

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Н.П. Деменчук, А.А. Прилуцкий**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО  
И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ**

**Учебное пособие**

 **УНИВЕРСИТЕТ ИТМО**

**Санкт-Петербург**

**2016**

УДК 621.81

ББК 30.121

Д 30

**Деменчук Н.П., Прилуцкий А.А.** Основы теории напряженного и деформированного состояния: Учеб. пособие. – СПб.: Университет ИТМО, 2016. – 118 с.

Изложены основные зависимости различных видов напряженного и деформируемого состояний, теории предельных состояний, критерии работоспособности валов.

Предназначено для самостоятельного изучения бакалаврами направлений подготовки 19.03.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения, 15.03.02 Технологические машины и оборудование, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, 14.03.01 Ядерная энергетика и теплофизика дисциплины «Прикладная механика» очной и заочной форм обучения.

**Рецензенты:** доктор техн. наук, проф. В.М. Петров (Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет); кандидат техн. наук, проф. А.А. Малышев (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики)

**Рекомендовано к печати Советом факультета холодильной, криогенной техники и кондиционирования, протокол № 4 от 23 декабря 2015 г.**



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 –100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2016

© Деменчук Н.П., Прилуцкий А.А., 2016

# 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

## 1.1. Напряженное состояние в точке

Напряжения в каждой точке нагруженного тела зависят от положения секущей плоскости, проходящей через эту точку. Совокупность напряжений, возникающих на всем множестве секущих плоскостей, образует *напряженное состояние* в точке.

Для анализа напряженного состояния рассмотрим точку нагруженного тела, положение которой определяется координатами  $x, y, z$ . Зададим приращения координат  $dx, dy, dz$ . Тремя парами параллельных плоскостей (на рис.1,б показана одна пара с координатной  $x$ ) выделим элементарный объем материала в виде элементарного параллелепипеда (в дальнейшем – элемент). Совместим координатные оси с ребрами элемента (рис.1,б).

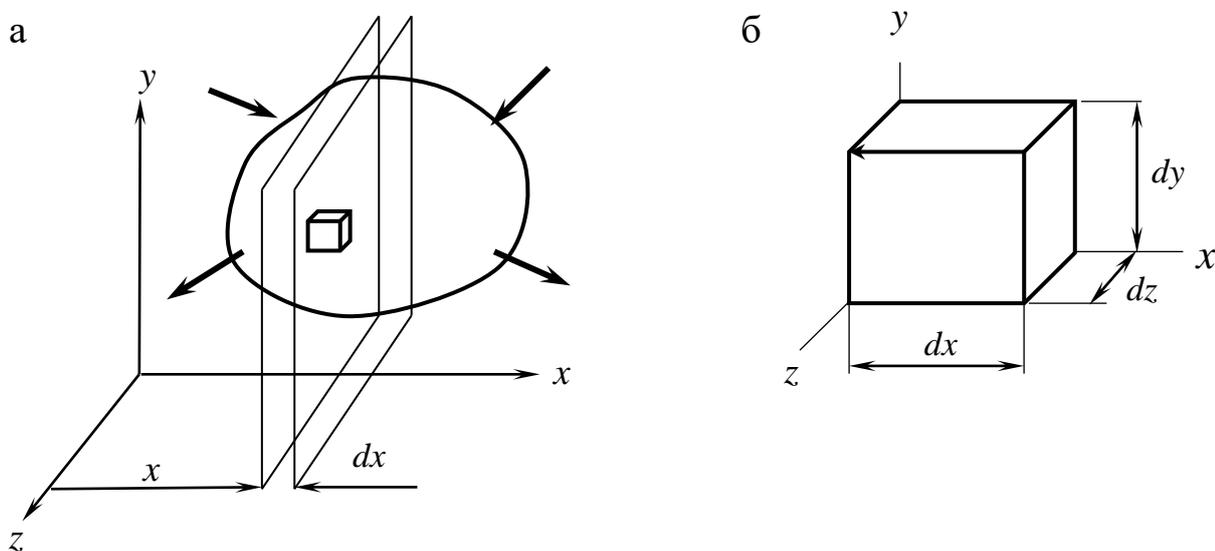


Рис.1. Выделение элементарного объема материала  
а – расчленение тела плоскостями; б – выделенный элемент

Грани элемента называются площадками, которые надо различать. Обозначение площадок соответствует оси, к которой каждая из них перпендикулярна. На каждой площадке возникает вектор полного напряжения, имеющий в общем случае любое направление. Каждый из этих векторов может быть разложен на три составляющие в направлении выбранных осей: одна по нормали

к площадке и две в плоскости площадки (рис.2, а). Нормальное напряжение обозначается  $\sigma$  с индексом, соответствующим направлению оси. Касательное напряжение обозначается  $\tau$  с двумя индексами: первый соответствует площадке, на которой возникает  $\tau$ , второй – оси, вдоль которой направлен вектор  $\tau$ . Например:  $\tau_{zx}$  –  $\tau$ , действующее на площадке  $z$  в направлении оси  $x$ . На невидимых гранях элемента возникают соответственно такие же напряжения, но противоположного направления.

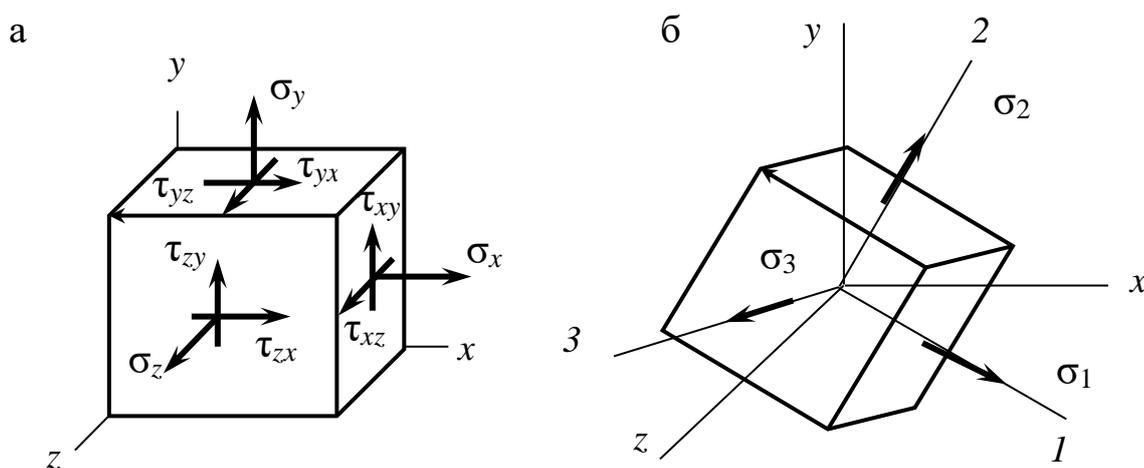


Рис.2. Произвольные и главные площадки:  
 а – элемент в произвольных осях; б – элемент в главных осях

Таким образом, на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки нагруженного тела, действуют девять компонентов напряжения, которые записываются в виде квадратной матрицы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Эта совокупность напряжений называется *тензором напряжений*, который полностью определяет напряженное состояние в точке (при известном тензоре напряжений можно найти напряжения на любых площадках в окрестности точки).

При повороте элемента относительно осей можно найти такое положение площадок, при котором исчезнут касательные напряжения (рис.2, б). При этом нормальные напряжения достигают экстремальной величины. Эти экстремальные нормальные

напряжения называются *главными*, и их направления (оси или площадки) называются *главными* и обозначаются индексами 1, 2, 3. Между ними должна существовать зависимость:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , т.е.  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\min \max}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\min}$ .

Главные напряжения образуют тензор, имеющий три компоненты  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , который также полностью определяет напряженное состояние в точке:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

*Виды напряженного состояния.* Если три главные напряжения отличны от нуля, напряженное состояние называется трехосным или *объемным* (рис.3, а). Если два из главных напряжений отличны от нуля, напряженное состояние называется двухосным или *плоским* (рис.3, б). Если одно из главных напряжений отлично от нуля, напряженное состояние называется одноосным или *линейным* (рис.3, в).

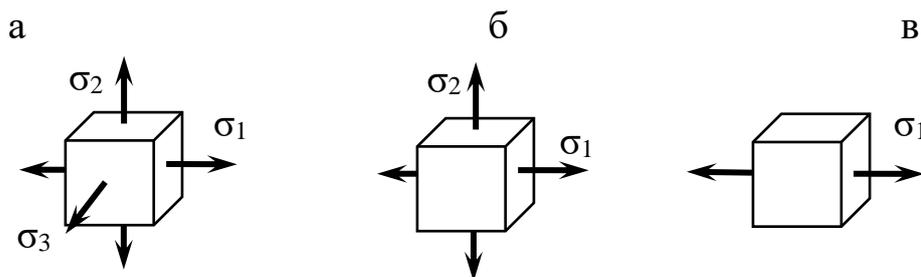


Рис.3. Виды напряженного состояния:  
а – объемное; б – плоское; в – линейное

## 1.2. Плоское напряженное состояние

Остановимся подробно на плоском напряженном состоянии, поскольку от него несложно перейти как к линейному (положив одно из главных напряжений равным нулю), так и объемному (как совокупность плоских состояний).

Рассмотрим исходные не главные площадки (площадки общего положения)  $x, y, z$ . Полагая, что в направлении  $z$  напряжения отсутствуют, опустим второй индекс у касательных напряжений:  $\tau_{xy} = \tau_x, \tau_{yx} = \tau_y$ . На площадках  $x, y$  действуют напряжения  $\sigma_x, \tau_x$  и  $\sigma_y, \tau_y$  соответственно (рис.4, а).

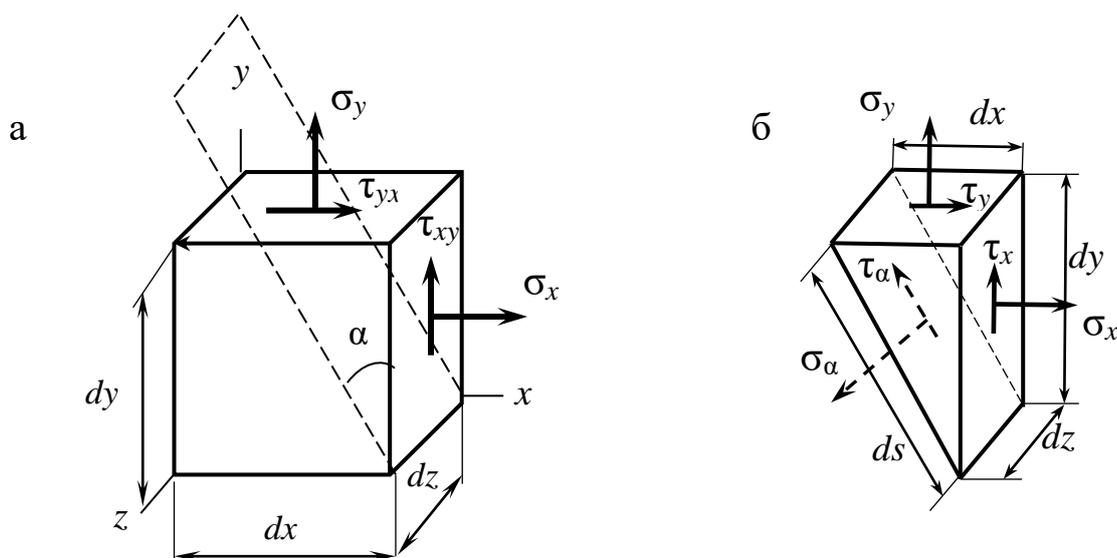


Рис. 4. Выделение элементарной призмы:  
а – исходные площадки; б – выделенная призма

Определим напряжения на площадке, расположенной под углом  $\alpha$  относительно площадки  $x$  (назовем ее площадкой  $\alpha$ ). Для этого рассечем элемент плоскостью под углом  $\alpha$  и выделим призму, на наклонной грани которой возникают напряжения  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  (рис.4, б). Размеры площадок малы, поэтому считаем, что напряжения распределены равномерно. Будем рассматривать плоскую систему, поскольку напряжения в направлении  $z$  отсутствуют. Умножив каждое из напряжений на величину площади соответствующей грани, получим систему сосредоточенных сил, приложенных в центре тяжести соответствующих граней (рис.5).

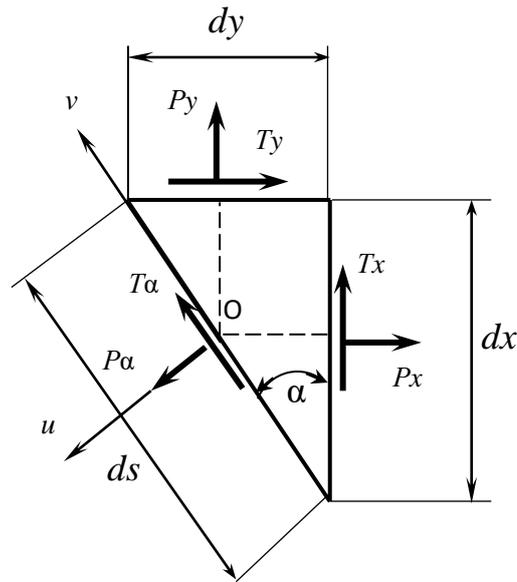


Рис.5. Призма под действием сил

$$P_x = \sigma_x dy dz, T_x = \tau_x dy dz, P_y = \sigma_y dx dz, T_y = \tau_y dx dz, P_\alpha = \sigma_\alpha ds dz, T_\alpha = \tau_\alpha ds dz$$

Так как выделенная призма находится в равновесии, то система сил должна удовлетворять уравнениям равновесия. Совместим систему координатных осей  $u, v$  с площадкой  $\alpha$ . Составим уравнение моментов относительно начала координат:

$$\Sigma M_0 = 0, \quad -T_y \frac{dy}{2} + T_x \frac{dx}{2} = 0, \quad -\tau_y dx dz \frac{dy}{2} + \tau_x dy dz \frac{dx}{2} = 0,$$

откуда:

$$\tau_x = \tau_y.$$

Это выражение называется *законом парности касательных напряжений*. В более общем виде оно записывается и формулируется так: касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и противоположны по знаку.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Уравнение проекций сил на ось  $u$ :

$$\Sigma U = 0 ; P_{\alpha} - (P_x + T_y) \cos \alpha - (P_y - T_x) \cos(90^{\circ} - \alpha) = 0 .$$

Уравнение проекций сил на ось  $v$ :

$$\Sigma V = 0 ; T_{\alpha} - (P_x + T_y) \sin \alpha + (P_y - T_x) \sin(90^{\circ} - \alpha) = 0 .$$

Подставим в эти уравнения выражения для сил:

$$\sigma_{\alpha} dsdz - (\sigma_x dydz + \tau_y dx dz) \cos \alpha - (\sigma_y dx dz - \tau_x dy dz) \sin \alpha = 0 ;$$

$$\tau_{\alpha} dsdz - (\sigma_x dydz + \tau_y dx dz) \sin \alpha + (\sigma_y dx dz - \tau_x dy dz) \cos \alpha = 0 .$$

Разделим на  $dsdz$  и, учитывая  $\frac{dx}{dz} = \sin \alpha$  ,  $\frac{dy}{dz} = \cos \alpha$  получим:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_x \sin 2\alpha ;$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha .$$

Правило знаков: знак направления напряжений в общем случае определяется выбором системы координатных осей (правая система координат, совпадающая с нормалью к выбранной площадке). При плоском (или линейном) напряженном состоянии удобнее говорить не о направлении осей, а о направлении напряжений (рис. 6): положительное нормальное напряжение вызывает на площадке растяжение, отрицательное – сжатие; положительное касательное напряжение вызывает поворот площадки по часовой стрелке относительно любой точки на внутренней нормали к площадке, отрицательное – против часовой. Положительный поворот площадок происходит против часовой стрелки.

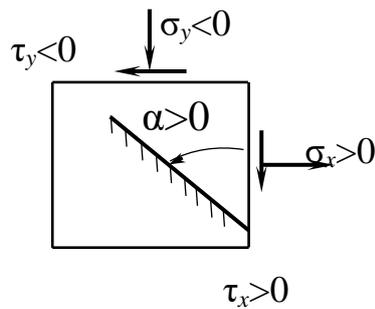


Рис.6. Правило знаков для напряжений и поворота площадки

Определим напряжения на смежной (перпендикулярной) с площадкой  $\alpha$  площадке  $\beta$ . Для этого в уравнение вместо  $\alpha$  подставим  $\alpha+90^\circ$ :

$$\sigma_{\beta=\alpha+90} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha.$$

Касательные напряжения на площадке  $\beta$  определяются законом парности касательных напряжений  $\tau_\beta = -\tau_\alpha$ .

Определим сумму напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках  $\alpha$  и  $\alpha+90^\circ$ , сложив выражения, получим:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const},$$

т.е. сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках сохраняется постоянной при их повороте. Это свойство называется *инвариантностью напряжений*, то есть их независимость от выбора координатной системы.

Определим главные напряжения. Функция  $\sigma_\alpha$  описывает напряжения на всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку. Главные напряжения являются экстремальными по определению, поэтому найдем их как экстремум этой функции. Для этого возьмем производную от функции:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\sigma_x 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - \tau_x 2 \cos 2\alpha.$$

Производная с точностью до множителя совпадает с выражением касательных напряжений на любой площадке  $\tau_\alpha$  :

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0} = 2\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 - \tau_x \cos 2\alpha_0\right) = -2\tau_{\alpha_0} = 0 .$$

Приравняв производную нулю, найдем угол  $\alpha_0$  , определяющий положение главных площадок относительно площадок  $x$ - $y$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_y - \sigma_x} .$$

Таким образом, получено доказательство отсутствия касательных напряжений на главных площадках. Подставив выражение угла в рассматриваемую функцию и исключив тригонометрические функции, получим уравнение для определения главных напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} ,$$

*Максимальные касательные напряжения.* Для их определения можно было исследовать на экстремум функцию, но удобнее переписать эту формулу относительно главных напряжений:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin 2\alpha .$$

Отсюда видно, что касательные напряжения достигают экстремума на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  относительно главных площадок, и равны полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} .$$

### 1.2.1. Графическое представление напряженного состояния Круг Мора

Заданы площадки общего положения и соответствующие напряжения на них (рис.7, а):  $\sigma_x=60$  МПа,  $\tau_x=50$  МПа,  $\sigma_y= - 20$  МПа,  $\tau_y= - 50$  МПа. Найти главные напряжения и соответствующие им главные направления.

Решим задачу сначала аналитически. Главные напряжения определяются выражением:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \frac{60 - 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 + 20}{2}\right)^2 + 50^2} = 20 \pm 64.$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 84 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = -44 \text{ МПа}.$$

Положение главных площадок в соответствии:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2 \cdot 50}{-20 - 60} = -1,25, \quad \alpha_0 = -25,7^\circ.$$

Результаты решения показаны на рис.7, а.

Перейдем к графическому решению. Введем в рассмотрение прямоугольную систему координатных осей  $\sigma$ - $\tau$ . Каждая площадка с соответствующими величинами напряжений в этой координатной системе будет отображаться соответствующей точкой. Так, координаты  $\sigma_x= 60$  МПа,  $\tau_x= 50$  МПа соответствуют площадке  $x$ . Координаты  $\sigma_y= - 20$  МПа,  $\tau_y= - 50$  МПа соответствуют площадке  $y$ . Соединим точки  $x$  и  $y$  прямой линией, которая пересекает ось  $\sigma$  в точке  $c$ , и на ней, как на диаметре, построим окружность (круг Мора) с центром в точке  $c$  (рис. 7, б). Координаты точек круга соответствуют нормальным и касательным напряжениям на всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку. Положение площадок определяется взаимным положением радиусов соответствующих площадок. Так, между площадками  $x$  и  $y$  угол составляет  $90^\circ$ , но на диаграмме он равен  $180^\circ$ . Следовательно, на диаграмме откладывается удвоенный угол. Так как отсутствие касательных напряжений

определяет главные площадки, то последние расположены на оси  $\sigma$  и, в нашем случае, соответствуют точкам 1 и 3. Координаты этих точек определяются координатой центра круга (первое слагаемое в уравнении  $\sigma_{\max}$ ) и радиусом круга (второе слагаемое в уравнении  $\sigma_{\max}$ ). Таким образом,  $\sigma_1=84$  МПа и  $\sigma_3=-44$  МПа.

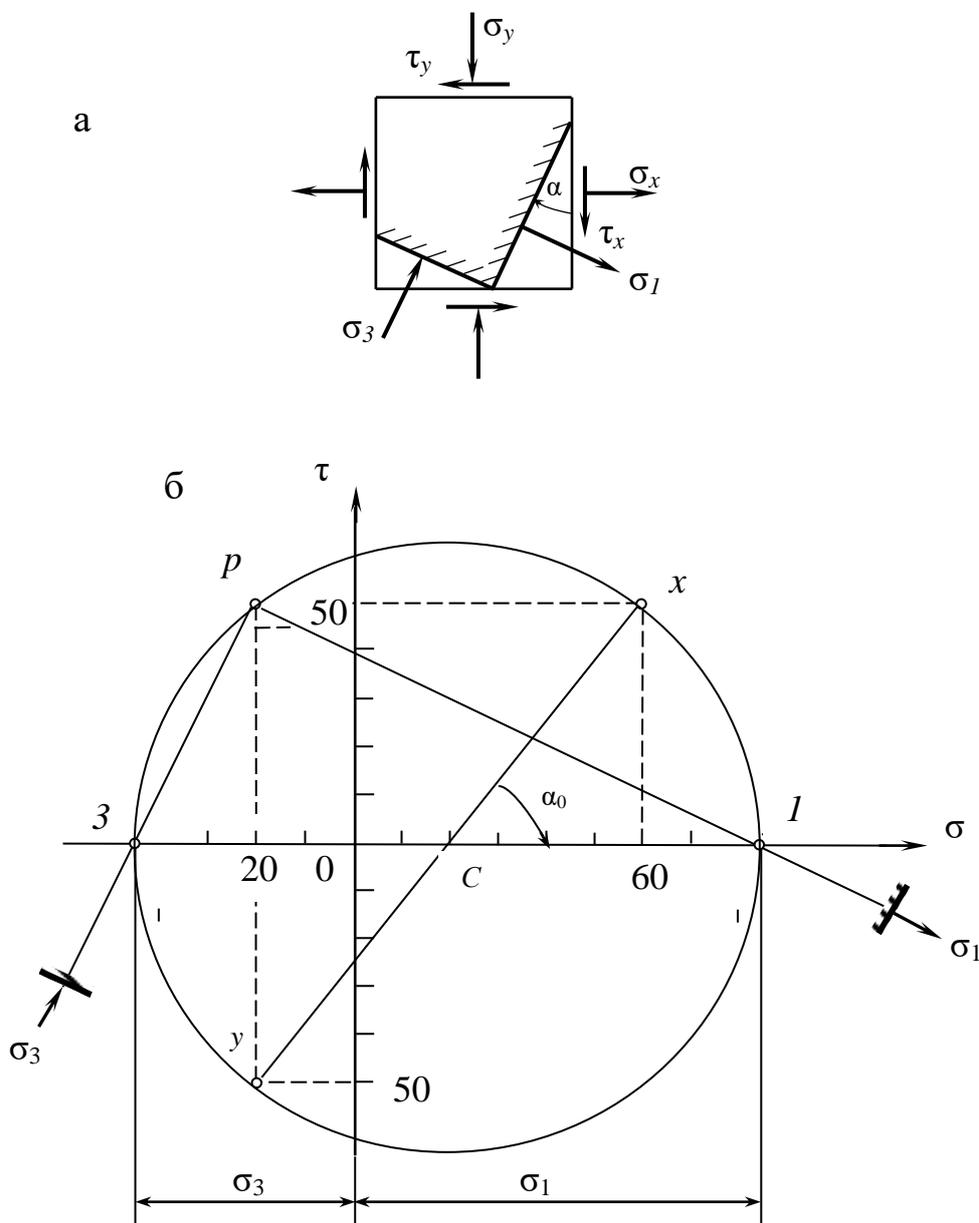


Рис.7. Графическое решение задачи:  
 а – схема площадок;  
 б – круг напряжений для заданного напряженного состояния

Положение главной площадки с напряжением  $\sigma_1$  относительно площадки  $x$  определяется удвоенным углом между радиусом  $c-x$  и  $c-l$ . Угол является отрицательным, так как поворот происходит по часовой стрелке. С помощью транспортира получаем  $\alpha_0 \approx -25^\circ$ .

Круг напряжений позволяет определить направление нормального напряжения на любой площадке в рассматриваемой точке. Для этого через точки  $x$  и  $y$  необходимо провести линии, параллельные  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Эти линии пересекаются в точке  $p$ , называемой полюсом. Линия, соединяющая полюс  $p$  с любой точкой круга, параллельна направлению нормального напряжения на площадке, которой эта точка соответствует. Так, линия  $p-l$  соответствует направлению  $\sigma_1$ , а линия  $p-2$  – направлению  $\sigma_3$ .

### 1.3. Понятие об объёмном напряжённом состоянии

В общем случае напряженного состояния на всех гранях элементарного параллелепипеда, как указывалось выше, возникают девять компонент напряжения, образующие тензор напряжений. В силу закона парности касательных напряжений тензор симметричен относительно главной диагонали, поэтому независимых напряжений только шесть. Рассмотрим определение главных напряжений.

В окрестности произвольной точки нагруженного тела выделим элементарный объем материала в направлении некоторых осей  $x, y, z$  (рис.8, а). На его гранях возникают шесть независимых компонентов тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Считая эти напряжения исходными, вычислим напряжения на наклонной площадке, полагая ее одной из главных, положение которой определяется нормалью  $v$ .

Для этого выделим из исходного элемента тетраэдр (рис.8, б) и запишем уравнения равновесия в виде проекций элементарных сил на координатные оси. Поскольку касательное напряжение на главной площадке отсутствует, то полное напряжение является главным и направлено по нормали  $v$ . Обозначим его  $\sigma_v = \sigma$ . Положение главной площадки в координатной системе  $x, y, z$  определяется направляющими косинусами:

$$\cos(x, \wedge v) = l, \quad \cos(y, \wedge v) = m, \quad \cos(z, \wedge v) = n.$$

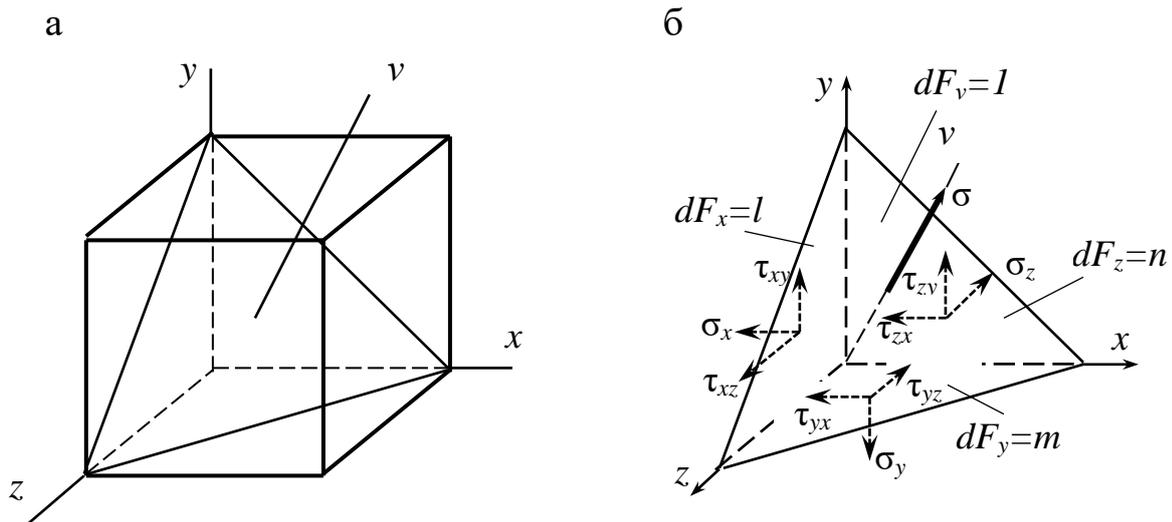


Рис.8. Выделение тетраэдра:  
 а – элемент с наклонной площадкой; б – выделенная призма

Примем площадь главной площадки равной 1, тогда площади остальных площадок будут:

$$dF_v = dF = 1, \quad dF_x = dFl = l, \quad dF_y = dFm = m, \quad dF_z = dFn = n.$$

Элементарные силы определим, умножив каждое из напряжений на площадь соответствующей площадки. Проекции сил на ось  $x$ :

$$\Sigma X = \sigma l - \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0.$$

Аналогичные равенства будут для осей  $y, z$ . Все вместе они образуют однородную систему уравнений:

$$(\sigma - \sigma_x) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0;$$

$$\tau_{yx} l + (\sigma - \sigma_y) m + \tau_{yz} n = 0;$$

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma - \sigma_z) n = 0.$$

Направляющие косинусы все одновременно не могут быть равны нулю, так как

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Следовательно, нулю равен определитель:

$$\begin{vmatrix} \sigma - \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma - \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma - \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв определитель, приходим к кубическому уравнению:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Три корня этого уравнения являются значениями трех главных напряжений в рассматриваемой точке. Коэффициенты  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  называются *первым, вторым и третьим инвариантами* напряженного состояния (тензора напряжений), поскольку они не зависят (инвариантны) от выбора координатной системы (при повороте осей не изменяются). Их величины определяются:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{xy}^2 - \sigma_y\tau_{yz}^2 - \sigma_z\tau_{zx}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.$$

Кубическое уравнение, поскольку его корнями являются главные напряжения, можно представить в виде:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0.$$

В этом случае инварианты тензора напряжений выражаются через главные напряжения в более простом виде:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1;$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Из последних выражений видно, что инварианты тензора напряжений определяют вид напряженного состояния в точке. Так отличие от нуля всех трех инвариантов определяют объемное напряженное состояние. Если  $I_3 = 0$ , то напряженное состояние плоское. Если  $I_3 = 0$  и  $I_2 = 0$ , то напряженное состояние линейное.

