$ $\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^2}{\mathbf{p}^2(t) + m_0^2 c^2} = \frac{\mathbf{p}^2(t)}{\mathbf{p}^2(t) + m_0^2 c^2}$	(12.28)	Определение квадрата скорости частицы как функции времени.
$\mathbf{p}(t) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \mathbf{v}(t) \Rightarrow$ $\mathbf{v}(t) = \frac{1}{m_0} \mathbf{p}(t) \sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{\mathbf{p}^2(t) + m_0^2 c^2}} = \frac{\mathbf{p}(t)}{m_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{p}^2(t)/(m_0^2 c^2)}}$	(12.29)	Решение задачи о скорости релятивистской частицы, движущейся под действием силы, зависящей от времени.

### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Исходя из преобразований Лоренца, для компонент четырехвектора скорости, получить закон (4.12) сложения продольных составляющих вектора трехмерной скорости.
2. Частица, движущаяся с заданной начальной скоростью, начинает испытывать действие постоянной силы, направленной перпендикулярно начальной скорости движения. Определить зависимость от времени скорости частицы.
3. Ядро массой  $M$  распадается на три одинаковые осколка массами  $m$  каждый ( $M > 3m$ ). Определить скорости осколков, если известно, что они одинаковы по величине.
4. Рассмотреть движение релятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле.
5. Изучить движение релятивистской частицы в сонаправленных электрическом и магнитном полях.

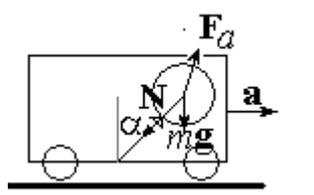
## Лекция 13

### Движение в неинерциальных системах отсчета

#### 13.1. Сила инерции

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_K + \mathbf{a}'$	(13.1)	Классический закон сложения ускорений
$m(\mathbf{a}_K + \mathbf{a}') = \mathbf{F}_\Sigma$	(13.2)	Второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчета
$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_\Sigma - m\mathbf{a}_K = \mathbf{F}_\Sigma + \mathbf{F}_u$	(13.3)	Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета
$\mathbf{F}_u \equiv -m\mathbf{a}_K$	(13.4)	Сила инерции

**Пример. «Воздушный шарик» в разгоняющемся автобусе**

	$\mathbf{N} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_u = \mathbf{0} \quad (13.5)$ $\mathbf{N} + m(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$	Силы, действующие на шарик, находящийся в неинерциальной системе отсчета.
$\tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{g} - \mathbf{a}$	(13.6)	Эффективное ускорение свободного падения
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$	(13.7)	Угол наклона нити.

**16.2. Силы инерции во вращающихся системах отсчета**

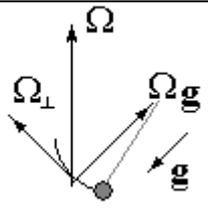
$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\xi} X_{\xi} \mathbf{e}_{\xi} = \sum_{\xi} \frac{dX_{\xi}}{dt} \mathbf{e}_{\xi} + \sum_{\xi} X_{\xi} \frac{d\mathbf{e}_{\xi}}{dt} =$ $= \frac{\tilde{d}\mathbf{X}}{dt} + \sum_{\xi} X_{\xi} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_{\xi}] = \frac{\tilde{d}\mathbf{X}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{X}]$	(13.8)	Правило дифференцирования вектора, изменяющегося во вращающейся системе координат.
$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$	(13.9)	Классический закон преобразования скоростей в частном случае вращающейся системы отсчета
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$	(13.10)	Классический закон преобразования ускорений
$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}'}{dt} \equiv [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] + \mathbf{a}'$	(13.11)	Скорость изменения скорости движения относительно вращающейся с.о. Второе слагаемое — ускорение тела отн. вращающейся системы.
$\frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] = \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r} \right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$	(13.12)	Дифференцирование во втором слагаемом (16.10).
$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]]$	(13.13)	Ускорение тела, ускоренно движущегося относительно равномерно вращающейся системы отсчета.
$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] - 2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$	(13.14)	Второй закон Ньютона для материальной точки, движущейся во вращающейся системе отсчета
$\mathbf{F}_C \equiv -m[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]]$	(13.15)	Центробежная сила
$\mathbf{F}_K \equiv -2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$	(13.16)	Кориолисова сила

**Пример. Свободное падение тела вблизи поверхности Земли**

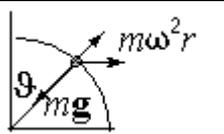
$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} - 2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}']$	(13.17)	Уравнение для определения ускорения тела
$\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' \quad , \quad \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$	(13.18)	Вид пробного решения для поиска ответа методом последовательных приближений.

$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{g}$ $\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = 2[\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega}] \approx 2[\mathbf{v}_1', \boldsymbol{\omega}] = 2[\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}] + 2t[\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}]$	(13.19)	Основные этапы решения задачи о свободном падении тела на вращающуюся планету методом последовательных приближений
$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2[\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}]t + [\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}]t^2$	(13.20)	Закон изменения скорости тела, падающего на вращающуюся планету.
$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + [\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}] t^2 + \frac{1}{3} [\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}] t^3$	(13.21)	Движение тела близи поверхности вращающейся планеты.