Кубическому уравнению можно дать наглядное представление, рассмотрев вектор полного напряжения на площадке общего положения. При повороте площадки геометрическое место концов этого вектора образует эллипсоид, полуосями которого являются главные напряжения (рис.9). Этот эллипсоид называется эллипсоидом напряжений.

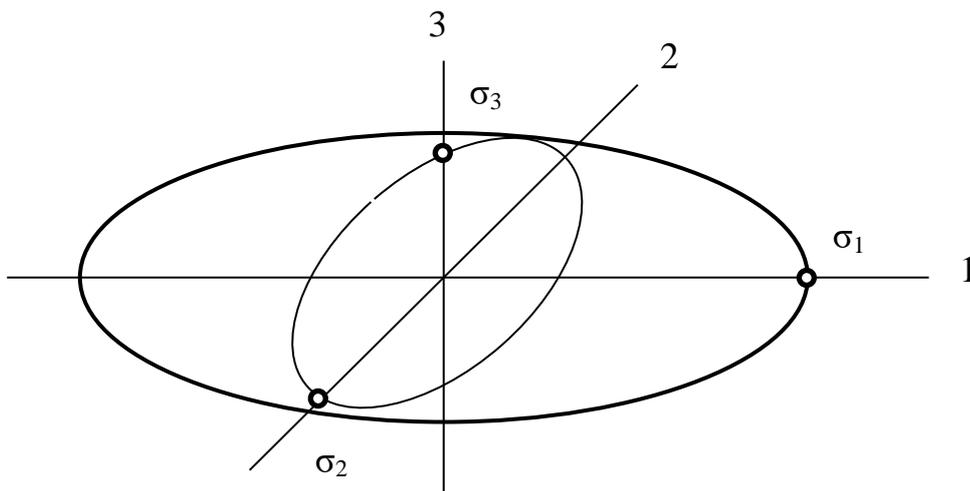


Рис.9. Эллипсоид напряжений

Положение любой точки на поверхности эллипсоида (напряжения на любой площадке в окрестности исследуемой точки) определяется инвариантами тензора напряжений.

Во многих случаях переход материала под нагрузкой в пластическое состояние связывают с величиной максимальных касательных напряжений. Поэтому оно является важной характеристикой напряженного состояния. При объемном напряженном состоянии максимальное касательное напряжение равно полуразности максимального и минимального главных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

и возникает на площадке, расположенной под углом  $45^\circ$  относительно площадок  $I$  и  $3$ .

Большое значение имеет преобразование объемного напряженного состояния с произвольными главными напряжениями к двум составляющим. Для этого введем понятие среднего напряжения:

$$\sigma_{\text{cp}} = \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Эллипсоид, образованный средним напряжением (его чаще называют гидростатическим давлением), принимает форму сферы, поэтому этот тензор называют шаровым тензором напряжений. Вычитая из общего тензора напряжений шаровую составляющую, получим тензор девиатор.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & & \\ & \sigma_0 & \\ & & \sigma_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & & \\ & \sigma_2 - \sigma_0 & \\ & & \sigma_3 - \sigma_0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом заданная система напряжений заменяется двумя составляющими системами (рис. 10), в которых под действием гидростатического давления происходит лишь изменение объема, а под действием девиатора происходит лишь изменение формы без изменения объема.

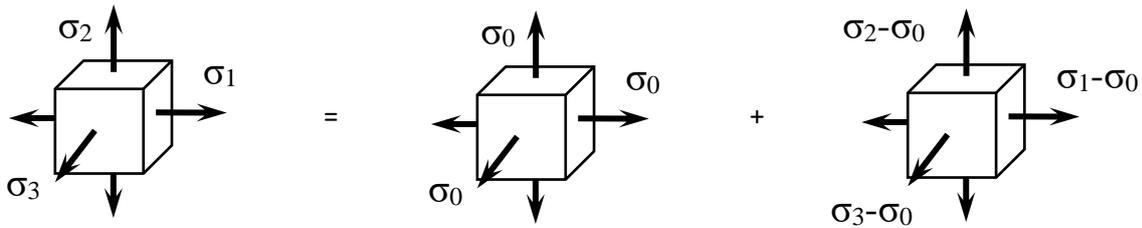


Рис.10. Разложение тензора напряжений на шаровую и девиаторную составляющие

### 1.4. Деформированное состояние

Деформирование тела происходит в результате перемещения его точек. Перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  понимаются как изменения координат точек. Мерой деформируемости являются линейные  $\epsilon$  и угловые  $\gamma$  деформации. Связь между перемещениями и деформациями определяется уравнениями Коши. Деформации зависят от направления (выбора координатных осей). Совокупность линейных и угловых деформаций, возникающих во всевозможных направлениях осей, проведенных через данную точку, называется *деформированным состоянием* в точке. Деформированное состояние так же, как и напряженное, определяется шестью компонентами и представляет собой тензор:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Деформированное состояние обладает свойствами, аналогичными свойствам напряженного состояния. Среди множества осей, проведенных через рассматриваемую точку, существует система осей, в направлении которых линейные деформации максимальны, а угловые деформации отсутствуют. Такие оси

называются *главными осями* деформированного состояния, а линейные деформации *главными деформациями*. Они обозначаются цифровыми индексами:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

На основании указанной аналогии между напряженным и деформированным состояниями можно без вывода написать формулы для деформаций, если в формулах для напряжений заменить  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  соответственно на  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ . Например, главные деформации вычисляются:

$$\varepsilon_{\max/\min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}.$$

В точках изотропного упругого тела главные направления (оси) напряженного и деформированного состояний совпадают.

Анализ деформированного состояния основан на геометрических соотношениях, поэтому справедлив для любого однородного тела, независимо от механических свойств материала.

В деформированном состоянии происходит изменение объема и изменение формы. Установим связь между изменением объема и линейными деформациями. До деформации элемент занимал объем  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  (рис. 11). Длина каждого ребра в деформированном состоянии  $dx + \Delta(dx) = dx + \varepsilon_x dx = dx(1 + \varepsilon_x)$ , так как  $\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}$ .

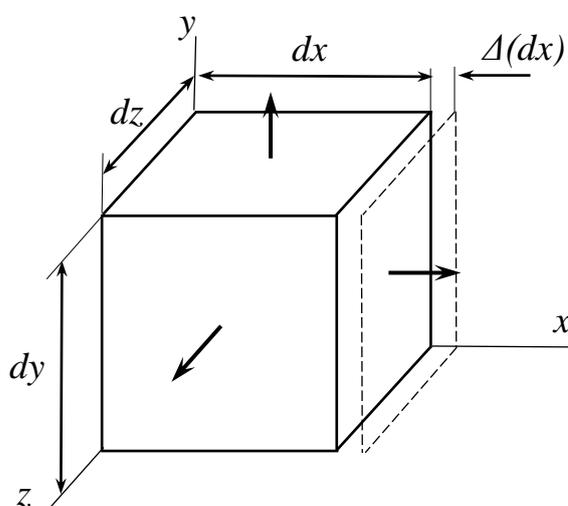


Рис.11. Изменение размера  $dx$  в деформированном состоянии элемента

В деформированном состоянии его объем

$$\begin{aligned}dV + \Delta(dV) &= dx(1 + \varepsilon_x) \cdot dy(1 + \varepsilon_y) \cdot dz(1 + \varepsilon_z) = \\&= dxdydz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) = \\&= dxdydz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z).\end{aligned}$$

Учитывая малость деформаций, вторым и третьем порядком малости можно пренебречь. Тогда изменение объема

$$\Delta(dV) = dxdydz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Поэтому относительное изменение объема равно сумме линейных деформаций по трем осям

$$\theta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

### 1.5. Закон Гука

Между компонентами напряженного и деформированного состояний существует зависимость в виде закона Гука, принимающая для изотропного материала наиболее простую форму. В этом случае коэффициенты пропорциональности между компонентами напряженного и деформированного состояний не зависят от ориентации осей в точке. Исходя из принципа суперпозиции, рассмотрим отдельно действие нормальных и касательных напряжений.

**Обобщенный закон Гука.** Около рассматриваемой точки нагруженного тела выделим элемент, по граням которого действуют главные напряжения (рис. 12). Вследствие деформации элемента ребра изменяют свою длину. Главные деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

На основании принципа суперпозиции каждая деформация вызывается напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , т.е.:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3).$$

Поскольку направление  $\varepsilon_1$  является продольным относительно  $\sigma_1$ , то в соответствии с линейным законом Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} .$$

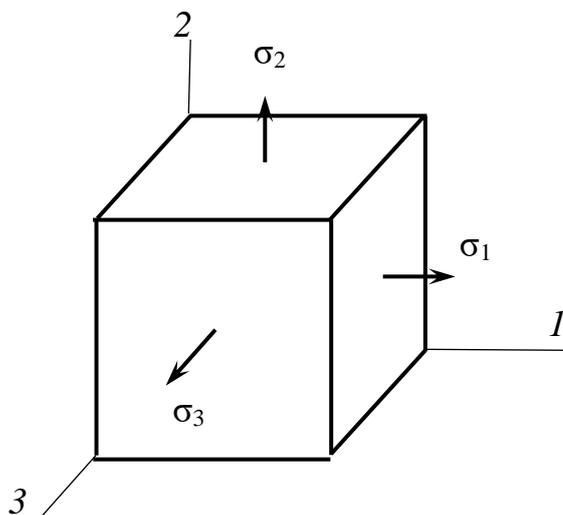


Рис.12. Элемент в главных площадках (направлениях)

Направление  $\varepsilon_1$  относительно  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  является поперечным, поэтому в соответствии с законом Пуассона:

$$\varepsilon_1 = -\mu\varepsilon_2 , \quad \varepsilon_1 = -\mu\varepsilon_3 , \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E} , \quad \varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_3}{E} .$$

Суммируя деформации, получаем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] .$$

Аналогично получают выражения для двух других деформаций.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Эти формулы выражают *обобщенный закон Гука*, т.е. обобщают линейный закон Гука на случай объемного напряженного состояния. Выражения справедливы не только для главных деформаций, но и деформаций в направлении любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через рассматриваемую точку.

**Закон Гука при сдвиге.** В любой из координатных плоскостей угловая деформация определяется только соответствующим касательным напряжением, т. е.  $\gamma_{xy}$  определяется только  $\tau_{xy}$  (рис. 13). Вследствие свойств изотропного материала другие касательные напряжения, а также нормальные, не влияют на величину угловой деформации. Поэтому для трех угловых деформаций закон Гука при сдвиге записывается:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

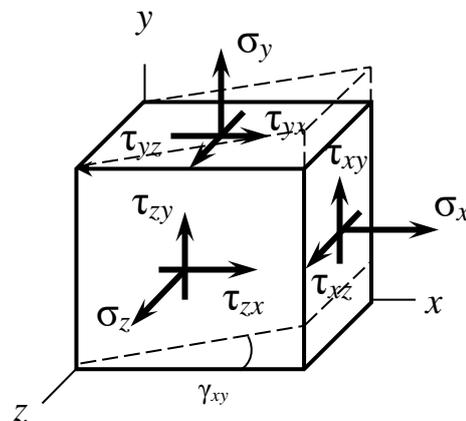


Рис.13. Сдвиг  $\gamma_{xy}$  под действием напряжения  $\tau_{xy}$

**Объемный закон Гука.** Определим изменение объема через напряжения, используя обобщенный закон Гука:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Это выражение позволяет установить предельное значение коэффициента Пуассона. При действии гидростатического давления

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0,$$

где  $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ , произойдет изменение объема:

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_0.$$

При положительном  $\sigma_0$  объем  $\theta$  должен увеличиваться, при отрицательном  $\sigma_0$  объем уменьшается. Это возможно только в случае  $\mu < \frac{1}{2}$ . Следовательно,  $0 < \mu < 0,5$ .

Связь среднего напряжения  $\sigma_0$  и изменения объема  $\theta$  выражает закон Гука для объемной деформации:

$$\sigma_0 = \frac{E}{3(1-2\mu)}\theta,$$

или

$$\sigma_0 = K\theta,$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  — модуль объемной упругости.

Таким образом, изотропный материал характеризуется четырьмя упругими константами  $\mu$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $K$ , из которых независимыми являются только две.

## 1.6. Потенциальная энергия деформации

Потенциальная энергия деформации – это энергия, которая накапливается в теле при его упругой деформации. Потенциальная энергия, накопленная в элементарном объеме, определяется суммой работ сил, распределенных по поверхности этого объема. Предположим, что элемент ограничен главными площадками (рис. 11). Нормальная сила на площадке  $x$  равна  $\sigma dydz$ . Она совершает работу на перемещении  $\Delta(dx) = \varepsilon_x dx$ . Эта работа равна  $dA = \sigma \varepsilon_x dx dy dz$ , где  $\varepsilon_x$  – деформация в направлении оси  $x$ , вызванная всеми действующими силами. Потенциальная энергия, отнесенная к единице объема, называется *удельной потенциальной энергией* деформации, поэтому

$$\frac{d\mathcal{U}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\sigma \varepsilon_x dx dy dz}{dx dy dz} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_x.$$

Таким образом, полная удельная потенциальная энергия в точке равна

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}.$$

Подставив деформации, выраженные через обобщенный закон Гука, получим:

$$u = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right].$$

Полная удельная потенциальная энергия накапливается за счет изменения объема и вследствие изменения формы элемента

$$u = u_v + u_\phi.$$

Определим потенциальную энергию изменения объема  $u_v$ . Как указывалось выше, изменение объема происходит под действием гидростатического давления (среднего напряжения). Поэтому

$$u_v = \frac{1}{2} \sigma_0 \theta = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_0^2.$$

Если учесть, что  $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ , то  $u_v = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$ .

Тогда удельная потенциальная энергия формоизменения вычисляется

$$u_{\text{ф}} = u - u_v = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

### 1.7. Теория предельных состояний

Важнейшей задачей инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию. Наиболее просто эта задача решается для одноосного напряженного состояния, так как в этом случае напряжения, возникающие в детали, сопоставляются с допускаемыми напряжениями, определяемыми через опасные напряжения, которые легко устанавливаются экспериментально. Под опасными напряжениями, как уже указывалось, понимают напряжения, соответствующие началу разрушения (при хрупком состоянии материала) или появлению остаточных деформаций (в случае пластического состояния материала). Так, испытания образцов из конкретного материала на простое растяжение или сжатие позволяют без особых трудностей по диаграмме нагружения определять значения опасных напряжений:  $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{т}}$  или  $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{в}}$ .

По опасным напряжениям устанавливают допускаемые напряжения, обеспечивая известный коэффициент запаса против наступления опасного состояния. Таким образом, условие прочности для одноосного напряженного состояния принимает вид:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_{\text{р}}] \text{ или } \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{сж}}].$$

В этом случае условие прочности устанавливается путем сопоставления (сравнения) одинаковых напряженных состояний.

Рассмотрим теперь вопрос о прочности материала при сложном напряженном состоянии, когда в опасной точке детали отличны от

нуля три главных напряжения  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ ,  $\sigma_3 \neq 0$ . Для этого обобщим некоторые уже известные понятия. И прежде всего – опасное состояние.

Материал в процессе деформирования может находиться в различных механических состояниях: упругом, пластическом, разрушения. Вид механического состояния и переход от одного к другому зависят в первую очередь от напряженного состояния, но не определяется им полностью. Значение имеют температура, время, гидростатическое давление, состояние окружающей среды и другие факторы. Физические процессы перехода от одного механического состояния к другому существенно различны, поэтому различны и условия перехода к различным состояниям. В сопротивлении материалов механические состояния изучаются в предположении, что они в первую очередь определяются напряженным состоянием в точке.

Будем понимать под предельным напряженным состоянием такое, при котором происходит переход от одного механического состояния к другому. Так, у пластичных материалов текучесть является предельным состоянием для упругого состояния. Хрупкие материалы при увеличении напряжений переходят в состояние разрушения. Предельное напряженное состояние может рассматриваться как характеристика свойств материала. И первый вопрос при проверке прочности заключается в определении предельного напряженного состояния.

Опыт показывает, что при сложном напряженном состоянии для одного и того же материала предельное состояние может иметь место при различных предельных значениях главных напряжений. (При увеличении напряжений эллипсоид напряжений, расширяясь, переходит в другую неизвестную гиперповерхность, допустим текучести.) Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за большого объема испытаний, но и из-за трудностей (в большинстве случаев невозможности) постановки опытов.

Из этого вытекает необходимость создания общего метода оценки меры опасности любого напряженного состояния, при ограниченном числе механических испытаний материала. Это и является содержанием теории предельных напряженных состояний или так

называемых теорий прочности. (Речь идет не о прочности буквально, а вообще о качественном изменении свойств материала).

Один из путей решения этой задачи заключается в установлении *критерия прочности*. Для этого вводят гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора. Полагают, что предельное состояние материала при любом напряженном состоянии наступит тогда, когда величина выбранного фактора достигнет некоторого предельного значения. Предельное значения фактора определяется на основании простых опытов на растяжение.

Введем понятие *равнопрочности*. Два элемента в различных напряженных состояниях считаются равнопрочными, если для достижения ими предельного состояния все напряжения необходимо увеличить в одно и то же число раз. Это число, очевидно, является коэффициентом запаса прочности. На основании равнопрочности вводится понятие *эквивалентного напряжения*, т.е. напряжения, которое нужно создать в линейном напряженном состоянии, чтобы оно было равнопрочно сложному напряженному состоянию.

Эквивалентное напряжение приводит сложное напряженное состояние к эквивалентному по опасности предельному одноосному растяжению. Таким образом, условие прочности сводится к сравнению эквивалентного напряжения с допускаемым (рис. 14), которое определяется через опасное напряжение, получаемое из опытов на линейное растяжение или сжатие.

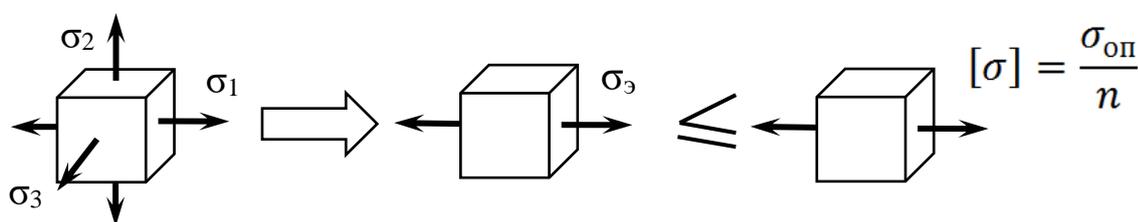


Рис.14. Переход от объемного напряженного состояния к эквивалентному и условие прочности

Рассмотрим определение эквивалентных напряжений в теориях прочности, основанных на классических критериях предельных состояний.

*Первая (I) теория прочности* (критерий наибольших нормальных напряжений). Предельное состояние наступит тогда,

когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения.

В объемном напряженном состоянии:  $\sigma_{\max} = \sigma_1$ . В эквивалентном напряженном состоянии:  $\sigma_{\max} = \sigma_3$ .

Следовательно,

$$\sigma_3^I = \sigma_1.$$

*Вторая (II) теория прочности* (критерий наибольших линейных деформаций). Предельное состояние в общем случае напряженного состояния наступит тогда, когда наибольшая линейная деформация достигает опасного значения.

В объемном напряженном состоянии:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

В эквивалентном напряженном состоянии:  $\varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_3}{E}$ .

Следовательно,

$$\sigma_3^{II} = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

*Третья (III) теория прочности* (критерий наибольших касательных напряжений). Предельное состояние наступит тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает опасного значения.

В объемном напряженном состоянии:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

В эквивалентном напряженном состоянии:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_3}{2}.$$

Следовательно,

$$\sigma_3^{III} = \sigma_1 - \sigma_3.$$

*Четвертая (IV) теория прочности* (критерий удельной потенциальной энергии формоизменения). Предельное состояние наступит тогда, когда удельная потенциальная энергии формоизменения достигает опасного значения.

В объемном напряженном состоянии:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right].$$

В эквивалентном напряженном состоянии:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} \left[ (\sigma_3 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_3)^2 \right] = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_3^2.$$

Следовательно,

$$\sigma_3^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}.$$

Первая и вторая теории прочности дают удовлетворительные результаты лишь для хрупкого состояния материала и имеют существенные недостатки. В настоящее время утвердилось мнение о нежелательности их применения, поэтому они имеют историческое значение. Третья теория прочности удовлетворительно описывает условие начала текучести для пластических материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Недостатком ее является неучет  $\sigma_2$ . Четвертая теория прочности хорошо подтверждается для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и на сжатие. По сравнению с третьей она дает более точные результаты.

## 1.8. Частные случаи плоского напряжённого состояния

**Растяжение-сжатие.** При растяжении (рис.15, а) и заданных главных площадках, допустим  $\sigma_1=\sigma$ ,  $\sigma_2=\sigma_3=0$ , круг напряжений расположен в положительной области (рис.15, б).

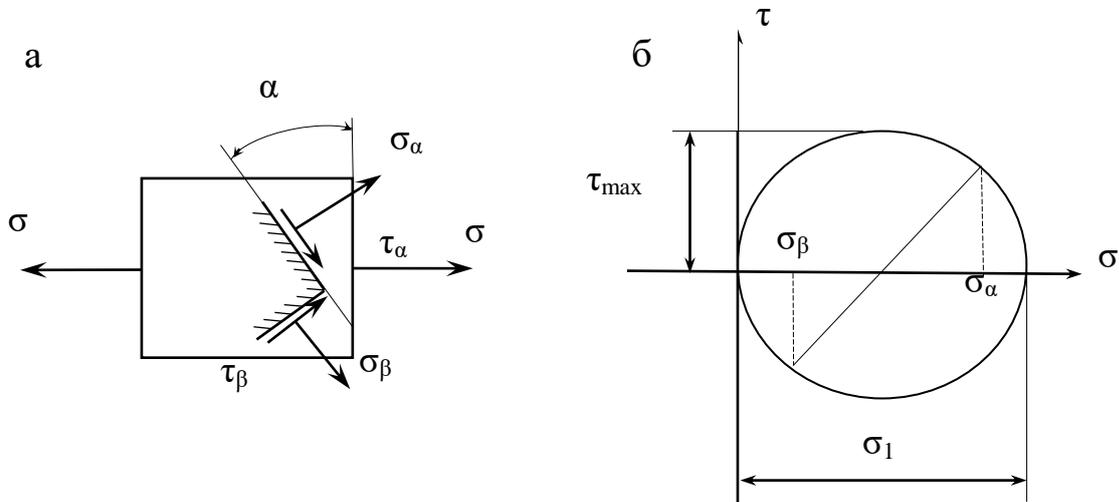


Рис.15.Схема растяжения:

а – схема напряженного состояния; б – круг Мора при растяжении

Нормальные напряжения на всех площадках положительны. Напряжения на любой площадке  $\alpha$  и смежной площадке  $\beta$  определяются из общих уравнений:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{\beta} = \sigma \sin^2 \alpha, \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \quad \tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}.$$

Максимальные  $\tau$  возникают на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  относительно главных:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$

При сжатии (рис.16, а) круг напряжений расположен в отрицательной области (рис.16, б) и нормальные напряжения на всех площадках отрицательны.

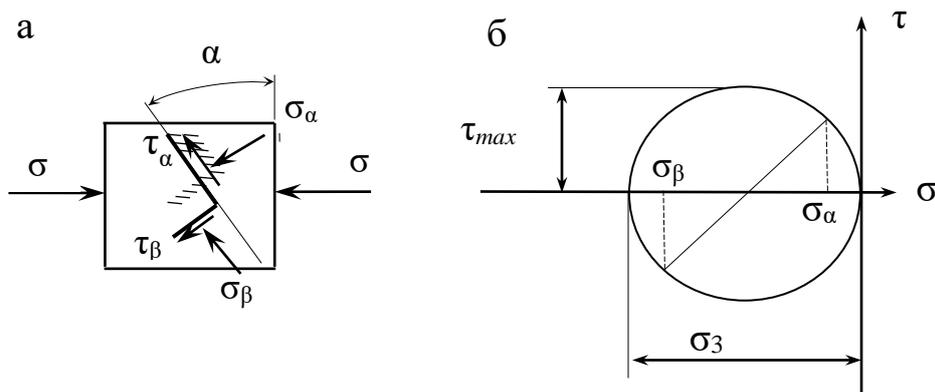


Рис.16. Схема сжатия:

а – схема напряженного состояния; б – круг Мора при сжатии

**Чистый сдвиг.** Под чистым сдвигом понимают частный случай плоского напряженного состояния, в котором на площадках сдвига (площадки с максимальными касательными напряжениями) отсутствуют нормальные напряжения. Рассмотрим площадки чистого сдвига, обозначив в силу закона парности  $\tau_x = \tau_y = \tau$  (рис.16, а). Главные напряжения и положение главных площадок относительно площадок сдвига равны:

$$\sigma_{\max} = \pm \sqrt{\tau^2}, \quad \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{0}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Напряжения на любых площадках относительно площадок сдвига:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin \alpha, \quad \tau_\alpha = -\tau \cos 2\alpha, \quad \sigma_\beta = -\tau \sin \alpha, \quad \tau_\beta = \tau \cos 2\alpha.$$

Особенности чистого сдвига видны (рис.17, б) на круге Мора, представляющем собой окружность с центром в начале координат.

Таким образом, чистый сдвиг может определяться (рис.17, б) площадками сдвига *a-a*, главными площадками *в-в* или площадками общего положения *с-с*. Эти площадки показаны на рис.18.

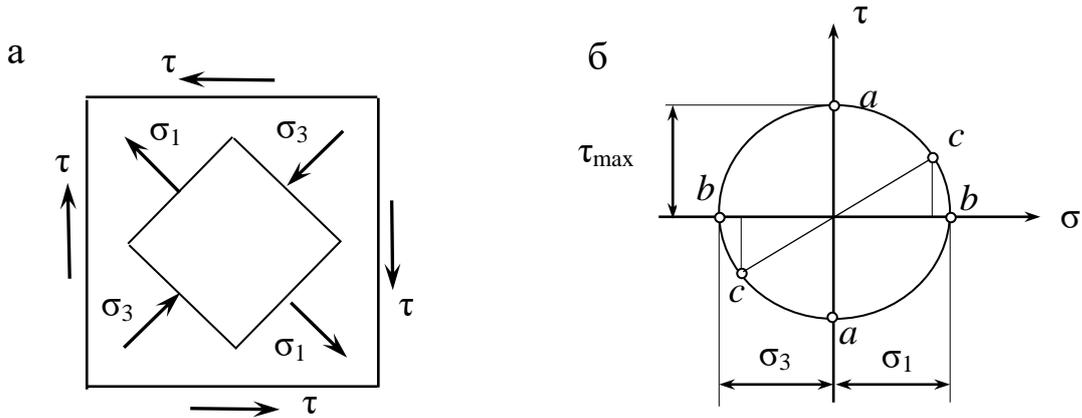


Рис.17. Схема чистого сдвига:

а – схема напряженного состояния; б – круг Мора при чистом сдвиге

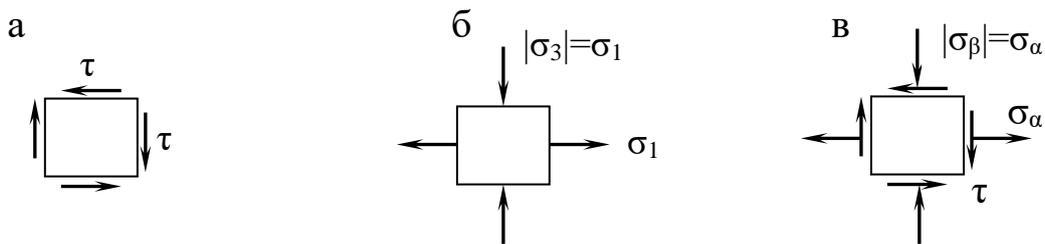


Рис.18. Чистый сдвиг:

а – площадки сдвига; б – главные площадки; в – площадки общего положения

Деформация чистого сдвига характеризуется изменением первоначально прямых углов элемента. Более наглядное представление о деформации элемента можно получить, закрепив одну грань (рис. 19). Изменение прямого угла называется углом сдвига или относительным сдвигом.

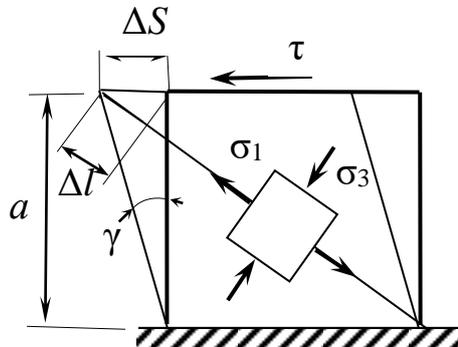


Рис.19. Деформация элемента при чистом сдвиге

( $\Delta S$  – абсолютный сдвиг;  $\frac{\Delta S}{a} = \text{tg}\gamma \approx \gamma$  – относительный сдвиг)

Определим соотношение между линейной деформацией и относительным сдвигом. Удлинение диагонали элемента можно выразить через абсолютный сдвиг:

$$\Delta l = \Delta S \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) \approx \Delta S \cdot \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}.$$

Деформация диагонали:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\gamma.$$

Удлинение диагонали происходит под действием главных напряжений и определяется обобщенным законом Гука:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Поскольку  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$ , то

$$\varepsilon = \frac{1}{E} [\tau - \mu(0 - \tau)] = \frac{1 + \mu}{E} \tau.$$

Относительный сдвиг определяется законом Гука при сдвиге  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , поэтому:

$$\frac{1 + \mu}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{G},$$

откуда следует связь между модулями упругости:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Эквивалентные напряжения для чистого сдвига определяются:

$$\sigma_{\text{э}}^{\text{III}} = 2\tau; \sigma_{\text{э}}^{\text{IV}} = \sqrt{3}\tau.$$

**Особый случай плоского напряженного состояния.** Отличие этого плоского напряженного состояния в том, что на одной из площадок общего положения отсутствуют нормальные напряжения. Рассмотрение этого напряженного состояния объясняется его возникновением в стержнях при изгибе и сложном сопротивлении.

Как при положительном нормальном напряжении (рис.20, а), так и при отрицательном (рис.21, а) возникают главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ,  $\sigma_2 = 0$ . Это положение наглядно объясняется кругом Мора на рис.20, б и рис.21, б.

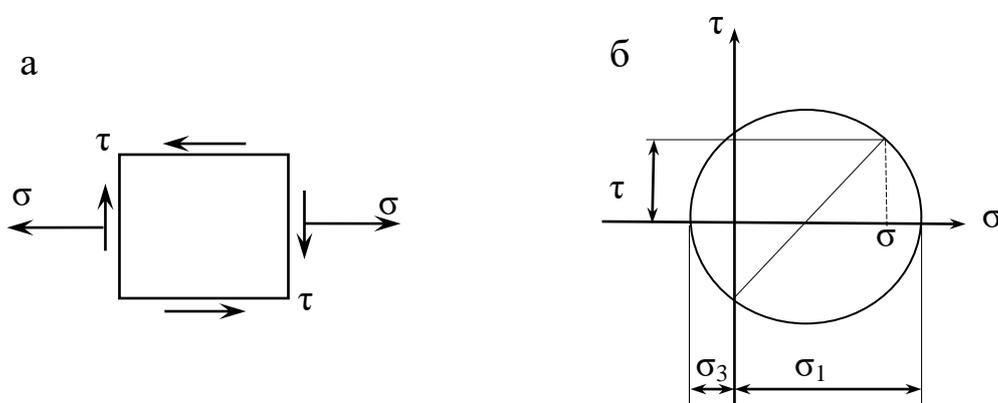


Рис.20. Схема элемента (а) и круг Мора (б) при  $\sigma > 0$

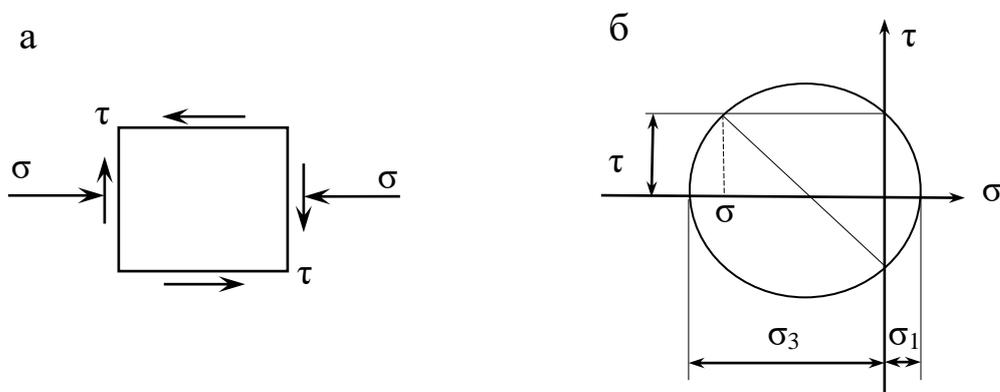


Рис.21. Схема элемента (а) и круг Мора (б) при  $\sigma < 0$

Величина главных напряжений вычисляется:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Эквивалентные напряжения для этого случая напряженного состояния определяются:

$$\sigma_3^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_3^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Таким образом, при проверке прочности такого напряженного состояния главные напряжения не вычисляются, а эквивалентные напряжения вычисляются по последним зависимостям.

## 2. РАСЧЁТ ВАЛОВ НА СОВМЕЩНОЕ ВЛИЯНИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

### 2.1. Критерии работоспособности валов

Критериями работоспособности валов являются их прочность и жесткость.

Под прочностью понимают способность валов сопротивляться действию постоянных и переменных по величине и направлению нагрузок без разрушения. Прочность валов оценивается следующими способами:

- сравнением фактического напряжения  $\sigma_{\text{экв}}$  с допускаемым  $[\sigma]$ ,

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma];$$

- сравнением фактического запаса прочности  $n$  с допускаемым  $[n]$ ,

$$n \geq [n];$$

- по вероятности неразрушения  $P$ , %.

Для их реализации необходимо определить наибольшее напряжение в опасном сечении детали. При этом нужно знать предельное напряжение для материала. В предварительном расчете, связанном с нахождением размеров наиболее напряженных сечений, сопоставляют наибольшее напряжение с допускаемым. По результатам этих расчетов конструируют вал и уже после этого проверяют запас прочности с учетом геометрии (концентраторов напряжений), материала и технологии изготовления.

Валы, рассчитанные по критерию прочности, не всегда обеспечивают нормальную работу машин из-за недостаточной жесткости. При действии нагрузок в валах появляются деформации в виде прогибов, углов поворота сечений при изгибе, углов закручивания при кручении. Сконструированный вал проверяют на жесткость по линейным деформациям при изгибе  $y \leq [y]$ , по угловым деформациям при изгибе  $\theta \leq [\theta]$  и кручении  $\varphi \leq [\varphi]$ , по вероятности неразрушения.

Большие перемещения сечений валов при изгибе могут вызвать заклинивание подшипников. Изгибная и крутильная жесткость валов

существенно влияют на частотные характеристики при появлении изгибных и крутильных колебаний. При возникновении колебаний напряжения в валах существенно возрастают, и будут определяться не внешней нагрузкой, а силами инерции колеблющихся масс. Наибольшую опасность для конструкции будет представлять резонанс напряжений и перемещений. В червячно-цилиндрическом редукторе проверка жесткости должна быть выполнена для червячного вала.

Избежать наступления резонанса можно путем изменения частоты собственных колебаний (реже за счет изменения частоты вынужденных колебаний).

Одна из основных задач расчета вала на колебания (вибрацию) состоит в определении частоты собственных колебаний и установлении допустимого диапазона частоты его вращения в рабочих режимах. Устойчивая работа вала обеспечивается, если в докритической области частот  $n \leq 0,7 n_{кр}$ , а в закритической области  $n \leq 1,3 n_{кр}$ .

## 2.2. Материалы валов

Валы изготавливают из углеродистых сталей марок 20, 30, 35, 40, 45, 50, легированных сталей марок 20Х, 40Х, 40ХН, 18Х2Н4А, 40ХН2МА, 38ХМЮА, 30ХГТ, 12ХН3А и др., высококачественных модифицированных чугунов, титановых сплавов ВТ-1, ВТ-6, ВТ-9. Характеристики некоторых материалов приведены в прил., табл. 1.

Выбор материала, вида и режима термической и термохимической обработки определяется конструкцией вала и опор, условиями эксплуатации. Так, например, быстроходные валы, вращающиеся в подшипниках скольжения, требуют высокой твердости цапф, поэтому такие валы изготавливают из цементируемых сталей 12Х2Н4А, 18ХГТ или азотируемых сталей 38Х2МЮА и др. Валы-шестерни изготавливают по этой причине из цементируемых сталей 12ХН3А, 12Х2Н4А и др. Валы под насадные зубчатые колеса редукторов выполняют из улучшенных сталей 45 (255÷285 НВ) и 40Х (269÷302 НВ).

Участки валов, контактирующие с уплотнительными манжетами, должны иметь твердость поверхности не менее 30 НРС.

Для ответственных тяжело нагруженных валов применяют легированные стали 40ХНМА, 25ХГТ и др. Для малонагруженных

валов используют углеродистые стали без термообработки. Валы без термообработки изготавливают из сталей 35, 40, Ст 5, Ст 6, 40Х, 40ХН, 30ХН3А, с термообработкой – из сталей 45, 50.

### 2.3. Эскизное проектирование

Расчет валов на изгиб и кручение без предварительного компоновочного эскизного чертежа не представляется возможным. Эскизную компоновку редуктора делают после окончания расчета передач. Эскизный чертеж выполняют в масштабе 1:1 или, в крайнем случае, 1:2. Чертежи обычно вычерчиваются в одной или двух проекциях, которые дают наиболее полное представление о внутреннем и внешнем конструктивном устройстве проектируемого объекта.

Редукторы горизонтального типа с цилиндрическими и коническими зубчатыми колесами выполняют на эскизе в одной проекции в плане с открытой крышкой корпуса. Разрез у таких редукторов производят в горизонтальной осевой плоскости, проходящей через передачи и подшипниковые узлы.

Червячные редукторы требуют для более полного изображения не менее двух проекций с показом в разрезе передач и подшипниковых узлов в осевой плоскости валов.

Эскизный проект отличается от технического рабочего проекта тем, что при эскизном проектировании не все размеры деталей и узлов принимают сразу окончательными. Одни размеры определяются расчетом, другие назначаются конструктивно с последующим уточнением тех и других.

В процессе эскизного проектирования представляется широкая возможность путем взаимного увязывания, уточнения и исправления окончательно принимать наиболее рациональные конструктивные решения основных узлов проектируемой машины. При вычерчивании сборочного чертежа в рамках технического проекта такой возможности уже не представится.

Сборочные чертежи выполняют на основании тщательной предварительной эскизной разработки конструкции.

### 2.3.1. Первый этап эскизного проектирования

На первом этапе эскизной компоновки устанавливают примерное расположение элементов передач (шестерен, колес, червяков, шкивов, звездочек и др.) относительно валов редуктора.

Вначале откладывают в масштабе ранее принятые межосевые расстояния или другие главные геометрические характеристики передач (оси симметрии, дистанционные расстояния, углы при вершинах начальных образующих конусов) и затем проводят оси будущих валов редуктора.

На указанных осях в виде простых фигур, как это показано на рис. 22, вычерчивают в масштабе контуры элементов передач. Все размеры передач берутся из расчета, который был проделан ранее.

Для цилиндрических зубчатых передач ширину ведущей шестерни в каждой ступени следует назначать на  $4\div 5$  мм больше, чем ширину ведомого колеса. Необходимые конструктивные размеры, рекомендуемые к использованию на первом этапе эскизного проектирования различных типов редукторов, приведены в прил., табл. 2. Габариты подшипников качения назначаются на первом этапе ориентировочно – по ширине  $B_{\text{п}} = 18\div 27$  мм и по диаметру наружных колец  $D = 70\div 120$  мм. Меньшие размеры здесь рекомендуются для быстроходных (входных) валов; большие – для тихоходных (выходных) валов редукторов средних размеров общего назначения ( $a_w \leq 350$  мм).

Для промежуточных валов двухступенчатых редукторов принимают усредненные значения.

Перед размещением подшипников нужно решить вопрос об их смазке. Систему смазки выбирают в зависимости от скорости вращения зубчатых колес. При скорости до 2,5 м/с смазка разбрызгиванием не обеспечивает смазку подшипников, поэтому для них рекомендуется консистентная смазка. Размер «у» (см. рис. 22) в этом случае определяется шириной кольца, удерживающего смазку.

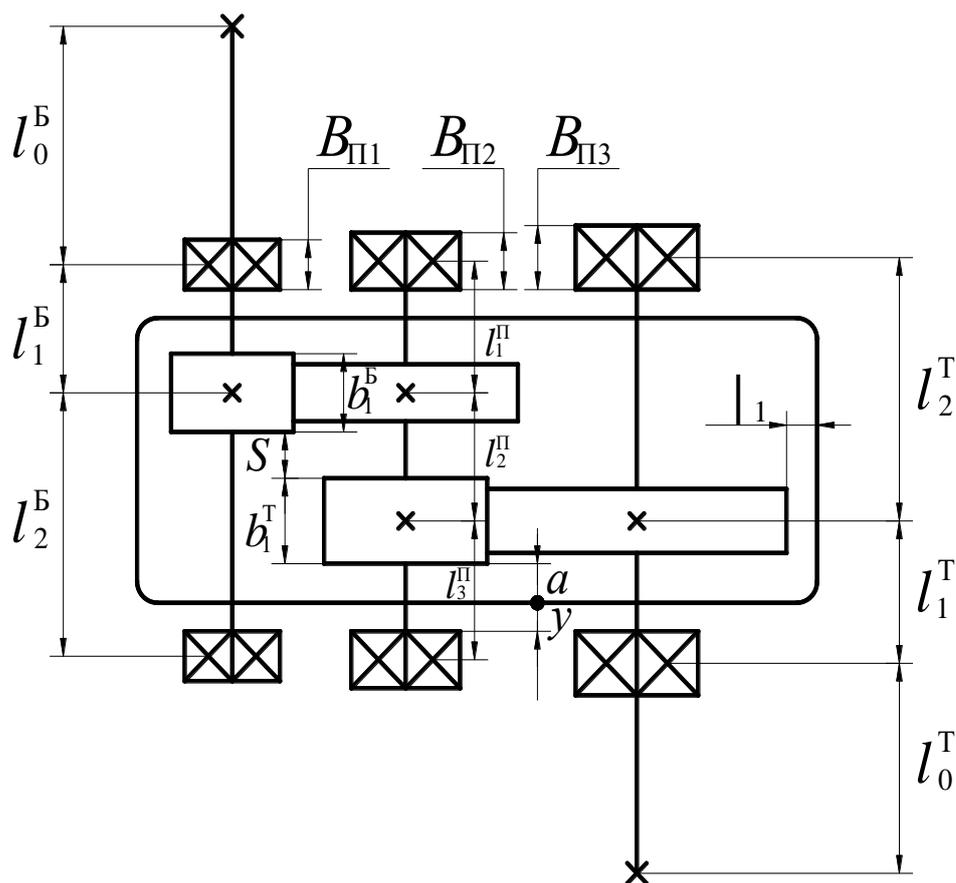


Рис. 22. Схема двухступенчатого цилиндрического редуктора

### 2.3.2. Определение расчетной длины консольных участков вала

На этом этапе определяют расчетную длину консольных участков быстроходного и тихоходного валов (см. рис. 22). В существующих Государственных стандартах консольный участок предусмотрен либо цилиндрическим, либо коническим, и длина его зависит от диаметра сечения вала на этом участке. Иногда на первом этапе диаметр сечения консольного участка быстроходного вала принимают конструктивно (на основе опыта конструирования). Например, в приводах его принимают иногда равным  $0,8 \div 1,0$  диаметра вала двигателя.

На ранней стадии проектирования, когда отсутствуют данные об изгибающих моментах (неизвестны нагрузки, действующие на вал, отсутствует конструкция вала), диаметр сечения консольного

участка может быть приближенно найден по величине крутящего момента:

– для быстроходного вала

$$d_K^B \geq (7 \div 8) \sqrt[3]{T_B}; \quad (2.1)$$

– для тихоходного вала

$$d_K^T \geq (5 \div 6) \sqrt[3]{T_T}, \quad (2.2)$$

где  $T_B$ ,  $T_T$  – значения крутящего момента на быстроходном и тихоходном валах в Ньютон-метрах (Н·м).

По вычисленной величине диаметра принимают его стандартное значение, для которого там же содержится стандартная длина цилиндрической (или конической) ступени вала.

Расчетную длину консольного участка на примере быстроходного вала (рис. 23) можно вычислить по формуле:

$$l_0^B = \frac{l_{CT}^B}{2} + \Delta + \frac{B_{П1}}{2}, \quad (2.3)$$

где  $l_{CT}^B$  – стандартная длина консольной ступени вала, соответствующая диаметру сечения  $d_K^B$ ;  $\Delta$  – расстояние от опоры вала до вращающейся детали (прил., табл. 2);  $B_{П1}$  – ширина подшипника качения быстроходного вала (прил., табл. 2);  $B_{П2} = 18$  мм.

Аналогично находят расчетную длину консольного участка тихоходного вала:

$$l_0^T = \frac{l_{CT}^T}{2} + \Delta + \frac{B_{П3}}{2}, \quad (2.4)$$

где  $l_{CT}^T$  – стандартное значение длины консольной ступени вала, соответствующее диаметру ее сечения, определяемого по формуле (2.2);  $\Delta$  – конструктивный размер, обеспечивающий гарантированное расстояние между вращающейся деталью на валу и головками болтов, крепящих крышку подшипника. Принимается на первом этапе эскизного проектирования (прил., табл. 1),  $\Delta = 20 \div 30$  мм;  $B_{П3} = 27$  мм.

Стандартом предусмотрены два исполнения длины  $l_{ст}$  – длинное и короткое. Из этих двух значений выбирают то, которое соответствует длине ступицы, насаживаемой на эту ступень детали.

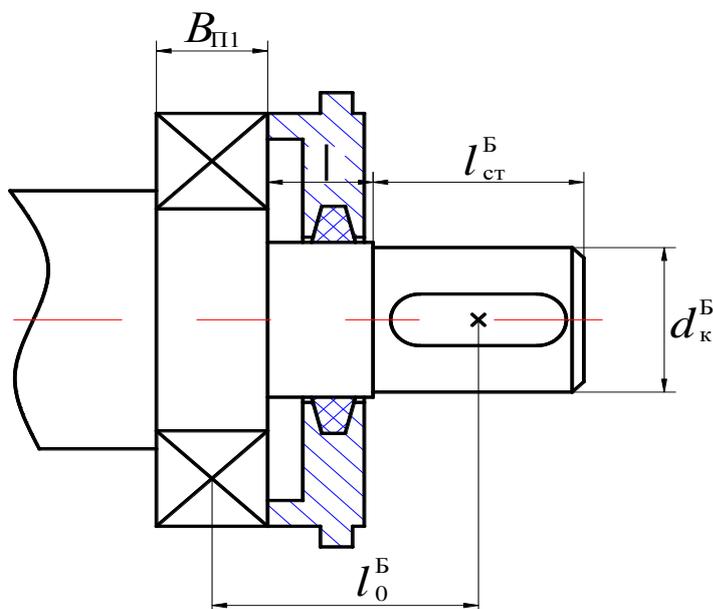


Рис. 23. Расчетная схема консольного участка быстроходного вала

Например, если на консольную ступень вала планируется разместить полумуфту, тогда длину этой ступени нужно согласовать с длиной ступицы полумуфты выбранной муфты по справочным таблицам, а если звездочку цепной передачи, то длину ступицы этой звездочки нужно назначить при конструировании равной одной из стандартных длин ступени вала.

### 2.3.3. Определение длины участков валов цилиндрического редуктора

Для решения этой задачи потребуется схема расположения всех основных деталей в редукторе (см. рис.22).

Принимая конструктивные размеры  $a$ ,  $y$ ,  $S$ ,  $B_{П1}$ ,  $B_{П2}$ ,  $B_{П3}$  (прил., табл. 2) и расчетные значения ширины шестерен быстроходной  $l_{ст}^B$  и тихоходной  $l_{ст}^T$  зубчатых пар, находят расчетную длину участков:

– быстроходного вала

$$l_1^B = \frac{B_{\text{П1}}}{2} + y + a + \frac{b_1^B}{2}; \quad (2.5)$$

$$l_2^B = \frac{b_1^B}{2} + S + b_1^T + a + y + \frac{B_{\text{П1}}}{2}; \quad (2.6)$$

– промежуточного вала

$$l_1^{\text{П}} = \frac{B_{\text{П2}}}{2} + y + a + \frac{b_1^B}{2}; \quad (2.7)$$

$$l_2^{\text{П}} = \frac{b_1^B}{2} + S + \frac{b_1^T}{2}; \quad (2.8)$$

$$l_3^{\text{П}} = \frac{b_1^T}{2} + a + y + \frac{B_{\text{П2}}}{2}; \quad (2.9)$$

– тихоходного вала

$$l_1^T = \frac{B_{\text{П3}}}{2} + y + a + \frac{b_1^T}{2}; \quad (2.10)$$

$$l_2^T = \frac{b_1^T}{2} + S + b_1^B + a + y + \frac{B_{\text{П3}}}{2}. \quad (2.11)$$

Полученные численные значения расчетных длин участков рекомендуется округлить до целых.

Минимальные значения некоторых конструктивных размеров, рекомендуемых в прил., табл. 2, могут быть определены расчетом.

Чтобы поверхности вращающихся колес не задевали за внутренние поверхности стенок корпуса, между ними оставляют зазор  $a \approx \sqrt[3]{L} + 3$ , где  $L$  – расстояние между внешними поверхностями деталей передач (см. рис.22).

Такое же расстояние можно принимать между внутренней поверхностью стенки корпуса и торцом ступицы колеса.

Расстояние  $a$  определяет также расстояние от торца подшипника качения до внутреннего контура стенки корпуса редуктора. Расстояние  $S$  между торцевыми поверхностями шестерен быстроходной и тихоходной зубчатых пар редуктора, выполненного по развернутой схеме:  $S = (0,3 \div 0,5) a$ .

В двухступенчатых соосных редукторах между торцевыми поверхностями шестерни быстроходной ступени и колеса тихоходной ступени расположены два подшипника опор валов. Расстояние  $l_x$  между зубчатыми колесами определяют по соотношению:  $l_x = 3a + B_{П1} + B_{П3}$  (рис. 24).

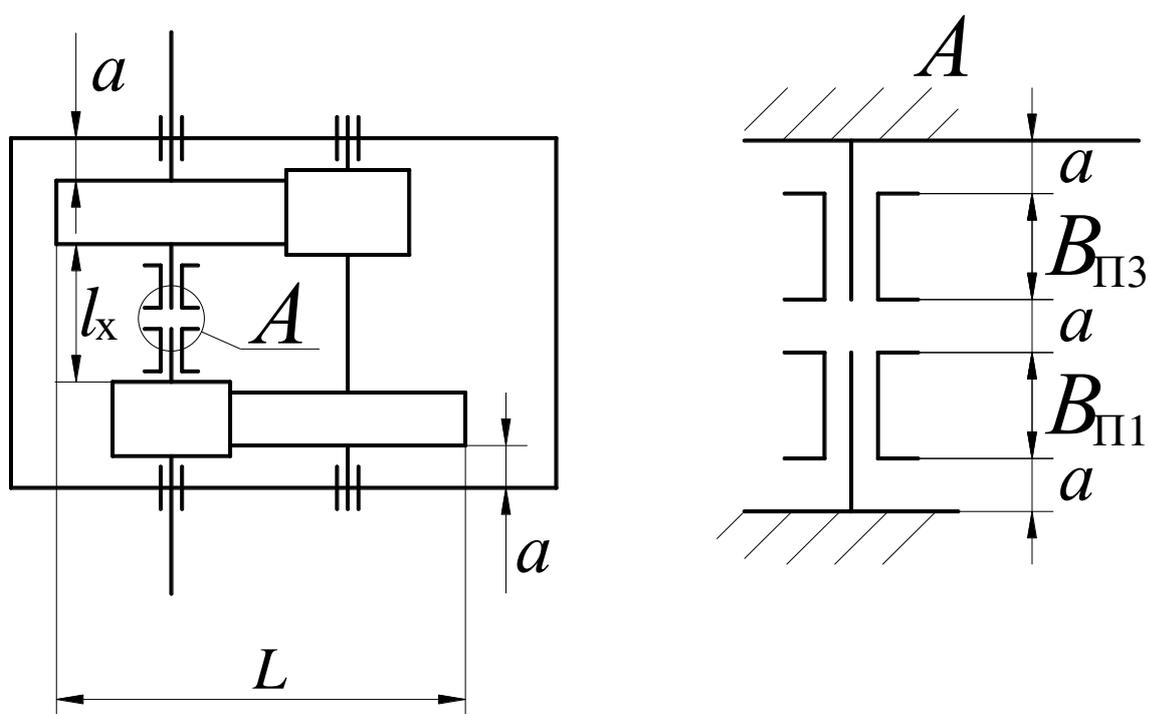


Рис. 24. Схема соосного редуктора

#### 2.3.4. Определение расчетных длин участков червячного вала

Расчетную длину участков червячного вала необходимо определять с учетом соблюдения необходимого зазора между зубьями червячного колеса и корпусами подшипников червячного вала (рис. 25).

Эту схему (рис. 25) чертят в масштабе 1:1, выполнив предварительно расчеты по нахождению диаметра наружного кольца подшипников червячного вала (рис. 26).