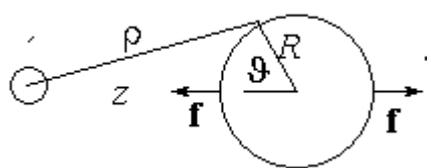
### 13.3. Маятник Фуко

 $\mathbf{F}_K = 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}] = 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}_g] + 2m[\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}_\perp]$ $\boldsymbol{\Omega}_g = \boldsymbol{\Omega} \cdot \sin \alpha$	(13.22)	Сила, испытываемая движущимся маятником Фуко на широте $\alpha$ .
$\frac{T}{T_\alpha} = \frac{\Omega \sin \alpha}{\Omega} \Rightarrow T_\alpha = \frac{T}{\sin \alpha}$	(13.23)	Период вращения плоскости колебаний маятника Фуко на широте $\alpha$ .

### 13.4. Принцип эквивалентности и современные представления о природе гравитационных сил

$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_u} \Rightarrow \mathbf{F}_u = -m_u \mathbf{a}$	(13.24)	Связь сил инерции с инертной массой.
$\mathbf{F} = -G \frac{Mm_g}{r^3} \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{F} = m_g \mathbf{g}$	(13.25)	Связь сил гравитации с гравитационной массой
$T = 2\pi \sqrt{\frac{l m_u}{g m_g}}$	(13.26)	Идея экспериментов Ньютона и Бесселя по проверке пропорциональности инертной и гравитационной.
 $m_{1g} g - m_{1u} \omega^2 r \cos \vartheta = m_{2g} g - m_{2u} \omega^2 r \cos \vartheta$	(13.27)	Идея опытов Этвеша и Дикке.
$m_u \sim m_g, \quad \frac{\Delta x}{x} \leq 10^{-12}$	(13.28)	Результаты экспериментов и относительная погрешность.

### 13.5. Приливообразующие силы

	<p><b>Рис. 13.1.</b> Механизм возникновения приливообразующих сил.</p>
---	--

$U = -G \frac{M \delta m}{\rho} + f_u R \cos \vartheta$ $f_u = \delta m a = G \frac{M \delta m}{z^2}$	(13.29)	Потенциальная энергия небольшого объема воды в поле сил притяжения к Луне и сил инерции.
$\rho^2 = z^2 - 2zR \cos \vartheta + R^2$ $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{z} \left( 1 - 2 \frac{R}{z} \cos \vartheta + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{R}{z} \cos \vartheta - \frac{R^2}{2z^2} + \dots \right)$	(13.30)	Разложение в ряд Тейлора расстояния от точки расчета высоты прилива до центра Луны.
$U = -G \frac{M \delta m}{z} - \frac{3}{4} G \frac{M \delta m}{z^3} R^2 \cos 2\vartheta$	(13.40)	Потенциальная энергия массы воды в поле сил гравитации и сил инерции с учетом компенсации линейных по R членов.
$F_R = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_3} \delta m \left( \frac{R}{z} \right)^2 g \cos 2\vartheta$ $F_{\vartheta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Л}}}{M_3} \delta m \left( \frac{R}{z} \right)^2 g \sin 2\vartheta$	(13.41)	Приливообразующие силы.
	<p><b>Рис. 13.2.</b> Статическая и динамическая теория приливов.</p>	

### Вопросы и задачи для самостоятельной работы

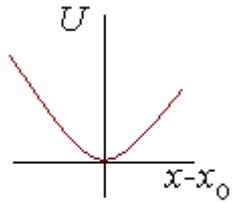
1. Из центра очень скользкого горизонтального расположенного диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , с заданной начальной скоростью  $v_0$  выпускается шарик, смоченный в чернилах. Найти форму кривой, описываемой оставленным шариком след на поверхности диска.
2. На какой угол от направления к центру отклонится отвес, помещенный на широте  $\alpha$  шарообразной планеты массой  $M$ , из-за ее вращения с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ ?
3. На какое расстояние от вертикали отклонится камень, брошенный на землю без начальной скорости с крыши небоскреба высотой 100м?
4. Нужно ли вносить учитывающую вращение Земли поправку в направление стрельбы из орудия по мишени размером в  $1 \text{ м}^2$ , удаленной на расстояние в 10 км?
5. \*) Смоделируйте наблюдаемое с северного полюса вращающейся планеты движение тела, запускаемое из указанной точки с начальной скоростью, сравнимой с первой космической.

## Лекция 14(\*)

### Колебательные системы с одной степенью свободы

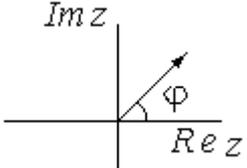
(для тех, кто хочет освоить полный курс классической механики в стандартном объеме)

#### 14.1. Вывод простейшего уравнения гармонических колебаний

	$x_0 \equiv 0 \Rightarrow$ $U(x) = U_0 + k \frac{x^2}{2} + \dots \approx$ $\approx k \frac{x^2}{2}$	(14.1)	Потенциальная энергия одномерной системы вблизи точки устойчивого равновесия.
$\mathbf{F} = -\nabla U \Rightarrow F = -kx \Rightarrow$ $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$		(14.2)	Уравнение незатухающих гармонических колебаний.