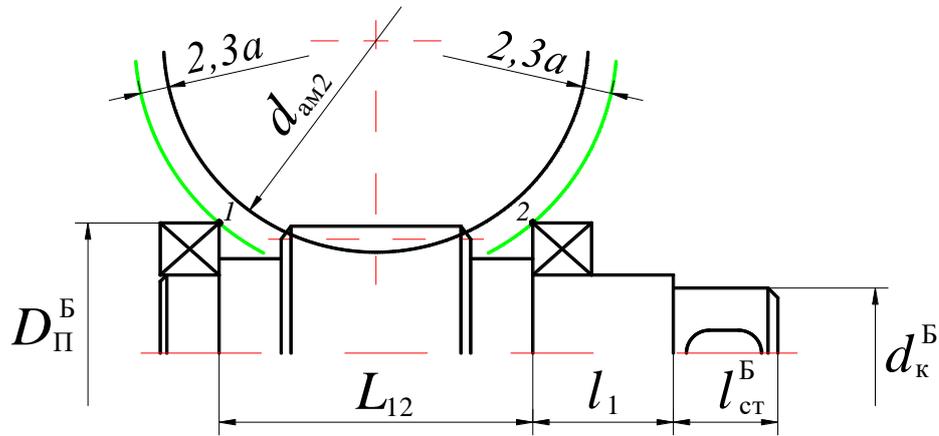


Рис. 25. Схема для определения расстояния между подшипниками червячного вала

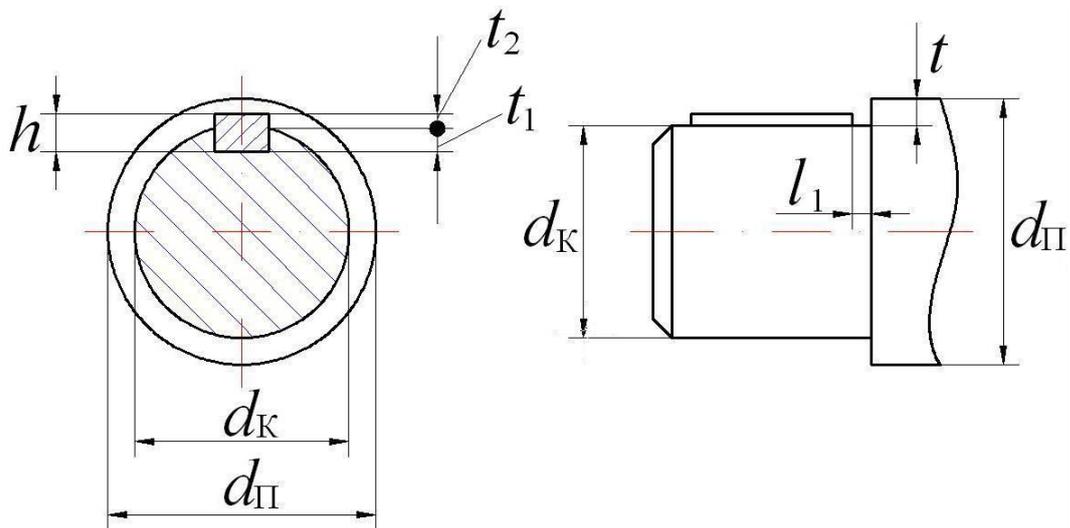


Рис.26. Схема консольного участка вала

Минимально возможный диаметр отверстия внутреннего кольца подшипников находим из соотношения:

$$d_{II}^B \geq d_k^B + 2t_2, \quad (2.12)$$

что вызывает необходимость предварительного выбора шпонки на консольном участке (рис. 26) и установления, таким образом, стандартного значения величины  $t_2$ . В результате подстановки  $t_2$  и найденного по формуле (2.1) значения  $d_K^B$  в уравнение (2.12) и округления полученного значения до стандартного из ряда диаметров внутреннего кольца подшипника выбираем предварительно роликовый конический подшипник и выписываем из таблиц диаметр его наружного кольца. Откладывая в масштабе на рис. 25 от продольной оси червячного вала в сторону к центру червячного колеса отрезок, равный половине диаметра наружного кольца выбранного подшипника, проводим прямую параллельно оси червяка. Затем радиусом, равным сумме половины диаметра окружности головок зубьев червячного колеса и зазора между корпусом подшипника и зубьями червячного колеса, равного  $2,3a$ , т. е.  $R = \frac{d_{am_2}}{2} + 2,3a$ , проводим окружность. Эта окружность пересекается с проведенной прямой в двух точках 1 и 2, расстояние между которыми  $L_{12}$  в масштабе есть минимально возможное расстояние между подшипниками червячного вала (см. рис. 25). Тогда расчетная длина обоих участков этого вала одинакова и составляет:

$$l_1^B = l_2^B = \frac{L_{12}}{2} + \frac{B_{П1}}{2} . \quad (2.13)$$

#### 2.4. Радиальная консольная нагрузка

Обычно машины выполняют из отдельных узлов или агрегатов. Взаимная установка таких узлов не может быть идеально точной вследствие погрешностей изготовления и монтажа, особенностей конструкции узлов и деформации валов при работе.

Различают следующие возможные смещения соединяемых валов: радиальное, угловое и осевое (рис. 27). При установке, например, электродвигателя и редуктора на общей раме точность относительного расположения соединяемых муфтой валов определяют все три возможных смещения. Предельные отклонения регламентируются соответствующими стандартами.

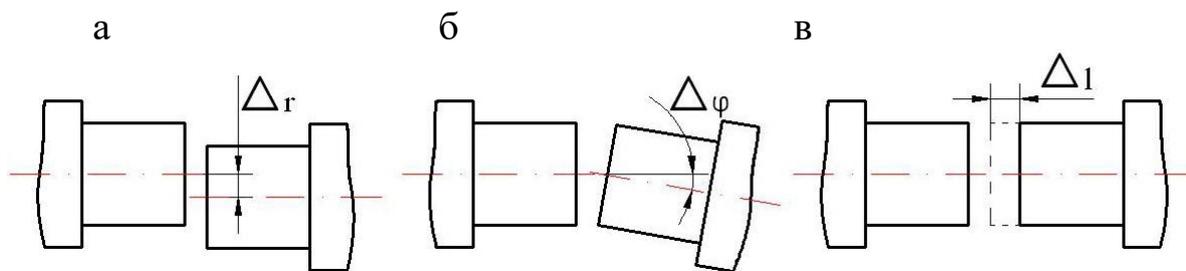


Рис. 27. Схемы несоосности валов:  
а – радиальной; б – угловой; в – осевой

При соединении муфтами неточно расположенные валы принудительно приводят к единому целому путем деформирования самих валов и опор. Валы и опоры оказываются при этом нагруженными дополнительными силами и моментами, которые могут намного превосходить по значению полезные нагрузки.

Стандартом ГОСТ 16162-85Е регламентируется радиальная консольная нагрузка для различных случаев (прил., табл. 3).

При наличии в приводе муфт, тип которых приведен в прил., табл. 4, или цепной передачи расчет консольных нагрузок выполняют по формулам из прил., табл. 4, 5.

Направление радиальной консольной силы по отношению к окружной силе может быть любым. Это зависит от случайной неточности монтажа. При расчете вала нужно брать наиболее опасное направление консольной силы (с целью получения максимально возможного изгибающего момента) – в плоскости действия результирующего изгибающего момента. Несоосность соединяемых муфтой валов в вертикальной плоскости определяется погрешностями установочных размеров, а также углами перекоса. Предельные отклонения этих размеров регламентированы соответствующими стандартами (ГОСТ 16162-85Е и ГОСТ 8592-71). При работе приводов корпуса узлов (редукторов, электродвигателей и др.), а также плиты и рамы деформируются. Особенно значительны деформации высоких рам. Эти деформации приводят к дополнительному (главным образом, радиальному) смещению валов и, как следствие, – к дополнительной нагрузке упругих элементов муфт, валов и их опор. Для муфт с упругими элементами радиальное смещение является основным видом несоосности.

## 2.5. Расчёт валов на прочность

Внешние нагрузки передаются на вал через сопряженные детали (зубчатые колеса, шкивы, звездочки и т. д.). При известных внешних нагрузках определение внутренних усилий в сечениях вала сводится к решению задачи для шарнирно закрепленной балки в жестких опорах. Такая модель формы и условий закрепления близка к действительности для валов, вращающихся в опорах качения и опорах скольжения (рис.28).

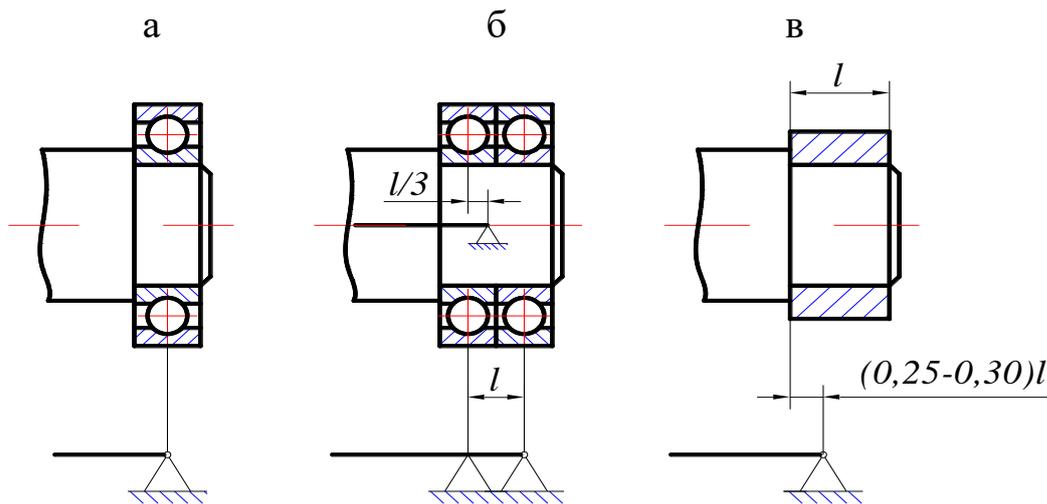


Рис. 28. Схемы опор валов:

а, б – на подшипниках качения; в – на подшипниках скольжения

Подшипники, воспринимающие только радиальную нагрузку, изображаются в виде шарнирно-подвижных опор. Подшипники радиально-упорные изображают как шарнирно-неподвижную опору. Нагрузки от зубчатых колес, звездочек, шкивов и т. д. передаются валу через поверхности контакта. Для упрощения задачи их заменяют сосредоточенными силами, приложенными к середине или по краям ступицы.

После определения диаметров сечений и длин участков вала, а также его конструктивных элементов производят расчет вала на прочность.

Расчет выполняют в такой последовательности: на основе результатов эскизного проектирования и по разработанному чертежу вала составляют расчетную схему, на которую наносят все внешние силы, нагружающие вал, приводя плоскости их действия к двум взаимно перпендикулярным плоскостям (горизонтальной  $XOZ$

и вертикальной  $YOZ$ ). Затем определяют опорные реакции в этих плоскостях. В этих же плоскостях строят эпюры изгибающих моментов  $M_{гор}$  и  $M_{верт}$ , эпюру крутящего момента  $T$ . Предположительно намечают опасные сечения, исходя из эпюр моментов, размеров сечений вала и концентраторов напряжений. Обычно это сечения, в которых приложены внешние силы, моменты, реакции опор или места изменения размеров сечения вала, нагруженные моментами. Проверяют прочность вала в опасных сечениях.

Проверку вала на статическую прочность выполняют для предупреждения появления пластических деформаций в период кратковременных перегрузок (например, при пуске, разгоне, реверсировании, срабатывании предохранительного устройства).

Величина перегрузки зависит от конструкции передачи. Так, при наличии предохранительной муфты перегрузка определяется моментом, при котором эта муфта срабатывает. При отсутствии предохранительной муфты возможную перегрузку принимают равной перегрузке при пуске приводного электродвигателя.

В расчетах используют коэффициент перегрузки

$$K_{\Pi} = \frac{T_{\max}}{T},$$

где  $T_{\max}$  – максимальный кратковременно действующий момент;  $T$  – номинальный (расчетный) вращающий момент. Для асинхронных электродвигателей  $K_{\Pi} = 2,2 \div 2,9$ .

При расчете определяют в рассматриваемом сечении касательные напряжения при действии максимальных нагрузок:

$$\sigma = 10^3 \frac{M_{\max}}{W_x} + \frac{F_{\max}}{A}, \quad \tau = 10^3 \frac{T_{\max}}{W_K},$$

где  $M_{\max} = K_{\Pi} \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$  – результирующий изгибающий момент, Н·м;  $T_{\max} = K_{\Pi} \cdot T$  – крутящий момент, Н·м;  $F_{\max} = K_{\Pi} \cdot F$  – осевая сила, Н (если она есть в задаче);  $W_x$ ,  $W_K$  – моменты сопротивления сечения вала при изгибе и кручении, мм<sup>3</sup>;  $A$  – площадь поперечного сечения вала, мм<sup>2</sup>.

Коэффициенты запаса прочности по пределам текучести:

$$S_{T\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma}, \quad S_{T\tau} = \frac{\tau_T}{\tau}, \quad (2.14)$$

где  $\sigma_T$ ,  $\tau_T$  – пределы текучести материала вала (см. прил., табл. 1).

Коэффициент запаса прочности вала по пределу текучести при совместном действии нормальных и касательных напряжений:

$$S_T = \frac{S_{T\sigma} S_{T\tau}}{\sqrt{S_{T\sigma}^2 + S_{T\tau}^2}}. \quad (2.15)$$

Статическая прочность считается обеспеченной, если  $S_T \geq [S_T]$ , где  $[S_T] = 1,3 \div 2$ .

### 2.5.1. Расчет вала на сопротивление усталости

По завершении конструирования вала выполняют проверочный расчет по коэффициенту запаса усталостной прочности.

Уточненные расчеты на сопротивление усталости отражают влияние разновидности цикла напряжений, механических характеристик материала вала, размеров, формы и состояния поверхности. Шпоночные пазы, резьбы под установочные гайки, отверстия под установочные винты, посадки деталей с натягом, а также канавки и резкие изменения сечений вала уменьшают его усталостную прочность. Поэтому, если вал имеет небольшой запас по сопротивлению усталости, следует избегать использования элементов, вызывающих концентрацию напряжений.

Расчет заключается в определении коэффициента запаса прочности, минимально допустимое значение которого принимают в диапазоне  $[S] = 1,5 \div 2,5$  в зависимости от ответственности конструкции и последствий разрушения вала, точности определения нагрузок и напряжений, уровня технологии изготовления и контроля.

Для каждого из намеченных предположительно опасных сечений вала определяют коэффициент запаса прочности  $S$ :

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}} \geq [S], \quad (2.16)$$

где  $S_\sigma, S_\tau$  – коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям, определяемым по формулам:

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1D}}{(\sigma_a + \Psi_{\sigma D} \sigma_m)}; \quad (2.17)$$

$$S_\tau = \frac{\tau_{-1D}}{(\tau_a + \Psi_{\tau D} \tau_m)}, \quad (2.18)$$

где  $\sigma_a, \tau_a$  – амплитудные напряжения циклов;  $\sigma_m, \tau_m$  – средние напряжения циклов;  $\Psi_{\sigma D}, \Psi_{\tau D}$  – коэффициенты влияния асимметрии циклов напряжений.

Нормальные напряжения в сечениях вала при его вращении изменяются по симметричному циклу:  $\sigma_a = \sigma_{\max}, \sigma_m = 0$ , а касательные напряжения – по отнулевому циклу:  $\tau_a = \frac{\tau_K}{2}, \tau_m = \frac{\tau_K}{2}$ .

Тогда

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_a}. \quad (2.19)$$

Амплитудные напряжения циклов в исследуемом сечении вычисляются по формулам:

$$\sigma_a = \frac{10^3 M}{W_x}, \quad \tau_a = \frac{10^3 T}{(2W_K)}, \quad (2.20)$$

где  $M = \sqrt{M_{\text{гор}}^2 + M_{\text{верт}}^2}$  – результирующий изгибающий момент, Н·м;  
 $T$  – крутящий момент в сечении, Н·м;  $W_x$ ,  $W_k$  – моменты сопротивления сечения вала при изгибе и кручении, мм<sup>3</sup>.

Пределы выносливости вала в исследуемом сечении:

$$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}, \quad (2.21)$$

где  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  – пределы выносливости стандартных образцов при симметричном цикле изгиба и кручения (см. прил., табл. 1);  $K_{\sigma D}$ ,  $K_{\tau D}$  – коэффициенты снижения предела выносливости.

Значения коэффициентов  $K_{\sigma D}$  и  $K_{\tau D}$  определяют из зависимостей:

$$K_{\sigma D} = \frac{\left( \frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right)}{K_v}; \quad (2.22)$$

$$K_{\tau D} = \frac{\left( \frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right)}{K_v}, \quad (2.23)$$

где  $K_{\sigma}$ ,  $K_{\tau}$  – эффективные коэффициенты концентрации напряжений (прил., табл. 6, 7, 8);  $K_{d\sigma}$ ,  $K_{d\tau}$  – коэффициенты влияния абсолютных размеров поперечного сечения (прил., табл. 9);  $K_{F\sigma}$ ,  $K_{F\tau}$  – коэффициенты влияния качества поверхности (прил., табл. 10);  $K_v$  – коэффициент влияния поверхностного упрочнения (прил., табл. 11).

Значения коэффициентов  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$  берут из таблиц: для ступенчатого перехода с галтелью – из прил., табл. 6; для шпоночного паза – из прил., табл. 7; для шлицевых и резьбовых участков валов – из прил., табл. 8. Для оценки концентрации напряжений в местах установки на валу деталей с натягом используют отношения  $\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}}$  и  $\frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}}$  (прил., табл. 12).

При наличии в исследуемом сечении нескольких источников концентрации напряжений учитывают наиболее опасный из них (с наибольшим значением  $K_{d\sigma}$  или  $K_{dt}$ ).

Коэффициент влияния асимметрии цикла для рассматриваемого сечения вала:

$$\Psi_{\tau D} = \frac{\Psi_{\tau}}{K_{\tau D}},$$

где  $\Psi_{\tau}$  – коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла напряжений (см. прил., табл. 1).

### 2.5.2. Проектный расчет вала

Используя заданные внешние нагрузки и расчетные длины всех участков вала, найденные при эскизном проектировании, строят эпюры изгибающих и крутящего моментов, определяют результирующий изгибающий момент  $M = \sqrt{M_{\text{гор}}^2 + M_{\text{верт}}^2}$  и эквивалентный момент  $M_{\text{экв}} = \sqrt{M^2 + T^2}$  в опасном сечении вала.

Выбирают материал для вала и определяют допускаемое напряжение

$$[\sigma] = (0,05 \div 0,08)\sigma_{\text{в}},$$

где  $\sigma_{\text{в}}$  – предел прочности материала вала (см. прил., табл. 1), МПа.

Если не исключен вариант конструкции вала в виде шестерни, тогда вал будет изготовлен из того же материала, что и шестерня. Предполагаемый диаметр вала в сечении под шестерней можно найти по формуле ( $d$  в мм)

$$d \geq 10^3 \sqrt{\frac{M_{\text{экв}}}{0,1[\sigma]}}. \quad (2.24)$$

Затем проверяют соотношения диаметров  $\frac{d_{f1}}{d}$ . Если  $\frac{d_{f1}}{d} \leq 1,6$ , то принимают к конструированию совместную сложную деталь в виде вала-шестерни. Если  $\frac{d_{f1}}{d} > 1,6$ , то вал и шестерня могут быть сконструированы как две отдельные детали из соответствующих материалов.

Далее разрабатывают конструкцию вала, либо вала-шестерни с установлением всех размеров сечений, участков и конструктивных элементов, после чего выполняют проверочный расчет предполагаемых опасных сечений по коэффициенту запаса прочности, по пределу текучести и по коэффициенту запаса усталостной прочности. При необходимости делают проверку вала по условию жесткости.

## 2.6. Расчёт валов на жёсткость

Упругие перемещения валов оказывают неблагоприятное влияние на работу связанных с ними соединений (шлицевых, прессовых и др.), подшипников, зубчатых колес и других деталей. Они увеличивают концентрацию напряжений и износ деталей, снижают сопротивление усталости деталей и соединений, понижают точность механизмов и т. п.

Большие угловые перемещения сечений вала от изгиба могут привести к выходу из строя конструкций опор вследствие заклинивания подшипников.

При проектировании валов нужно проверять прогибы и углы поворота сечений по условиям жесткости.

Для вычисления перемещений сечений валов можно воспользоваться энергетическим методом (при использовании теоремы Кастилиано) или методом начальных параметров.

Допускаемые значения прогибов и углов поворота сечений зависят от требований, предъявляемых к конструкции, и от особенностей ее работы (прил., табл. 13).

Максимальный прогиб валов, несущих зубчатые колеса, не должен превышать  $0,0002 \div 0,0003$  от длины пролета вала (расстояние между опорами), а допускаемый прогиб под колесами составляет:

- $[f] = 0,01m$  – для цилиндрических передач;
- $[f] = 0,005m$  – для конических, гипоидных и глобоидных передач.

Здесь  $m$  – модуль зацепления.

Если потребуется проверить вал из условия жесткости при кручении, то следует воспользоваться значением допускаемого угла закручивания, которое тоже зависит от требований и условий работы конструкции и находится в пределах  $0,2 \div 1^\circ$  на метр длины вала.

Наклон сечения вала на опорах приводит к относительному перекосу внутреннего и наружного колец подшипников и, как следствие, к уменьшению их долговечности. Исходя из условия уменьшения долговечности подшипника не более чем на 20 % и учитывая возможные погрешности расположения поверхностей деталей подшипниковых узлов, в качестве допускаемых принимают следующие значения углов наклона сечений вала:  $0,00176$  рад – для радиальных и радиально-упорных шариковых подшипников;  $0,00051$  рад – для радиальных с короткими цилиндрическими роликами;  $0,000334$  рад – для роликовых конических.

Вследствие упругих деформаций валов сопряженные зубчатые колеса перекашиваются одно относительно другого, что приводит к неравномерному распределению нагрузки по длине зуба. При этом основное влияние оказывает угол наклона сечения вала, вызванный действием окружных сил  $F_t$ .

Основными факторами, определяющими допускаемый перекося зубчатых колес, является коэффициент ширины зуба  $\psi_{ba}$  и средняя твердость HB тихоходного колеса зубчатой пары. В расчетах можно принять при термической обработке: при цементации HB = 600; при закалке током высокой частоты (ТВЧ) HB = 400; при улучшении HB = 270.

С увеличением  $\psi_{ba}$  и HB уменьшаются размеры передачи (межосевое расстояние и пропорциональные ему диаметры колес), возрастают силы в зацеплении и, как следствие, значительно увеличиваются углы наклона сечений вала. Нормы перекося (в рад), например, для валов одноступенчатого редуктора можно определить из зависимости:

$$\theta = \frac{0,1 \cdot 10^3 \psi_{ba} \text{HB}}{600} \quad (2.25)$$

Для достижения требуемой жесткости вала при установке на нем зубчатых колес высокой твердости (НВ = 400÷600) необходимо значительно увеличить его диаметр по сравнению с диаметром вала для улучшенных колес (НВ = 270). На практике возможное увеличение диаметра для твердых передач ограничено из-за необходимости нарезания на валу зубьев шестерни. Исходя из фактически возможного увеличения диаметра вала в 1,1÷1,2 раз, устанавливают нормы перекося, в соответствии с которыми широким колесам при высокой твердости зубьев приходится назначать большие допускаемые углы наклона сечений вала. Так, например, приняв  $\Psi_{ba} = 0,315$  получим: если НВ = 270, то  $\theta = 0,000016$  рад; если НВ = 400, то  $\theta = 0,000023$  рад; если НВ = 600, то  $\theta = 0,000035$  рад.

В прил., табл. 14 и 15 приведены формулы для вычисления углов поворота и прогибов характерных сечений вала постоянного сечения от сил в зацеплениях и консольной нагрузки.

Перемещения в каждой плоскости определяют (согласно принципу независимости действия сил) алгебраическим суммированием перемещений от каждой силы.

Для проверки вала на жесткость по углу закручивания при  $\theta = (4,4\div 8,8) 10^3$  рад или  $0,25\div 0,5^\circ$  на один метр длины вала пользуются формулой:

$$d \geq (105 \div 125) \sqrt[4]{\frac{N}{n}}, \quad (2.26)$$

где  $d$  – диаметр сечения, мм;  $N$  – мощность, кВт;  $n$  – частота вращения вала, об/мин.

В тех случаях, когда фактическая деформация превышает допустимую, необходимо увеличить диаметр сечения вала, используя формулу:

$$d = d_0 \sqrt[4]{\frac{\Delta_0}{[\Delta_0]}}, \quad (2.27)$$

где  $[\Delta_0]$  – допускаемая деформация (допускаемый прогиб либо допускаемое угловое перемещение сечения).

За счет применения более качественных сталей и термообработки уменьшить деформацию до допустимого значения

невозможно, так как модуль упругости мало зависит от марки стали и термообработки. В качестве примера рассмотрим расчет на жесткость червячного вала. Этот расчет выполняют с целью предотвращения недопустимой концентрации нагрузки в зоне контакта витков червяка с зубьями червячного колеса.

Прогиб  $f$  червячного вала от результирующей радиальной нагрузки в среднем сечении между опорами червяка и от действия радиальной консольной нагрузки (согласно ГОСТ 16162-85Е) приводит к увеличению межосевого расстояния и увеличению радиуса начального цилиндра червяка. Угол наклона витков на деформированном червяке уже не равен углу наклона зубьев червячного колеса, правильность зацепления нарушена, а это вызывает концентрацию нагрузки в зацеплении. По этой причине ограничивают прогиб червяка  $f$  в среднем сечении допустимыми значениями  $[f] = (0,005 \div 0,008) m$ :

$$f = \frac{\sqrt{F_{t1}^2 + F_{r1}^2 \cdot l^3 + 3F_k \cdot l^2 \cdot l_0^B}}{48EJ_\phi} \leq [f], \quad (2.28)$$

где  $l$  – расстояние между опорами червячного вала;  $E$  – модуль упругости материала червяка, МПа;  $J_\phi$  – фиктивный момент инерции, эквивалентный моменту инерции цилиндрического стержня с одинаковой деформацией:

$$J_\phi = \frac{\pi d_{f1}^4}{64} \left( 0,36 + 0,64 \frac{d_{a1}}{d_{f1}} \right). \quad (2.29)$$

## 2.7. Конструктивные элементы прямых валов

Валы являются необходимыми элементами всевозможных машин. Поэтому различия в размерах, конструктивных формах и условиях работы весьма разнообразны.

Форма вала зависит от способа соединения с валом насаженных на него деталей, от типа и размеров подшипников. Имеющееся в наличии оборудование для изготовления вала также может определять его форму. Например, вал с нарезанными зубьями невозможно изготовить, если он не помещается на зубофрезерном станке. В таких случаях его приходится выполнять с насадными зубчатыми колесами.

Весьма часто приходится менять форму вала в зависимости от условий сборки. Например, отдельная сборка зубчатого колеса и подшипников требует более сложной формы вала, чем совместная сборка.

Валы, как правило, выполняются ступенчатой формы. К этому приводят, с одной стороны, условия сборки, когда уступы между ступенями вала используются в качестве упоров для деталей, сидящих на валу. С другой стороны, валы ступенчатой формы применяются тогда, когда необходимо обеспечить достаточную прочность при минимальном весе; в этом случае валам стремятся придать форму, наиболее близкую к форме тела равного сопротивления изгибу.

Диаметры сечений валов, на которые должны насаживаться детали, выбирают из нормального ряда диаметров по ГОСТ 6636-60. Это нужно для того, чтобы вал и насаживаемую на него деталь можно было изготовить независимо друг от друга (в разных цехах завода и даже на разных заводах), причем с полной уверенностью в том, что соединение получится требуемой плотности.

Соединения вала с насаженными на него деталями, обеспечивающие передачу крутящего момента и осевых сил, осуществляется различными способами в зависимости от величины и характера нагрузок на вал. Наиболее распространены шпоночные и шлицевые соединения. В менее ответственных случаях применяют штифты, винты, клеммовые соединения, посадки с натягом.

Чтобы деталь могла воспринимать осевые нагрузки, не смещаясь вдоль вала, применяют или уступы на валу, или конусную посадку. В отдельных случаях применяют упор деталей в округленный переход (галтель), а также штифтовые, винтовые, клеммовые соединения.

При конструировании валов, кроме обеспечения прочности, удобства сборки и других основных требований, необходимо максимально упрощать технологию изготовления валов и деталей, соединяемых с ними.

Таким образом, приступая к конструированию вала, необходимо выяснить, какие детали будут насажены на него, какой тип опор является наиболее целесообразным для данного вала, какие нагрузки будут восприниматься деталями на валу. Необходимо также представить себе порядок сборки на валу непосредственно связанных

с ним деталей, а также сборки всего узла и, наконец, уточнить условия изготовления вала, т. е. предполагаемые средства производства.

На валы обычно насаживают зубчатые колеса, шкивы, блоки, маховики, звездочки, барабаны, муфты, кулачки, внутренние кольца подшипников качения, распорные или дистанционные втулки, ходовые колеса, а также различные корпусные и специальные детали.

Способы соединения вала с деталями различны. Для соединений, воспринимающих переменные по направлению нагрузки, в особенности нагрузки с толчками и ударами, применяют соединения с натягом в сочетании со шпонками.

Избегать назначения посадок с натягом нужно в тех случаях, когда деталь должна время от времени заменяться (колеса открытых зубчатых передач, цепные звездочки и др.), так как при повторном насаживании детали на вал поверхность вала в лучшем случае калибруется и последующее соединение с валом сменной детали ослабляется; в худшем же случае на поверхности вала появляется задир.

Если заменяемая деталь передает на вал ударные и меняющиеся по направлению нагрузки, то надежность соединения можно обеспечить не только с помощью натяга, но и с помощью удлинения ступицы, затянутых конусных посадок и др.

В случаях действия на валы умеренных толчков (подъемно-транспортные машины, редукторы, двигатели внутреннего сгорания и т. п.) применяют шлицевые и шпоночные соединения.

Шлицевые соединения применяют в случаях значительных нагрузок, когда шпоночные соединения становятся неприемлемыми из-за недопустимо высоких напряжений смятия. Кроме того, шлицевые соединения применяют при повышенной точности центрирования, а также при необходимости обеспечения осевых перемещений деталей на валу.

Штифты и винты для соединения деталей с валами применяют редко – только для малоответственных и слабо напряженных валов.

Для подшипников качения на валах, как правило, делаются заплечики. При этом минимальная высота заплечиков должна соответствовать размерам скруглений на кольцах подшипников.

Выносливость вала (прочность при переменных напряжениях) в значительной степени зависит от конструктивных форм вала в местах отверстий, пазов, шлицев и др. Эта зависимость объясняется тем,

что во всех таких местах возникает концентрация напряжений при изгибе и кручении.

Для повышения усталостной прочности валов применяются различные приемы конструктивного и технологического упрочнения.

Улучшение конструкции заключается в применении рациональной формы, обеспечивающей снижение концентрации напряжений в местах перехода от одной ступени вала к другой. Переходы от одной ступени вала к другой следует делать с возможно большим радиусом галтели, что приводит к уменьшению местных напряжений. В тех случаях, когда по тем или иным конструктивным соображениям приходится назначать малые радиусы галтелей, рекомендуется делать поднутрение вала в уступ или в уступ и в вал, или ставить дистанционное кольцо.

Крепление деталей на валу с помощью стопорных винтов, установочных гаек, упругих (врезных) колец и т.п. увеличивает концентрацию напряжений, а следовательно, снижает выносливость вала. Поэтому следует избегать таких способов крепления, заменяя их осевым креплением. Шпоночные пазы являются концентраторами напряжений. В случае выполнения паза пальцевой фрезой коэффициент концентрации напряжений при изгибе значительно выше, чем при выполнении паза дисковой фрезой. Шлицы, выполненные с закруглением в месте перехода от выступа к впадине, дают значительно меньший коэффициент концентрации, чем шлицы с резким переходом.

Концентратором напряжений является и давление в местах установки деталей с натягом (зубчатых колес, подшипников качения).

С увеличением шероховатости поверхности вала усталостная прочность его понижается.

Поверхностное упрочнение вала (цементация, поверхностная закалка ТВЧ, деформационное упрочнение накаткой роликами и дробеструйной обработкой) значительно повышает предел выносливости.

## **2.8. Конструирование валов**

На этапе эскизного проектирования ориентировочно была намечена конструкция валов, определены диаметры отдельных участков. Теперь следует уточнить эти размеры, согласовать их с де-

талями, устанавливаемыми на вал, учесть вид и расположение опор, конструкцию уплотнения, технологию изготовления.

Перед обработкой конструкции вала должно быть решены такие важные вопросы, как способ передачи крутящего момента в соединении вал–ступица и способ крепления деталей на валу от осевого перемещения.

### *Концевые участки валов*

Входной и выходной валы редукторов, коробок передач имеют цилиндрические или конические концевые участки для установки полу муфт (шкивов, звездочек).

### *Цилиндрические концы валов*

Диаметры концов входного и выходного валов согласуют с диаметрами отверстий устанавливаемых на них деталей (шкива, звездочки, полу муфты). Высоту заплечика  $t$  при цилиндрической или конической форме конца вала, координату  $r$  фаски подшипника и размер  $f$  фаски колеса на промежуточном валу принимают в зависимости от диаметра  $d$  посадочной поверхности (прил., табл. 16).

Переходной участок вала между двумя ступенями (рис. 29) разных диаметров выполняют галтелью радиуса  $r$ , острые кромки притупляют фаской «с». Размеры  $r$  и  $s$  для цилиндрических валов принимают по прил., табл. 17.

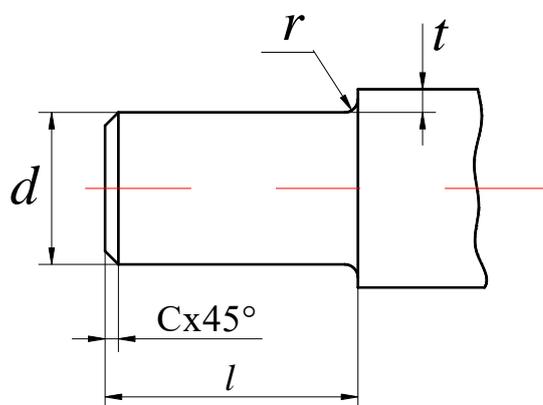


Рис. 29. Переход между двумя ступенями вала

Деталь, устанавливаемую на цилиндрическом конце вала, доводят до упора в заплечик высотой  $t$  (рис. 29). Высота заплечика  $t \geq 2f$ , где  $f$  – размер фаски детали, который принимают в зависимости от радиуса галтели  $r$  по прил., табл. 18.

В валах, диаметры которых определены из условия жесткости (валы редукторов, коробок передач), а также на концевых участках валов, на которых изгибающие моменты невелики, выполняют канавки для выхода шлифовального круга (рис. 30). Размеры канавок приведены в прил., табл. 19.

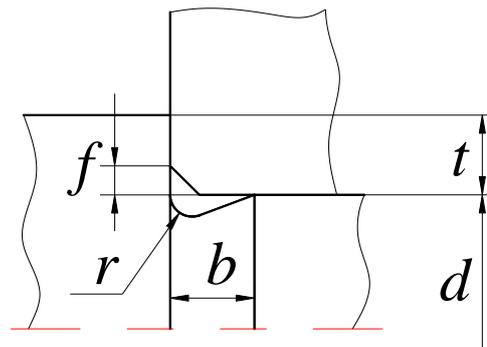


Рис. 30. Переход для выхода шлифовального круга

Соседним с концевым является участок вала для установки подшипника. Поэтому высота  $t$  заплечика концевой участка должна быть согласована с посадочным диаметром подшипника без съема призматической шпонки.

Диаметр вала в месте установки подшипника (рис. 31) ориентировочно будет

$$d_{\text{п}} \geq d + 2t_2 + 1,$$

где  $t_2$  – глубина шпоночного паза в ступице детали.

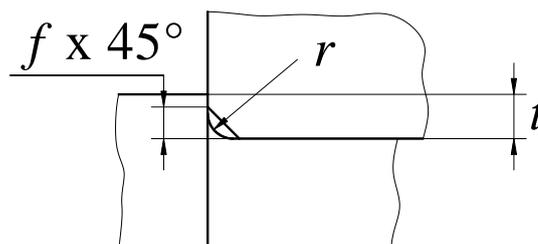


Рис. 31. Переход в месте установки подшипника

Полученное значение округляют в большую сторону до ближайшего стандартного для подшипника размера. Выполнение условия установки подшипника без съема шпонки приводит, как правило, к значительной разности диаметров  $d_{\text{п}}$  и  $d_{\text{к}}$ . В тех случаях, когда расстояние  $l_1$  (рис. 32) больше ширины  $B$  внутреннего кольца подшипника, отличие в размерах  $d_{\text{п}}$  и  $d_{\text{к}}$  можно уменьшить за счет обхода шпонки при установке подшипника.

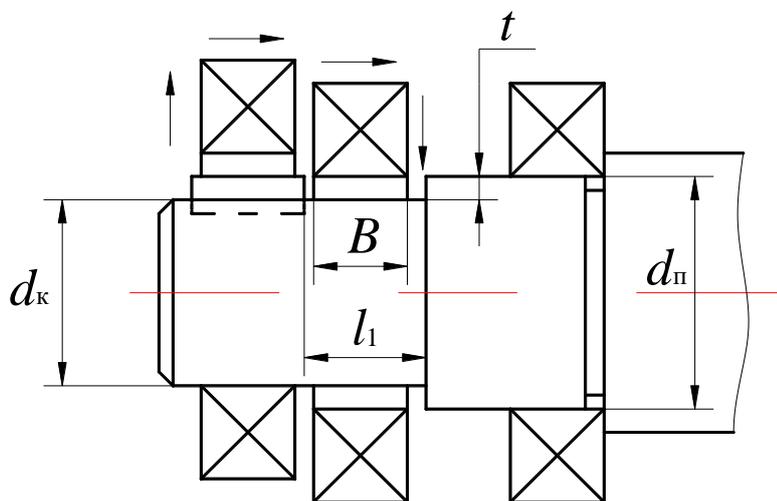


Рис. 32. Схема установки подшипников на вал

### 2.8.1. Шероховатость поверхностей валов

При любом методе обработки поверхностей деталей они имеют некоторую шероховатость. О шероховатости или о чистоте поверхности судят по высоте микронеровностей. На чертежах шероховатость поверхностей обозначают специальными знаками, чтобы при обработке той или иной поверхности рабочий сразу видел и необходимый размер, и необходимую шероховатость. От величины микронеровностей зависят износ трущихся поверхностей, плотность стыков, стабильность затяжки болтовых соединений, прочность прессовых посадок, коррозионная стойкость, внешний вид изделия, удобство обслуживания и т. д.

Существует определенная взаимосвязь между точностью размеров и шероховатостью поверхностей. Методы обработки, применяемые для достижения высокой точности, обеспечивают малую шероховатость и наоборот. На практике также встречаются

случаи, когда при невысокой точности требуется малая шероховатость.

При назначении чистоты обработки руководствуются конструктивными и технологическими условиями. В прил., табл. 20 приведены числовые значения параметра шероховатости для валов.

### 2.8.2. Обозначение термической обработки

Установлены следующие правила нанесения на чертежах указаний о термической и химикотермической обработке, обеспечивающей получение необходимых свойств материала детали.

Если всю деталь подвергают термообработке одного вида, то в технических требованиях чертежа приводят требуемые показатели свойств материала записью типа:

- 235...265 НВ или  $250 \div 15$  НВ;
- 44...50 HRC или  $47 \pm 3$  HRC;
- ТВЧ  $h$  1,6...2,0 мм, 50...56 HRC или ТВЧ  $h$   $1,8 \pm 0,2$  мм,  $53 \pm 3$  HRC (буквой  $h$  обозначена глубина обработки);
- цементировать  $h$  0,8...1,2 мм, 56...62 HRC или цементировать  $h$  1,0...0,2 мм,  $59 \pm 3$  HRC.

Если термообработке подвергают отдельный участок детали, то его обводят на чертеже утолщённой штрихпунктирной линией, а на полке выносной линии приводят показатели свойств материала (рис. 33).

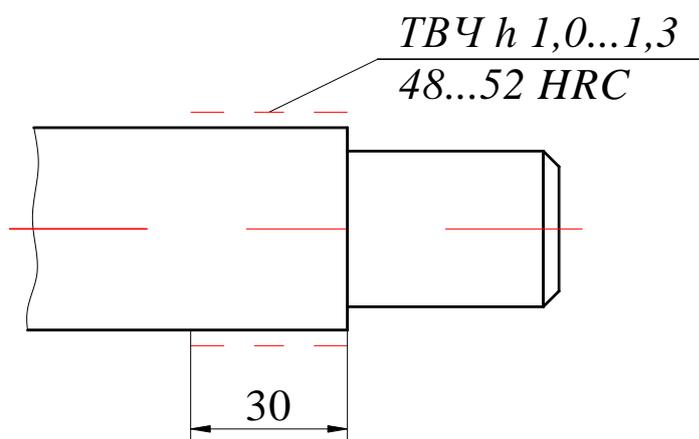


Рис.33. Обозначение термообработки на участке вала

### 2.8.3. Допуски формы и допуски расположения поверхностей

Вал в работающем узле вращается в подшипниках качения, поэтому рабочей осью является общая ось, обозначенная на рис. 34 и рис. 35 буквами АБ. Общая ось – это прямая, проходящая через точки пересечения каждой из осей двух посадочных поверхностей для подшипников качения со средними поперечными сечениями этих поверхностей.

Вследствие неизбежных погрешностей общая ось не совпадает с осью вращения вала при его изготовлении.

На чертеже вала задают необходимые требования точности изготовления отдельных его элементов.

В прил., табл. 21 в соответствии с позициями, обозначенными на рис. 34 и рис. 35, приведены указания по определению числовых значений допусков формы и расположения поверхностей.

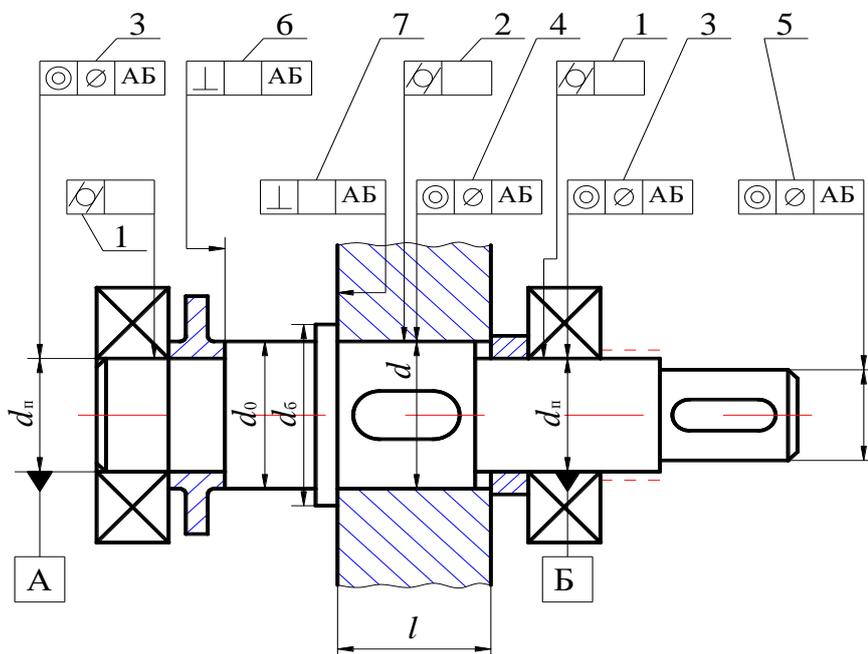


Рис. 34. Схема определения допусков формы и расположения поверхностей валов:  
1–7 – номера позиций

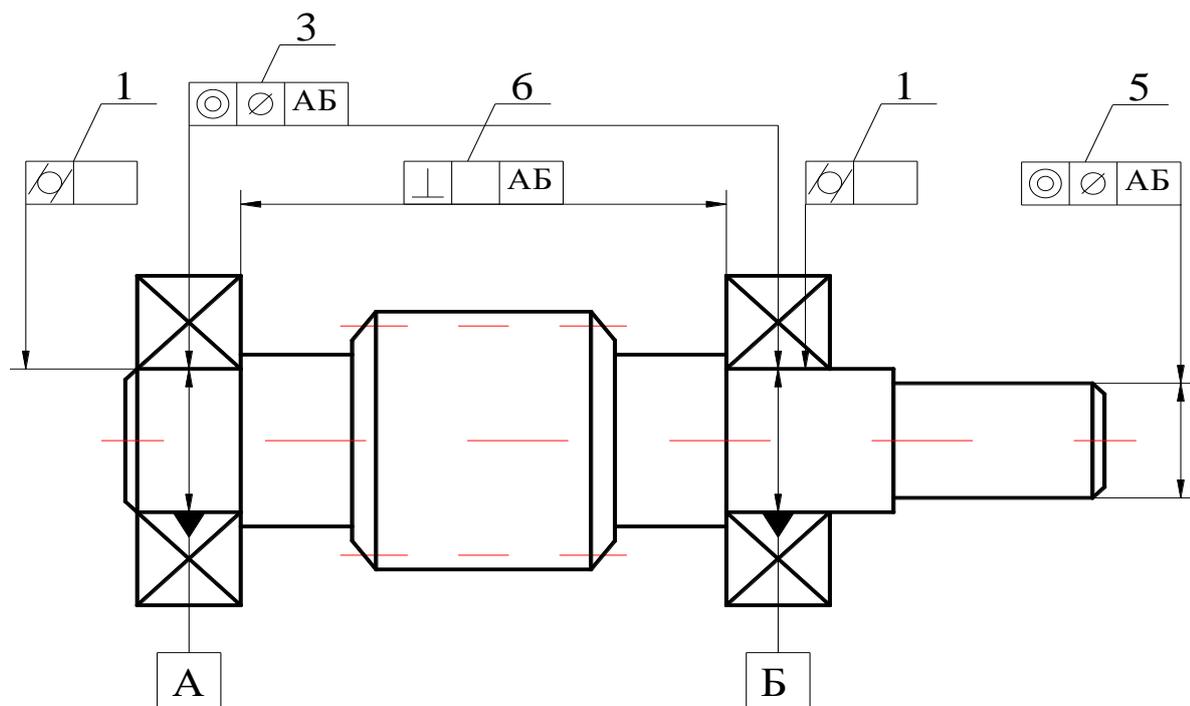


Рис. 35. Условные обозначения баз, допусков формы и расположения червяка:  
1, 3, 5, 6 – номера позиций

Назначение каждого из допусков формы или расположения следующее:

– допуск цилиндричности (поз. 1) посадочных поверхностей для подшипников качения задают, чтобы ограничить отклонения геометрической формы этих поверхностей и тем самым ограничить отклонения геометрической формы дорожек качения колец подшипников (по ГОСТ 3325-85);

– допуск перпендикулярности (поз. 7) базового торца вала задают только при установке на вал узких зубчатых колес, у которых отношение длины  $l$  посадочного отверстия к его диаметру  $d$  менее 0,7. Допуск задают, чтобы обеспечить выполнение норм контакта зубьев в передаче. При отношении  $\frac{l}{d} \geq 0,7$  допуск перпендикулярности (поз. 7) не задают.

Приведены таблицы, рекомендуемые для использования при назначении допусков формы и расположения поверхностей валов.

При конструировании червячного вала (рис. 35) необходимо назначить следующие допуски формы и расположения:

– допуск цилиндричности посадочных мест под подшипники (поз. 1);

- допуск соосности посадочных поверхностей для подшипников качения относительно их общей оси (поз. 3);
- допуск соосности посадочной поверхности для полумуфты, либо шкива, либо звездочки (поз. 5);
- допуск перпендикулярности базовых торцов вала для уменьшения перекоса внутренних колец подшипников по отношению к наружным (поз. 6).

*Примечание:*  $T_{\Theta В}$  и  $T_{\Theta К}$  – допуски соосности посадочной поверхности вала и корпуса длиной  $B = 10$  мм в диаметральном выражении (при длине  $B_1$  посадочного места табличное значение следует умножить на  $0,1 B_1$ );  $\theta$  – допустимый угол взаимного перекоса колец подшипника, вызываемого деформациями вала и корпуса в работающем узле.

## 2.9. Примеры расчёта и конструирования валов червячно-цилиндрического редуктора

В качестве примера рассмотрен червячно-цилиндрический редуктор (рис. 36, 37), для которого предварительно был выполнен расчет червячной и косозубой цилиндрической зубчатой пары.

Данные для расчета приведены в прил., табл. 27

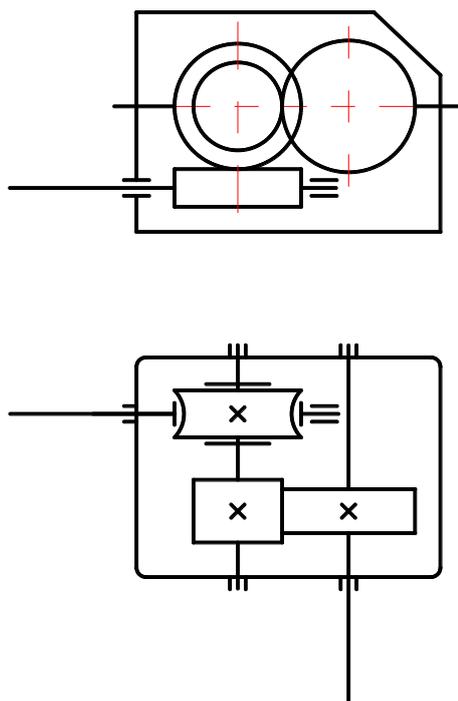


Рис. 36. Схема червячно-цилиндрического редуктора

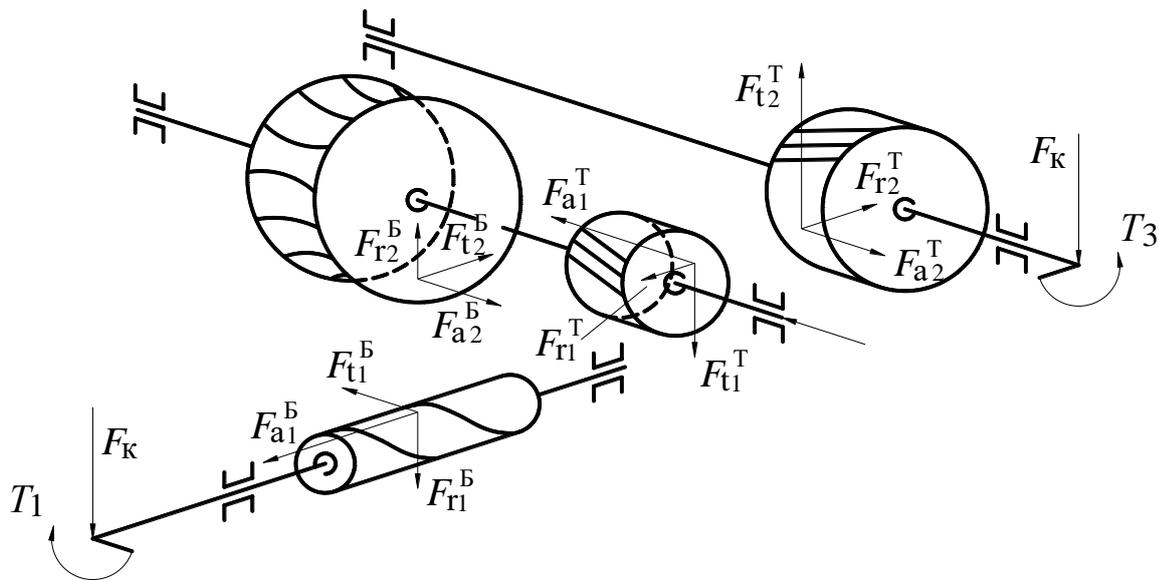


Рис. 37. Схема сил в зацеплениях

### 2.9.1. Эскизное проектирование редуктора (I этап)

Вначале определяем расчетную длину консольных участков быстроходного (червячного) и тихоходного валов (см. разд. 2.3.2). Для этого необходимо найти предварительные значения диаметров сечений консольных участков валов. Для быстроходного вала:

$$d_K^B \geq (7 \div 8) \sqrt[3]{T_1} = (7 \div 8) \sqrt[3]{26} = (20,73 \div 23,70) \text{ мм.}$$

Принимаем стандартное значение, согласуя его с диаметром вала выбранного электродвигателя:  $d_{эл} = 28$  мм;  $d_K^B \geq (0,8 \div 1,0) d_{эл}$ . Можно принять  $d_K^B = 28$  мм, которому согласно ГОСТ 12080-66 соответствует длина ступени вала  $l_{ст}^B = 60(42)$  мм. Длина ступени  $l_{ст}^B = 60$  мм, поскольку именно она соответствует длине ступицы выбранной муфты МУВП-28 для соединения червячного вала с валом электродвигателя. Тогда, используя схему (рис. 23), можно найти расчетную длину консольного участка вала:

$$l_0^B = \frac{l_{ст}^B}{2} + \Delta + B_{п1} = \frac{60}{2} + 30 + 18 = 78 \text{ мм},$$

где  $B_{п1}$  – ширина подшипника (прил., табл. 1);  $\Delta$  – конструктивный размер, зависящий от конструкции крышки подшипника;  $\Delta = 20 \div 30$  мм.

Принимаем  $\Delta = 30$  мм.

Для того, чтобы выбрать диаметр сечения вала под подшипником, нужно подобрать шпонку. По табл. 19.11 [5] принимаем шпонку призматическую  $b \times h \times l = 8 \times 7 \times 50$  ГОСТ 23360-78;  $t_1 = 4$  мм;  $t_2 = 3,3$  мм. Тогда диаметр сечения вала под подшипником:

$$d_{п}^B \geq d_{к}^B + 2t_2 = 28 + 2 \cdot 3,3 = 34,6 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d_{п}^B = 35$  мм, выбирая предварительно роликовый конический подшипник средней серии № 7307А ГОСТ 27365-87;  $d = 35$  мм;  $D = 80$  мм;  $T = 23$  мм;  $C = 18$  мм;  $B = 21$  мм;  $C_r = 68,2$  кН;  $C_{0r} = 59$  кН;  $e = 0,31$ .

На второй опоре устанавливаем в точности такой же подшипник.

При сборке червяк устанавливают в корпусе через отверстие под подшипник. Наружный диаметр червяка должен быть на  $1 \div 2$  мм меньше, чем наружный диаметр подшипника. В нашем примере этот зазор составляет  $D_{п}^B - d_{a1}^B = 80 - 72 = 8$  мм, т. е. больше, чем требуется. Это позволяет сконструировать подшипниковые узлы червячного вала без использования стаканов.

Для определения расчетной длины остальных участков вала составляют в масштабе М 1:1 чертеж червячной пары (рис. 38).

Просвет между зубьями червячного колеса и внутренней поверхностью корпуса редуктора можно найти из соотношения:

$$a \cong \sqrt[3]{L} + 3 = \sqrt[3]{330} + 3 = 9,9 \text{ мм},$$

где  $L$  – расстояние между внешними поверхностями деталей передачи, мм.

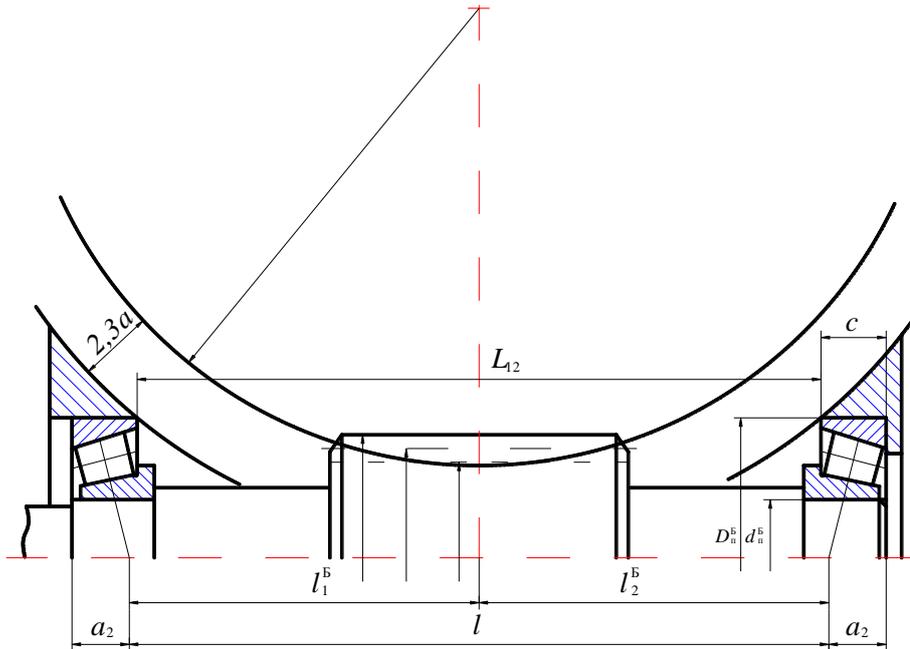


Рис.38. Схема червячного вала

$$L = a_w + \frac{d_{a1}^B}{2} + \frac{d_{cm2}^B}{2} = 160 + \frac{72}{2} + \frac{268}{2} = 330 \text{ мм.}$$

Принимаем  $a = 10$  мм.

Радиусом  $R = \frac{d_{ст2}^B}{2} + 2,3a = 134 + 23 = 157$  мм проводим дугу окружности.

От продольной оси червяка откладываем в сторону к центру червячного колеса расстояние  $\frac{D_{п}^B}{2} = \frac{80}{2} = 40$  мм и проводим через полученную точку прямую параллельно оси червяка, которая пересекается с проведенной дугой в двух точках – 1 и 2.

Целью построения этого чертежа является нахождение длины отрезка прямой между точками 1 и 2 –  $L_{12}$ . Длина этого отрезка в масштабе составила в этом примере  $L_{12} = 197$  мм.

Расстояние между наружными кромками подшипников (рис. 38) составит  $l_{п} = L_{12} + 2c = 197 + 2 \cdot 18 = 233$  мм.