#### 14.2. Решение простейшего уравнения незатухающих гармонических колебаний

$\exp(\pm i\varphi) = \cos \varphi \pm i \sin \varphi \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$	(14.3)	Теорема Эйлера.
$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$ $\begin{cases} x _{t=0} = x_0 \\ \left. \frac{dx}{dt} \right _{t=0} = v_0 \end{cases}$	(14.4)	Полная постановка задачи на расчет гармонических колебаний в наиболее общем виде.
$x(t) = C \exp(\lambda t) \Rightarrow$ $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$	(14.5)	Стандартное пробное решение, характеристическое уравнение и его корни.
$x(t) = C_+ \exp(i\omega_0 t) + C_- \exp(-i\omega_0 t) \Rightarrow$ $v(t) = i\omega_0 (C_+ \exp(i\omega_0 t) - C_- \exp(-i\omega_0 t))$	(14.6)	Общее решение уравнения (17.4).
$\begin{cases} x_0 = C_+ + C_- \\ -i \frac{v_0}{\omega_0} = C_+ - C_- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_+ = \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right) \\ C_- = \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right) \end{cases}$	(14.7)	Определение констант ин интегрирования из начальных условий.

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ $v(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t)$	(14.8)	Полное решение задачи (14.4).
$x(t) = \operatorname{Re} \tilde{C} \exp(i\omega_0 t), \quad \tilde{C} = C' + iC'' =  \tilde{C}  \exp(i\delta)$	(14.9)	Удобная форма представления решения.
		<b>Рис. 14.1.</b> Геометрическая интерпретация комплексной формы записи гармонических колебаний.

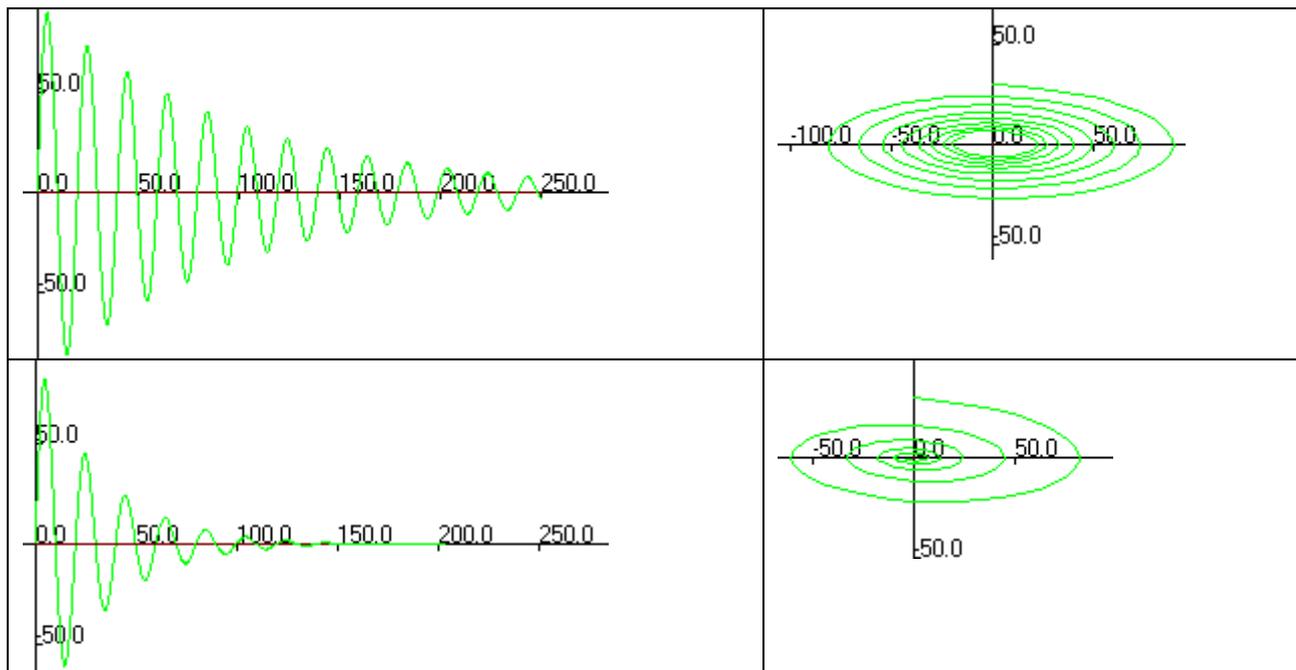
### 14.3 Энергетические соотношения. Фазовая диаграмма

$\begin{cases} K = \frac{mv^2}{2} \\ U = \frac{kx^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = K + U = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \text{const} \\ \langle K \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} W \end{cases}$	(14.10)	Энергетические соотношения при гармонических колебаниях.
$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega_0)^2} = 1$	(14.11)	Фазовый портрет.

### 14.4 Затухающие колебания

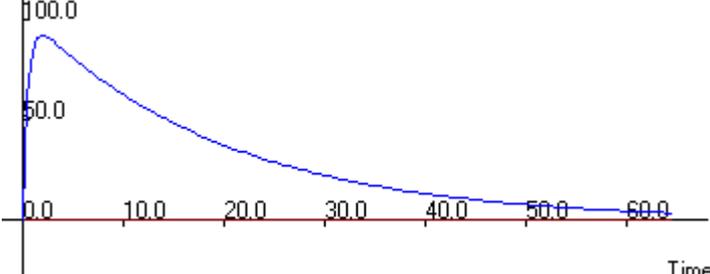
$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \frac{dx}{dt} - kx$	(14.12)	Уравнение движения линейного осциллятора при наличии вязкого трения.
$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ $2\beta \equiv \frac{\eta}{m}, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$	(14.13)	Уравнение (14.12) в стандартных обозначениях.
$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$	(14.14)	Начальные условия (частный случай, удобный для анализа).
$x(t) = C \exp(\lambda t) \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$	(14.15)	Характеристическое уравнение и его корни.
$x(t) = C_+ \exp(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t + C_- \exp(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t$	(14.16)	Общее решение однородного уравнения (14.13.)
$\begin{cases} \omega_0 > \beta \\ \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \end{cases} \Rightarrow$ $x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\beta t} \sin(\omega t), \quad v(t) = v_0 e^{-\beta t} \left( \cos(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right)$	(14.17)	Затухающие колебания.
$A(t) = A_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau \equiv \beta^{-1}, \quad A_0 \equiv \frac{v_0}{\omega}$	(14.18)	Время жизни колебаний.
$D \equiv \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln e^{\beta T} = 2\pi \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{T}{\tau}$	(14.19)	Логарифмический декремент затухания.

$W = K + U = e^{-2\beta t} \frac{mv_0^2}{2} \left( \cos^2(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \sin(2\omega t) + \frac{\beta^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) \right) + e^{-2\beta t} \frac{m\omega_0^2 v_0^2}{2 \omega^2} \sin^2(\omega t)$ $\langle W \rangle = e^{-2\beta t} \frac{mv_0^2}{2} \left( \langle \cos^2(\omega t) \rangle + \frac{\beta^2 + \omega_0^2}{\omega^2} \langle \sin^2(\omega t) \rangle \right)$ $= e^{-2\beta t} \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}$	(14.20)	Полная механическая энергия при затухающих колебаниях и ее среднее за период значение.
$\frac{d \langle W \rangle}{dt} = -2\beta \langle W \rangle$	(14.21)	Закон убывания полной механической энергии при затухающих колебаниях.
$Q \equiv 2\pi \frac{W}{\delta W(T)}$	(14.22)	Добротность осциллятора (отношение запасенной энергии к энергии, теряемой за период).
$Q = 2\pi \frac{\langle W \rangle}{2\beta \langle W \rangle T} = \frac{\pi}{D}$	(14.23)	Связь добротности с логарифмическим декрементом затухания.



**Рис. 14.2.** Затухающие колебания и их фазовые портреты при различных коэффициентах вязкого трения.

### 14.5. Аперриодический режим при затухающих колебаниях

$\begin{cases} \omega_0 < \beta \\ \kappa \equiv i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{cases} \Rightarrow$ $x(t) = \frac{v_0}{i\kappa} e^{-\beta t} \sin(i\kappa t) = \frac{v_0}{\kappa} e^{-\beta t} sh(\kappa t),$ $v(t) = v_0 e^{-\beta t} \left( ch(\kappa t) - \frac{\beta}{\kappa} sh(\kappa t) \right)$	(14.24)	Аперриодический режим, реализующийся при больших значениях затухания.
		<p><b>Рис. 14.3.</b> Аперриодический режим линейной колебательной системы.</p>
$\omega_0 = \beta \Rightarrow \lambda_+ = \lambda_- = -\beta,$ $x(t) = C \exp(\lambda t) + C' t \exp(\lambda t)$	(14.25)	Критический режим.

#### Вопросы и задачи для самостоятельной работы.

1. Во многих случаях оказывается удобным использовать следующую форму записи гармонических колебаний:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

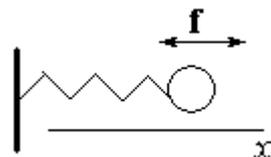
Выразите амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi$  гармонических колебаний через заданные при постановке задачи (17.4) параметры.

2. Постройте фазовый портрет негармонических незатухающих колебаний, возникающих при упругих отскоках частицы, двигающейся со скоростью  $v$  между двумя параллельными стенками, расположенными на расстоянии  $L$ .
3. Шарик падает без начальной скорости с высоты  $H$  на горизонтальную плоскость и начинает скакать, теряя при каждом ударе  $k < 1$  часть своей кинетической энергии. Построить фазовый портрет движения описанной системы.
4. Показать, что при совпадении корней характеристического уравнения присоединенное решение (17.23) обращает дифференциальное уравнение в верное тождество.
5. \*) Создайте компьютерную модель и исследуйте особенности движения физического маятника (шарика на невесомой нити) при наличии вязкого трения.
6. \*) Создайте компьютерную модель и исследуйте особенности движения математического маятника при наличии сухого трения.