Расстояние  $l_1$  между точками приложения радиальных реакций при установке радиально-упорных подшипников по схеме враспор:

$$l = l_{\text{п}} - 2a_2,$$

где

$$a_2 = 0,5 \left[ \frac{T + (d_{\text{п}}^{\text{Б}} + D_{\text{п}}^{\text{Б}})c}{3} \right] = 0,5 \left[ \frac{23 + (35 + 80)0,31}{3} \right] = 17,44 \text{ мм.}$$

Тогда

$$l = 233 - 2 \cdot 17,44 = 198,12 \text{ мм.}$$

Принимаем  $l_1 = 198 \text{ мм.}$

Расчетная длина обоих участков  $l$  червячного вала между опорами одинакова и составляет  $l_1^{\text{Б}} = l_2^{\text{Б}} = \frac{l}{2} = 99 \text{ мм.}$

Аналогично, как и для быстроходного вала, определим расчетную длину консольного участка тихоходного вала (рис. 39):

$$d_{\text{к}}^{\text{T}} \geq (5...6)\sqrt[3]{T_3} = (5...6)\sqrt[3]{716} = (44,72...53,67) \text{ мм.}$$

Принимаем  $l_{\text{к}}^{\text{T}} = 55 \text{ мм; } l_{\text{ст}}^{\text{T}} = 82 \text{ мм.}$

Тогда

$$l_0^{\text{T}} = \frac{l_{\text{ст}}^{\text{T}}}{2} + \Delta + \frac{B_{\text{п3}}}{2} = \frac{82}{2} + 30 + \frac{27}{2} = 84,5 \text{ мм.}$$

Принимаем  $l_0^{\text{T}} = 85 \text{ мм.}$

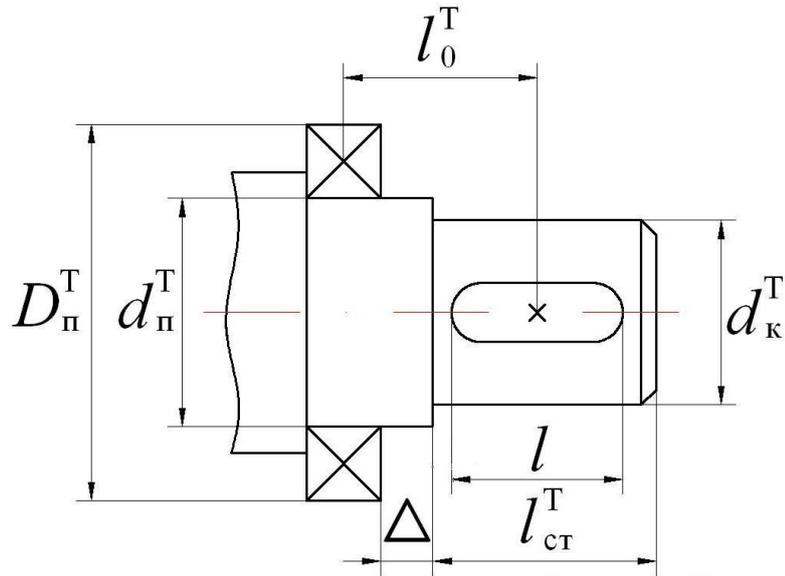


Рис. 39. Схема консольного участка тихоходного вала

Для консольной ступени  $d_{\text{к}}^{\text{T}} = 55$  мм выбираем шпонку призматическую  $b \times h \times l = 16 \times 10 \times 70$  ГОСТ 23360-78;  $t_1 = 6$  мм;  $t_2 = 4,3$  мм.

Диаметр сечения вала под подшипником:

$$d_{\text{п}}^{\text{T}} \geq d_{\text{к}}^{\text{T}} + 2t_2 = 55 + 2 \cdot 4,3 = 63,6 \text{ мм.}$$

Принимаем  $d_{\text{п}}^{\text{T}} = 65$  мм. Предварительно назначаем подшипник роликовый конический средней серии № 7313 А;  $d_{\text{п}}^{\text{T}} = 65$  мм;  $D_{\text{п}}^{\text{T}} = 140$  мм;  $T = 36,5$  мм;  $C = 28$  мм;  $B = 33$  мм;  $C_r = 183$  кН;  $C_{0r} = 150$  кН;  $e = 0,35$ .

Расчетная длина первого участка (рис. 40)

$$l_1^{\text{T}} = \frac{b_1^{\text{T}}}{2} + a + y + B_{\text{п3}} - a_3,$$

где  $B_{\text{п3}} = C$ ;  $y = 10$  мм;

$$a_3 = 0,5 \left[ \frac{T + (d_{\text{п}}^{\text{T}} + D_{\text{п}}^{\text{T}})e}{3} \right] = 0,5 \left[ \frac{36,5 + (65 + 140)0,35}{3} \right] = 30,21 \text{ мм.}$$

Тогда  $l_1^T = \frac{85}{2} + 10 + 10 + 28 - 30,21 = 60,29$  мм. Принимаем, что  $l_1^T = 60$  мм.

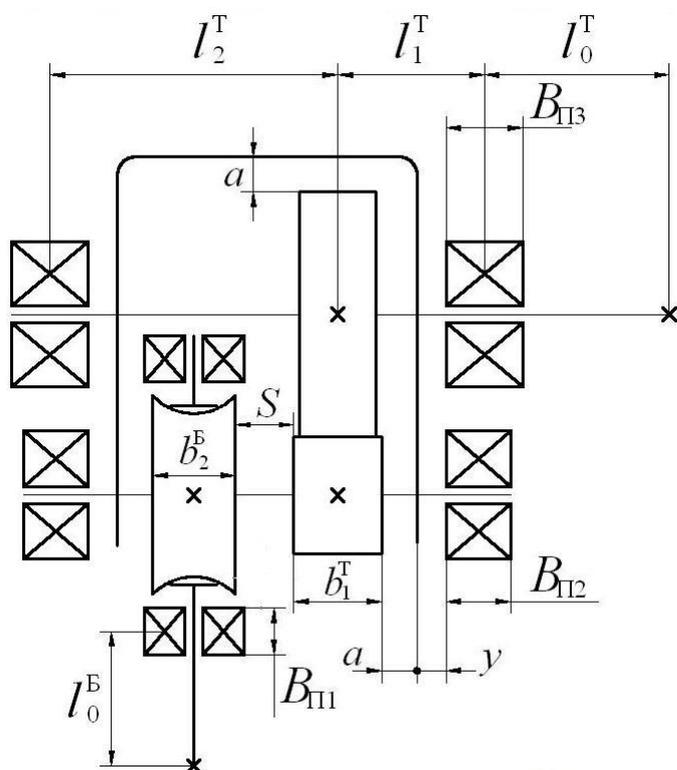


Рис. 40. Расчетная схема редуктора  
(горизонтальный разрез в плоскости разъема крышки и корпуса)

Расчетная длина второго участка (рис. 40):

$$l_2^T = \frac{b_1^T}{2} + S + b_2^B + a + y + \frac{B_{П3}}{2} - a_3 =$$

$$= \frac{85}{2} + 10 + 50 + 10 + 10 + \frac{28}{2} - 30,21 = 106,29 \text{ мм.}$$

Принимаем  $l_2^T = 106$  мм.

Аналогично находим расчетную длину участков промежуточного вала с учетом использования радиально-упорных подшипников (см. рис. 40, 41, 42)

$$l_1^П = \frac{b_2^П}{2} + a + y + \frac{B_{П3}}{2} - a_2.$$

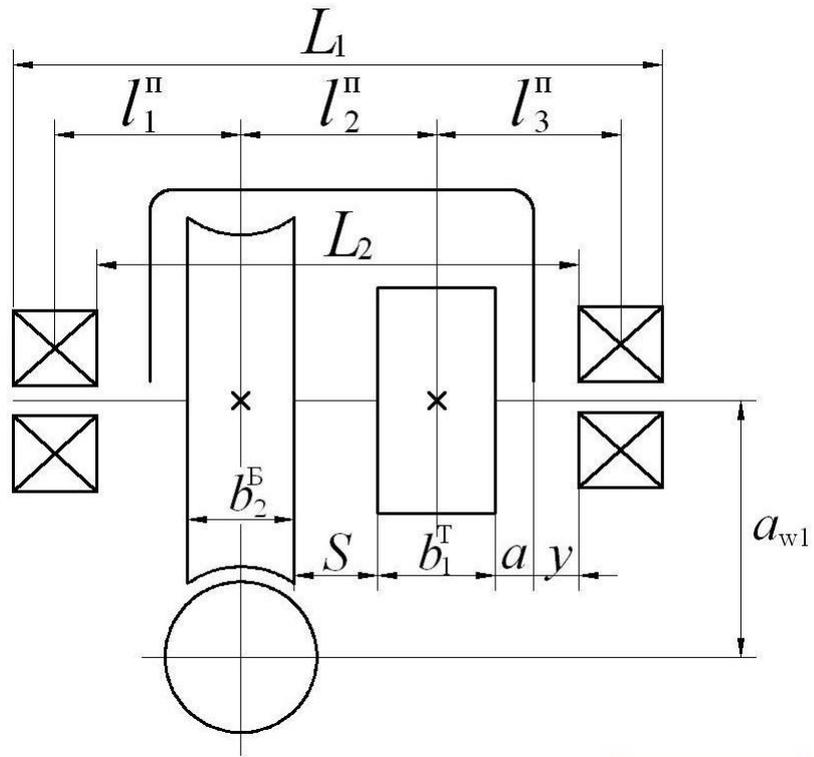


Рис. 41. Схема вертикального разреза редуктора

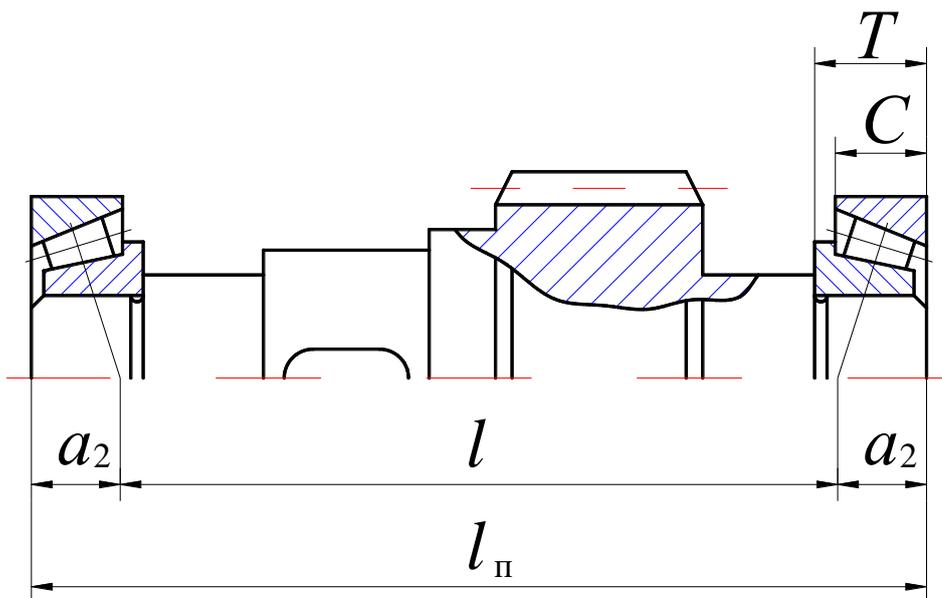


Рис. 42. Схема промежуточного вала с подшипниками

Предварительно намечаем подшипник роликовый конический. Для этого определяем диаметр сечения этого вала под колесом:

$$d_k^{\Pi} \geq (6...7)\sqrt[3]{T_2} = (6...7)\sqrt[3]{330} = (41,45...48,36)\text{мм.}$$

Принимаем под колесом  $d_k^{\Pi} = 50\text{мм}$ , тогда в сечении под подшипником:  $d_{\Pi}^{\Pi} = 45\text{мм}$ .

Этому диаметру соответствует подшипник № 7309А средней серии, имеющий следующие параметры:

$$d_{\Pi}^{\Pi} = 45\text{мм}; \quad D_{\Pi}^{\Pi} = 100\text{мм}; \quad T = 27,5 \text{ мм}; \quad C = 22 \text{ мм}; \quad B = 25 \text{ мм}; \\ C_r = 101 \text{ кН}; \quad C_{0r} = 72 \text{ кН}; \quad e = 0,35.$$

Тогда

$$a_2 = 0,5 \left[ \frac{T + (d_{\Pi}^{\Pi} + D_{\Pi}^{\Pi})e}{3} \right] = 0,5 \left[ \frac{27,5 + (45 + 100)0,35}{3} \right] = 22,21\text{мм.}$$

$$l_1^{\Pi} = \frac{50}{2} + 10 + 10 + \frac{22}{2} - 22,21 = 33,79\text{мм.}$$

Принимаем  $l_1^{\Pi} = 34\text{мм}$ .

$$l_2^{\Pi} = \frac{b_2^{\text{Б}}}{2} + S + \frac{b_1^{\text{Г}}}{2} = \frac{50}{2} + 10 + \frac{85}{2} = 77,5\text{мм.}$$

Принимаем  $l_2^{\Pi} = 78 \text{ мм}$ .

$$l_3^{\Pi} = \frac{b_2^{\text{Б}}}{2} + a + y + \frac{B_{\Pi 2}}{2} = \frac{85}{2} + 10 + 10 + \frac{22}{2} = 73,5\text{мм.}$$

Принимаем  $l_3^{\Pi} = 74\text{мм}$ .

### 2.9.2. Определение опорных реакций

Расчетные схемы для определения опорных реакций приведены на рис 43, 44, 45. Силы, действующие в зацеплениях, содержатся в прил., табл. 27.

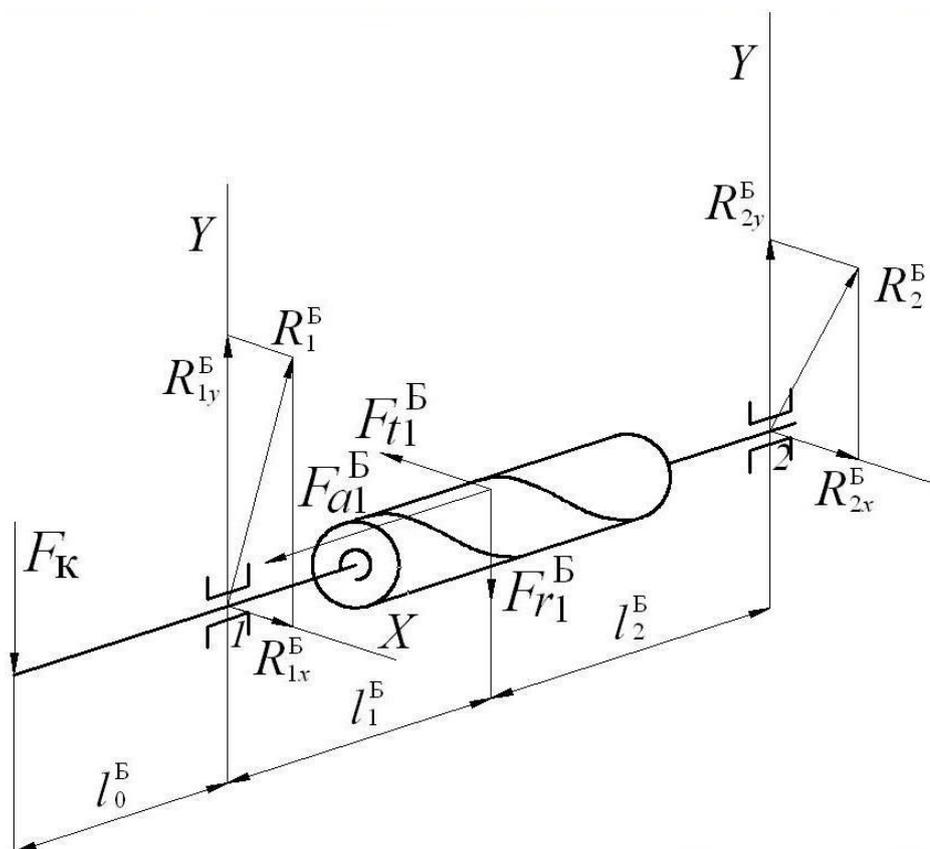


Рис. 43. Расчетная схема червячного вала

Радиальную консольную нагрузку на входном конце червячного вала находим согласно ГОСТ 16162-85Е (прил., табл. 3):

$$F_K^B = 80\sqrt{T_1} = 80\sqrt{26} = 408\text{Н.}$$

На выходном конце тихоходного вала:

$$F_K^T = 250\sqrt{T_3} = 250\sqrt{716} = 6690\text{Н.}$$

### Червячный вал

Из условия равенства нулю моментов сил в опорах 1 и 2 имеем (см. рис. 43):

– в плоскости  $XOZ$ :

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$- F_{t1}^B \cdot l_1^B + R_{2x}^B (l_1^B + l_2^B) = 0;$$

$$R_{2x}^B = \frac{F_{t1}^B \cdot l_1^B}{(l_1^B + l_2^B)} = \frac{804 \cdot 99}{(99 + 99)} = 402 \text{ Н.}$$

– в плоскости  $YOZ$ :

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$R_{2y}^B \cdot (l_1^B + l_2^B) - F_{r1}^B \cdot l_1^B + F_{a1}^B \frac{d_1^B}{2} = 0;$$

$$R_{2y}^B = \frac{\left( F_{r1}^B \cdot l_1^B - F_{a1}^B \frac{d_1^B}{2} \right)}{(l_1^B + l_2^B)} = \frac{\left( 863 \cdot 99 - 2578 \frac{64}{2} \right)}{(99 + 99)} = 14,85 \text{ Н.};$$

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$- R_{1y}^B \cdot (l_1^B + l_2^B) + F_{r1}^B \cdot l_2^B + F_{a1}^B \frac{d_1^B}{2} = 0;$$

$$R_{1y}^B = \frac{\left( F_{r1}^B \cdot l_2^B + F_{a1}^B \frac{d_1^B}{2} \right)}{(l_1^B + l_2^B)} = \frac{\left( 863 \cdot 99 + 2578 \frac{64}{2} \right)}{(99 + 99)} = 848,15 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\Sigma Y = R_{1y}^B - F_{r1}^B - R_{2y}^B = 848,15 - 863 + 14,85 = 0.$$

Результирующие опорные реакции:

$$R_1^B = \sqrt{(R_{1x}^B)^2 + (R_{1y}^B)^2} = \sqrt{(402)^2 + (845,15)^2} = 938,6\text{Н};$$

$$R_2^B = \sqrt{(R_{2x}^B)^2 + (R_{2y}^B)^2} = \sqrt{(402)^2 + (14,85)^2} = 402,27\text{Н}.$$

Опорные реакции от радиальной консольной нагрузки:

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$-F_K^B \cdot l_0^B - R_{2K} \cdot (l_1^B + l_2^B) = 0;$$

$$R_{2K} = \frac{(-F_K^B \cdot l_0^B)}{(l_1^B + l_2^B)} = \frac{(-408 \cdot 78)}{(99 + 99)} = -160,7\text{Н};$$

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$F_K^B (l_0^B + l_1^B + l_2^B) - R_{1K} (l_1^B + l_2^B) = 0;$$

$$R_{1K} = \frac{F_K^B (l_0^B + l_1^B + l_2^B)}{(l_1^B + l_2^B)} = \frac{408(78 + 99 + 99)}{(99 + 99)} = 568,7\text{Н}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_{1K} - F_K^B + R_{2K} = 568,7 - 408 + (-160,7) = 0.$$

Суммарные опорные реакции:

$$R_{1\Sigma} = R_1^B + R_{1K} = 938,6 + 568,7 = 1507,3\text{Н};$$

$$R_{2\Sigma} = R_2^B + |R_{2K}| = 402,27 + 160,7 = 562,97\text{Н}.$$

Промежуточный вал

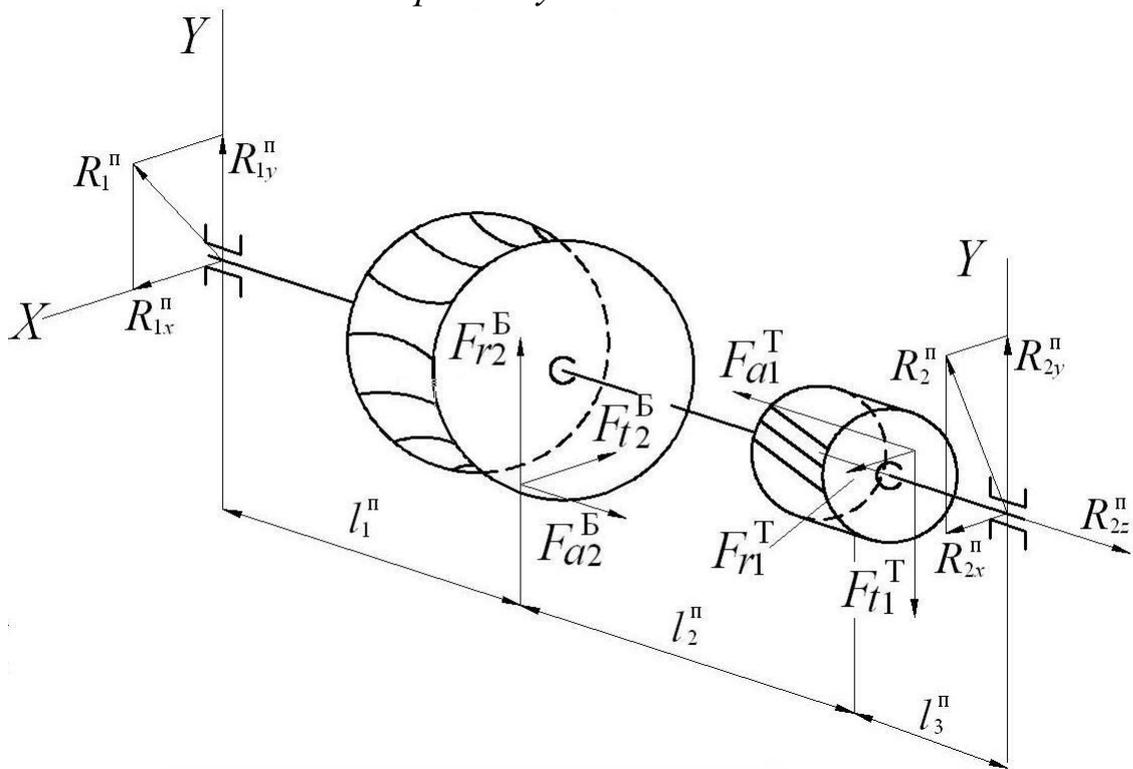


Рис. 44. Расчетная схема промежуточного вала

Используя условия равновесия статики по рис. 44 имеем:  
– в плоскости  $XOZ$ :

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$F_{t2}^B \cdot l_1^{II} - F_{r1}^T (l_1^{II} + l_2^{II}) + F_{a1}^T \frac{d_1^T}{2} - R_{2x}^{II} \cdot (l_1^{II} + l_2^{II} + l_3^{II}) = 0;$$

$$R_{2x}^{II} = \frac{\left[ F_{t2}^B \cdot l_1^{II} - F_{r1}^T (l_1^{II} + l_2^{II}) + F_{a1}^T \frac{d_1^T}{2} \right]}{(l_1^{II} + l_2^{II} + l_3^{II})} =$$

$$= \frac{\left[ 2578 \cdot 34 - 1860 (34 + 78) + 1156 \frac{117}{2} \right]}{(34 + 78 + 74)} = 285 \text{ Н};$$

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$R_{1x}^{\Pi} (l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) - F_{t2}^{\text{Б}} (l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) + F_{r1}^{\text{T}} \cdot l_3^{\Pi} + F_{a1}^{\text{T}} \frac{d_1^{\text{T}}}{2} = 0;$$

$$R_{1x}^{\Pi} = \frac{\left[ F_{t2}^{\text{Б}} (l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) - F_{r1}^{\text{T}} \cdot l_3^{\Pi} - F_{a1}^{\text{T}} \frac{d_1^{\text{T}}}{2} \right]}{(l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi})} =$$

$$= \frac{\left[ 2578 (78 + 74) - 1860 \cdot 74 - 1156 \frac{117}{2} \right]}{(34 + 78 + 74)} = 1003 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\Sigma X = 0;$$

$$-R_{1x}^{\Pi} + F_{t2}^{\text{Б}} - F_{r1}^{\text{T}} - R_{2x}^{\Pi} = -1003 + 2578 - 1860 + 285 = 0.$$

– в плоскости YOZ:

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$-R_{1y}^{\Pi} (l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) - F_{r2}^{\text{Б}} (l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) + F_{a1}^{\text{Б}} \frac{d_2^{\text{T}}}{2} + F_{t1}^{\text{T}} \cdot l_3^{\Pi} = 0;$$

$$R_{1y}^{\Pi} = \frac{\left[ -F_{r2}^{\text{Б}} (l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) + F_{a1}^{\text{Б}} \frac{d_2^{\text{T}}}{2} + F_{t1}^{\text{T}} \cdot l_3^{\Pi} \right]}{(l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi})} =$$

$$= \frac{\left[ -863 (78 + 74) + 804 \frac{117}{2} + 5583 \cdot 74 \right]}{(34 + 78 + 74)} = 2069,2 \text{ Н;}$$

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$R_{2y}^{\Pi} (l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi}) - F_{t1}^T (l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi}) + F_{r1}^B \cdot l_1^{\Pi} + F_{a2}^B \frac{d_2^T}{2} = 0;$$

$$R_{2y}^{\Pi} = \frac{\left[ F_{t1}^T (l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi}) - F_{r1}^B \cdot l_1^{\Pi} - F_{a2}^B \frac{d_2^T}{2} \right]}{(l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi} + l_3^{\Pi})} =$$

$$= \frac{\left[ 5583 (34 + 78) - 863 \cdot 34 - 804 \frac{256}{2} \right]}{(34 + 78 + 74)} = 2650,8 \text{ Н}$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_{1y}^{\Pi} + F_{r2}^B - F_{t1}^T + R_{2y}^{\Pi} = 2069,2 + 863 - 5583 + 2650,8 = 0.$$

*Тихоходный вал*

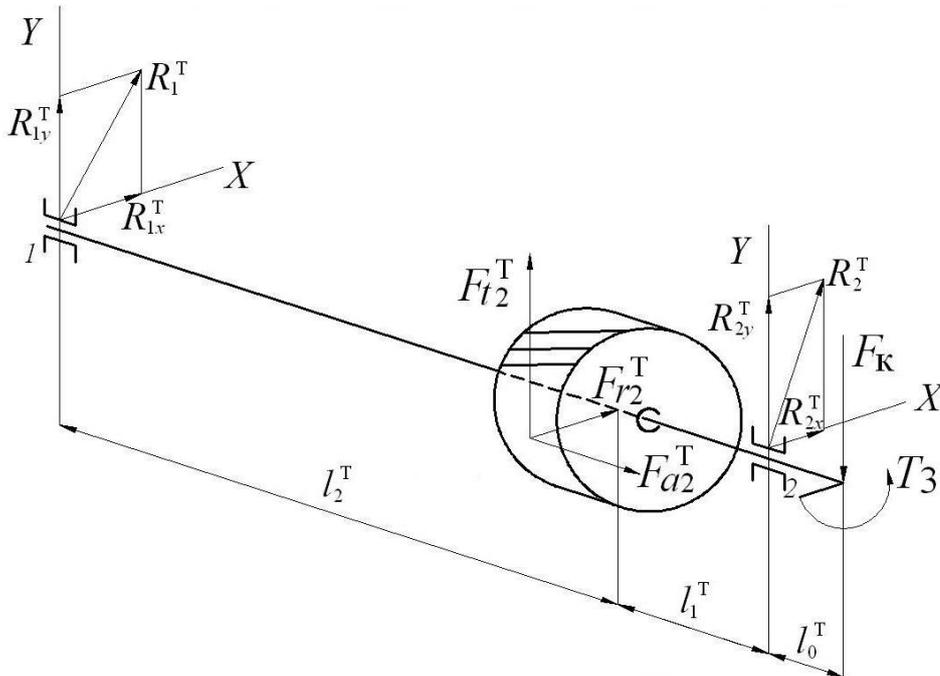


Рис. 45. Расчетная схема тихоходного вала

Составляя аналогичные предыдущим уравнения равновесия статики при использовании расчетной схемы вала (рис. 45), имеем:

– в плоскости  $XOZ$

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$R_{2x}^T (l_1^T + l_2^T) + F_{r2}^T \cdot l_2^T + F_{a2}^T \frac{d_2^T}{2} = 0;$$

$$R_{2x}^T = \frac{\left( -F_{r2}^T \cdot l_2^T - F_{a2}^T \frac{d_2^T}{2} \right)}{\left( l_1^T + l_2^T \right)} = \frac{-1860 \cdot 106 - 1156 \frac{283}{2}}{(60 + 106)} = -2173,1 \text{ Н};$$

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$-R_{1x}^T (l_1^T + l_2^T) - F_{r2}^T \cdot l_1^T + F_{a2}^T \frac{d_2^T}{2} = 0;$$

$$R_{1x}^T = \frac{\left( -F_{r2}^T \cdot l_1^T - F_{a2}^T \frac{d_2^T}{2} \right)}{\left( l_1^T + l_2^T \right)} = \frac{\left( -1860 \cdot 60 - 156 \frac{283}{2} \right)}{(60 + 106)} = 313,1 \text{ Н}.$$

Проверка:

$$\Sigma X = R_{1x}^T + F_{r2}^T + R_{2x}^T = 313,1 + 1860 = 2173,1 = 0.$$

– в плоскости  $YOZ$

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$R_{2y}^T (l_1^T + l_2^T) + F_{t2}^T \cdot l_2^T = 0;$$

$$R_{2y}^T = \frac{-F_{t2}^T \cdot l_2^T}{\left( l_1^T + l_2^T \right)} = \frac{-5583 \cdot 106}{(106 + 60)} = -3565 \text{ Н};$$

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$-R_{1y}^T(l_1^T + l_2^T) - F_{t2}^T \cdot l_1^T = 0;$$

$$R_{1y}^T = \frac{-F_{t2}^T \cdot l_1^T}{(l_1^T + l_2^T)} = \frac{-5583 \cdot 60}{(106 + 60)} = -2018 \text{ Н.}$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_{1y}^T + F_{t2}^T + R_{2y}^T = -2018 + 5583 - 3565 = 0.$$

Результирующие опорные реакции:

$$R_1^T = \sqrt{(R_{1x}^T)^2 + (R_{1y}^T)^2} = \sqrt{(313,1)^2 + (-2018)^2} = 2043 \text{ Н.}$$

$$R_2^T = \sqrt{(R_{2x}^T)^2 + (R_{2y}^T)^2} = \sqrt{(-2173,1)^2 + (-3565)^2} = 4175 \text{ Н.}$$

Осевая составляющая опорной реакции от действия внешней нагрузки:

$$F_a = F_{a2}^T = 1156 \text{ Н.}$$

Опорные реакции от радиальной консольной нагрузки:

$$\Sigma M_1 = 0;$$

$$F_K^T(l_0^T + l_1^T + l_2^T) + R_{2к}^T(l_1^T + l_2^T) = 0;$$

$$R_{2к}^T = \frac{F_K^T(l_0^T + l_1^T + l_2^T)}{(l_1^T + l_2^T)} = \frac{6690(85 + 60 + 106)}{(60 + 106)} = 10115,6 \text{ Н.}$$

$$\Sigma M_2 = 0;$$

$$- R_{1к} (l_1^T + l_2^T) - F_k^T \cdot l_0^T = 0;$$

$$R_{1к} = \frac{- F_k^T \cdot l_0^T}{(l_1^T + l_2^T)} = \frac{- 6690 \cdot 85}{(60 + 106)} = -3425,6 \text{ Н.}$$

Суммарные опорные реакции на опорах в самом неблагоприятном случае, когда радиальная несоосность соединяемых валов расположена в плоскости изгибающего момента от внешних нагрузок:

$$R_{1\Sigma}^T = R_1^T + R_{1к} = 2043 + 3425,6 = 5468,6 \text{ Н.}$$

$$R_{2\Sigma}^T = R_2^T + R_{2к} = 4175 + 10115,6 = 14290,6 \text{ Н.}$$

### 2.9.3. Конструирование валов редуктора

#### *Быстроходный вал*

Размеры консольного участка вала и цапф установлены на первом этапе эскизного проектирования редуктора. Найдены длины  $l_0^B$ ,  $l_1^B$ ,  $l_2^B$  всех участков валов. На этом этапе определен размер шпоночной канавки на консольной ступени. Зная размеры нарезанной части червяка, можно завершить эту конструкцию (как показано на рис. 46). Радиусы галтелей, фаски, шероховатость поверхностей, термохимическую обработку необходимо назначить, как рекомендовано выше, по материалам справочников для червячных валов.