## Лекция 15

### Вынужденные колебания в линейной одномерной системе

#### 15.1. Уравнение вынужденных колебаний

	$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$ $x^{(ОБЩ)} = x_{ОДН}^{(ОБЩ)} + x_{НЕОДН}^{(ЧАСТН)}$	(15.1)	Неоднородное дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.
---	---	--------	--

$x_{\text{ОДН}}^{(\text{ОБЩ})} = C_+ e^{-\beta t} \exp\left(+i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) + C_- e^{-\beta t} \exp\left(-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) \rightarrow 0$ $x(t \rightarrow \infty) = x_{\text{НЕОДН}}$	(15.2)	Общее решение однородного уравнения
--	--------	-------------------------------------

### 15.2. Установившиеся колебания

$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t) = \text{Re } f_0 \exp(i\omega t)$	(15.3)	Переход к комплексной записи уравнения вынужденных колебаний
$x_{\text{НЕОДН}} = \text{Re } A e^{i\varphi} \exp(i\omega t)$ $\frac{d}{dt} x_{\text{НЕОДН}} = \text{Re } i\omega A e^{i\varphi} \exp(i\omega t)$ $\frac{d^2}{dt^2} x_{\text{НЕОДН}} = -\text{Re } \omega^2 A e^{i\varphi} \exp(i\omega t)$		(15.4) Пробное решение (18.3), записанное в комплексной форме.
$A e^{i\varphi} (-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2) = f_0 \Rightarrow \begin{cases} A e^{i\varphi} = \frac{f_0}{-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2} \\  A e^{i\varphi}  = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \\ \varphi = -\text{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$	(15.5)	Амплитуда вынужденных установившихся колебаний
$x(t \rightarrow \infty) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \text{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$	(15.6)	Установившийся режим вынужденных колебаний (решение неоднородного уравнения)
	<b>Рис. 15.1</b> Амплитуда и сдвиг фаз установившихся вынужденных колебаний для различных значений затухания.	
$\begin{cases} A(\omega = 0) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \\ A_{\text{MAX}} = A(\omega = \omega_0) = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{A_{\text{MAX}}}{A(0)} = \frac{\omega_0}{2\beta} \sim Q$	(15.7)	Связь между параметрами резонансной кривой.

### 15.3. Превращения энергии при установившихся вынужденных колебаниях

$\left\langle f_0 \cos \omega t \cdot \frac{dx}{dt} \right\rangle_T = \left\langle 2\beta v \cdot \frac{dx}{dt} \right\rangle$	(15.8)	Условие стационарности вынужденных колебаний.
--	--------	---

$N_f = f_0 \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} = -A\omega f_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t + \delta) \Rightarrow$ $\begin{cases} \omega \rightarrow 0 \Rightarrow \langle N \rangle_T \sim \langle \sin(2\omega t) \rangle_T \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow \langle N \rangle_T \sim \langle \cos^2(\omega t) \rangle \end{cases}$	(15.9)	Важнейшие частные случаи баланса энергии при вынужденных колебаниях.
$N_f \sim A^2$ $N_v \sim A$ $A_r : N_f = N_v$		(15.10) Устойчивость амплитуды вынужденных колебаний при заданной амплитуде внешнего воздействия.

## Лекция 16(\*)

### Связанные маятники

#### 16.1. Постановка задачи

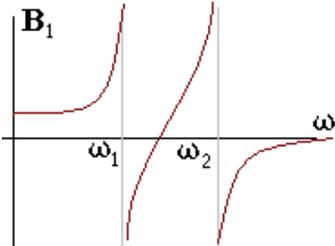
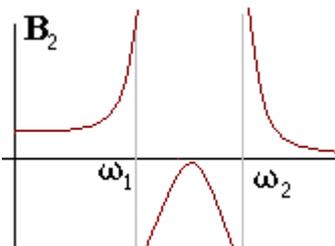
	$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ $\Omega^2 = \frac{k}{m}$	(16.1)	Постановка задачи о движении связанных маятников.
$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 + \Omega^2(x_1 - x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 \cos \omega t \end{bmatrix} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 + \Omega^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$	(16.2)	Система дифференциальных уравнений, описывающих свободные (вынужденные) колебания связанных маятников.	

#### 16.2. Решение системы уравнений связанных колебаний.

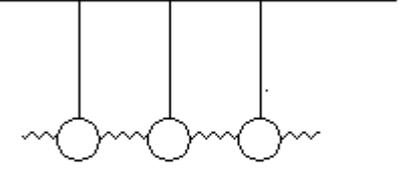
$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \end{cases}$	(16.3)	Переход к новым неизвестным.
$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \omega_0^2 y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 \cos(\omega t) \end{bmatrix} \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\Omega^2) y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 \cos(\omega t) \end{bmatrix} \end{cases}$	(16.4)	Система «не сцепленных» уравнений для новых неизвестных.
$\begin{cases} y_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t), & \omega_1 = \omega_0 \\ y_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t), & \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \end{cases}$	(16.5)	Решение задачи о связанных маятниках в случае свободных колебаний
$\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = A \\ v_1(0) = v_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = A \cos(\omega_1 t) \end{cases}$	(16.6)	Первая собственная мода колебаний: маятники совершают колебания в фазе.

$\begin{cases} x_1(0) = -x_2(0) = A \\ v_1(0) = v_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -A \cos(\omega_2 t) \end{cases}$	(16.7)	Вторая собственная мода колебаний: маятники совершают встречные колебания одинаковой амплитуды.
$\begin{cases} x_1(0) = A \\ x_2(0) = 0 \\ v_1(0) = v_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = A \cos(\omega_1 t) \\ x_1(t) = A \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -A \cos(\omega_2 t) \end{cases} =$ $= \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2} A (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \end{cases} =$ $= \begin{cases} x_1(t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \\ x_2(t) = A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{cases}$	(16.8)	Биения, возникающие при первоначальном смещении одного из связанных маятников.

### 16.3. Вынужденные колебания связанных маятников

$\begin{cases} y_1(t) = a_1 \cos(\omega t) \\ y_2(t) = a_2 \cos(\omega t) \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1 = f_0 (\omega_1^2 - \omega^2)^{-1} \\ a_2 = f_0 (\omega_2^2 - \omega^2)^{-1} \end{cases}$	(16.9)	Установившиеся вынужденные колебания в системе связанных маятников.
$\begin{cases} x_1(t) = \frac{f_0}{2} \left( \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \cos(\omega t) \\ x_2(t) = \frac{f_0}{2} \left( \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \cos(\omega t) \end{cases}$	(16.10)	Решение задачи об установившихся колебаниях.
	<p><b>Рис.16.1</b> Резонансы при вынужденных колебаниях связанных маятников.</p>	
		

### 16.4. Бесконечная цепочка из связанных маятников

 <p style="text-align: center;"><math>b(n-1) \quad b_n \quad b(n+1) \quad x</math></p>	<p><b>Рис. 16.2</b> Бесконечная цепочка из линейных связанных маятников.</p>	
$\begin{cases} \frac{d^2 X_n}{dt^2} = -\omega_0^2(X_n - bn) - \Omega^2(X_n - X_{n-1} - b) - \Omega^2(X_n - X_{n+1} + b) \\ n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{cases}$ $X_n = X_n(t, x), \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}$	(16.11)	Бесконечная система дифференциальных уравнений, описывающих колебания связанных маятников
$Y_n \equiv X_n - bn \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{d^2 Y_n}{dt^2} = -\omega_0^2 Y_n - \Omega^2(Y_n - Y_{n-1}) - \Omega^2(Y_n - Y_{n+1}) \\ n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{cases}$	(16.12)	Переход к новым переменным - смещениям маятников относительно положений равновесия
$Y_n(t, x) = C_n(x) \exp(-i\omega t) \Rightarrow$ $\begin{cases} -\omega^2 C_n = -\omega_0^2 C_n - \Omega^2(C_n - C_{n-1}) - \Omega^2(C_n - C_{n+1}) \\ (\omega_0^2 + 2\Omega^2 - \omega^2)C_n = \Omega^2 C_{n-1} + \Omega^2 C_{n+1} \end{cases} \Rightarrow$	(16.13)	Разделение переменных в цепочке уравнений (16.12).
$C_n = A \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow X_n(t, x) = bn + A \cos(\omega_0 t)$	(16.14)	Одно из возможных решений - синхронные колебания всей бесконечной цепочки
$C_n = A \exp(iknb) \Rightarrow$ $(\omega_0^2 + 2\Omega^2 - \omega^2) = 2\Omega^2 \cos(kb) \Rightarrow$ $\omega^2 = \omega_0^2 + \Omega^2 \sin^2(kb)$	(16.15)	Связь между энергией и «волновым числом» для распространения возмущения в системе из связанных маятников.
$X_n(x, t) = bn + A \cos(knb - \omega t)$	(16.16)	«Бегущая волна» в системе связанных маятников.

## Лекция 17(\*)

### Волны в безграничной среде

#### 17.1. Классификация волн

По размерности:

- Одномерные
- Двухмерные
- Трехмерные

По форме волнового фронта

- Плоские
- Сферические
- Цилиндрические

По направлению смещения колебаний относительно направления распространения

- Продольные
- Поперечных

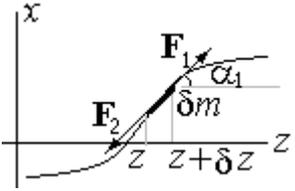
По средам распространения

- Звуковые волны (продольные и поперечный звуки)
- Волны на поверхности воды
- Капиллярные волны
- Электромагнитные волны
- Волны вероятности

По зависимости от времени

- Монохроматические  $E(r,t) \sim \exp(-i\omega t)$
- Немонхроматические

### 17.2. Поперечные волны в натянутом шнуре

	$F_{2x} = F \operatorname{tg} \alpha_2 = F \frac{\partial x(t, z)}{\partial z}$ $F_{1x} = F \operatorname{tg} \alpha_1 = F \frac{\partial x(t, z + \delta z)}{\partial z}$	(17.1)	Силы, приводящие к поперечным колебаниям в бесконечном натянутом шнуре ( $F$ — сила натяжения шнура).
$F \left( \frac{\partial x(t, z + \delta z)}{\partial z} - \frac{\partial x(t, z)}{\partial z} \right) \Big _{\delta z \rightarrow 0} = \rho S (\delta z) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$		(17.2)	Уравнение движения вдоль вертикали участка шнура $\delta n$ .
$F \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$		(17.3)	Уравнение волны в бесконечном натянутом шнуре.
$x(z, t) = f \left( z \pm \sqrt{\frac{F}{\rho S}} t \right) \equiv f(z \pm ut)$		(17.4)	Пробное решение уравнения (17.3). $f$ — произвольная дважды дифференцируемая функция.
$\zeta \equiv z \pm ut \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \pm u \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \end{cases}$		(17.5)	Вычисление вторых производных от пробного решения
$F \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = \rho S u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$		(17.6)	Скорость распространения возмущения в шнуре.