При конструировании быстроходного вала особенно важно предусмотреть ограничение отклонений от соосности, цилиндричности и перпендикулярности базовых торцев вала от базовой оси. За такую ось принимаем геометрическую ось червячного вала АБ. Наиболее важным у этого вала являются ступени, где расположены подшипники (диаметр сечения 35 мм).

Для этих ступеней предусматриваем ограничение отклонений от соосности (рис. 46) и цилиндричности. Необходимо предусмотреть также ограничение на отклонение от перпендикулярности базовых торцев вала, в которые при сборке будут упираться внутренние кольца подшипников (см. рис. 46).

Кроме этого целесообразно задать полирование рабочих поверхностей витков червяка и части цилиндрической поверхности вала с целью снижения износа уплотнительной манжеты (см. рис. 46).

На чертеже вала задаем необходимые требования точности изготовления отдельных его элементов.

Базой является геометрическая ось вала БА. При изготовлении вала появляется отклонение от соосности относительно базовой оси геометрических осей отдельных поверхностей участков вала. Для подшипников качения, например, важно не допустить искажения формы дорожек качения. При конструировании тихоходного вала предусматриваем ограничения по несоосности на участках, где будут установлены подшипники, и на консольной ступени с использованием таблиц (см. прил., табл. 21–24).

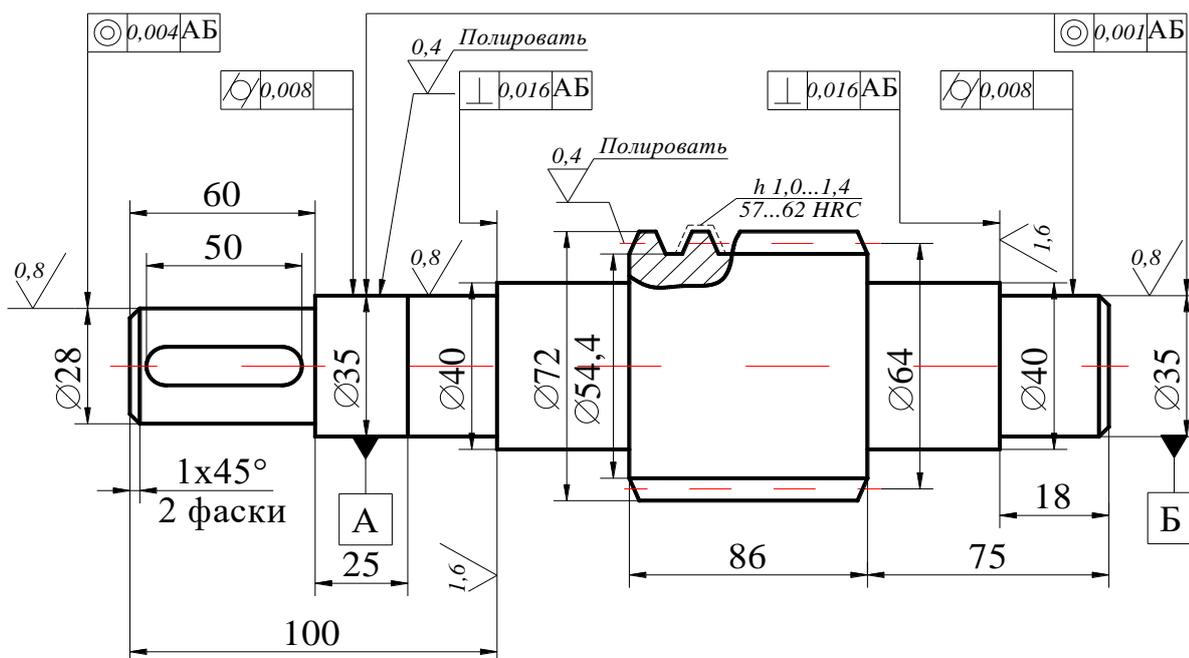


Рис. 46. Конструкция червячного вала

Предусматриваем перпендикулярность заплечиков вала на участках, где будут расположены подшипники качения и зубчатое колесо.

Кроме этого на этих трех ответственных участках с диаметрами сечений 65, 75, 65 мм, согласно прил., табл. 21, ограничиваем отклонение от цилиндричности.

### *Промежуточный вал*

Для принятия решения о конструкции вала и тихоходной шестерни необходимо найти отношение

$$\frac{d_{f1}^T}{d_B} = \frac{110}{55} = 2,$$

где  $d_B$  – диаметр сечения ступени, прилегающей к шестерне вала.

На рис. 47 этот диаметр  $d_B = 55$  мм.

Если  $\frac{d_{f1}^T}{d_B} \leq 1,6$ , то к конструированию принимают совместную деталь в виде вала-шестерни (рис. 47, а). Если это отношение превышает 1,6, то вал и шестерня конструируются, как две отдельные детали (рис. 47, б).

Желательно, чтобы шпоночные канавки были профрезерованы одной фрезой за одну установку на фрезерном станке.

### *Тихоходный вал*

Подобным образом при использовании результатов первого этапа эскизного проектирования конструируется тихоходный (выходной) вал (рис. 48).

Для фиксации зубчатого колеса на валу от осевого смещения в одном направлении можно предусмотреть буртик. В другом направлении – при сборе редуктора нужно установить дистанционную втулку. Консольная ступень вала может быть цилиндрической (рис. 39), либо конической (см. ГОСТ 12080-66, ГОСТ 12081-72).

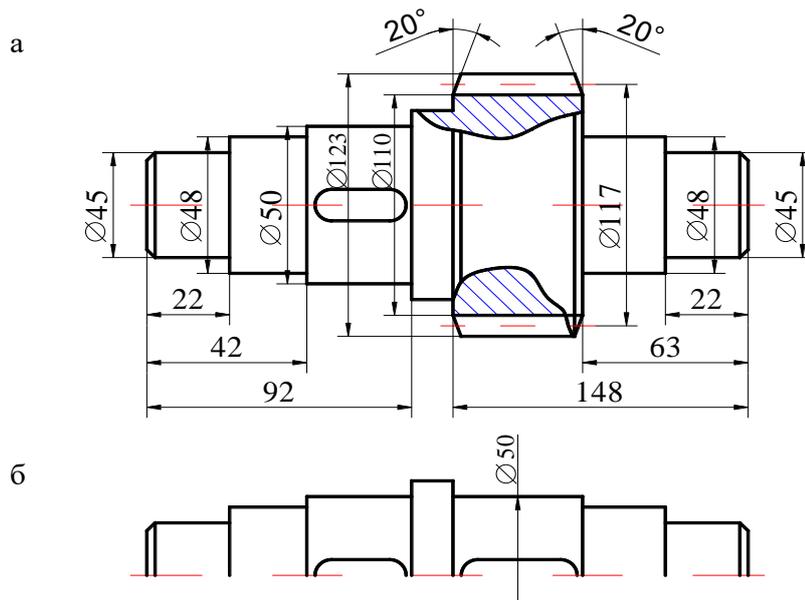


Рис. 47. Варианты конструкции промежуточного вала:  
 а – вал-шестерня; б – вал как отдельная деталь

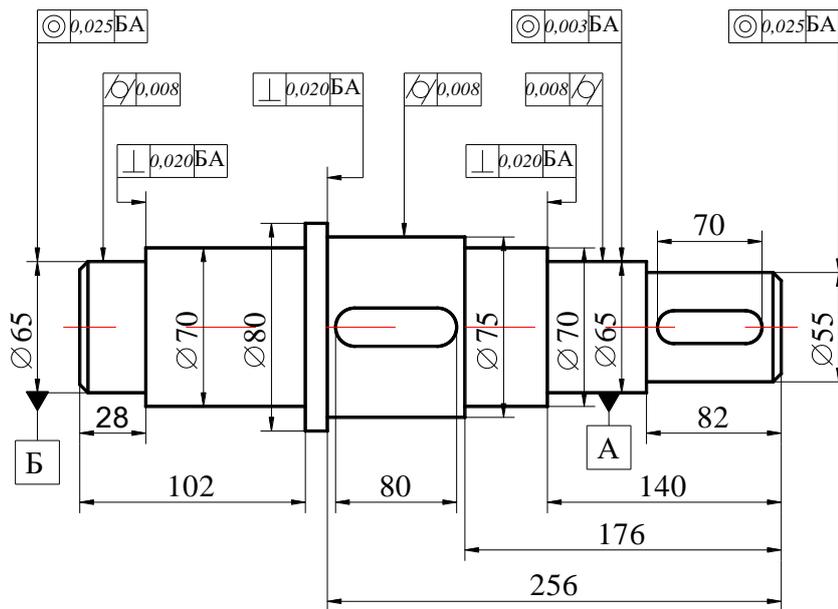


Рис. 48. Конструкция тихоходного вала

## 2.9.4. Проверка прочности промежуточного вала

Поскольку полученное при конструировании промежуточного вала отношение  $\frac{d_{f1}^T}{d_B}$  больше, чем 1,6, то вал и шестерня тихоходной зубчатой пары могут быть сконструированы, как две отдельные детали. Расчетная схема промежуточного вала приведена на рис. 44.

Выбираем для промежуточного вала сталь 20:

$$\sigma_B = 400 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 240 \text{ МПа};$$

$$\tau_T = 120 \text{ МПа}; \quad \sigma_{-1} = 170 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1} = 100 \text{ МПа}; \quad \psi_\sigma = \psi_\tau = 0.$$

На рис. 49 приведены эпюры изгибающих и крутящих моментов.

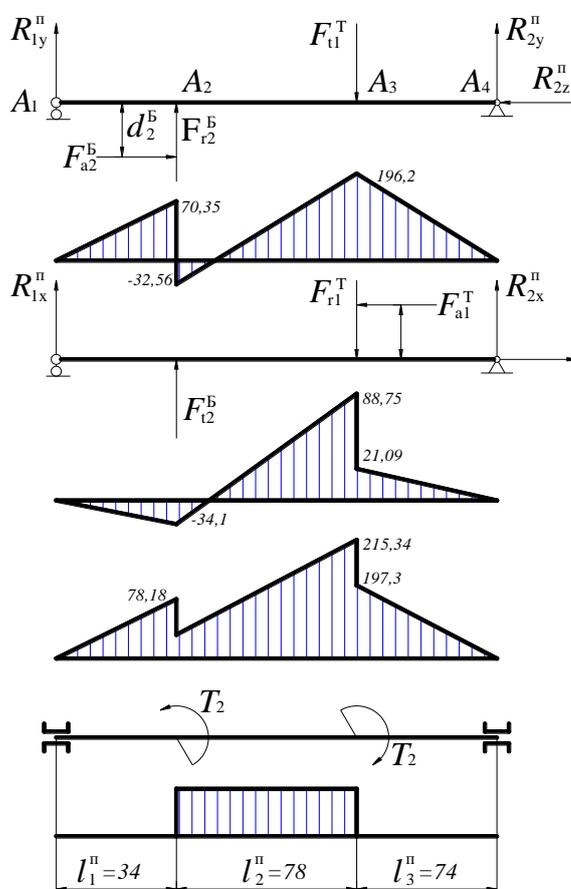


Рис. 49. Эпюры изгибающих и крутящих моментов для промежуточного вала

Для построения эпюр вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях вала ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ ).

Вертикальная плоскость ( $YOZ$ ):

– сечение  $A_1, M_x = 0$ ;

– сечение  $A_2$ , слева:  $M_x = R_{1y}^{\Pi} \cdot l_1^{\Pi} = 2069,2 \cdot 0,034 = 70,35 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение  $A_3$ , справа:  $M_x = R_{1y}^{\Pi} \cdot l_1^{\Pi} - F_{a2}^{\text{Б}} \frac{d_2^{\text{Б}}}{2} =$   
 $= 2069,2 \cdot 0,034 - 804 \frac{0,256}{2} = 32,56 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение  $A_3$ ,  $M_x = R_{2y}^{\Pi} \cdot l_3^{\Pi} = 2650,8 \cdot 0,074 = 196,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение  $A_4, M_x = 0$ .

Горизонтальная плоскость ( $XOZ$ ):

– сечение  $A_1, M_y = 0$ ;

– сечение  $A_2, M_y = R_{1x}^{\Pi} \cdot l_1^{\Pi} = 1003 \cdot 0,034 = 34,102 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение  $A_3$ , слева:  $M_y = -R_{1x}^{\Pi} (l_1^{\Pi} + l_2^{\Pi}) + F_{t2}^{\text{Б}} \cdot l_2^{\Pi} =$   
 $= 1003 (0,034 + 0,078) + 2578 \cdot 0,078 = 88,748 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение  $A_3$ , справа:  $M_y = R_{2x}^{\Pi} \cdot l_3^{\Pi} = 285 \cdot 0,074 = 21,09 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение  $A_4, M_y = 0$ .

### *Расчет сечения $A_3$ на статическую прочность*

Изгибающий момент при коэффициенте перегрузки  $K_{\Pi} = 2,2$ :

$$M_{\max} = K_{\Pi} \cdot M_{A_3} = 2,2 \cdot 215,34 = 473,75 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Моменты сопротивления сечения при диаметре  $d_{A_3} = 55 \text{ мм}$  (прил., табл. 28 – для сплошных круглых сечений; прил., табл. 29 – в данном случае):

$$W_X = 14510 \text{ мм}^3;$$

$$W_K = 30800 \text{ мм}^3.$$

Нормальные и касательные напряжения в сечении  $A_3$ :

$$\sigma = \frac{M_{\max} \cdot 10^3}{W_X} = \frac{473,75 \cdot 10^3}{14510} = 32,65 \text{ МПа};$$
$$\tau = \frac{T_2 \cdot 10^3 \cdot K_{\Pi}}{W_K} = \frac{330 \cdot 10^3 \cdot 2,2}{30800} = 23,56 \text{ МПа};$$

Коэффициент запаса прочности по пределу текучести:

$$S_{T\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{240}{32,65} = 7,35;$$
$$S_{T\tau} = \frac{\tau_T}{\tau} = \frac{120}{23,56} = 5,09.$$

Общий коэффициент запаса прочности по пределу текучести:

$$S_T = \frac{S_{T\sigma} \cdot S_{T\tau}}{\sqrt{(S_{T\sigma})^2 + (S_{T\tau})^2}} = \frac{7,35 \cdot 5,09}{\sqrt{(7,35)^2 + (5,09)^2}} = 4,18 > [S] = 2,0.$$

Следовательно, статическая прочность вала в сечении  $A_3$  обеспечена с запасом.

### *Расчет сечения $A_3$ на сопротивление усталости*

Амплитудные напряжения циклов:

$$\sigma_a = \frac{M_{A_3}}{W_X} = \frac{215,34 \cdot 10^3}{14510} = 18,84 \text{ МПа};$$
$$\tau = \frac{\tau_K}{2} = \frac{T_2 \cdot 10^3}{2W_K} = \frac{330 \cdot 10^3}{2 \cdot 30800} = 5,36 \text{ МПа}.$$

Концентратором в сечении (из двух) является посадка с натягом тихоходной шестерни на промежуточный вал.

По прил., табл. 12:  $\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} = 2,95;$   $\frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} = 1,8.$

По прил., табл. 10:  $K_{F\sigma} = 0,96$ ;  $K_{F\tau} = 0,975$ .

Поверхность без упрочнения:  $K_V = 1$  (прил., табл. 11).

Коэффициенты снижения пределов выносливости:

$$K_{\sigma D} = \frac{\left( \frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right)}{K_V} = \frac{\left( 2,95 + \frac{1}{0,96} - 1 \right)}{1} = 2,99;$$

$$K_{\tau D} = \frac{\left( \frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right)}{K_V} = \frac{\left( 1,8 + \frac{1}{0,975} - 1 \right)}{1} = 1,82.$$

Пределы выносливости вала:

$$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}} = \frac{170}{2,99} = 56,86 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1D} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}} = \frac{100}{1,82} = 54,95 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_a} = \frac{56,86}{14,84} = 3,83;$$

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1D}}{\tau_a} = \frac{54,95}{5,36} = 10,25.$$

Коэффициент запаса усталостной прочности:

$$S_{\sigma} = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{(S_{\sigma})^2 + (S_{\tau})^2}} = \frac{3,83 \cdot 10,25}{\sqrt{(3,83)^2 + (10,25)^2}} = 3,59;$$

$$[S] = 2,5, \text{ т. е. } S > [S].$$

Таким образом, сопротивление усталости вала в сечении  $A_3$  обеспечено.

### 2.9.5. Построение эпюр моментов для тихоходного вала и проверка его прочности

Для построения эпюр определяем значения изгибающих моментов в характерных сечениях вала 1, А, 2, Б (рис. 50).

Вертикальная плоскость (YOZ):

– сечение 1:  $M_X = 0$ ;

– сечение А:  $M_X = R_{1Y}^{\Pi} \cdot l_2^{\Pi} = 22018 \cdot 0,106 = 213,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение 2:  $M_X = 0$ ;

– сечение Б:  $M_X = 0$ .

Горизонтальная плоскость (XOZ):

– сечение 1:  $M_Y = 0$ ;

– сечение А, слева:  $M_Y = R_{1X}^{\Gamma} \cdot l_2^{\Gamma} = 333,1 \cdot 0,106 = 35,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение А, справа:

$$M_Y = R_{1X}^{\Gamma} \cdot l_2^{\Gamma} + F_{a2}^{\Gamma} \frac{d_2^{\Gamma}}{2} = 333,1 \cdot 0,106 + 1156 \frac{0,283}{2} = 198,7 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

– сечение 2,  $M_Y = 0$ ;

– сечение Б,  $M_Y = 0$ .

Результирующий изгибающий момент в каждом сечении находим с использованием известной формулы:

$$M_{\text{рез}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}.$$

Изгибающий момент от радиальной консольной нагрузки:

– сечение 1,  $M_K = 0$ ;

– сечение А,  $M_K = R_{1K} \cdot l_2^{\Gamma} = 3425,6 \cdot 0,106 = 363,1 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение 2,  $M_K = F_K^{\Gamma} \cdot l_0^{\Gamma} = 6690,6 \cdot 0,085 = 568,7 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

– сечение Б  $M_K = 0$ .

Эпюра суммарного изгибающего момента  $M_{\text{сум}}$  с учетом внешней и радиальной консольной нагрузки построена на рис. 50 по результатам вычислений  $M_{\text{сум}} = M_{\text{рез}} + M_K$ .

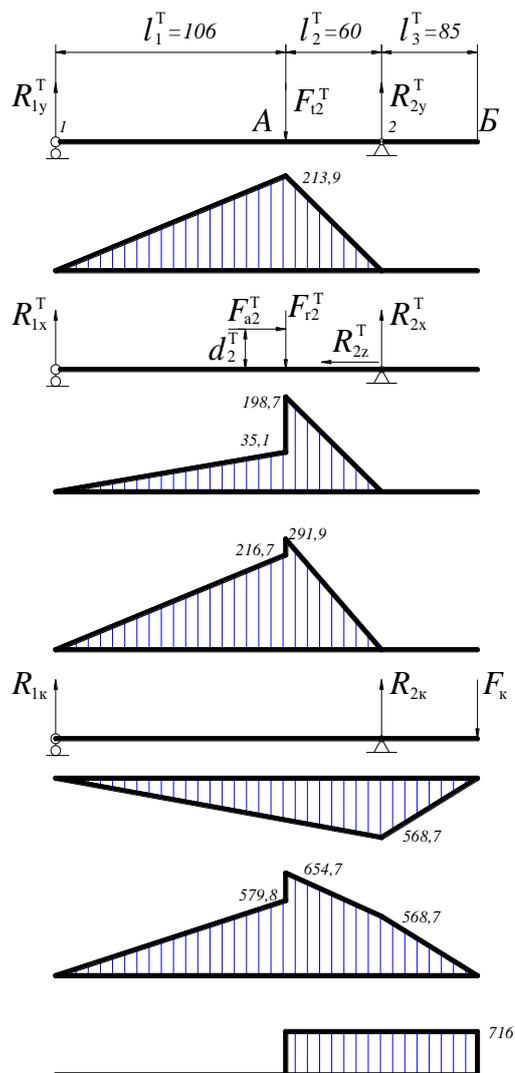


Рис. 50. Эпюры изгибающих и крутящих моментов для тихоходного вала

*Расчет сечения А на статическую прочность*

Суммарный изгибающий момент при коэффициенте перегрузки  $K_{\Pi} = 2,2$ :

$$M_{\max} = K_{\Pi} \cdot M_{\text{сум}} = 2,2 \cdot 654,7 = 1440,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Моменты сопротивления сечения вала с учетом наличия шпоночной канавки (прил., табл. 29):

$$W_X = 37600 \text{ мм}^3;$$

$$W_K = 79000 \text{ мм}^3.$$

Нормальные и касательные напряжения в рассматриваемом сечении:

$$\sigma = \frac{M_{\max} \cdot 10^3}{W_X} = \frac{1440,3 \cdot 10^3}{37600} = 38,3 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{T_3 \cdot 10^3}{W_K} = \frac{716 \cdot 10^3}{79000} = 9,06 \text{ МПа}.$$

В качестве материала для вала выбираем сталь 45:

$$\sigma_B = 560 \text{ МПа}; \quad \sigma_T = 280 \text{ МПа};$$

$$\tau_T = 150 \text{ МПа}; \quad \sigma_{-1} = 250 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1} = 150 \text{ МПа}; \quad \psi_\sigma = \psi_\tau = 0.$$

Коэффициент запаса прочности по пределу текучести:

$$S_{T\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{280}{38,3} = 7,3;$$

$$S_{T\tau} = \frac{\tau_T}{\tau} = \frac{150}{9,06} = 16,05.$$

Общий коэффициент запаса прочности по пределу текучести:

$$S_T = \frac{S_{T\sigma} \cdot S_{T\tau}}{\sqrt{(S_{T\sigma})^2 + (S_{T\tau})^2}} = \frac{7,3 \cdot 16,5}{\sqrt{(7,3)^2 + (16,5)^2}} = 6,68 > [S_T] = 2,0.$$

Следовательно, статическая прочность вала в сечении А обеспечена с запасом.

### *Расчет сечения А на сопротивление усталости*

Амплитудные напряжения циклов:

$$\sigma_a = \frac{M}{W_X} = \frac{654,7 \cdot 10^3}{37600} = 17,41 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_K}{2} = \frac{T_2 \cdot 10^3}{2 \cdot W_K} = \frac{716 \cdot 10^3}{2 \cdot 79000} = 4,53 \text{ МПа}.$$

В рассматриваемом сечении имеют место два концентратора напряжений: посадка с натягом и шпоночная канавка. Наиболее чувствительным является первый концентратор. По прил., табл. 12 имеем:

$$\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} = 3,15; \quad \frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} = 1,875.$$

Посадочную поверхность вала под зубчатое колесо при посадке с натягом шлифовать  $R_a = 0,8$  мкм:  $K_{F\sigma} = 0,91$ ;  $K_{F\tau} = 0,95$  (см. прил., табл. 10). Поверхность вала – без упрочнения:  $K_V = 1$  (прил., табл. 11).