### 17.3. Продольные волны в упругой среде

	<p><b>Рис. 17.1</b> Возникновение продольных волн в упругой среде.</p>	
$\delta m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F(t, z + \delta z) - F(t, z) = ES\varepsilon(t, z + \delta z) - ES\varepsilon(t, z) =$ $= ES \left( \frac{\partial x(t, z + \delta z)}{\partial z} - \frac{\partial x(t, z)}{\partial z} \right)$	(17.7)	Второй закон Ньютона для элементарной массы вещества в упругой среде, по которой распространяется продольная волна.
$\rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	(17.8)	Уравнение для продольных волн и скорость их распространения.

### 17.4. Энергия в упругой волне

$\delta l = \sqrt{(\delta z)^2 + (\delta x)^2} - \delta z = \frac{1}{2} \delta z \left( \frac{\delta x}{\delta z} \right)^2$	(17.9)	Вызванная прохождением волны деформация малого участка упругой среды.
$\delta U = \frac{1}{2} F \delta z \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S (\delta z) u^2 \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \Rightarrow w_U = \frac{u^2}{2} \rho \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2$	(17.10)	Объемная плотность потенциальной энергии.
$\delta K = \frac{1}{2} \delta m u^2 = \frac{1}{2} \rho S (\delta z) \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \Rightarrow w_K = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2$	(17.11)	Объемная плотность кинетической энергии.
$0 = \frac{\partial}{\partial t} (w_K + w_U) \Rightarrow ? \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$	(17.12)	Уравнение волны как следствие закона сохранения энергии

### 17.5. Плоские монохроматические волны

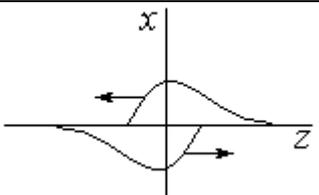
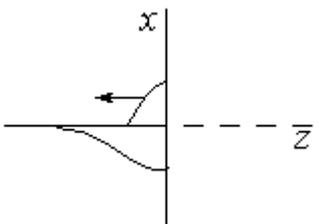
$x(t, z) = A \cos(kz - \omega t + \varphi)$	(17.13)	Определение плоской монохроматической волны.
$x(t + T) = x(t) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$ $x(z + \lambda) = x(z) \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$	(17.14)	Пространственная и временная периодичность плоской монохроматической волны.
$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k};$ $\Phi = kz - \omega t = const \Rightarrow k \frac{dz}{dt} = \omega \Rightarrow u = \frac{\omega}{k}$ $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - u^{-2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow u^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$	(17.15)	Три варианта нахождения фазовой скорости плоской монохроматической волны.

$x(t, z) = A \cos[k(z - ut) + \varphi] = A \cos\left[-\omega\left(t - \frac{z}{u}\right) + \varphi\right]$	(17.16)	Запись плоской монохроматической волны в форме, соответствующей (21.4)
$w_K = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2(kz - \omega t)$ $w_U = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2(kz - \omega t)$	(17.17)	Объемные плотности кинетической и потенциальной энергий в плоской монохроматической волне.
$S = \langle w_K + w_U \rangle u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$	(17.18)	Плотность потока энергии в плоской монохроматической волне.

## Лекция 18(\*)

### Волны в ограниченной среде

#### 18.1. Отражение волн от закрепленного конца струны

$\begin{cases} x_1(z, t) = f(z - vt) \\ x_2(z, t) = -f(z + vt) \end{cases} \Rightarrow$ $X_\Sigma = x_1 + x_2 = f(z - vt) - f(z + vt)$	(18.1)	Суперпозиция двух встречных бегущих волн с противоположными амплитудами.
$X_\Sigma(z = 0, t) = f(-vt) - f(vt) = 0 \quad \forall t$	(18.2)	Существование полностью неподвижной точки на бесконечной струне.
		<b>Рис. 18.1.</b> Два встречных противофазных импульса, распространяющихся вдоль бесконечной струны.
		<b>Рис. 18.2.</b> Отражение импульса от края полубесконечной струны.

#### 18.2. Сложение двух монохроматических волн

$\begin{cases} x_1(z, t) = A \cos(kz - \omega t) \\ x_2(z, t) = -A \cos(kz + \omega t) \end{cases} \Rightarrow$ $X_\Sigma(z, t) = x_1 + x_2 = 2A \sin(kz) \sin(\omega t)$	(18.3)	Сумма двух встречных монохроматических волн
$\sin(kL) = 0 \Rightarrow L = \frac{\pi}{k} m \quad m = 1, 2, 3, \dots$	(18.4)	Допустимые длины струны, в которой возможно существование стоячих волн с волновым числом $k$ .
$\omega_m = kc = \frac{\pi c}{L} m$	(18.5)	Допустимые частоты колебаний в струне длиной $L$ .