Коэффициенты снижения пределов выносливости:

$$K_{\sigma D} = \frac{\left( \frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right)}{K_V} = \frac{\left( 3,15 + \frac{1}{0,91} - 1 \right)}{1} = 3,249;$$

$$K_{\tau D} = \frac{\left( \frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right)}{K_V} = \frac{\left( 1,875 + \frac{1}{0,95} - 1 \right)}{1} = 1,928.$$

Пределы выносливости вала:

$$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}} = \frac{250}{3,249} = 79,95 \text{ МПа};$$

$$\tau_{-1D} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}} = \frac{150}{1,928} = 77,8 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_a} = \frac{79,95}{17,41} = 4,59;$$

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1D}}{\tau_a} = \frac{77,8}{4,53} = 17,2.$$

Коэффициент запаса усталостной прочности в сечении под зубчатым колесом:

$$S_{\sigma} = \frac{S_{\sigma} \cdot S_{\tau}}{\sqrt{(S_{\sigma})^2 + (S_{\tau})^2}} = \frac{4,59 \cdot 17,2}{\sqrt{(4,59)^2 + (17,2)^2}} = 4,43;$$

$$[S] = 2,5, \text{ т. е. } S > [S].$$

Таким образом, сопротивление усталости вала в сечении А обеспечено.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

### Механические характеристики сталей

Марка стали	Диаметр заготовки, мм (не менее)	Твердость НВ (не менее)	Механические					$\Psi_{\tau}$
			$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\tau_T$	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	
Ст 5	Любой	190	520	280	150	220	130	0,06
45	120	240	780	540	290	360	200	0,09
	80	270	900	650	390	410	230	0,10
40X	200	240	790	640	380	370	210	0,09
	120	270	900	750	450	410	240	0,10
40XH	200	270	920	750	450	420	230	0,10
20X	120	197	650	400	240	310	170	0,07
12XH3A	120	260	950	700	490	430	240	0,10
18XГТ	60	330	1150	950	660	500	280	0,12

## Размеры к схемам на первом этапе эскизной компоновки редуктора

Обозначение	Наименование	Величина
$a$	Расстояние от торца вращающейся детали до внутренней стенки редуктора	$a \approx \sqrt[3]{L} + 3, \text{ мм}$
$a_1$	Для червячных редукторов	$a_1 \approx \sqrt[3]{L} + 3, \text{ мм}$
$b$	Рабочая ширина ведомого колеса в рассматриваемой ступени передач	Определяется из расчета зубчатой пары на прочность
$b_1$	Ширина ведущей шестерни	Определяется из расчета зубчатой пары на прочность
$B_K$	Ширина червячного колеса	Определяется расчетом
$B_{\Pi}$	Ширина подшипников качения	На первом этапе эскизной компоновки: $B_{\Pi} = 25 \div 30$ мм. На втором этапе эскизной компоновки величина $B_{\Pi}$ принимается из ГОСТа на подшипники качения
$S$	Расстояние между колесами на промежуточном валу в редукторах, выполненных по развернутой схеме	$S = 10 \div 15$
$\Delta_1$	Наименьший размер между вершинами зубьев колеса и внутренней поверхностью корпуса редуктора	$\Delta_1 \geq 1,2 \delta$ $\delta$ – толщина стенки корпуса редуктора
$\delta$	Толщина стенки корпуса редуктора	Для одноступенчатого: $\delta = 0,025 a_w + 1$ мм, для двухступенчатого: $\delta = 0,025 a_w + 3$ мм,
$L_1$	Расстояние между подшипниками консольного вала	$L_1 = 100 \div 180$ мм (в среднем в зависимости от габаритов редуктора)

## Окончание таблицы 2

Обозначение	Наименование	Величина
$L$	Расчетное расстояние между подшипниками (пролет вала)	Выбирается для каждого вала на основании эскизных компоновочных схем редукторов. Для вала червяка $L_{\text{ч}}=(0,8\div 1,0)D_{\text{чк}}$
$L_{12}$	Расчетное расстояние между подшипниками	Определяется по эскизной компоновочной схеме
$y$	Расстояние от торца подшипника качения до внутреннего контура стенки корпуса редуктора	$y = 10\div 15$ мм в среднем при густой смазке выбирается в зависимости от конструкции мазеудерживающего кольца
$x_1$	Высота крышки подшипника с головкой болта	Выбирается в зависимости от конструкции крышки, типа уплотнения и способа закрепления подшипника
$l_1, l_2, l_3 \dots$	Расчетная длина участков валов	Определяется при эскизной компоновке валов
$x_2$	Расстояние от вращающихся деталей до неподвижной крышки	$x_2 = 15\div 20$ мм
$x_3$	Длина участка вала, на котором установлена вращающаяся деталь	Выбирается в зависимости от длины ступицы и способа закрепления детали на валу
$l_0$	Расчетная длина консольного участка вала	Определяется при эскизном проектировании редуктора с нахождением диаметра сечения консольной ступени вала
$\Delta$	Расчетное расстояние от вращающейся детали на консольном участке вала редуктора до опоры	Назначается конструктивно на основании эскизной компоновки редуктора на первом этапе

**Значения радиальных консольных нагрузок на валах  
редукторов по ГОСТ 16162-85Е**

Наименование консольной нагрузки	Величина консольной нагрузки $F_K$ , Н
Максимальная радиальная консольная нагрузка на тихоходном валу	Планетарные редукторы с передаточным отношением до 12,5 и другие одноступенчатые зубчатые редукторы: $F_K = 125\sqrt{T_T}$
	Остальные типы редукторов: $F_K = 250\sqrt{T_T}$
Максимальная радиальная консольная нагрузка на быстроходном валу	Одноступенчатые и многоступенчатые зубчатые редукторы при $T_B \leq 25 \text{ Н} \cdot \text{м}$ : $F_K = 50\sqrt{T_B}$
	Многоступенчатые зубчатые редукторы при $25 \leq T_B \leq 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и червячные редукторы: $F_K = 80\sqrt{T_B}$
	Многоступенчатые зубчатые редукторы при $T_B \geq 250 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и планетарные редукторы всех типов: $F_K = 125\sqrt{T_B}$ , где $T_B$ , $T_T$ – крутящие моменты на быстроходном и тихоходном валах, Н·м

**Значения радиальных консольных нагрузок на валах редукторов  
при передаче вращения муфтой**

Тип муфты	Величина радиальной консольной нагрузки $F_K$ , Н
Кулачковая дисковая	$F_K = (0,3 \div 0,7) \frac{T_B}{D}; \quad F_K = (0,3 \div 0,7) \frac{T_T}{D},$ <p>где <math>D</math> – наружный диаметр муфты, м.</p>
Муфта с призматическим сухарем	$F_K = (0,2 \div 0,5) \frac{T_B}{B}; \quad F_K = (0,2 \div 0,5) \frac{T_T}{B},$ <p>где <math>B</math> – длина площади контакта сухаря с полумуфтами, м</p>
Втулочно- пальцевая	$F_K = (0,4 \div 0,7) \frac{T_B}{D_{\Pi}}; \quad F_K = (0,4 \div 0,7) \frac{T_T}{D_{\Pi}},$ <p>где <math>D_{\Pi}</math> – диаметр окружности расположения центров пальцев, м</p>
Зубчатая	$F_K = 0,3 \frac{T_B}{l}; \quad F_K = 0,3 \frac{T_T}{l},$ <p>где <math>l</math> – расстояние от конца зубчатого сочленения до торца муфты, м</p>
Кулачковая	$F_K = 2 \frac{T_B}{D}; \quad F_K = 2 \frac{T_T}{D},$ <p>где <math>D</math> – диаметр муфты, м</p>
Цепная	$F_K = 0,67 \frac{T_B}{D_0}; \quad F_K = 0,67 \frac{T_T}{D_0},$ <p>где <math>D_0</math> – диаметр звездочки, м</p>

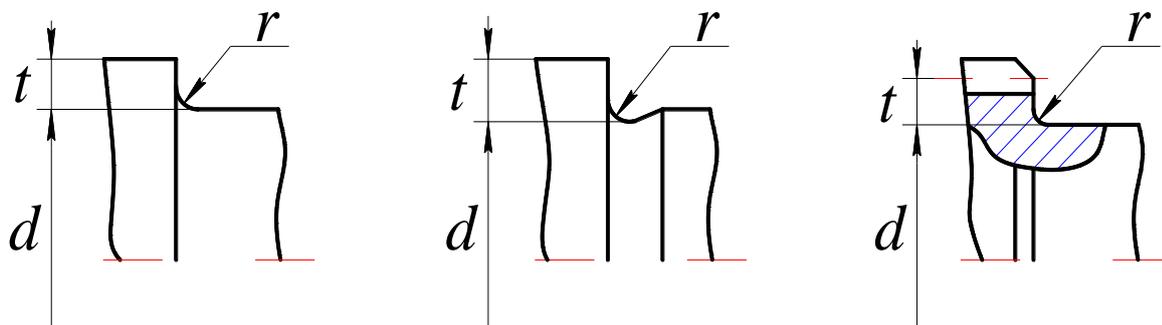
Таблица 5

**Значения радиальных консольных нагрузок на валах редукторов  
при передаче вращения гибкой связью**

Тип муфты	Величина радиальной консольной нагрузки $F_K$ , Н
Плоскоременная	$F_K = (5 \div 6) \frac{T_B}{D_2}$
Клиноременная	$F_K = (3,2 \div 8,5) \frac{T_B}{D_2},$ <p>где <math>D_2</math> – диаметр ведомого шкива, м.  Меньшие значения применяют при окружной скорости <math>V = 1 \div 5</math> м/с, большие – при <math>V = 25 \div 30</math> м/с</p>
Цепная	$F_K = (2,3 \div 2,4) \frac{T_T}{D_0},$ <p>где <math>D_0</math> – диаметр звездочки на тихоходном валу редуктора, м.  Меньшие значения применяют при вертикальных передачах, большие – при горизонтальных</p>

Таблица 6

**Значения коэффициентов  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  для ступенчатого перехода с галтелью**



$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	$K_\sigma$ при $\sigma_B$ , МПа				$K_\tau$ при $\sigma_B$ , МПа			
		500	700	900	1200	500	700	900	1200
2	0,01	1,55	1,60	1,65	1,70	1,40	1,40	1,45	1,45
	0,02	1,80	1,90	2,0	2,15	1,55	1,60	1,65	1,70
	0,03	1,80	1,95	2,05	2,25	1,55	1,60	1,65	1,70
	0,05	1,75	1,90	2,00	2,20	1,60	1,60	1,65	1,75
3	0,01	1,90	2,00	2,10	2,20	1,55	1,60	1,65	1,75
	0,02	1,95	2,10	2,20	2,40	1,60	1,70	1,75	1,85
	0,03	1,95	2,10	2,25	2,45	1,65	1,75	1,75	1,90
5	0,01	2,10	2,25	2,35	2,50	2,20	2,30	2,40	2,60
	0,02	2,15	2,30	2,45	2,65	2,10	2,15	2,25	2,50

Таблица 7

**Значения коэффициентов  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  для шпоночного паза**

$\sigma_B$ , МПа	$K_\sigma$ при выполнении паза фрезой		$K_\tau$
	концевой	дисковой	
500	1,80	1,50	1,40
700	2,00	1,55	1,70
900	2,20	1,70	2,05
1200	2,65	1,90	2,40

Таблица 8

**Значения коэффициентов  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$   
для шлицевых и резьбовых участков вала**

$\sigma_B$ , МПа	$K_{\sigma}$ для		$K_{\tau}$ для шлицев		$K_{\tau}$ для резьбы
	шлицев	резьбы	прямоугольных	эвольвентных	
500	1,45	1,80	2,25	1,43	1,35
700	1,60	2,20	2,50	1,49	1,70
900	1,70	2,45	2,65	1,55	2,10
1200	1,75	2,90	2,80	1,60	2,35

Таблица 9

**Значения коэффициентов  $K_{d\sigma}$  и  $K_{d\tau}$**

Вид деформации и материал	$K_{d\sigma}$ и $K_{d\tau}$ при диаметре вала $d$ , мм					
	20	30	40	50	70	100
Изгиб для углеродистой стали	0,92	0,88	0,85	0,81	0,76	0,71
Изгиб для легированной стали	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59
Кручение для всех сталей	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59

Таблица 10

**Значения коэффициентов  $K_{F\sigma}$  и  $K_{F\tau}$**

Вид механической обработки	Параметр шероховатости $R_a$ , мм	$K_{F\sigma}$ при $\sigma_B$ , МПа		$K_{F\tau}$ при $\sigma_B$ , МПа	
		$\leq 700$	$> 700$	$\leq 700$	$> 700$
Шлифование тонкое	до 0,2	1	1	1	1
Точение тонкое	0,2÷0,8	0,99÷0,93	0,99÷0,91	0,99÷0,96	0,99÷0,95
Шлифование чистовое	0,8÷1,6	0,93÷0,89	0,91÷0,86	0,96÷0,94	0,95÷0,92
Точение чистовое	1,6÷3,2	0,89÷0,86	0,86÷0,82	0,94÷0,92	0,92÷0,89

Таблица 11

Значения коэффициентов  $K_V$ 

Вид упрочнения поверхности вала	Значения $K_V$ при		
	$K_\sigma = 10$	$K_\sigma = 1,1 \div 1,5$	$K_\sigma \geq 1,8$
Закалка ТВЧ	1,3 ÷ 1,6	1,6 ÷ 1,7	2,4 ÷ 2,8
Азотирование	1,15 ÷ 1,25	1,3 ÷ 1,9	2,0 ÷ 3,0
Накатка роликами	1,2 ÷ 1,4	1,51 ÷ 1,7	1,8 ÷ 2,2
Дробеструйный наклеп	1,1 ÷ 1,3	1,4 ÷ 1,5	1,6 ÷ 2,5
Без упрочнения	1,0	1,0	1,0

Таблица 12

Значения отношений  $\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}}$  и  $\frac{K_\tau}{K_{d\tau}}$  в местах установки  
на валу деталей с натягом

Диаметр вала $d$ , мм	$\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}}$ при $\sigma_B$ , МПа				$\frac{K_\tau}{K_{d\tau}}$ при $\sigma_B$ , МПа			
	500	700	500	700	500	700	500	700
30	2,60	3,30	4,00	5,10	1,50	2,00	2,40	3,05
40	2,75	3,50	4,30	5,40	1,65	2,10	2,60	3,25
50	2,90	3,70	4,50	5,70	1,75	2,20	2,70	3,40
60	3,00	3,85	4,70	5,95	1,80	2,30	2,80	3,55
70	3,10	4,00	4,85	6,15	1,85	2,40	2,90	3,70
80	3,20	4,10	4,95	6,30	1,90	2,45	3,00	3,80
90	3,30	4,20	5,10	6,45	1,95	2,50	3,05	3,90
100	3,35	4,30	5,20	6,60	2,00	2,55	3,10	3,95

*Примечание.* При установке с натягом колец подшипников табличное значение следует умножить на 0,9.

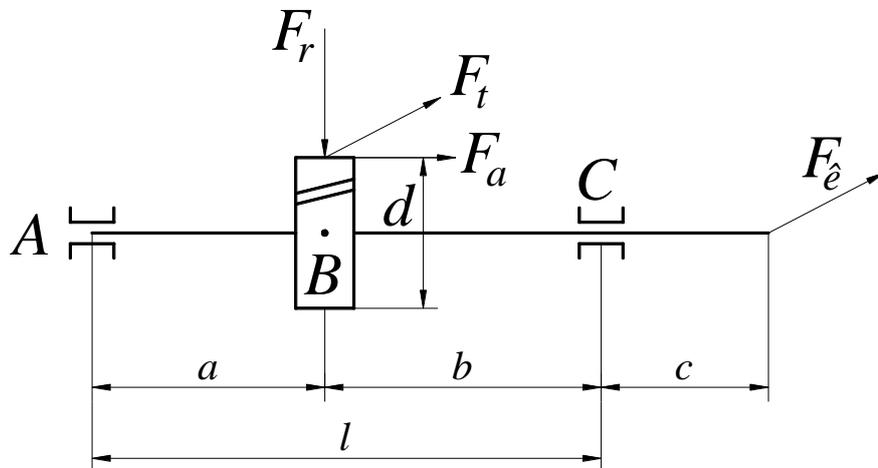
Таблица 13

**Допускаемые величины углов поворота сечений валов  
в местах расположения деталей**

Название детали, насаженной на вал	$[\theta]$ , рад
Подшипники качения:	
шариковые однорядные	0,0050
шариковые сферические	0,0500
роликовые цилиндрические	0,0025
роликовые конические	0,0016
Подшипники скольжения	0,0010
Зубчатые колеса	0,001÷0,002

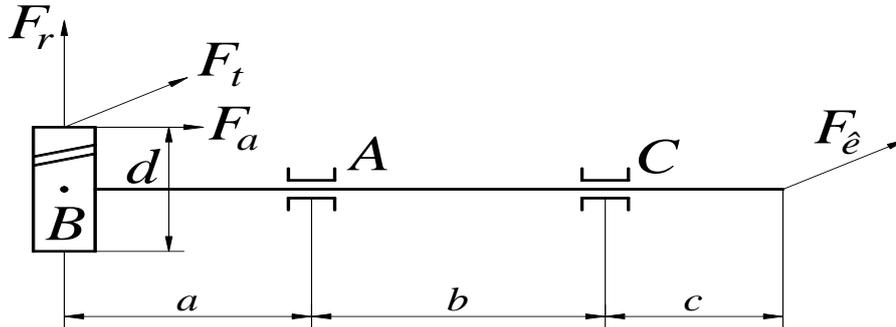
Таблица 14

**Формулы для определения углов  
поворота сечений и прогибов двухопорного вала**



Величина	Действующая сила		
	$F_t$	$F_a$	$F_K$
$\theta_A$	$-F_t \frac{ab(l+b)}{6EJl}$	$-\frac{F_a d}{12EJl} (2l^2 - 6al + 3a^2)$	$-F_K \frac{lc}{6EJ}$
$\theta_B$	$F_t \frac{ab(b+a)}{6EJl}$	$-\frac{F_a d}{12EJl} (2l^2 - 6al + 6a^2)$	$F_K \frac{c}{6EJ} (3a^2 - l^2)$
$\theta_C$	$F_t \frac{ab(l+a)}{6EJl}$	$-\frac{F_a d}{12EJl} (l^2 - 3a^2)$	$F_K \frac{lc}{3EJ}$
$\delta_A$	$-F_t \frac{a^2 b^2}{6EJl}$	$\frac{F_a da}{12EJl} (2l^2 - 6al + 4a^2)$	$\frac{F_K ac}{6EJ} (a^2 - l^2)$

**Формулы для определения углов  
поворота сечений и прогибов вала с двумя консолями**



Величина	Действующая сила		
	$F_t$	$F_a$	$F_K$
$\theta_A$	$\frac{F_t l a}{3 E J}$	$- F_a \frac{l d}{6 E J}$	$-\frac{F_K b c}{6 E J}$
$\theta_B$	$\frac{F_t a}{6 E J} (3 a + 2 l)$	$- F_a \frac{d}{6 E J} (3 a + l)$	$\frac{F_K b c}{6 E J}$
$\theta_C$	$-\frac{F_t a l}{6 E J}$	$\frac{F_a d l}{12 E J}$	$\frac{F_K b c}{3 E J}$
$\delta_A$	$-\frac{F_t a^2}{3 E J} (a + l)$	$\frac{F_a d a}{12 E J} (3 a - 2 l)$	$\frac{F_K a l c}{6 E J}$

Таблица 16

**Рекомендуемые высоты заплечиков и размеры фасок, мм**

<i>d</i>	17÷22	24÷30	32÷38	40÷44	45÷50	52÷58	60÷65	67÷75	80÷85	90÷95
<i>t</i> <sub>цил</sub>	3,0	3,5	3,5	3,5	4,0	4,5	4,6	5,1	5,6	5,6
<i>t</i> <sub>кон</sub>	1,5	1,8	2,0	2,3	2,3	2,5	2,7	2,7	2,7	2,9
<i>r</i>	1,5	2,0	2,5	2,5	3,0	3,0	3,5	3,5	4,0	4,0
<i>f</i>	1,0	1,0	1,2	1,2	1,6	2,0	2,0	2,5	2,5	3,0

Таблица 17

**Размеры *r* и *c* для цилиндрических концов валов**

<i>d</i>	20, 22, 25, 28	32, 36, 40, 45	50, 55, 60, 70	80, 90, 100
<i>r</i>	1,6	2,0	2,5	3,0
<i>c</i>	1,0	1,6	2,0	2,5

Таблица 18

**Размеры фаски**

<i>r</i>	1,6	2,0	2,5	3,0
<i>f</i>	2,0	2,5	3,0	4,0

Таблица 19

**Размеры канавки для выхода шлифовального круга**

<i>d</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>r</i>
Св. 10 до 50	3	0,25	1,0
Св. 50 до 100	5	0,5	1,6
Св. 100	8	0,5	2,0

**Числовые значения параметра шероховатости  $R_a$  для валов**

Вид поверхности	$R_a$ , мкм
Посадочные поверхности валов из стали под подшипники качения класса точности 0 при диаметрах: $d$ или $D$ до 80 мм $d$ или $D$ свыше 80 мм	1,25 2,5
Торцы заплечиков валов для базирования подшипников качения класса точности 0	2,5
Торцы заплечиков валов для базирования зубчатых, червячных колес при отношении длины отверстия ступицы к его диаметру: $l/d < 0,7$ $l/d \geq 0,7$	1,6 3,2
Поверхности валов для соединений с натягом	0,8
Поверхности валов под резиновые манжеты	0,63
Канавки, фаски, радиусы галтелей на валах	6,3
Поверхности шпоночных канавок на валах: рабочие нерабочие	3,2 6,3
Поверхности шлицов на валах – боковая поверхность зуба соединения: неподвижного подвижного – цилиндрические поверхности, центрирующие соединения: неподвижного подвижного	1,6 0,8 0,8 0,4
Рабочие поверхности витков червяков: цилиндрические глобоидные	0,63 1,25
Поверхности выступов зубьев колес, витков червяков	6,3

Таблица 21

**Рекомендации по определению допусков формы и расположения  
поверхностей валов**

Позиция на рис. 13 и 14	Допуск, мм
1	$T_{f/d} \approx 0,5 t$ , где $t$ – допуск размера поверхности
2	$T_{\Theta}$ по пособию [5, табл. 16.5] в зависимости от типа подшипника
3	$T_{\Theta} \approx \frac{G_0}{n}$ для $n > 1000$ об/мин;
4	$T_{\perp}$ на диаметре $d_0$ по пособию [5, табл. 16.8]. Степень точности допуска при базировании подшипников: шариковых – 8, роликовых – 7

Таблица 22

**Допуски соосности по ГОСТ 24643-81**

Интервал размеров, мм	Допуск соосности, мкм, при степени точности допуска				
	5	6	7	8	9
Св. 18 до 30	10	16	25	40	60
30÷50	12	20	30	50	80
50÷120	16	25	40	60	100
120÷250	20	30	50	80	120
250÷400	25	40	60	100	160

**Допуски соосности посадочных поверхностей вала и корпуса  
и допустимые углы взаимного перекоса колец  
подшипника по ГОСТ 3325-85 (в ред. 1988 г.)**

Тип подшипника	$T_{\text{ОВ}}$ , мкм	$T_{\text{ОК}}$ , мкм	$\theta$ , угл. мин
Радиальный шариковый однорядный	4	8	1,6
Радиально-упорный шариковый однорядный	3	6	1,2
Радиальный с короткими цилиндрическими роликами:			
– без модифицированного контакта	1	2	0,4
– с модифицированным контактом	3	6	1,2
Конический роликовый:			
– без модифицированного контакта	1	2	0,4
– с модифицированным контактом	2	4	0,8
Игольчатый роликовый однорядный:			
– без модифицированного контакта	0,5	1,0	0,2
– с модифицированным контактом	2	4	0,8
Радиальные шариковые и роликовые двухрядные сферические	6	12	2,4

**Степени точности допусков соосности посадочных поверхностей  
для колес передач зубчатых (числитель) и червячных (знаменатель)**

Степень кинематической точности передачи	Степень точности допуска соосности при диаметре делительной окружности, мм		
	Св. 50 до 125	Св. 125 до 280	Св. 280 до 560
6	5/6	5/6	6/7
7	6/7	6/7	7/8
8	7/8	7/8	8/9
9	7/8	8/9	8/9

Таблица 25

**Допуски параллельности и перпендикулярности  
по ГОСТ 24643-81**

Интервал размеров, мм	Допуски параллельности и перпендикулярности, мкм, при степени точности допуска					
	5	6	7	8	9	10
Св. 16 до 25	4	6	10	16	25	40
24 – 40	5	6	12	20	30	50
40 – 63	6	10	16	25	40	60
63 – 100	8	12	20	30	50	80
100 – 160	10	16	25	40	60	100
160 – 250	12	20	30	50	80	120
250 – 400	16	25	40	60	100	160

Таблица 26

**Степени точности допуска перпендикулярности торца  
заплечика вала при установке колес**

Тип колес	Степень точности допуска перпендикулярности при степени точности передачи по нормам контакта		
	6	7, 8	9
Зубчатые	5	6	7
Червячные	6	7	8

**Исходные данные для расчета и конструирования валов**

Параметры	Червячная пара		Зубчатая пара		
Силы в зацеплении, Н	$F_{t1}^B = 804$		$F_{t1}^T = 5583$		
	$F_{r1}^B = 863$		$F_{r1}^B = 1860$		
	$F_{a1}^B = 2578$		$F_{a1}^B = 1156$		
Геометрические размеры червяка и зубчатых колес, мм	Червяк	$d_1^B = 64$	Шестерня	$d_1^T = 117$	
		$d_{f1}^B = 54,4$		$d_{f1}^T = 110$	
		$d_{a1}^B = 72$		$d_{a1}^T = 123$	
		$b_1^B = 86$		$b_1^T = 85$	
	Червячное колесо	$d_2^B = 256$	Зубчатое колесо	$d_2^T = 283$	
		$d_{f2}^B = 246,4$		$d_{f2}^T = 276$	
		$d_{a2}^B = 264$		$d_{a2}^T = 289$	
		$b_2^B = 50$		$b_2^T = 80$	
Крутящие моменты, передаваемые валами, Н·м	$T_1=26;$		$T_2=330;$		$T_3=716$

Таблица 28

**Моменты сопротивления сплошных круглых сечений валов**

$d$ , мм	$W_x$ , мм <sup>3</sup>	$W_k$ , мм <sup>3</sup>	$d$ , мм	$W_x$ , мм <sup>3</sup>	$W_k$ , мм <sup>3</sup>
20	789	1571	46	9560	19110
21	909	1818	47	10190	20400
22	1045	2090	48	10860	21700
23	1194	2390	50	12270	24500
24	1357	2710	52	13800	27600
25	1534	3070	55	16330	32700
26	1726	3450	58	19160	38800
28	2160	4310	60	21200	42400
30	2650	5300	62	23400	46800
32	3220	6430	65	27000	53900
34	3860	7720	68	30900	61700
35	4210	8420	70	33700	67300
36	4580	9160	72	36600	73300
38	5390	10770	75	41400	82800
40	6280	12570	78	46600	93200
42	7270	14550	80	50300	100600
44	8360	16730	82	54100	108200
45	8950	17890	85	60300	120600

Таблица 29

**Значения моментов сопротивления  $W_x$  и  $W_k$  сечений вала с пазом для призматической шпонки**

$d$ , мм	$b \times h$ , мм	$W_x$ , мм <sup>3</sup>	$W_k$ , мм <sup>3</sup>	$d$ , мм	$b \times h$ , мм	$W_x$ , мм <sup>3</sup>	$W_k$ , мм <sup>3</sup>
20	6÷6	655	1440	45	14÷9	7800	16740
21		770	1680	48		9620	20500
22		897	1940	50		10916	23695
24	8÷7	1192	2599	53	16÷10	12869	28036
25		1275	2810	55		14510	30800
26		1459	3180	56		15290	33265
28		1854	4090	60	18÷11	18760	40000
30	2320	4970	63	21938		47411	
32	10÷8	2730	5940	67	20÷12	26180	56820
34		3330	7190	70		30200	63800
36		4010	8590	71		31549	68012
38		4775	10366	75		37600	79000

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Степин П.А.** Сопротивление материалов. – СПб.:Лань, 2012. – 320 с.
2. **Жуков В.Г.** Механика. Сопротивление материалов. – СПб.: Лань, 2012.  
<http://www.for-stydenets.ru/biblioteka/soprotivlenie-materialov/spravochniki.html> Сопротивление материалов. Изд. 10-е, Автор: Феодосьев В.И.; Сопротивление материалов 4-е изд. Автор: Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л.
3. **Анурьев В.Н.** Справочник конструктора-машиностроителя. – М.: Машиностроение, 2010.
4. **Глухих В.Н.** Расчет и проектирование валов в редукторах: Метод. указания по курсовому проектированию. – СПб.: ЛТА, 2002.
5. **Дунаев П.Ф., Леликов О.П.** Детали машин. Курсовое проектирование: Учеб. пособие для машиностроительных специальностей учреждений среднего специального образования. – М.: Машиностроение, 2011.
6. **Леликов О.П.** Расчет валов на ЭВМ. – М.: МВТУ, 2009.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ.....	3
1.1. Напряженное состояние в точке.....	3
1.2. Плоское напряженное состояние .....	6
1.2.1. Графическое представление напряженного состояния.Круг Мора.....	11
1.3. Понятие об объёмном напряжённом состоянии.....	13
1.4. Деформированное состояние.....	18
1.5. Закон Гука .....	20
1.6. Потенциальная энергия деформации .....	24
1.7. Теория предельных состояний.....	25
1.8. Частные случаи плоского напряжённого состояния.....	30
2. РАСЧЁТ ВАЛОВ НА СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ .....	36
2.1. Критерии работоспособности валов.....	36
2.2. Материалы валов .....	37
2.3. Эскизное проектирование .....	38
2.3.1. Первый этап эскизного проектирования .....	39
2.3.2. Определение расчетной длины консольных участков вала .....	40
2.3.3. Определение длины участков валов цилиндрического редуктора .....	42
2.3.4. Определение расчетных длин участков червячного вала.....	44
2.4. Радиальная консольная нагрузка .....	46
2.5. Расчёт валов на прочность .....	48
2.5.1. Расчет вала на сопротивление усталости.....	50
2.5.2. Проектный расчет вала .....	53
2.6. Расчёт валов на жёсткость .....	54
2.7. Конструктивные элементы прямых валов.....	57
2.8. Конструирование валов .....	60
2.8.1. Шероховатость поверхностей валов.....	63
2.8.2. Обозначение термической обработки.....	64
2.8.3. Допуски формы и допуски расположения поверхностей .....	65

2.9. Примеры расчёта и конструирования валов	
червячно-цилиндрического редуктора.....	67
2.9.1. Эскизное проектирование редуктора (I этап).....	68
2.9.2. Определение опорных реакций .....	76
2.9.3. Конструирование валов редуктора.....	84
2.9.4. Проверка прочности промежуточного вала.....	88
2.9.5. Построение эпюр моментов для тихоходного	
вала и проверка его прочности .....	92
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	97
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	115

Деменчук Николай Павлович,  
Прилуцкий Алексей Андреевич

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ**

Учебное пособие

*Ответственный редактор*

Т.Г. Смирнова

*Компьютерная верстка*

А.А. Прилуцкий

*Дизайн обложки*

Н.А. Потехина

---

Подписано в печать 29.11.2016. Формат 60x84 1/16  
Усл. печ. л. 6,98. Печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 7,25  
Тираж 100 экз. Заказ № С 31

---

Университет ИТМО. 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49  
Издательско-информационный комплекс  
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9