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

## **МЕЖНАУРОДНОЯ НАУЧНОЯ ЛАБОРАТОРИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ ДЛЯ МЕДИЦИНЫ И НАНОТЕХНОЛОГИЙ**

Международная Научная Лаборатория Нелокальной Плазмы для медицины и нанотехнологий была создана на базе кафедры Физики в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности Университета ИТМО (Программы 5-100) в 2014 году. Создание Лаборатории, ориентированной на развитие нового для Университета ИТМО научного направления, связанного с физикой нелокальной плазмы, было признано целесообразным по двум причинам. С одной стороны, по современным прогнозам XXI век должен стать веком плазменных технологий в силу их значительных преимуществ перед традиционными для XX века технологиями химическими, что обусловлено новыми уникальными возможностями плазменных состояний вещества достигать как более экстремальных параметров, так и способностей более гибкого и селективного воздействия на испытываемую среду. С другой стороны, завоевавшая на рубеже веков признание новая теоретическая модель газоразрядных сред, основанная на приближении нелокальной плазмы требует приближающихся к предельным по своей ресурсоемкости численных расчетов, включающих квантовомеханическое моделирование элементарных плазменных процессов и описание их совокупности с помощью систем гидро- электро- магнитодинамических уравнений в частных производных, число которых, строго говоря, бесконечно. Именно вычислительная сложность адекватного описания нелокальной плазмы делает привлекательным выбор Университета ИТМО в качестве базы для дальнейшего развития Санкт-Петербургской Плазменной Школы на современном этапе.

В штат Лаборатории Нелокальной Плазмы входят штатные сотрудники Университета ИТМО: профессор С.К. Стафеев (д.т.н., декан ЕНФ), профессор А.С. Чирцов (д.т.н., руководитель Лаборатории), старший преподаватель С.А. Курашова (руководитель группы экспериментаторов), а также – приглашенные исследователи из ведущих физических научно-учебных центров России, Западной Европы, Америки и Китая. Среди них В. Демидов (научный руководитель Лаборатории, профессор университета Западной Вирджинии (West Virginia University, USA), зам. Научного руководителя Американского Плазменного Центра Министерства Энергетики США), М. Чернышева (профессор – исследователь, – PhD, Ecole Polytechnique), ведущий исследователь Institutd' Electronique Fondamentale

UMR8622, Universite Paris Sud, Orsay, France, бывшая студентка ИТМО и Физического факультета СПбГУ), Д. Гребеников (профессор-исследователь Центра Научных Исследований CNRS, Франция, PhD, бывший студент ИТМО и Физического факультета СПбГУ), Kaspars Miculis (профессор – исследователь – PhD, Научный сотрудник/исследователь университета Латвии); Kudrišov Viaceslav (профессор – исследователь – PhD, Научный сотрудник/доцент университета Литвы), Teodora Kirova (профессор – исследователь - PhD, ВНС Института оптики и спектроскопии Латвии), Н.Н. Безуглов (руководитель теоретической группы по расчетам элементарных процессов, д.ф.-м.н., профессор Физического факультета СПбГУ), А.А. Кудрявцев (руководитель группы по моделированию нелокальной плазмы, к.ф.-м.н., доцент Физического факультета СПбГУ) и др.

К основным научным направлениям деятельности Лаборатории следует отнести:

- развитие теоретической модели нелокальной плазмы и методов построения ее численных моделей;
- развитие методов экспериментальной диагностики газоразрядных сред, требующих описания с помощью нелокальных моделей и сопоставление экспериментальных результатов с численными моделями;
- теоретический и экспериментальный поиск новых типов плазменных сред с уникальными свойствами;
- развитие методов численного моделирования элементарных процессов в плазме как источника входных данных для численного моделирования коллективных процессов в термодинамически неравновесной плазме, включая процессы самоорганизации;
- теоретическое изучение сверх-холодной плазмы, возникающей в ансамблях переохлажденных ритберговских (высоковозбужденных) атомов;
- исследование атмосферных микрозарядов;
- развитие оригинальных методов электронной столкновительной спектроскопии (CES) для разработки сверх миниатюрных детекторов химического состава газовых смесей;
- развитие методов щадящей плазменной обработки кожных покровов и их поврежденных участков с целью стимуляции процессов самовосстановления и обеззараживания (включая имплантаты);
- развитие методов щадящей плазменной обработки поверхностей продуктов питания с целью их обеззараживания и подготовки к покрытию искусственной пленкой, обладающей способностью к стимулируемой извне деградации.

Уважаемые студенты! Предлагаем принять участие в наших научных исследованиях лаборатории нелокальной плазмы. Коллектив нашей лаборатории готов предоставить Вам возможность участия в интересных и актуальных исследованиях, выполняя которые Вы сможете реализовать себя в качестве программистов, системщиков, специалистов по автоматизации экспериментальных установок, экспериментаторов, теоретиков, конструкторов, менеджеров и Web – дизайнеров. Нелокальная плазма – самый сложный объект природы, представляющий интерес не только с точки зрения важнейших для технологий XXI века приложений, но и как один из уникальных объектов неживой природы, проявляющий способность к самоорганизации. По этой причине нелокальная плазма представляющий фундаментальный интерес сразу для нескольких естественных наук: физики, химии, биологии, теории сложных систем. Исследования нелокальной плазмы – это та область, где оказываются востребованными все современные компьютерные и информаци-

онные технологии сегодняшнего дня, технологии, возможностей которых пока явно недостаточно для реализации всех возможностей исследований и описания объекта, сочетающего в себе свойства живой и неживой природы. Международная лаборатория нелокальной плазмы для нанотехнологий и медицины ждет отважных студентов /и их очаровательных подруг/, готовых к настоящему путешествию в неведомое.

Чирцов Александр Сергеевич

**Конспект лекций по курсу классической и  
релятивистской механики материальной точки**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49**